

ISSN 0005-2310

А Т ВТОМАТИКА И МЕЛЕМЕХАНИКА



6

2023



А ВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

6

И Ю Н Ъ

Москва

2023

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М.,
Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф.,
Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П.,
Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,
Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М.,
Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А.,
Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталеv М.М., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ООО «Тематическая редакция»

© 2023 г. М.И. ГЕРАСЬКИН, д-р экон. наук (innovation@ssau.ru)
(Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева)

ОБЗОР НОВЕЙШИХ ДОСТИЖЕНИЙ В ТЕОРИИ ИГР ОЛИГОПОЛИИ

Рассматривается одна из важнейших проблем теории игр — игра фирм на рынке олигополии. Обзор охватывает классические и современные формулировки теоретико-игровой проблемы выбора оптимальных стратегий игроков, а также новейшие достижения в области методологии решения этой проблемы и ее приложений, включая публикации за последние пять лет.

Ключевые слова: олигополия, агрегативная игра, рефлексия, предположительная вариация.

DOI: 10.31857/S0005231023060016, **EDN:** CRVESO

1. Введение

Теория игр еще не сформировалась как обособленная наука, когда в 1838 г. игровая модель была использована для анализа олигополии [1]. А в середине XX века становление теории игр базировалось на олигополии как одном из первых объектов исследования [2, 3], чему могло быть несколько причин. Во-первых, олигополия — это одна из реально наблюдаемых игр в отличие от многих эфемерных объектов с психологической подоплекой, таких как «дилемма заключенных», в которых выигрыши не измеримы, а оцениваются субъективно. Во-вторых, причиной продуктивности олигополии для развития теории игр является то, что это рынок, на котором обращаются крупные капиталы, и, как следствие, через акционерный капитал затрагиваются интересы множества лиц, что делает выбор оптимальной стратегии в такой игре практически актуальной задачей для общества в целом. В-третьих, это один из немногих игровых сюжетов, предопределенных объективными законами экономики, что является основанием для математического моделирования и анализа.

Обобщение современного опыта решения теоретико-игровых задач олигополии сегодня представляется актуальным, поскольку последний обзор моделей олигополии, подготовленный отечественными учеными, был опубликован в 2009 г. [4], а зарубежными учеными — в 2020 г. [5]. Однако в зарубежных обзорах не упомянуты достижения российских ученых, которые в последние

годы внесли весомый вклад в развитие теории олигополии. Стремясь к наибольшей актуализации, в дальнейшем обзор охватывает публикации последних пяти лет, за исключением базовых концепций, причем будут освещены наиболее выдающиеся, по мнению автора, исследования, результаты которых значимо продвигают вперед теорию и приложения игр олигополии.

Как реальный объект, олигополия представляет собой рынок, на котором относительно малое число фирм продают идентичный товар, конкурируя ценами или объемами предложения (что равнозначно вследствие их связи через убывающую функцию спроса) за выбор аудитории покупателей, число которых несоизмеримо больше числа продавцов. Олигополистическая конкуренция проявляется в том случае, если количество продавцов настолько мало, что изменение объема (цены) предложения каждой фирмы приводит к заметному смещению по общей кривой спроса, что сказывается на результатах (прибыли) всех фирм. Как теоретическая модель, олигополия является игрой, в которой игроки, т.е. фирмы-продавцы, дифференцированные по издержкам, стремятся максимизировать свои выигрыши (полезности), немонотонно зависящие от объемов предложения вследствие синхронного убывания общей для всех игроков цены (агрегата) при неубывающих издержках.

Если определяться в системе координат игровых моделей, то игра олигополии относится, во-первых, к некооперативным играм, во-вторых, к агрегативным играм, в которых выигрыш каждого игрока зависит от действий всех игроков. В-третьих, корпус исследований олигополии делится на две примерно равные части, в одной из которых игра формулируется как неиерархическая, т.е. игроки предполагаются равноправными, а во второй — как иерархическая, в которой есть игрок-лидер. В-четвертых, олигополия относится к играм с полной информацией, однако вследствие асимметрии информированности этот аспект необходимо обсудить более детально.

Как правило, в игре олигополии функции полезности игроков считаются общим знанием. Однако имеет место априорная неосведомленность каждого игрока о том, какое действие он совершит по мнению окружения в ответ на действия последнего. Разумеется, из функции полезности всегда можно вычислить наилучший ответ (функцию реакции), но если игрок считает, что все остальные также дают наилучший ответ, то он вычисляет наилучший ответ на наилучший ответ, и т.д. Следовательно, в функциях реакций игроков всегда есть компонент, характеризующий реагирование окружения, априори неизвестный самому игроку, что приводит к асимметрии информированности. Формально эта асимметрия выражается в бесконечной последовательности предположительных вариаций, т.е. предполагаемых игроком изменений действий других игроков в ответ на его единичное изменение действия.

Классические пути разрешения проблемы асимметрии информированности игроков базируются на выдвижении некоторой гипотезы о поведении окружения. Нередко в современных исследованиях используются следующие

гипотезы: 1) гипотеза А. Курно [1] об игнорировании влияния действий окружения на выбор данного игрока; 2) гипотеза Г. Штакельберга [6] об информированности одного из игроков (лидера) о том, что окружение (ведомые) игнорирует его действия в соответствии с гипотезой Курно¹. На основе этих гипотез предположительные вариации вычисляются однозначно и в процессе исследований полагаются заданными. Тем самым исследователи постулируют, что фактические действия игроков совпадают с предположениями об этих действиях. В результате вектор действий игроков, являющийся решением игры по Нэшу, расценивается как реальное результирующее равновесие, что, безусловно, требует верификации, и эта задача есть неизбежное следствие использования подхода классиков.

Другой путь разрешения проблемы асимметрии информированности базируется на анализе ментальных типов игроков или рефлексивном анализе. Теория рефлексивных игр основана на идеях основоположников этого подхода Д.А. Новикова и А.Г. Чхартишвили [7], а также на теоретических основах рефлексии, определенных В.А. Лефевром [8, 9]. Кратко, главная и наиболее плодотворная идея рефлексивного анализа выражается следующим образом: игроки выдвигают разнообразные предположения о действиях окружения, т.е. играют не с реальными, а с представляемыми (фантомными) соперниками. Поэтому если описать множество всевозможных представлений всех игроков, то можно вычислить полное множество равновесий, которые в этом случае называются информационными равновесиями, т.е. равновесиями при некотором сочетании ментальных типов игроков. Поэтому верификация предположений и, как следствие, оценка реальных ментальных типов игроков, сводится к выбору такого равновесия, которое наиболее близко к реальному состоянию рынка. Следовательно, анализ информационных равновесий является базой для разработки алгоритмов информационного управления, которое, в конечном счете, является глобальной целью создания многообразия теоретико-игровых моделей олигополии.

Завершая описание классификационных признаков игры олигополии, отметим, что статические и динамические модели, относя данную игру к различным классам, скорее являются методами моделирования. Динамические модели описывают процесс конкуренции олигополистов как их многопериодное реагирование на базе наилучших ответов, а в статике моделируется результат этого процесса, основанный на тех же наилучших ответах; в том и в другом случаях наилучший ответ в неявном виде содержит предположительные вариации. Поэтому в дальнейшем описывается базовая модель игры олигополии, для которой анализируются варианты учета реалий рынка как игровой обстановки и рассматриваются динамический и статический методы решения.

¹ В зарубежной литературе игра по Штакельбергу является синонимом иерархической игры. Однако в игре с несколькими лидерами иерархия неоднозначна.

2. Базовая модель

Концепция игровой обстановки недифференцированной олигополии при объемной конкуренции основывается на следующих базовых предположениях.

1. Конкуренция: в игре участвует относительно малое число игроков, не превышающее такого, при котором действия (т.е. объемы выпуска) каждого перестают влиять на полезность всех остальных (т.е. окружения). Игроки предлагают идентичный товар, спрос на который создается потребностью бесконечного количества покупателей, причем функция спроса монотонно убывает.

2. Рациональность: индивидуальные полезности зависят от действий игроков как вогнутые функции (т.е. функции издержек неубывающие), причем каждый выбирает действия, максимизирующие его функцию полезности исходя из доступной ему информации о действиях окружения.

3. Информированность: в момент выбора действий игроки располагают информацией о функциях полезности окружения (т.е. функциях спроса и издержек), о количестве игроков, а также о том, что окружение имеет равный с ними уровень информированности.

4. Время действий: а) в статической игре все выбирают действия одновременно, однократно и независимо; б) в динамической игре каждый выбирает действие многократно и в зависимости от манифестированных ранее действий окружения.

С учетом предположений 1–3 можно записать модель выбора действия игрока следующего вида:

$$(1) \quad \max_{Q_i \geq 0} \Pi_i(Q, Q_i) = P(Q)Q_i - C_i(Q_i), \quad i \in N = \{1, \dots, n\},$$

$$(2) \quad Q = \sum_{i \in N} Q_i,$$

где Q_i , Π_i — действие и функция полезности i -го игрока; Q — агрегат действий; N — множество игроков; n — количество игроков; $P(Q)$ — обратная функция спроса, $P'_Q < 0$; $C_i(Q_i)$ — функция издержек i -го игрока, $C'_{Q_i} \geq 0$.

Формально игра олигополии Γ есть кортеж множества игроков, множества их действий и множества их функций полезности:

$$(3) \quad \Gamma = \langle N, \{Q_i, i \in N\}, \{\Pi_i, i \in N\} \rangle.$$

Необходимое условие существования решения игры (3) как равновесия Нэша обеспечивается вогнутостью функция полезности игроков [10], но доказано [11] и менее жесткое условие, налагаемое только на функции спроса: предельная выручка каждого игрока убывает с ростом действия любого из окружения, т.е.

$$(4) \quad P'_Q + P''_{QQ}Q < 0.$$

При этом равновесие Нэша определяется путем решения системы уравнений реакций следующего типа (при некотором известном векторе предположительных вариаций):

$$(5) \quad \frac{\partial \Pi_i(Q_i^*, \rho_{ij})}{\partial Q_i} = 0, \quad i, j \in N,$$

где $\rho_{ij} = Q'_{jQ_i}$ — предположительная вариация² i -го игрока, т.е. предполагаемое им изменение выпуска j -го игрока в ответ на единичный прирост выпуска i -го игрока; Q_i^* — равновесное значение. В теории олигополии принято рассматривать оптимальную (в зарубежной литературе consistent — совместимая) предположительную вариацию, которая вычислена из уравнения (5) j -го игрока, т.е. соответствует его наилучшему ответу.

Таким образом, вычисление равновесия в игре напрямую зависит от возможности найти предположительные вариации, что, в свою очередь, предопределено особенностями функций $P(Q)$ и $C_i(Q_i)$, которые приводят к разновидностям базовой модели. В дальнейшем, если индекс игрока не имеет значения, опустим его и будем обозначать действие игрока символом $q = Q_i \forall i \in N$, а его полезность символом $\pi = \Pi_i \forall i \in N$.

3. Варианты базовой модели

Моноotonно убывающая обратная функция спроса моделируется с помощью функций, приведенных в табл. 1, а для описания неубывающих функций издержек используются модели, представленные в табл. 2. Условие (4) выполняется для линейной, комбинированной и экспоненциальной функций спроса, а при степенной функции спроса существование равновесия также может быть обеспечено выбором неубывающих функций издержек. Степенная функция издержек при различных значениях показателей степени может быть как выпуклой, так и вогнутой; вогнутая функция издержек соответствует положительному эффекту расширения масштаба, тогда как выпуклая — отрицательному. Для моделирования выпукло-вогнутой функции также может использоваться комбинация логарифмической и квадратичной функций.

Очевидно, что в подавляющем большинстве публикаций исследователи базируются на линейных моделях спроса и издержек, поскольку в этом случае легко вычислить предположительные вариации из функций наилучших ответов (функций реакций), которые представимы в явном виде. Однако при этом уместен вопрос о точности представления нелинейных процессов в форме линейных моделей, который рассматривался в ряде классических исследований [12, 13], из которых следует вывод не в пользу адекватности линейных моделей. В частности, А. Уолтерс обобщил более 30 публикаций, подтверждающих

² В некоторых исследованиях рассматривается ценовая предположительная вариация как предполагаемое изменение цены в ответ на единичный прирост выпуска i -го игрока, поэтому при анализе такого подхода вариация ρ будет именоваться объемной.

Таблица 1. Виды обратной функции спроса³

Вид функции	Формула и параметры функции	Публикации
Линейная	$P(Q) = a - bQ, a > 0, b > 0, a \gg b$	[14–40]
Линейная ФНП	$p_i(Q) = a - \sum_{i \in N} b_i Q_i, a > 0, b_i > 0, a \gg b_i$	[33, 34, 36, 52]
Степенная	$P(Q) = AQ^\alpha, A > 0, \alpha < 0, \alpha < 1$	[27, 41–47]
Комбинированная	$P(Q) = A - Q^\alpha, A > 0, \alpha > 0$	[48]
Экспоненциальная	$P(Q) = Ae^{\alpha Q}, A > 0, \alpha < 0$	[49]

Таблица 2. Виды функции издержек агента

Вид функции	Формула и параметры функции	Публикации
Линейная	$C(q) = B_0 + B_1q, B_0 \geq 0, B_1 > 0$	[15–19, 23, 29–32, 34, 36–39, 41, 42, 44–46]
Степенная	$C(q) = B_0 + B_1q^\beta, B_0 \geq 0, B_1 > 0, \beta \in (0, 2)$	[24, 25, 43]
Квадратичная	$C(q) = B_0 + B_1q + \frac{B_2}{2}q^2, B_0 \geq 0, B_1, B_2 > 0$	[14, 21, 22, 26–28, 34, 35, 40, 50–52]
Логарифмическая	$C(q) = \ln(B_0 + B_1q), B_0 \geq 1, B_1 > 0$	[27]

выпукло-вогнутый характер функций издержек, П. Гхемават проанализировал 97 исследований, в которых доказано наличие эффекта обучения, т.е. вогнутости кривых издержек.

Также разновидностью базовой модели является дифференцированная олигополия, в которой игроки предполагаются неидентичными по продуктам, но продукты являются субститутами. В этом случае для различных игроков используют линейные функции спроса с различными коэффициентами замещения b_i , вследствие чего цена спроса i -го игрока является функцией нескольких переменных (ФНП), т.е. $p_i(Q_1, \dots, Q_n)$. Однако с точки зрения экономической теории такая модель относится не к олигополии, а к монополистической конкуренции, поэтому в дальнейшем будут рассмотрены некоторые исследования таких моделей в контексте присущих играм олигополии методов решения.

4. Рефлексивные игры олигополии

В современной теории игр олигополии определились два мейнстрима: 1) анализ процесса установления равновесия на основе взаимодействия игроков (динамическая игра); 2) исследование состояния равновесия (статическая игра). Публикации российских ученых последних лет активно развивают оба

³ Поскольку в большинстве исследований объемной олигополии рассматривается обратная функция спроса, в дальнейшем будем называть ее кратко «функция спроса». Если речь будет идти о функции $Q(P)$, то будем называть ее «прямая функция спроса».

эти направления, что свидетельствует о лидирующем положении российской научной школы в разработке этой актуальной проблемы теории игр.

4.1. Динамические рефлексивные игры

Фундаментальная постановка рефлексивной игры является динамической, поскольку описывает итерационный процесс приближения игроков к равновесию, и в исследованиях рассматривается в двух направлениях.

Первое направление формулирует динамическую игру на основе **конечно-разностных уравнений** реакции. При этом наилучший ответ игрока на действия окружения задается рекуррентной функцией с фрактальным параметром⁴, корректирующим шаг моделирования процесса установления равновесия. Рефлексия игрока в этом случае заложена в функции наилучшего ответа, который выводится из условий оптимума функций полезности игроков (5). Если выразить решение задачи (1) для каждого агента в виде функции реакции (или наилучшего ответа), которую обозначим символом $r_i(Q_{-i})$, то обобщенно динамика рефлексивной игры может быть представлена в виде [53]:

$$(6) \quad Q_i(t) = Q_i(t-1) + \gamma_i^t[r_i(Q_{-i}(t-1)) - Q_i(t-1)], \quad i \in N, \quad t = 1, 2, \dots, \tau,$$

где $\gamma_i^t \in [0, 1]$ — размер шага рефлексии, символом « $-i$ » обозначено окружение i -го игрока.

Содержательно процесс (6) при $\gamma_i^t = 1$ выражает логичный переход от стратегии в момент времени t к стратегии в момент $t + 1$ по наилучшему ответу.

Исследования в рамках этого направления, главным образом, нацелены на установление условий сходимости итерационного процесса (6) к игровому равновесию, которое оценивается по величине невязки ε на смежных шагах $\varepsilon_i^t = |Q_i(t) - Q_i(t-1)|$ или на последнем шаге $\varepsilon_i^\tau = |Q_i(\tau) - Q_i^*|$, где τ — количество итераций процесса.

В частности, в моделях олигополии с линейными функциями спроса и издержек с учетом лидерства по Штакельбергу одного или нескольких игроков доказана сходимость процесса (6) при соответствующем выборе шага рефлексии [15, 17]. Кроме того, Г.И. Алгазин и Д.Г. Алгазина [16] в качестве признака сходимости процесса $\varepsilon^{t+1} = \mathbf{B}^t \varepsilon^t$ установили ограниченность единиц нормы матрицы динамики невязок $\|\mathbf{B}^t\| < 1$, составленной из комбинации шагов рефлексии игроков, где $\mathbf{B}^t = \{b_{ij} = 1 - \gamma_i^{t-1}, b_{ij} = -\frac{\gamma_j^{t-1}}{2} \forall i \neq j \in N\}$. Аналогия этой матрицы с матричным уравнением вычисления предположительных вариаций $\mathbf{B}^r \rho^r = \mathbf{I}$, где $\rho^r = \{\rho_{ij} \forall i, j \in N\}$ — матрица вариаций на ранге рефлексии r , $\mathbf{B}^r = \{b_{ij} = -2 - S_i^{r-1}, b_{ij} = -1 \forall i \neq j \in N\}$, $S_i^r = \sum_{j \in N \setminus i} \rho_{ij}^r$,

⁴ Параметр корректировки шага динамического процесса является дробным в диапазоне $[0, 1]$ или фрактальным (от англ. fractal), в чем проявляется аналогия конечно-разностного подхода с фрактальными дифференциальными уравнениями, рассмотренными ниже.

в рассматриваемой далее статической рефлексии [54] подтверждает сродство динамического и статического процессов.

Рассматривая процесс (6) в случае идентичных по функциям полезности игроков при $\gamma^t = 1$, т.е. при итерациях по наилучшему ответу $Q_i(t) = r_i(Q_{-i}(t-1))$, Р. Корнес и др. [42] установили следующее условие сходимости процесса: $\left| \frac{\pi''_{qq} + \pi''_{qQ}}{\pi''_{qQ} + \pi''_{QQ}} \right|$, где $q = \frac{Q}{n}$.

В случае триполии Ю. Джабарова и Б. Златанов [21] исследовали процесс (6) также при $\gamma_i^t = 1$ и рассмотрели функции реакции, являющиеся сжимающими отображениями (т.е. при выполнении неравенства треугольника $\sum_{i=1,2,3} \varepsilon_i^t \leq \sum_{i=1,2,3} k_i \varepsilon_i^t$, $\sum_{i=1,2,3} k_{ij} < 1$), доказав ограничение на невязку $\max_{i=1,2,3} \varepsilon_i^T \leq \frac{k}{1-k} \sum_{i=1,2,3} |Q_i(\tau) - Q_i(\tau-1)|$, где $k = \max_{j=1,2,3} \sum_{i=1,2,3} k_{ij}$.

Очевидно, что главная проблема динамического моделирования с помощью конечно-разностных уравнений реакции состоит в необходимости явного выражения функции наилучшего ответа, что возможно только для линейных функций спроса и издержек. Для анализа игры, в которой хотя бы одна из этих функций нелинейная, исследователи [33, 34, 45] применяли процесс с использованием градиента функции полезности (1)

$$(6a) \quad Q_i(t) = Q_i(t-1) + \gamma_i^t Q_i(t-1) \Pi'_{iQ_i}(t-1),$$

не столь логичный, как наилучший ответ в процессе (6), но позволяющий вычислить равновесия в аналитической форме. Применение процесса (6a) базируется на том, что с приближением к равновесию $\lim_{Q_i \rightarrow Q_i^*} \Pi'_{iQ_i} = 0$, следовательно $\lim_{Q_i \rightarrow Q_i^*} \varepsilon_i^t = 0$.

В частности, в игре дуополии Ю. Пенг, Ю. Ксяо и др. [33, 34, 45] варьировали вид процесса (6a) с не зависящим от времени шагом γ_i . Рассматривая процесс $Q_i(t) = Q_i(t-1) + \gamma_i \Pi'_{iQ_i}(t-1)$, авторы в случае линейной функции спроса показали в явном виде два равновесия [33], одно из которых имеет нулевой компонент, а в случае степенной функции спроса [45] доказали условие существования одного равновесия, при нарушении которого процесс приобретает хаотический характер. Анализ дифференцированной олигополии для процесса $Q_i(t) = Q_i(t-1) + \gamma_i Q_i(t-1) \Pi'_{iQ_i}(t-1)$ привел к четырем равновесиям [34], три из которых имеют нулевые компоненты. Во всех случаях численные эксперименты показали интервалы изменения шага γ_i , в которых этот процесс стабилен, а за пределами этих интервалов появляются бифуркации, которые выражаются в бесконечном множестве равновесий.

Второе направление рассматривает динамическую игру на основе дифференциальных уравнений. В этом случае функция полезности (1) интегрирует выигрыши игроков за интервал T , определяющий длительность игры, с учетом ставки дисконтирования δ , т.е.

$$(7) \quad J_i = \int_0^T e^{-\delta t} \Pi_i(Q, Q_i, u_i, t) dt,$$

а процесс изменения функций полезности $\Pi_i(t)$ задается дифференциальными уравнениями динамики либо действий [39], либо равновесной цены [52]:

$$(8) \quad \dot{Q}_i = f(P(t), Q_i(t), u_i(t)),$$

$$(9) \quad \dot{P} = f(P(t), u_i(t)).$$

Введение в модель (7) параметров управления u_i является важным преимуществом дифференциального подхода, поскольку позволяет находить оптимальное управление процессами (8) или (9).

Используя уравнение типа (8), Н.И. Айзенберг и др. [14] в олигополии с линейной функцией спроса и квадратичными функциями издержек моделировали процесс стабилизации равновесия, которое по результатам численных экспериментов устанавливалось начиная с $t = 5$, при двух вариантах регулирования. Во-первых, в качестве параметров управления рассматривалось отклонение предельных издержек игроков от цены $u_i = P(t) - C'_{iQ_i}(t)$, т.е. процесс задавался линейным дифференциальным уравнением $\dot{Q}_i = Q_i(t) \times (P(t) - C'_{iQ_i}(t))$. Во-вторых, исследовалось управление отклонением предельных издержек от предельной выручки, т.е. $u_i = (P(t)Q_i(t))'_{Q_i} - C'_{iQ_i}(t)$, когда процесс был формализован уравнением $\dot{Q}_i = Q_i(t)((P(t)Q_i(t))'_{Q_i} - C'_{iQ_i}(t))$.

Также на базе модели (8) Г.А. Угольников и А.Б. Усов [39] рассматривали в качестве параметров управления предельные издержки $u_i = B_{1i}$ линейных функций издержек игроков и использовали линейные дифференциальные уравнения (8) в виде $\dot{Q}_i = a_i u_i(t) - m_i Q_i(t)$, где a_i, m_i — константы. В результате аналитически найдено кусочно-постоянное оптимальное управление процессом (8), и для различных вариантов числа переключения управления получены формулы равновесий Нэша в явном виде, а равновесия Штакельберга моделировались в рамках численного эксперимента.

С другой стороны, М. Рауфиния и др. [52] анализировали такие параметры управления, как рекламные действия игроков, для квадратичных функций издержек вида $C(Q_i) = B_0 + B_1 Q_i + \frac{B_2}{2} Q_i^2 + \frac{B_3}{2} u_i^2$, а для описания динамики применили линейное дифференциальное уравнение (9) в виде $\dot{P} = a - \sum_{i \in N} b_i Q_i(t) + \sum_{i \in N} u_i(t) - P(t)$. Благодаря выбранной форме дифференциальных уравнений авторы установили, что оптимальное управление является константой, и существует единственное равновесие Нэша.

Нетривиальная разновидность динамической игры сформулирована с помощью фрактальных дифференциальных уравнений, на базе которых А. Аль-Хедхаири [18] скомбинировал процесс (6) по градиенту функции полезности (1) и процесс (8) в следующей форме:

$$(10) \quad \frac{d^\varphi Q_i}{dt^\varphi} = \gamma_i Q_i(t) \Pi'_{iQ_i}(t),$$

где φ — порядок фрактальной (дробной) производной, $\varphi \in (0, 1]$. В результате даже для простейшей игры дуополии с линейными функциями спроса и из-

держек установлено *четыре* равновесия (как и в конечно-разностной модели [34]), а численное моделирование продемонстрировало бифуркации.

Несмотря на то что динамическая модель (7)–(9) не является в полном смысле рефлексивной, но по существу процессы (8), (9) являются непрерывным аналогом процесса (6). Тем не менее необходимо учитывать важные отличия этих подходов. Сравнивая конечно-разностный и дифференциальный подходы к моделированию динамики игры олигополии, можно констатировать, что в первом из них процесс установления равновесия базируется на эндогенной, т.е. выведенной из функций полезности игроков, функции реакции. В рамках второго подхода характеристики динамики задаются экзогенно, т.е. не могут быть выведены из базовой модели (1), а требуют дополнительных условий типа (8), (9). Поэтому главная трудность дифференциального подхода заключается в адекватном реальности подборе коэффициентов дифференциальных уравнений динамики, обеспечивающем соответствие рефлексивному процессу. Кроме того, если сфера применимости конечно-разностного подхода ограничена случаем линейных функций спроса и издержек, то применение дифференциального подхода лимитировано использованием линейных дифференциальных уравнений динамического процесса.

4.2. Статические рефлексивные игры

В отличие от динамической игры, в статической постановке предполагается, что игроки совершают действия одновременно и независимо, вследствие чего непосредственно переходят к равновесию, так сказать, за один шаг, минуя итерационный процесс. Однако при этом игроки также базируются на предположениях о действиях окружения, поэтому статические игры олигополии на современном этапе развиваются преимущественно в русле рефлексивных игр, т.е. динамика процесса действий переносится в мыслительный процесс игроков. Формализация этого процесса осуществляется через итерации предположений, приводящих к следующим характеристикам игроков: 1) ведомый, не выдвигающий предположений о стратегиях окружения, вследствие чего его предположительная вариация равна нулю; 2) лидер по Штакельбергу (первого уровня), предполагающий, что его окружают ведомые; 3) лидер по Штакельбергу второго уровня (или более высоких уровней), предполагающий, что его окружают лидеры первого уровня (или иных низших уровней). Поэтому *рефлексией* [7] будем называть выполняемую η_r -м игроком, находящемся на r -м шаге мыслительного процесса, операцию вычисления вариации $\rho_{\eta_r, j}^r$ из системы (5) в предположении о том, что все остальные игроки пребывают на $(r - 1)$ -м шаге мыслительного процесса, их вариации равны $\rho_{ij}^{r-1} \forall i \in N \setminus \eta_r, j \in N \setminus i$; соответственно, индекс r игрока, выполнившего эту операцию, есть *ранг рефлексии*. Следовательно, в структуру игры (3) вводится вектор рангов игроков $\{r_i, i \in N\}$, т.е. она трансформируется в игру с представляемыми (*фантомными*) игроками окружения: $\Gamma = \langle N, \{Q_i, i \in N\}, \{\Pi_i, i \in N\}, \{r_i, i \in N\} \rangle$. Поэтому решением статической рефлексивной игры является не реальное, а *информационное равновесие* —

вектор действий реального и фантомных (существующих во мнении реального) игроков, при котором игрок максимизирует полезность исходя из своей информированности об окружении, т.е. *если бы* окружение выбирало те действия, которые представляет этот игрок. Решения всех возможных игр с фантомами образуют набор информационных равновесий, используемый для последующего сравнения с параметрами реальных рынков с целью оценки рангов рефлексии реальных игроков.

В исследованиях [22, 24, 25, 27, 38, 40, 43] статических рефлексивных игр система (5) обычно представляется в следующем виде:

$$(11) \quad P(Q) + (1 + S_i^r)Q_i P'_Q - C_i Q_i = 0, \quad i \in N, \quad S_i^r = \sum_{j \in N \setminus i} \rho_{ij}^r,$$

где S_i^r — сумма предположительных вариаций i -го игрока на r -м ранге рефлексии.

Главный вектор современных исследований статических игр направлен на сравнительный анализ равновесий в игре с ведомыми и лидерами по Штакельбергу при тех или иных видах функций спроса и издержек.

Начиная со второго аспекта, анализ вариантов функций спроса и издержек дал на сегодня следующие результаты. Модели с линейной функцией спроса и выпуклой, в частности полиномиальной (квадратичной) функцией издержек [22, 27, 40], продемонстрировали продуктивность, поскольку приводят к вогнутой унимодальной функции полезности игрока, гарантируя единственность равновесия; для этих моделей доказана монотонность равновесия по предположениям игроков [22]. Модели с линейной функцией спроса и выпукло-вогнутой (степенной) функцией издержек [24, 25, 43] более сложны для анализа, поскольку в случае вогнутой функции издержек возможна множественность равновесий. Такие ситуации на сегодня изучены достаточно детально: установлены необходимые и достаточные условия равновесия Нэша при наличии лидеров первого и второго уровней [43], выведены формулы приближенного вычисления предположительных вариаций на произвольном ранге рефлексии и для произвольного числа игроков [24], намечены пути подхода к приближенному вычислению равновесий в явном виде [25]. Наиболее сложными представляются модели, в которых нелинейными являются как функция спроса, так и функции издержек; в этом случае определены только необходимые условия равновесия Нэша для нескольких лидеров первого уровня [43].

Характеризуя аспект анализа лидерства, отметим исследования углубления рефлексии и увеличения числа рефлексизирующих игроков, приводящих к появлению в игре множества лидеров по Штакельбергу, а также лидеров более высоких уровней.

Рассматривая взаимодействие множества ведомых игроков и множества лидеров по Штакельбергу первого уровня, Л. Жюльен [27] решил внутри каждого из множеств две одновременных неиерархических игры Курно, встроенных в иерархическую игру Штакельберга. Ограничив тренды

издержек игроков отрицательным эффектом масштаба, т.е. при выпуклых функциях издержек, Л. Жюльен установил диапазон возможных значений суммы предположительных вариаций на первом ранге $S_i^1 \in (-1, 0]$, а также доказал, что если существует активное (т.е. при $Q_i > 0 \ \forall i \in N$) равновесие по Штакельбергу, то оно единственное. Интересный анализ игры в случае двух ведомых (обозначены символом «F») и двух лидеров («L») при конкретных функциях спроса и издержек показал, что для функций $P(Q) = 1 - Q$, $C_F(q) = 0,5q^2$, $C_L(q) = \ln(1 + 0,5q)$, т.е. при положительном эффекте масштаба лидеров, равновесие существует и единственно, как и для функций $P(Q) = (Q + 1)^\alpha$, $\alpha < -2$, $C_F(q) = C_L(q) = 0$; для функций $P(Q) = 1 - Q$, $C_L(q) = 0$, $C_F(q) = 1 + B_1q - 0,5q^2$, когда издержки убывают при $q > B_1$, равновесие не существует; для функций $P(Q) = 1 - Q$, $C_F(q) = 0,5q^2$, $C_L(q) = \frac{1}{16} \ln(\frac{1}{8} + 0,5q)$ также при положительном эффекте масштаба лидеров, но когда предельные издержки лидеров убывают быстрее, чем снижается цена, имеется два равновесия.

В рамках рефлексивного анализа проблема вычисления предположительных вариаций становится ключевой, поскольку их необходимо определять не для одного-двух видов предположений, как в классическом подходе, а для бесконечного множества разнообразных ментальных типов. При этом сложности возникают в наиболее приближенном к реальности случае нелинейных (выпуклых или вогнутых) функций издержек, когда для нахождения этих вариаций необходимо решать систему нелинейных уравнений. В последнее время достигнуты некоторые успехи в разработке приближенных методов вычисления предположительных вариаций [24], но полностью эта задача не решена, поскольку для этого требуется представление в явном виде функций наилучших ответов игроков, что при нелинейных функциях издержек принципиально невозможно.

В исследованиях углубленной рефлексии, приводящей к многоуровневому лидерству, М.И. Гераськин [25], анализируя модель с линейной функцией спроса и выпукло-вогнутыми функциями издержек, вывел следующую рекуррентную формулу вычисления суммы предположительных вариаций на произвольном ранге рефлексии:

$$(12) \quad S_i^r = \left(\frac{1}{\sum_{j \in N \setminus i} \frac{1}{u_j - S_j^{(r-1)} + 1}} - 1 \right)^{-1},$$

$$u_i = -1 + \frac{P'_{Q_i} + (1 + S_i^{r-1})Q_i P''_{Q_i} - C'''_{iQ_i Q_i}}{|P'_Q|}.$$

⁵ В [25] эта формула имеет вид $u_i = -2 - \frac{C'''_{iQ_i Q_i}}{b}$, т.к. выведена при линейной функции спроса, для которой $P'_Q = P'_{Q_i} = -b$, $P''_{Q_i} = 0$. Кроме того, формула (12) представлена для независимых от действий игроков предположительных вариаций, т.е. при $\rho'_{ijQ_i} = 0$, а в [25] описан более общий случай $\rho'_{ijQ_i} \neq 0$.

Анализ (12) показал, что при отрицательном эффекте масштаба величина S'_i отрицательна и ограничена по модулю единицей (что совпадает с выводами Л. Жюльена [27]), т.е. игрок предполагает уменьшение действий окружения в ответ на рост его действия. При положительном эффекте эта величина может быть положительной и неограниченной, подразумевая, что оптимальным для окружения может оказаться увеличивать действия в ответ на рост действия игрока.

Неординарную трактовку предположительной *ценовой вариации* P'_{Q_i} как предполагаемого изменения цены в ответ на единичный прирост выпуска i -го игрока⁶ предложили В.А. Булавский и В.В. Калашников [50, 51]. Поскольку они рассматривали отрицательный эффект масштаба, когда эта вариация отрицательна, то определили вариацию по модулю как $v_i = -P'_{Q_i}$. При этом уравнения (11) упрощаются:

$$(13) \quad P(Q) + Q_i P'_{Q_i} - C'_{iQ_i} = 0, \quad i \in N.$$

В результате для случая прямой функции спроса вида $Q(P) = G(P) + D$, $G'_p \leq 0$, $D = \text{const} > 0$ (в [51] проанализирована функция спроса с разрывом первого рода) и при выпуклых функциях издержек игроков, т.е. при $C'_{iQ_i} > 0$, $C''_{iQ_i Q_i} > 0$ (в [50] рассмотрены квадратичные функции издержек), авторы для не зависящих от действий игроков предположительных вариаций доказали существование и единственность равновесия, а также следующее условие для ценовых вариаций:

$$(14) \quad v_i = \frac{1}{\sum_{j \in N \setminus i} \frac{1}{\Theta'_{jQ_j}} - G'_p}, \quad i \in N,$$

где $\Theta_i = -Q_i P'_{Q_i} + C'_{iQ_i}$ является правой частью преобразованного уравнения (13), т.е. $P(Q) = \Theta_i$. Следовательно, в (14) $\Theta'_{jQ_j} = P'_{Q_j} = -v_j$, т.е. (14) (в отличие от (12)) является не формулой вычисления ценовых вариаций, а системой уравнений, из которой они могут быть найдены, а поскольку эта система аналитически не разрешима, то проблема вычисления предположительных вариаций остается.

Очевидно, существует взаимосвязь между объемной вариацией ρ_{ij} в (11) и ценовой вариацией v_i в (13). Поскольку $Q_j = Q - \sum_{k \neq j} Q_k$, то $\rho_{ij} = Q'_{jQ_i} = Q'_{Q_i} - \sum_{k \neq i, j} \rho_{ik} - 1$, значит, $-v_i = P'_{Q_i} = P'_Q Q'_{Q_i} = P'_Q \left(\rho_{ij} + \sum_{k \neq i, j} \rho_{ik} + 1 \right) = P'_Q (S_i + 1)$, поэтому $v_i = -P'_Q (S_i + 1)$.

⁶ Этот подход близок к концепции инклюзивного наилучшего ответа в агрегативных играх [5], который представляет собой оптимальную реакцию игрока на суммарное действие всех игроков (включая данного), т.е. $\tilde{r}_i(Q)$, в отличие от наилучшего ответа на действия окружения $r_i(Q_{-i})$.

Преимущество применения ценовых вариаций в игре олигополии состоит в том, что анализ базируется на агрегированной рефлексии всех игроков окружения, поэтому упрощается процедура верификации этих вариаций: цена является общим знанием в реальной игре, чего нельзя утверждать относительно действий игроков. С другой стороны, это преимущество порождает проблему анализа дифференцированной рефлексии, так как ценовая вариация нивелирует различия предположений i -го игрока о стратегиях j -го и k -го игроков.

Нередко в зарубежной прессе встречались статьи, в которых проводилось сравнение моделей Курно и лидерства по Штакельбергу (Stackelberg versus Cournot или SvsC). В одной из последних Я. Зухар и М. Зухарова [38] сравнили эти равновесия с точки зрения общественного блага и суммарной прибыли и указали диапазоны соотношения предельных издержек игроков, в которых одно из них является предпочтительным. Однако сопоставление этих равновесий не имеет практического значения, поскольку игроки не могут выбрать одну из этих моделей, так как обстановка игры задана априори.

С другой стороны, схема SvsC может быть продуктивна, поскольку анализируя различие моделей Курно и Штакельберга, Э. Кумбул [20] рассмотрел в случае олигополии при произвольном n интересный вариант информационной рефлексии относительно неизвестного игрокам случайного параметра θ линейной функции спроса $P(Q) = a + \theta - bQ$. При этом каждый игрок учитывает в своей функции полезности параметр θ в виде сигнала s_i (через выбор которого формализована рефлексия), определенного как сумма θ и белого шума, причем дисперсии распределения θ и белого шума введены экзогенно. В результате Э. Кумбул показал, что суммарное действие игроков ниже, а равновесная цена и суммарная прибыль выше в равновесии Штакельберга, чем в равновесии Курно, что противоположно классическим решениям этих игр при полной информированности [55].

Вместе с тем неординарное сравнение некооперативной игры в рамках моделей Курно и лидерства по Штакельбергу с кооперативным решением на основе вектора Шепли при различных характеристических функциях, проведенное А.В. Королевым и Г.А. Угольницким [56] для случая трех игроков при линейных функциях спроса и издержек, привело к соответствующему классическому [55] упорядочению игровых ситуаций: наибольший суммарный выигрыш обеспечивает кооперация, меньший — некооперативная модель Курно, а наименьший — иерархия с лидерством по Штакельбергу.

В целом камнем преткновения в анализе статических рефлексивных игр является та же проблема, что и в динамических играх: стремление к более реалистичным выпукло-вогнутым моделям издержек ограничивается возможностью вычисления наилучших ответов игроков в явном виде из системы нелинейных уравнений.

5. Приложения игровых моделей олигополии

5.1. Приложения к реальным рынкам

Теоретико-игровая проблема олигополии исторически связана с проблемой анализа специфики рынков, на которых прибыль каждой фирмы зависит от действий всех фирм, т.е. рынков, на которых действует относительно небольшое число крупных фирм.

Телекоммуникационный рынок стал актуальной платформой апробации теоретико-игровых моделей олигополии, поскольку, во-первых, продемонстрировал самый быстрый рост среди всех рынков за последние два десятилетия [57]; во-вторых, является типичной олигополией, так как в большинстве стран на этом рынке представлены не более трех доминирующих фирм [58]; в-третьих, привлекает внимание исследователей своей социальной значимостью, поскольку затрагивает интересы всего общества. Анализ олигополии российского рынка телекоммуникаций [43] продемонстрировал адекватность линейной функции спроса и выпукло-вогнутых функций издержек игроков, а также подтвердил распространенность ведомого ментального типа при статической рефлексии.

Исследуя рынок электроэнергии, Т. Йо и др. [35] в случае квадратичных функций издержек сравнили три игровых сценария, причем в каждом последующем равновесная цена формируется ниже, чем в предыдущем: 1) игра поставщиков энергии как ведомых с экзогенной линейной функцией спроса; 2) две игры, в одной из которых потребители энергии формируют эндогенную линейную функцию спроса, после чего разыгрывается игра поставщиков, в результате чего образуется игра Штакельберга; 3) также две игры, как во втором случае, но в функцию полезности потребителей введена потоварная субсидия, приводящая к еще большему сдвигу кривой спроса вниз.

Анализируя рынок древесины, Б. Каниески да Силва и др. [44] в случае степенной функции спроса и издержек, не зависящих от действий игроков, сопоставили равновесия дуополии в случаях картеля, конкуренции Курно и игры с лидерством по Штакельбергу при ограничениях на мощность. Игра моделирует специфику рынка древесины: объем предложения лесозаготовителя характеризуется вырубкой и ограничен объемом насаждений, а издержки обусловлены необходимостью восстановления угодий.

Рассматривая банковский рынок, объем спроса которого по мнению Кс. Жу и др. [47] зависит не только от цены (процентной ставки), но и от ВВП (GDP), авторы использовали степенную функцию спроса (заданную в нетривиальной форме $\log Q = e_0 + e \log P + e_{GDP} \log GDP$, где e_0, e, e_{GDP} — константы, e — коэффициент эластичности спроса по цене) и линейные функции издержек. Авторы вычислили фактические оценки предположительных вариаций, аппроксимировав их линейными регрессиями $\rho_{ij} \frac{Q_i}{Q_j} = \beta_j + \gamma_j \frac{Q_i}{Q_j}$, в которых β_j, γ_j — коэффициенты регрессий, определяемые по трендам реальных действий игроков за 2007–2016 гг., которые предполагаются равными равно-

весиям в игре. Проанализировав два типа игроков — лидеров, к которым отнесены пять крупнейших банков КНР, и ведомых, которым соответствуют мелкие банки — авторы эмпирически показали, что предположительные вариации лидеров относительно других лидеров положительны, а вариации лидеров относительно ведомых отрицательны, тогда как ведомые продемонстрировали нулевые вариации.

5.2. Приложения к оригинальным проблемам

Модель олигополии настолько плодотворна, что нередко исследователи использовали ее как базовую схему, известное решение которой позволяет решать смежные проблемы анализа экономического поведения, как правило, относящиеся к сфере микроэкономики.

Проблема анализа слияния фирм, первоначально конкурирующих как ведомые игроки, приводящего к появлению лидера по Штакельбергу, рассмотрена У. Феррарезе [23] применительно к ситуации с линейными функциями спроса и издержек. Автор доказал, что слияние фирм в одну максимизирует прибыль лидера независимо от числа участников коалиции, тогда как образование нескольких лидирующих коалиций рационально, если число их участников не превышает некоторого предела.

С другой стороны, Р. Фаули-Оллер [48] исследовал проблему дивизионализации, т.е. разделения асимметричных по издержкам фирм дуополии на филиалы, конкурирующие как ведомые игроки, в случае линейных функций издержек. Сравнив одновременный выбор игроками числа дивизионов в случае комбинированной функции спроса с последовательным выбором при иерархии Штакельберга в случае линейной функции спроса, автор пришел к выводу, что цена равновесия выше, когда дивизионализация протекает последовательно.

Нередко в зарубежных исследованиях анализируется смешанная (частно-государственная) олигополия, которую рассматривали М. Лин и Т. Мацумура [28] в контексте оптимальности приватизации, а также Дж. Харагучи и Т. Мацумура [26] в рамках проблемы оптимальности входа. Оптимизируя по критерию общественного благосостояния, равного $W = \int_0^Q P(Q)dQ - P(Q)Q + \sum_{i \in N} \Pi_i$, степень приватизации [28], т.е. долю частных фирм в олигополии, авторы доказали, что если государственная фирма является ведомым, а частная — лидером по Штакельбергу, то в случае линейных функций издержек оптимальна нулевая степень приватизации при любой функции спроса, соответствующей $P'_Q < 0 \wedge P''_{QQ} \leq 0$, а при квадратичных функциях издержек и линейной функции спроса оптимальная степень приватизации растет с увеличением числа игроков. Исследуя появление новой частной фирмы в смешанной олигополии, Дж. Харагучи и Т. Мацумура [26] в случае линейной функции спроса и квадратичных функций издержек показали, что при экзогенно заданной степени приватизации прибыль частной фирмы уменьшается с ро-

стом числа фирм. С другой стороны, если степень приватизации вычисляется эндогенно из условия нулевой прибыли при входе новой фирмы $\Pi_i(n) = F$, (где F — инвестиции входного барьера), то может существовать от одного до трех равновесий, при которых это условие выполняется.

А. Муерджи и Ч. Цзэн [30] также анализировали проблему входа новой фирмы, но в игре билатеральной олигополии, в которой олигополистеритейлеры (обозначены символом « d ») взаимодействуют с олигополистами-поставщиками (символ « u »⁷), причем новый ритейлер может нести невозвратные инвестиции. В случае линейных функций спроса и издержек авторы доказали, что условие свободного входа, т.е. неподвижной точки $\Pi_i(\theta F) = \theta F$ (где θ — доля невозвратных инвестиций) соответствует нулевой прибыли новой фирмы при $\theta = 0$, но обеспечивает положительную прибыль при $\theta > 0$. Кроме того, решая проблему торга продавцов и поставщиков на базе арбитража Нэша, т.е. по критерию $\max_{\theta \in [0,1]} \{\Pi_{ui}^\alpha (\Pi_{di} + \theta F)^{1-\alpha}\}$, авторы установили, что вход нового ритейлера повышает общественное благосостояние при $\theta = 1$, если торговая сила поставщиков α больше эластичности выпуска фирмы по количеству фирм, а при $\theta = 0$ снижает благосостояние.

К проблеме входа примыкает проблема внедрения новой технологии, анализируя которую Я. Чжанг [36] для дифференцированной олигополии с линейной ФНП и линейными функциями издержек сравнивал две технологии, одна из которых обеспечивает детерминированное снижение предельных издержек Δ , а в результате внедрения другой это снижение является случайной величиной, математическое ожидание которой равно Δ и дисперсия постоянна. Если первую технологию выбирают консервативные игроки, а вторую — склонные к риску, то, по выводам автора, равновесное число склонных к риску игроков растет с увеличением коэффициентов замещения b_i в функции спроса, и таких игроков больше (в дуополии — два), чем консервативных.

В контексте так называемой «зеленой» экономики максимизация общественного благосостояния трактуется более широко с учетом отрицательных экстерналий, в частности, анализируется экологическое воздействие фирм на окружающую среду [59–61]. Сформулировав ограничение экологической нагрузки, пропорциональной суммарному действию игроков, Г.А. Угольниковский и др. показали как для статической игры, так и для дифференциальной динамической игры, что наименьший экологический ущерб приносит кооперация, а наибольший — лидерство по Штакельбергу, что обусловлено соответствующим соотношением агрегатов действий в этих играх [55].

Неординарную проблему олигополии в случае продажи товарных наборов исследовал Дж. Чжоу [37], предполагая известной функцию совместной вероятности полезностей U_i двух товаров, которые продаются в наборе с дисконтом по сравнению с суммой цен по отдельности, в результате чего определил равновесное соотношение цен товаров и доказал, что отрицательная

⁷ В англоязычной литературе при т.н. вертикальном взаимодействии ритейлера называют «downstream firm», а поставщика «upstream firm».

корреляция полезностей товаров способствует их комплектации. Развивая эту проблему также при линейной прямой функции спроса $Q_i = U_i + a - P_i$ (в [37] $a = 0$) и нулевых издержках в случае двухпродуктовой олигополии асимметричных игроков, состоящей из одной доминирующей по качеству товаров фирмы и множества симметричных фирм (для них $a = 0$), Дж. Шуай и др. [32] показали, что с увеличением уровня доминирования a растет склонность доминирующей фирмы к комплектованию.

Ряд исследователей использовали теоретико-игровую модель олигополии для решения проблем макроэкономического анализа. Например, анализируя неоклассическую модель экономического роста Р. Солоу [62], У.-Б. Чжанг [46] сформулировал модель дуополии при степенной функции спроса в случае неразрешенных относительно издержек игроков их производственных функций Кобба-Дугласа $Q_i = \prod_{j=1,2} x_{ij}^{\alpha_j}$, $\alpha_j > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Поэтому, в отличие от модели (1), действиями игроков выступают затраты ресурсов x_{ij} , и функция полезности i -го игрока рассматривалась в виде $\Pi_i = P(Q)Q_i - \sum_{j=1,2} p_{ij}x_{ij}$, где

p_{ij} — цена j -го ресурса; как известно [55], такая модель приводит к степенным функциям издержек. В результате численных экспериментов автор доказал нетривиальный вывод: дуополия Штакельберга обеспечивает больший ВВП, чем совершенная конкуренция.

Другая макроэкономическая проблема налоговой политики затронута Д. Колли [19], который модернизировал модель (1) в дивидендную доходность акционеров от чистой прибыли путем введения в нее налоговых ставок $\Pi_i = d(P) \left[(1 - t_1) \left(\frac{P(Q)}{1+t_2} - t_3 - C_i \right) Q_i - t_4 \right]$, где t_1 — ставка налога на прибыль, t_2 — адвалорная ставка НДС, t_3 — специфическая ставка НДС, t_4 — ставка аккордного налога, $d(P)$ — функция дивидендов. В случае убывающей функции спроса общего вида и линейных функций издержек игроков автор вывел равновесные по Курно действия как функции налоговых ставок, и, анализируя чувствительность этих функций, показал, что аккордный налог ведет к росту цены и снижению общественного благосостояния, в то время как налог на прибыль вызывает снижение цены и рост благосостояния; кроме того, адвалорный НДС всегда выше специфического при одной и той же равновесной цене.

В целом приложения теории олигополии демонстрируют, с одной стороны, возможности этой игры для интерпретации многообразия экономических процессов, а с другой стороны, тенденцию исследователей к редуцированию этого многообразия в относительно узкий спектр игрового поведения, как правило, ограничиваясь игрой ведомых агентов. Тем самым конкуренция по Курно, обобщающая монополистическую и совершенную формы конкуренции, имплицитно предполагается детерминантой общего равновесия.

6. Заключение. Концепции развития игр олигополии

В игре олигополии имеет место фундаментальная проблема асимметрии информированности игроков, что обуславливает неоднозначность определения ментальных типов игроков. Рефлексивный анализ позволяет сформировать исчерпывающий набор возможных оптимальных действий игроков («информационных равновесий»), сопоставить их с параметрами реального равновесия и вывести отсюда заключение о глубине рефлексии реальных игроков. В результате агрегируется информация о векторе ментальных типов игроков, и ответные действия игроков могут быть предсказуемы, что обуславливает возможность управления игроками.

Информационное управление нацелено на имплементацию вектора ментальных типов игроков в процесс разработки государственных управленческих решений по совершенствованию рыночных механизмов. Поскольку при экзогенных ментальных типах игроков их равновесные действия выражаются как однозначные функции от параметров рыночной системы, то можно количественно оценить влияние изменения налогов, бюджетных трансфертов и процентных ставок на величину суммарного рыночного предложения, и, в конечном итоге, на цену равновесия.

Наряду с этим, перед информационным управлением стоит более масштабная задача целенаправленного индуцирования заданного образа мышления игроков в интересах общества. В самом деле, при заданной функции равновесного действия игрока от параметра его ментального типа можно вычислить для целевого значения агрегата равновесных действий соответствующий (оптимальный) набор значений параметров ментальных типов. Далее, на основе специально подобранных механизмов информационного обмена можно обеспечить переход реального ментального профиля игроков к оптимальному. Механизмы информационного обмена формируются в рамках научной школы Д.А. Новикова и А.Г. Чхартишвили, которая ведет интенсивную работу в русле перехода от рефлексивного анализа к рефлексивному управлению. Идея информационного управления [63] базируется на формировании целенаправленной последовательности мнений в социальной группе в зависимости от мнений так называемых агентов влияния. В результате разработана система конечно-разностных уравнений динамики мнений с учетом их поляризации [64].

Как показал обзор, в настоящее время доминирует неиерархическая формулировка игры олигополии, предопределяющая главный вектор исследований как совершенствование методов вычисления равновесий, необходимых для формирования законов или программ управления, оптимальных по критериям индивидуальных полезностей игроков. Закономерное развитие этой парадигмы видится в переходе к трактовке олигополии как иерархической игры с центром, имеющим собственные интересы, которые предопределяют целенаправленное воздействие на механизмы выбора игроками собственных действий. Поэтому в перспективе будет формироваться модель олигополии с экзогенным управлением, оптимизирующим общественное благосостояние.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cournot A.A.* Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. Original 1838.
2. *Neumann J. von, Morgenstern O.* Theory of Games and Economic Behavior. Princeton, NJ.: Princeton University Press, 1944.
3. *Shubik M.* Strategy and Market Structure. New York: Wiley, 1959.
4. *Филатов А.Ю.* Модели олигополии: современное состояние / Теория и методы согласования решений. РАН, Ин-т систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН. Новосибирск, 2009. С. 29–60.
5. *Anderson S.P., Erkal N., Piccinin D.* Aggregative games and oligopoly theory: short-run and long-run analysis // RAND J. Econom. 2020. V. 51. No. 2. P. 470–495.
6. *Stackelberg H.* Market Structure and Equilibrium: 1st Edition. Translation into English, Bazin, Urch & Hill, Springer, 2011. (Original 1934).
7. *Novikov D.A., Chkhartishvili A.G.* Reflexion and Control: Mathematical Models. London: CRC Press, 2014.
8. *Лефевр В.А.* О самоорганизующихся и саморефлексивных системах и их исследовании / Проблемы исследования систем и структур. Матер. конф. М.: Изд-во АН СССР, 1965. С. 61–68.
9. *Lefebvre V.* Lectures on the Reflexive Games Theory. N.Y.: Leaf & Oaks Publishers, 2010.
10. *Nash J.F.Jr.* Noncooperative Games // Annal. Mathem., Second Ser. 1951. V. 54. No. 2. P. 286–295.
11. *Novshek W.* On the Existence of Cournot Equilibrium // Rev. Econom. Stud. 1985. V. 52. P. 85–98.
12. *Уолтерс А.А.* Производственные функции и функции затрат: эконометрический обзор // Теория фирмы. Т. 2. СПб: Экономическая школа. 2000. С. 160–204.
13. *Ghemawat P.* Building Strategy on the Experience Curve // Harward Business Rev. 1985. V. 63. No. 2. P. 143–149.
14. *Айзенберг Н.И., Зоркальцев В.И., Мокрый И.В.* Исследование нестационарных олигопольных рынков // Сиб. журн. индустр. мат. 2017. Т. 20. № 1 (69). С. 11–20.
15. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Процессы рефлексии и равновесие в модели олигополии с лидером // АиТ. 2020. № 7. С. 113–128.
Algazin, G.I., Algazina, D.G. Reflexion Processes and Equilibrium in an Oligopoly Model with a Leader // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 7. P. 1258–1270.
16. *Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г.* К аналитическому исследованию условий сходимости процессов рефлексивного коллективного поведения в моделях олигополии // АиТ. 2022. № 3. С. 84–109.
Algazin G.I., Algazina Y.G. To the Analytical Investigation of the Convergence Conditions of the Processes of Reflexive Collective Behavior in Oligopoly Models // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 3. P. 367–388.
17. *Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г.* Моделирование динамики коллективного поведения в рефлексивной игре с произвольным числом лидеров // Информатика и автоматизация. 2022. Т. 21. № 2. С. 339–375.
18. *Al-Khedhairi A.* Dynamical Study of Competition Cournot-like Duopoly Games Incorporating Fractional Order Derivatives and Seasonal Influences // Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2020. V. 21. No. 3–4. P. 339–359.

19. *Collie D.R.* Taxation under oligopoly in a general equilibrium setting // J. Public Economic Theory. 2019. V. 21. No. 4. P. 738–753.
20. *Cumbul E.* Stackelberg versus Cournot oligopoly with private information // Int. J. Indust. Organ. 2021. V. 74. P. 102674.
21. *Dzhabarova Y., Zlatanov B.* A note on the market equilibrium in oligopoly with three industrial players // AIP. Conf. Proc. 2022. 2449, 070013.
22. *Fedyanin D.N.* Monotonicity of equilibria in Cournot competition with mixed interactions of agents and epistemic models of uncertain market // Procedia Comput. Sci. 2021. V. 186. P. 411–417.
23. *Ferrarese W.* When Multiple Merged Entities Lead in Stackelberg Oligopolies // Rev. Industr. Organ. 2020. V. 56. No. 1. P. 131–142.
24. *Гераськин М.И.* Анализ равновесий в нелинейной модели олигополии // АиТ. 2022. № 8. С. 140–158.
Geraskin M.I. Analysis of Equilibria in a Nonlinear Oligopoly Model // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 8. P. 1261–1277.
25. *Гераськин М.И.* Свойства предположительных вариаций в нелинейной модели олигополии Штакельберга. АиТ. 2020. № 6. С. 105–130.
Geraskin M.I. The Properties of Conjectural Variations in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 6. P. 1051–1072.
26. *Haraguchi J., Matsumura T.* Profit-enhancing entries in mixed oligopolies // Southern Econom. J. 2021. V. 88. No. 1. P. 33–55.
27. *Julien L.A.* On noncooperative oligopoly equilibrium in the multiple leader-follower game // Eur. J. Oper. Res. 2017. V. 256. No. 2. P. 650–662.
28. *Lin M.H., Matsumura T.* Optimal Privatisation Policy under Private Leadership in Mixed Oligopolies. Arthaniti // J. Econom. Theory and Practice. 2018. V. 17. No. 1. P. 1–14.
29. *Lo C.F., Yeung C.F.* Quantum Stackelberg oligopoly // Quant. Inform. Proc. 2022. V. 21. No. 3. 85 p.
30. *Mukherjee A., Zeng C.* Social desirability of entry in a bilateral oligopoly-The implications of (non) sunk costs // Mat. Soc. Sci. 2022. V. 118. P. 12–19.
31. *Ougolnitsky G., Gorbaneva O.* Sustainability of Intertwined Supply Networks: A Game-Theoretic Approach // Games. 2022. V. 13. No. 3. 35 p.
32. *Shuai J., Yang H., Zhang L.* Dominant firm and competitive bundling in oligopoly markets // Games Econom. Behavior. 2022. V. 132. P. 421–447.
33. *Xiao Y., Peng Y., Lu Q., Wu X.* Chaotic dynamics in nonlinear duopoly Stackelberg game with heterogeneous players // Physica: Statist. Mechan. Appl. 2018. V. 492. P. 1980–1987.
34. *Xiao Y., Zhang S., Peng Y.* Dynamic investigations in a Stackelberg model with differentiated products and bounded rationality // J. Comput. Appl. Math. 2022. V. 414. 114409 p.
35. *Yoo T.-H., Ko W., Rhee C.-H., Park J.-K.* The incentive announcement effect of demand response on market power mitigation in the electricity market // Renewabl. Sustain. Energy Rev. 2017. V. 76. P. 545–554.
36. *Zhang Y.* When should firms choose a risky new technology? An oligopolistic analysis // Econom. Model. 2020. V. 91. P. 687–693.

37. Zhou J. Mixed bundling in oligopoly markets // J. Econom. Theory. 2021. V. 194. 105257 p.
38. Zouhar J., Zouharova M. Stackelberg versus Cournot duopoly with asymmetric costs: primary markups, entry deterrence, and a comparison of social welfare and industry profits // Econom. Theory Bullet. 2020. No. 8. P. 89–96.
39. Угольницкий Г.А., Усов А.Б. Сравнительный анализ эффективности способов организации взаимодействия экономических агентов в моделях дуополии Курно с учётом экологических условий // АиТ (в печати).
40. Филатов А.Ю. Неоднородность поведения фирм на олигопольном рынке: стратегические фирмы и ценополучатели // Изв. Иркут. гос. ун-та. 2015. Т. 13. С. 72–83.
41. Askar S.S., El-Wakeel M.F., Alrodaini M.A. Exploration of Complex Dynamics for Cournot Oligopoly Game with Differentiated Products. Complexity. 2018, 6526794.
42. Cornes R., Fiorini L.C., Maldonado W.L. Expectational stability in aggregative games // J. Evolut. Econom. 2021. V. 31. No. 1. P. 235–249.
43. Geras'kin M.I., Chkhartishvili A.G. Structural modeling of oligopoly market under the nonlinear functions of demand and agents' costs // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 2. P. 332–348.
44. Kanieski da Silva B., Tanger S., Marufuzzaman M., Cubbage F. Perfect assumptions in an imperfect world: Managing timberland in an oligopoly market // Forest Polic. Econom. 2022. V. 137. 102691 p.
45. Peng Y., Xiao Y., Lu Q., Wu X., Zhao Y. Chaotic dynamics in Cournot duopoly model with bounded rationality based on relative profit delegation maximization // Physica A: Statist. Mech. Appl. 2020. V. 560. 125174 p.
46. Zhang W.-B. Stackelberg-Nash Equilibrium and Perfect Competition in the Solow-Uzawa Growth Model. Lecturas de Economia. 2022. (96). pp. 315–343.
47. Zhou X., Pei Z., Qin B. Assessing Market Competition in the Chinese Banking Industry Based on a Conjectural Variation Model // China World Econom. 2021. V. 29. No. 2. P. 73–98.
48. Fauli-Oller R. Divisionalization with asymmetric production costs // Math. Social Sci. 2022. V. 118. P. 22–29.
49. Kaicker N., Dutta G., Mishra A. Time-of-use pricing in the electricity markets: mathematical modelling using non-linear market demand // OPSEARCH. 2022. V. 59. No. 3. P. 1178–1213.
50. Kalashnikov V.V., Bulavsky V.A., Kalashnykova N.I. Existence of the nash-optimal strategies in the meta-game // Stud. Syst., Decision Control. 2018. V. 100. P. 95–100.
51. Kalashnykova N., Kalashnikov V., Watada J., Anwar T. Lin, P. Consistent Conjectural Variations Equilibrium in a Mixed Oligopoly Model with a Labor-Managed Company and a Discontinuous Demand Function // IEEE Access. 2022. pp. 1–1.
52. Raoufinia M., Baradaran V., Shahrjerdi R. A dynamic differential oligopoly game with sticky price and advertising: Open-loop and closed-loop solutions // Kybernetes. 2019. V. 48. No. 3. P. 586–611.
53. Novikov D., Korepanov V., Chkhartishvili A. Reflexion in mathematical models of decision-making // Int. J. Parallel, Emergent Distributed Syst. 2018. V. 33. No. 3. P. 319–335.

54. *Гераськин М.И.* Рефлексивный анализ равновесий в игре триполии при линейных функциях издержек агентов. // *АиТ.* 2022. № 3. С. 110–131.
Geraskin M.I. Reflexive Analysis of Equilibria in a Triopoly Game with Linear Cost Functions of the Agents // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 3. P. 389–406.
55. *Intriligator M.D.* Mathematical Optimization and Economic Theory. New Jersey. Prentice-Hall. Englewood Cliffs, 1971.
56. *Korolev A.V., Ougolnitsky G.A.* Cooperative game-theoretic models of the Cournot oligopoly // *Int. Game Theory Rev.* 2022. 2350004 p.
57. *Синица С.А.* Анализ тенденций развития глобального рынка телекоммуникационных услуг // *Вестник Евразийской науки.* 2019. № 1.
58. *Matheson T., Petit P.* Taxing telecommunications in developing countries // *Int. Tax Public Finance.* 2021. V. 28. No. 1. P. 248–280.
59. *Горбанёва О.И., Угольницкий Г.А.* Теоретико-игровой анализ эффективности взаимодействия экономических агентов в олигополии Курно с учётом линейной структуры, “зелёного” эффекта и заботы о справедливости // *Математическая теория игр и её приложения,* 2023. (В печати.)
60. *Ougolnitsky G.A., Usov A.B.* Differential Game-Theoretic Models of Cournot Oligopoly with Consideration of Green Effect // *Games,* 2023. (В печати.)
61. *Королёв А.В., Котова М.А., Угольницкий Г.А.* Сравнительный анализ эффективности в динамических моделях олигополии Курно // *Известия РАН. Теория и системы управления.* 2023. (В печати.)
62. *Solow R.M.* A contribution to the theory of economic growth // *Quar. J. Econom.* 1956. V. 70. P. 65–94.
63. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Модели информационного влияния и информационного управления в социальных сетях // *Проблемы управления.* 2009. № 5. С. 28–35.
64. *Gubanov D.A., Petrov I.V., Chkhartishvili A.G.* Multidimensional Model of Opinion Dynamics in Social Networks: Polarization Indices // *Autom. Remote Control.* 2021. V. 82. No. 10. P. 1802–1811.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 30.12.2022

После доработки 17.01.2023

Принята к публикации 26.01.2023

© 2023 г. В.Ф. СОКОЛОВ, д-р физ.-мат. наук (sokolov@ipm.komisc.ru)
(Коми научный центр УрО РАН, Сыктывкар)

СУБОПТИМАЛЬНАЯ РОБАСТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕИЗВЕСТНОГО АВТОРЕГРЕССИОННОГО ОБЪЕКТА С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ И СМЕЩЕННЫМ ВНЕШНИМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Рассматривается задача субоптимальной стабилизации объекта с дискретным временем, неопределенностями по выходу и управлению и ограниченным внешним возмущением. Коэффициенты авторегрессионной номинальной модели, коэффициенты усиления неопределенностей, норма и смещение внешнего возмущения предполагаются неизвестными. Показателем качества служит наихудшая асимптотическая верхняя граница модуля выхода объекта. Решение задачи в условиях неидентифицируемости всех неизвестных параметров базируется на методе рекуррентных целевых неравенств и оптимальном онлайн оценивании, в котором показатель качества задачи управления служит идентификационным критерием. Предложена нелинейная замена неизвестных параметров возмущений, сводящая задачу оптимального онлайн оценивания к задаче дробнолинейного программирования. Работоспособность адаптивного субоптимального управления иллюстрируется результатами численного моделирования.

Ключевые слова: робастное управление, адаптивное управление, оптимальное управление, ограниченное возмущение, верификация модели.

DOI: 10.31857/S0005231023060028, **EDN:** CRYBQU

1. Введение

В 1980-х гг. в знаменитых статьях [1, 2] было показано, что известные к тому времени алгоритмы адаптивного управления в детерминированной постановке не гарантируют устойчивости адаптивных систем при наличии сколь угодно малых внешних возмущений или немоделируемой динамики. В течение двух последующих десятилетий были предложены различные модификации стандартных алгоритмов оценивания для обеспечения робастной устойчивости адаптивных систем (под робастной понимается устойчивость системы при наличии в ней операторных возмущений, называемых в теории робастного управления неопределенностью). При этом робастная устойчивость доказывалась для достаточно малых операторных возмущений с помощью аппарата функций Ляпунова и независимо от параллельно разрабатывавшейся в эти же годы теории робастного управления в H_∞ -постановке [3].

Работы этого направления стали именовать робастным адаптивным управлением [4–6]. В то же время проблема нахождения по данным измерений номинальной (т.е. невозмущенной) модели и уровней неопределенностей и внешних возмущений была признана в середине 1990-х гг. главной проблемой для практических приложений H_∞ -теории [7]. Поэтому оценка качества заданной или полученной в результате идентификации модели управляемого объекта была названа центральной проблемой в теории идентификации систем [8]. Эта проблема до настоящего времени остается открытой и актуальной даже в задачах офлайн идентификации, т.е. идентификации по данному набору измерений, а не по ходу управления [9].

В начале 1990-х гг. были получены основополагающие результаты по теории робастного управления в ℓ_1 -постановке, в которой основным сигнальным пространством служит пространство ℓ_∞ ограниченных вещественных последовательностей и показатели качества управления формулируются в терминах ℓ_∞ -нормы выхода системы управления [10, 11]. В ℓ_1 -теории робастного управления, отличие от H_∞ -теории, были получены явные представления для асимптотических показателей качества для систем со структурированной неопределенностью, внешними ограниченными возмущениями и заданными командными сигналами [12–15]. Это позволило предложить общий метод синтеза адаптивного оптимального, с заданной точностью, робастного управления, потенциально реализующего максимальные возможности обратной связи и обеспечивающего в условиях неидентифицируемости неизвестных параметров такое же асимптотическое качество управления, что и для объектов с известными параметрами [16, 17]. Важность и актуальность исследования максимальных возможностей обратной связи отмечены в недавнем обзоре [18]. Указанный метод базируется на методе рекуррентных целевых неравенств [19], множественном оценивании неизвестных параметров, включая параметры возмущений, и использовании показателя качества задачи управления как идеального идентификационного критерия. Для систем общего вида этот метод не реализуем напрямую ввиду высокой сложности задачи вычисления текущих оптимальных оценок при невыпуклых показателях качества и невыпуклых ограничениях. Поэтому актуальной представляется задача поиска классов объектов или менее амбициозных постановок задач, для которых этот метод реализуем с учетом растущей мощности современных компьютеров. Примерами таких менее амбициозных постановок служат, например, задача подтверждения модели и оптимальной квантификации возмущений [20, 21] и задача синтеза оптимального робастного регулятора для объекта с известной передаточной функцией номинального объекта и неизвестными нормами внешнего возмущения и операторных возмущений по выходу и управлению [22]. В [23] приведены примеры задач адаптивного оптимального управления, в которых оптимальные значения показателей качества являются линейными или дробно-линейными функциями оцениваемых неизвестных параметров. В таких задачах оптимальное оценивание сводится

к линейному программированию и реализуемо в онлайн режиме по крайней мере для объектов невысоких порядков.

В настоящей работе задача адаптивной оптимальной робастной стабилизации рассматривается для относительно простого объекта с авторегрессионной номинальной моделью, неизвестными коэффициентами передаточной функции, неизвестными коэффициентами усиления неопределенностей по выходу и управлению, а также неизвестными нормой и смещением внешнего ограниченного возмущения. Задача заключается в минимизации наихудшей в рассматриваемом классе неопределенностей и возмущений верхней границы модуля выхода объекта в установившемся режиме. Целью настоящей работы является реализация указанного общего метода синтеза адаптивного оптимального управления для описанного выше объекта. Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Предложена специальная замена неизвестных параметров неопределенностей и внешнего возмущения, благодаря которой показатель качества управления в рассматриваемой задаче становится дробно-линейной функцией неизвестных параметров, а множества согласованных с измерениями оценок неизвестных параметров описываются линейными неравенствами. Предложенная замена неизвестных параметров позволяет решать задачу оптимального оценивания в онлайн режиме.

2. Доказана устойчивость замкнутой адаптивной системы в оптимальной области допустимых норм неопределенностей, универсальной для всех априорно допустимых номинальных объектов.

3. При дополнительном предположении о “непреднамеренности” суммарного возмущения гарантируется оптимальность адаптивного управления с заданной точностью, т.е. реализация максимальных возможностей обратной связи.

4. Результаты численного моделирования для объекта с пятью неизвестными коэффициентами передаточной функции номинальной модели и четырьмя описанными выше неизвестными параметрами возмущений иллюстрируют работоспособность и оптимальность адаптивного управления.

5. Актуальная в теории идентификации систем проблема оценки качества полученной в результате идентификации модели решается в онлайн режиме вычислением оптимальных оценок с наилучшим значением показателя качества, согласованным с данными измерений и гарантируемым в установившемся режиме. Приведенные результаты численного моделирования наглядно иллюстрируют несправедливость традиционной критики идентификации с помощью множественного оценивания (set-membership approach) как слишком грубого метода. Эта критика базируется на традиционном и кажущемся обязательным предположении, что должны быть известны априорные границы возмущений, одинаковые для всех допустимых объектов.

6. Использование растущей вычислительной мощности современных компьютеров делает возможным, по крайней мере для объектов невысоких по-

рядков, онлайн вычисление полиэдральных оценок неизвестных параметров, согласованных с данными измерений и априорной информацией об управляемой системе. Это позволяет решать проблему онлайн верификации модели и/или априорных предположений и их соответствия достижению желаемого качества управления. Традиционные методы синтеза адаптивного управления на основе градиентных алгоритмов и модификаций метода наименьших квадратов не рассматривают проблемы верификации модели и априорных предположений.

Обозначения:

$|\varphi|$ — евклидова норма вектора $\varphi \in \mathbb{R}^n$;

ℓ_e — пространство вещественных последовательностей $x = (\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots)$,

$x_s^t = (x_s, x_{s+1}, \dots, x_t)$ для $x \in \ell_e$;

$|x_s^t| = \max_{s \leq k \leq t} |x_k|$;

ℓ_∞ — нормированное пространство ограниченных вещественных последовательностей $x = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ с нормой $\|x\| = \sup_t |x_t|$;

$\|x\|_{ss} = \limsup_{t \rightarrow +\infty} |x_t|$;

ℓ_1 — нормированное пространство абсолютно суммируемых последовательностей с нормой $\|x\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|$;

$\|G\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |g_k| = \|g\|_1$ — индуцированная норма устойчивой линейной стационарной системы $G: \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$ с передаточной функцией $G(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \lambda^k$.

2. Постановка задачи

Объект управления с дискретным временем описывается моделью

$$(2.1) \quad a(q^{-1})y_t = b_1 u_{t-1} + v_t, \quad t = 1, 2, 3, \dots,$$

где $y_t \in \mathbb{R}$ — измеряемый выход объекта в момент времени t , $u_t \in \mathbb{R}$ — управление, $v_t \in \mathbb{R}$ — суммарное возмущение, q^{-1} — оператор сдвига назад ($q^{-1}y_t = y_{t-1}$) на линейном пространстве ℓ_e ,

$$a(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}.$$

Начальные значения $y_{1-n}^0 = (y_{1-n}, \dots, y_0)$ произвольные, $y_k = 0$ при $k < 1-n$ и $u_k = 0$ при $k < 0$.

Априорная информация об объекте управления включает следующие предположения.

АП1. Вектор-столбец коэффициентов *номинальной модели* (т.е. модели без суммарного возмущения v) принадлежит известному ограниченному многограннику Ξ ,

$$\xi := (a_1, \dots, a_n, b_1)^T \in \Xi = \{ \hat{\xi} \mid P\hat{\xi} \geq p \} \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad P \in \mathbb{R}^{l \times (n+m)}, \quad p \in \mathbb{R}^l,$$

$b_1 \neq 0$ для любого $\xi \in \Xi$.

АП2. Суммарное возмущение v имеет вид

$$(2.2) \quad v_t = c^w + \delta^w w_t + \delta^y \Delta^1(y)_t + \delta^u \Delta^2(u)_t,$$

$$(2.3) \quad \|w\|_\infty \leq 1, \quad |\Delta^1(y)_t| \leq p_t^y = |y_{t-\mu}^{t-1}|, \quad |\Delta^2(u)_t| \leq p_t^u = |u_{t-\mu}^{t-1}|,$$

где c^w — смещение и δ^w — норма (верхняя граница) внешнего ограниченного возмущения $c^w + \delta^w w$, $w \in \ell_\infty$ — неизвестное нормализованное внешнее возмущение, $\delta^y \geq 0$ и $\delta^u \geq 0$ — коэффициенты усиления неопределенностей по выходу и управлению соответственно, операторы $\Delta^1 : \ell_e \rightarrow \ell_e$ и $\Delta^2 : \ell_e \rightarrow \ell_e$ — линейные нестационарные или нелинейные строго причинные операторы с ограниченной памятью μ (оператор $\Delta : \ell_e \rightarrow \ell_e$ называется строго причинным, если значения z_t последовательности $z = \Delta(x)$ зависят только от $x_{-\infty}^{t-1}$ для всех t [10]).

Память неопределенностей μ выбирается конструктором исходя из априорной информации об управляемой системе и может быть выбрана сколь угодно большой, но не бесконечной, без ущерба для качества синтезируемого ниже адаптивного управления (см. замечание 1 в конце раздела 3 и замечание 3 в разделе 6).

АП3. Вектор $\theta = (\xi^T, c^w, \delta^w, \delta^y, \delta^u)^T$ параметров объекта (2.1) неизвестен, $|c^w| \leq C^w$ с известной верхней границей C^w .

Содержательная постановка рассматриваемой в статье задачи заключается в построении обратной связи вида $u_t = U_t(y_{1-n}^t, u_0^{t-1}, \Xi)$, гарантирующей как можно меньшую верхнюю границу для асимптотического показателя качества

$$(2.4) \quad J_\mu(\theta) = \sup_v \limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t|,$$

где $\sup$ берется на множестве возмущений v , удовлетворяющих предположению **АП2**. На обратную связь налагается трудно формализуемое в точных терминах требование ее вычислительной реализуемости в онлайн режиме.

Главная сложность сформулированной оптимальной задачи заключается в неидентифицируемости неизвестного вектора θ в рассматриваемой детерминированной постановке (см. раздел 4).

3. Робастное качество оптимальной системы при известных параметрах

Для объекта с известным вектором коэффициентов ξ и при известном смещении c^w регулятор

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u_t &= \frac{1}{b_1} [(a(q^{-1}) - 1)y_{t+1} - c^w] = \\ &= \frac{1}{b_1} [a_1 y_t + a_2 y_{t-1} + \dots + a_n y_{t-n+1} - c^w] \end{aligned}$$

гарантирует при всех t равенство

$$(3.2) \quad y_{t+1} = v_{t+1} - c^w = \delta^w w_{t+1} + \delta^y \Delta^1(y)_{t+1} + \delta^u \Delta^2(u)_{t+1}.$$

Из непредсказуемости и произвольности значения $v_{t+1} - c^w$ в момент t вычисления управления u_t следует, что регулятор (3.1) является *оптимальным* для показателя качества (2.4). Введем обозначения для передаточной функции от y к u регулятора (3.1):

$$G^\xi(\lambda) = \frac{a(\lambda) - 1}{b_1 \lambda} = \frac{1}{b_1} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \lambda^k, \quad \|G^\xi\| = \frac{1}{|b_1|} \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Замкнутая система (2.1), (3.1) называется *робастно устойчивой* в классе неопределенностей (2.3), если значение показателя качества (2.4) конечно. Робастное качество оптимальной системы (2.1), (3.1) описывается следующей теоремой.

Теорема 1. Для замкнутой системы (2.1), (3.1) справедливы утверждения:

1. Система робастно устойчива при $\mu = +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$(3.3) \quad \delta^y + \delta^u \|G^\xi\| < 1.$$

2. Если выполнено условие робастной устойчивости (3.3), то

$$(3.4) \quad J_\mu(\theta) \nearrow J(\theta) = \frac{\delta^w + \delta^u |c^w/b_1|}{1 - \delta^y - \delta^u \|G^\xi\|} \quad (\mu \rightarrow +\infty),$$

где знак $\nearrow$ означает монотонную сходимость снизу при $\mu \rightarrow +\infty$.

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Последнее априорное предположение **АП4** об управляемом объекте диктуется условием робастной стабилизируемости (3.3).

АП4. Неизвестный вектор параметров θ удовлетворяет неравенству

$$(3.5) \quad \delta^y + \delta^u \|G^\xi\| \leq \bar{\delta} < 1$$

с известным числом $\bar{\delta}$.

Предположение об известной верхней границе $\bar{\delta}$ не является ограничительным. По существу оно заключается в не влияющем на качество управления априорном выборе конструктором сколь угодно близкого к единице значения $\bar{\delta}$ и исключает из рассмотрения неприемлемые для практических приложений модели вблизи границы области робастно стабилизируемых объектов. Замена открытого множества параметров θ , характеризуемого необходимым условием робастной стабилизируемости (3.3), сколь угодно близким к нему закрытым множеством, определенным неравенством (3.5), позволяет сформулировать строгие результаты о качестве управления.

Замечание 1. Базовые результаты ℓ_1 -теории робастного управления относились к системам со структурированной неопределенностью с бесконечной памятью ($\mu = +\infty$) и только нулевыми начальными данными [10] и поэтому не могли применяться в задачах адаптивного управления. Второе утверждение теоремы 1 позволяет использовать показатель $J(\theta)$ и модель неопределенностей с ограниченной памятью вида (2.3) не только для постановки и решения задач адаптивного оптимального управления без потерь для качества управления, но и для онлайн верификации модели объекта, включая квантификацию неопределенностей и внешнего возмущения (т.е. оценку коэффициентов усиления неопределенностей и верхней границы внешнего возмущения).

4. Оптимальное оценивание в условиях неидентифицируемости

В этом разделе поясняется неидентифицируемость всех неизвестных параметров и на содержательном уровне обосновывается необходимость использования показателя качества J в качестве идентификационного критерия.

Следующее простое утверждение позволяет использовать метод рекуррентных целевых неравенств для оценки неизвестного вектора параметров θ .

Утверждение 1. Если для некоторой оценки

$$\hat{\theta} = (\hat{\xi}^T, \hat{c}^w, \hat{\delta}^w, \hat{\delta}^y, \hat{\delta}^u)^T, \quad \hat{\xi} \in \Xi, \quad \hat{\delta}^w \geq 0, \quad \hat{\delta}^y \geq 0, \quad \hat{\delta}^u \geq 0,$$

неизвестного вектора θ при всех t справедливы неравенства

$$(4.1) \quad |\hat{a}(q^{-1})y_t - \hat{b}_1 u_{t-1} - \hat{c}^w| \leq \hat{\delta}^w + \hat{\delta}^y p_t^y + \hat{\delta}^u p_t^u,$$

то объект управления (2.1) с вектором параметров $\hat{\theta}$ удовлетворяет уравнению (2.1) и априорным предположениям **АП1**, **АП2** при всех t .

Доказательство утверждения 1 приведено в Приложении.

Из утверждения 1 следует, что при любом управлении объектом (2.1) полная информация о векторе неизвестных параметров θ к моменту времени t имеет вид включения

$$\theta \in \Theta_t = \left\{ \hat{\theta} \in \Theta_0 \mid |\hat{a}(q^{-1})y_k - \hat{b}_1 u_{k-1} - \hat{c}^w| \leq \hat{\delta}^w + \hat{\delta}^y p_k^y + \hat{\delta}^u p_k^u \quad \forall k \leq t \right\},$$

где

$$\Theta_0 = \left\{ \hat{\theta} = (\hat{\xi}^T, \hat{c}^w, \hat{\delta}^w, \hat{\delta}^y, \hat{\delta}^u)^T \mid \hat{\xi} \in \Xi, \right. \\ \left. \hat{\delta}^w \geq 0, \hat{\delta}^y \geq 0, \hat{\delta}^u \geq 0, \hat{\delta}^y + \hat{\delta}^u \|G^{\hat{\xi}}\| \leq \bar{\delta} \right\}$$

— априорное множество допустимых параметров.

Множества Θ_t состоят из векторов $\hat{\theta} \in \Theta_0$, которые удовлетворяют уравнению (2.1) и априорным предположениям **АП1**, **АП2**, **АП4** при имеющихся

измерениях y_{1-n}^t, u_0^{t-1} . Очевидно, что любой вектор $\hat{\theta}$ с достаточно большой компонентой $\hat{\delta}^w$ лежит в Θ_t . Из этого, в частности, следует *неидентифицируемость* параметров ξ и c^w оптимального регулятора (3.1) при любом управлении объектом (2.1).

Метод рекуррентных целевых неравенств заключается в построении сходящейся последовательности оценок θ_t , достаточно точно удовлетворяющих *целевым неравенствам* (4.1) при всех достаточно больших t . Однако, в отличие от задач адаптивной стабилизации, этого недостаточно для решения задачи обеспечения как можно меньшей оценки для показателя качества (2.4). Действительно, если оценки θ_t сходятся к некоторой предельной оценке θ_∞ и выполнены целевые неравенства, то из теоремы 1 и утверждения 1 следует неравенство

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t| \leq J(\theta_\infty).$$

Для решения поставленной оптимальной задачи этого неравенства недостаточно и необходимо обеспечить выполнение с заданной точностью дополнительного неравенства

$$J(\theta_\infty) \leq J(\theta)$$

с неизвестным и неидентифицируемым вектором θ . Из этого следует необходимость использования показателя качества $J(\theta)$ задачи управления в качестве идентификационного критерия, т.е. использования оптимального оценивания вида

$$(4.2) \quad \theta_t = \operatorname{argmin}_{\hat{\theta} \in \Theta_t} J(\hat{\theta}) = \operatorname{argmin}_{\hat{\theta} \in \Theta_t} \frac{\hat{\delta}^w + \hat{\delta}^u |\hat{c}^w / \hat{b}_1|}{1 - \hat{\delta}^y - \hat{\delta}^u \|G^\xi\|}.$$

Прямая реализация формулы (4.2) в режиме онлайн затруднительна, поскольку, во-первых, количество целевых неравенств в описании множеств Θ_t может неограниченно возрастать и, во-вторых, показатель качества J и условие робастной стабилизируемости (3.5) невыпуклы. Первая трудность преодолевается использованием верхних полиэдральных аппроксимаций множеств Θ_t и введением мертвой зоны при обновлении оценок. Способ избавления от невыпуклости в задаче оптимального оценивания описан в следующем разделе.

5. Сведение к модели с неопределенностью по выходу

В этом разделе описана замена неизвестных параметров возмущений, позволяющая преобразовать показатель качества к дробно-линейному виду, а невыпуклое условие робастной стабилизируемости (3.5) к ослабленному линейному условию путем сведения к модели с неопределенностью только по выходу.

Пусть объект (2.1) управляется так, что для всех t выполнены неравенства

$$(5.1) \quad |u_t| \leq C_1 + C_2 |y_{t-n+1}^t|$$

с некоторыми постоянными C_1, C_2 . Тогда из уравнения (2.1) и предположения **АП2** следует

$$(5.2) \quad \begin{aligned} |a(q^{-1})y_t - b_1 u_{t-1} - c^w| &\leq \delta^w + \delta^y |y_{t-\mu}^{t-1}| + \delta^u |u_{t-\mu}^{t-1}| \leq \\ &\leq \delta^w + \delta^u C_1 + (\delta^y + \delta^u C_2) |y_{t-\mu-n}^{t-1}|, \end{aligned}$$

и для любого $\bar{\mu} \geq \mu + n$ получаем

$$(5.3) \quad |a(q^{-1})y_t - b_1 u_{t-1} - c^w| \leq \delta^w + \delta^u C_1 + (\delta^y + \delta^u C_2) |y_{t-\bar{\mu}}^{t-1}|.$$

Введем новые неизвестные параметры ζ, δ^e и δ :

$$(5.4) \quad \zeta = (\xi, c^w, \delta^e, \delta), \quad \delta^e = \delta^w + \delta^u C_1, \quad \delta = \delta^y + \delta^u C_2.$$

Неравенства (5.3) для этих новых параметров принимают вид

$$(5.5) \quad |a(q^{-1})y_t - b_1 u_{t-1} - c^w| \leq \delta^e + \delta |y_{t-\bar{\mu}}^{t-1}|.$$

Неравенства (5.5) эквивалентны неравенствам (4.1) для модифицированного вектора параметров

$$\theta^m = (\xi^T, c^w, \delta^e, \delta, 0)^T.$$

В силу утверждения 1 неравенства (5.5) означают, что при управлении, удовлетворяющем неравенствам (5.1), выход y можно считать выходом объекта (2.1) с модифицированным вектором параметров θ^m (без неопределенности по управлению) и для этого объекта в силу теоремы 1 имеем

$$(5.6) \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t| \leq I(\zeta) := J(\theta^m) = \frac{\delta^e}{1 - \delta}.$$

Если объект (2.1) управляется оптимальным регулятором (3.1), то

$$|u_t + c^w/b_1| \leq \|G^\xi\| |y_{t-n+1}^t|,$$

и, следовательно,

$$(5.7) \quad |u_t| \leq |c^w/b_1| + \|G^\xi\| |y_{t-n+1}^t|.$$

Неравенства (5.7) гарантируют неравенства (5.1) и (5.3) с постоянными $C_1 = |c^w/b_1|$ и $C_2 = \|G^\xi\|$, для которых параметры δ^e и δ из (5.4) имеют вид

$$(5.8) \quad \delta^e = \delta^w + \delta^u |c^w/b_1|, \quad \delta = \delta^y + \delta^u \|G^\xi\|.$$

Тогда из формулы (3.4) для $J(\theta)$ и формулы (5.6) для $I(\zeta)$ с параметрами (5.8) следует

$$(5.9) \quad J(\theta) = I(\zeta), \quad \zeta = (\xi^T, c^w, \delta^w + \delta^u |c^w/b_1|, \delta^y + \delta^u \|G^\xi\|)^T.$$

Таким образом, для характеризуемой неравенствами (5.5) воображаемой системы без неопределенности по управлению показатель качества становится дробно-линейной функцией, зависящей только от нормы δ^e воображаемого внешнего возмущения и коэффициента усиления δ воображаемой неопределенности по выходу.

6. Адаптивное управление

Перейдем к описанию алгоритма адаптивного субоптимального управления, основанного на использовании новых неизвестных параметров δ^e и δ . После подачи управления u_t и измерения выхода y_{t+1} в момент времени $t+1$ будут обновляться векторные оценки

$$\zeta_t = (\xi_t^T, c_t^w, \delta_t^e, \delta_t)^T$$

неизвестного вектора ζ из (5.9) и полиэдральные оценки Z_t , составленные из априорных ограничений и нескольких линейных неравенств, порожденных новыми целевыми неравенствами (5.5). Начальные оценки Z_0 и ζ_0 имеют вид

$$Z_0 = \left\{ \hat{\zeta} = (\hat{\xi}^T, \hat{c}^w, \hat{\delta}^e, \hat{\delta})^T \mid \hat{\xi} \in \Xi, \hat{\delta}^e \geq 0, 0 \leq \hat{\delta} \leq \bar{\delta} \right\}, \quad \zeta_0 = (\xi_0^T, 0, 0, 0)^T,$$

где ξ_0 — любой вектор из априорного многогранника Ξ , $\bar{\delta}$ — верхняя оценка параметра δ из предположения **АП4**.

Выберем любое число $\bar{\mu} \geq \mu + n$ запоминаемых выходов $y_{t-\bar{\mu}+1}^t$ и параметр $\varepsilon > 0$ мертвой зоны, гарантирующей конечное число обновлений оценок. Управление u_t в момент t определяется *адаптивным регулятором*

$$(6.1) \quad u_t = \frac{1}{b_1^t} (a_1^t y_t + a_2^t y_{t-1} + \dots + a_n^t y_{t-n+1} - c_t^w).$$

Алгоритм обновления векторных оценок ζ_t и полиэдральных оценок Z_t имеет следующий вид. После измерения выхода y_{t+1} в момент $t+1$ положим

$$\varphi_t := (-y_t, -y_{t-1}, \dots, -y_{t-n+1}, u_t)^T, \quad \eta_{t+1} := \text{sign}(y_{t+1} - \varphi_t^T \xi_t - c_t^w), \\ p_{t+1} = |y_{t-\bar{\mu}+1}^t|, \quad \psi_{t+1} := (\eta_{t+1} \varphi_t^T, \eta_{t+1}, 1, p_{t+1})^T, \quad \nu_{t+1} := \eta_{t+1} y_{t+1}.$$

В этих обозначениях уравнение адаптивного регулятора (6.1) эквивалентно равенству $\varphi_t^T \xi_t + c_t^w = 0$, так что $\eta_{t+1} = \text{sign}(y_{t+1})$, а целевое неравенство (5.5) в момент $t+1$ для текущей оценки ζ_t эквивалентно неравенству

$$(6.2) \quad \psi_{t+1}^T \zeta_t \geq \nu_{t+1}.$$

Положим

$$(6.3) \quad \zeta_{t+1} := \zeta_t, \quad Z_{t+1} := Z_t, \quad \text{если } \psi_{t+1}^T \zeta_t \geq \nu_{t+1} - \varepsilon |\psi_{t+1}|.$$

В противном случае положим

$$(6.4) \quad Z_{t+1} := Z_t \cap \Omega_{t+1}, \quad \Omega_{t+1} := \left\{ \hat{\zeta} \mid \psi_{t+1}^T \hat{\zeta} \geq \nu_{t+1} \right\},$$

$$(6.5) \quad \zeta_{t+1} := \underset{\hat{\zeta} \in Z_{t+1}}{\operatorname{argmin}} I(\hat{\zeta}),$$

где показатель качества I определен в (5.6).

Алгоритм обновления оценок имеет простую геометрическую интерпретацию. Согласно формуле (6.3) оценки Z_t и ζ_t обновляются только в том случае, когда расстояние от вектора ζ_t до полупространства Ω_{t+1} больше параметра мертвой зоны ε (см. доказательство теоремы 2). Согласно формуле (6.4) обновление Z_t заключается в добавлении линейного неравенства $\psi_{t+1}^T \hat{\zeta} \geq \nu_{t+1}$, которое является тем из двух линейных неравенств, составляющих целевое неравенство (5.5), которое нарушается для оценки ζ_t . Вычисление оптимальной оценки ζ_{t+1} согласно (6.5) — задача дробно-линейного программирования, сводящаяся к задаче линейного программирования введением вспомогательной переменной [25].

Теорема 2. Пусть объект (2.1) с неизвестным вектором параметров $\theta = (\xi^T, c^w, \delta^w, \delta^y, \delta^u)^T$ удовлетворяет предположениям АП1–АП4, управляется адаптивным регулятором (6.1) с алгоритмом оценивания (6.3)–(6.5) и с параметром мертвой зоны, удовлетворяющим неравенствам

$$(6.6) \quad 0 < \varepsilon < (1 - \bar{\delta})/(\sqrt{n+1} + G_u), \quad G_u = \sup_{\xi \in \Xi} \|G^\xi\|.$$

Тогда справедливы утверждения:

1) *Если параметры δ^y и δ^u удовлетворяют неравенству*

$$(6.7) \quad \delta^y + \delta^u G_u \leq \bar{\delta} < 1,$$

то множественные оценки Z_t и векторные оценки ζ_t сходятся за конечное время и

$$(6.8) \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t| \leq I(\zeta_\infty^\varepsilon) < I(\zeta_\infty) + K_{\zeta_\infty} \varepsilon,$$

$$(6.9) \quad I(\zeta_\infty) \leq \bar{I} = \frac{\delta^w + \delta^u \max_t |c_t^w/b_1^t|}{1 - \delta^y - \delta^u \max_t \|G^{\xi_t}\|} \leq \frac{\delta^w + \delta^u \max_t |c_t^w/b_1^t|}{1 - \delta^y - \delta^u G_u},$$

где $\zeta_\infty = (\xi_\infty^T, c_\infty^w, \delta_\infty^e, \delta_\infty)$ — предельное значение ζ_t ,

$$(6.10) \quad \zeta_\infty^\varepsilon = \left(\xi_\infty^T, c_\infty^w, \delta_\infty^e + \varepsilon(\sqrt{2} + |c_\infty^w/b_1^\infty|), \delta_\infty + \varepsilon(\sqrt{n+1} + \|G^{\xi_\infty}\|) \right)^T,$$

$$(6.11) \quad K_{\zeta_\infty} = \frac{\sqrt{2} + |c_\infty^w/b_1^\infty| + \delta_\infty^e(\sqrt{n+1} + \|G^{\xi_\infty}\|)}{(1 - \delta_\infty - \varepsilon(\sqrt{n+1} + \|G^{\xi_\infty}\|))^2}.$$

2) Если при всех t справедливы неравенства

$$(6.12) \quad |u_t| \leq \bar{u}_t = |c^w/b_1| + \|G^\xi\| \|y_{t-\bar{\mu}+1}^t\|,$$

то множественные оценки Z_t и векторные оценки ζ_t сходятся за конечное время и

$$(6.13) \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} |y_t| \leq I(\zeta_\infty^\varepsilon) < I(\zeta_\infty) + K_{\zeta_\infty} \varepsilon \leq J(\theta) + K_{\zeta_\infty} \varepsilon,$$

где $\zeta_\infty = (\xi_\infty^T, c_\infty^w, \delta_\infty^e, \delta_\infty)$ — предельное значение ζ_t ; ζ_∞^ε и K_{ζ_∞} имеют вид (6.10) и (6.11) соответственно.

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Замечание 2. Первое утверждение теоремы 2 гарантирует устойчивость адаптивного управления в суженном множестве (6.7) параметров (δ^y, δ^u) по сравнению с множеством параметров (3.5), соответствующих робастно стабилизируемым объектам при известных параметрах номинальной модели. Верхняя оценка $\bar{I}$ в (6.9) является сильно завышенной относительно вычисляемых в процессе управления и сходящихся за конечное время согласованных с измерениями верхних оценок $I(\zeta_t^\varepsilon)$. Несмотря на это, она лучше, чем априорная универсальная оценка для всего класса допустимых векторов коэффициентов Ξ , которую можно получить для проекционных или МНК алгоритмов оценивания и которая справедлива в существенно большей двумерной области допустимых параметров (δ^y, δ^u) .

Замечание 3. Второе утверждение теоремы 2 базируется на условии (6.12). Это условие не верифицируемо данными измерений, поскольку параметры c^w, b_1 и ξ неизвестны. Адаптивный регулятор (6.1) гарантирует справедливость этих неравенств для текущих оценок c_t^w, b_1^t и ξ_t . Однако в связи с тем, что в цепочке неравенств (5.2) и (5.3) каждое из неравенств является существенно огрубленным (в том числе допустимым выбором любого $\bar{\mu} \geq \mu + n$), и с учетом того, что текущие оптимальные оценки ζ_t минимизируют показатель качества I , неравенства (6.12), как показывают многочисленные численные эксперименты, фактически не нарушаются. Формальное доказательство этого затруднено тем обстоятельством, что, хотя замена переменных (5.4) позволяет перейти к “хорошему” дробно-линейному показателю качества $I(\zeta)$ при линейных целевых неравенствах (5.5), исходная нелинейность показателя качества $J(\theta)$ и нелинейность условия робастной стабилизируемости (3.3) “спрятаны” при замене переменных (5.4) в дополнительном условии (5.7) на постоянные C_1 и C_2 .

Замечание 4. Важнейшим исключительным достоинством рассмотренного метода синтеза адаптивного робастного управления является верифицируемость априорных предположений об управляемом объекте. Индикатором приемлемости априорных предположений служит неубывающая последовательность наименьших согласованных с априорными предположениями

и данными измерений значений $I(\zeta_t)$. Ни в какой момент времени t не известно, является ли текущее значение $I(\zeta_t)$ предельным значением $I(\zeta_\infty)$. Но если оценки ζ_t не изменяются на длительном промежутке времени, то это означает, что текущая оценка удовлетворяет целевым неравенствам и, следовательно, гарантирует эту наилучшую верхнюю границу $I(\zeta_t)$ для $|y_t|$ после затухания переходных процессов. Неизменность оценки ζ_t на длительном промежутке времени гарантирует также соответствие априорных предположений данным измерений при текущем гарантируемом асимптотическом качестве управления $I(\zeta_t)$. Традиционные методы синтеза адаптивного управления как в детерминированной, так и в стохастической постановке, оставляют проблемы верификации модели и априорных предположений вне рассмотрения.

Замечание 5. Формула (6.11) для постоянной K_∞ приведена с единственной целью пояснить, что точность решения оптимальной задачи — порядка ε . Эту точность проще контролировать прямым вычислением разности $I(\zeta_t^\varepsilon) - I(\zeta_t)$ и корректировать ее при необходимости соответствующим изменением параметра мертвой зоны ε . При этом следует учитывать, что при уменьшении ε число возможных обновлений оценок и, соответственно, число неравенств в описании оценок Z_t может возрастать экспоненциально относительно числа оцениваемых параметров, поскольку объемы исключаемых из Z_t шаров пропорциональны $\varepsilon^{\dim \zeta}$. Остается открытым вопрос о грубости экспоненциальной оценки $\varepsilon^{\dim \zeta}$ с учетом того, что при добавлении новых линейных неравенств отсекаются гораздо большие множества сфальсифицированных измерениями параметров.

7. Численное моделирование

В этом разделе приводятся результаты численного моделирования описанного выше адаптивного субоптимального управления. Эффективность этого управления иллюстрируется сравнением с адаптивным управлением, основанным на оценивании по методу наименьших квадратов (МНК). Алгоритм МНК лежит в основе стохастической теории адаптивного оптимального управления для систем со случайными внешними возмущениями [26, 27]. Однако попытки обобщения этой теории на системы с неопределенностью в целом оказались безуспешными даже для стохастических неопределенностей.

В случае объекта (2.1) МНК-оценки (ξ_t^T, c_t^w) минимизируют средний квадрат невязки (т.е. централизованного суммарного возмущения) модели:

$$(7.1) \quad (\xi_t, c_t^w) = \underset{\hat{\xi} \in \Xi, \hat{c}^w}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \left(\hat{a}(q^{-1})y_{t+1} - \hat{b}(q^{-1})u_t - \hat{c}^w \right)^2,$$

не учитывая принципиально различное влияние на динамику системы внешнего возмущения w и неопределенностей Δ^1 и Δ^2 , и поэтому не могут лежать в основе алгоритмов оценивания, ориентированных на минимизацию верхней

границы выхода объекта. МНК-оценки вычисляются по рекуррентным формулам

$$\xi_{t+1} = \xi_t + K_t(y_{t+1} - \xi_t^T \varphi_t), \quad K_t = \frac{P_t \varphi_t}{1 + \varphi_t^T P_t \varphi_t}, \quad P_{t+1} = (I - K_t \varphi_t^T) P_t$$

с добавлением проектирования оценок ξ_t на априорное множество Ξ . При моделировании адаптивного управления с начальными матрицами вида $P_0 = cI$, где I — единичная матрица и $c > 0$, относительно лучшие в среднем результаты для МНК-оценивания наблюдались при $c \in [1, 5]$. Ниже приводятся результаты для $c = 1$.

Численное моделирование иллюстрируется на примере объекта (2.1) с неустойчивыми полюсами, т.е. корнями $a(\lambda)$, $0,9$, $0,8$, $0,7 \pm 0,6i$, и коэффициентом $b_1 = 2$. Этим параметрам соответствует (с точностью 10^{-4}) вектор коэффициентов

$$\xi = (-4,0082, 6,4542, -5,0654, 1,634, 2)^T \in \mathbb{R}^5.$$

Априорные ограничения: $0,1 \leq b_1 \leq 10$, $|a_k| \leq 20$ для всех k , $|c^w| \leq 100$. Параметр мертвой зоны ϵ в (6.3) равен $0,001$.

Результаты моделирования приводятся ниже для случайных возмущений и детерминированных возмущений вида

$$(7.2) \quad v_t = c^w + \cos(5t) + \delta^y \sin(3\sqrt{t}) |y_{t-\mu}^{t-1}| + \delta^u \sin(\ln(0,3t + \pi/2)) |u_{t-\mu}^{t-1}|$$

с параметрами $c^w = 1$, $\delta^y = 0,2$, $\delta^u = 0,05$, $\mu = 20$. “Экзотические” возмущения вида (7.2) с нестационарными частотами подбирались для иллюстрации возможной “плохой” динамики замкнутой адаптивной системы с МНК алгоритмом оценивания.

Во всех численных экспериментах начальные данные y_{1-n}^0 выбирались случайным образом (с равномерным распределением) из отрезка $[-\delta^w, \delta^w]$ и для иллюстрации качества оценок в установившемся режиме моделировались “локально плохие” возмущения v_{t+1} , максимизирующие $|y_{t+1}|$ на интервалах времени $[800, 810]$ и $[1200, 1210]$. Оптимальный интервал $[-J(\theta), J(\theta)]$ обозначен на всех приведенных ниже графиках выхода y_t пунктирными прямыми с ординатами $\pm J(\theta)$.

В экспериментах с независимыми случайными возмущениями w_t , $\Delta^1(y)_t$, $\Delta^2(u)_t$, равномерно распределенными на соответствующих им интервалах, адаптивное управление на основе МНК на большинстве реализаций начальных данных y_{1-n}^0 демонстрирует в установившемся режиме требуемое неравенство $|y_t| \leq I(\zeta) = J(\theta) \approx 2,76$ при относительно небольших смещениях среднего значения выхода от нуля. Однако достаточно часто наблюдаются всплески с выходом за пределы оптимального интервала вследствие максимизирующего $|y_{t+1}|$ возмущения v_{t+1} на указанных выше интервалах времени. Этот эффект представлен на левом графике рис. 1. Также достаточно часто выход y_t не попадает в оптимальный интервал. Известно, что смещение внешнего возмущения ($c^w \neq 0$) представляет большую трудность для МНК ввиду недостаточного возбуждения соответствующей оценке $\hat{c}^w$ компоненты

(равной 1) регрессионного вектора. В представленном на правом графике рис. 1 численном эксперименте выход y_t в установившемся режиме превышает оптимальную верхнюю границу более чем на порядок. Для сравнения график выхода адаптивного управления с алгоритмом оптимального оценивания (6.3)–(6.5) при тех же реализациях всех случайных величин представлен на левом графике рис. 2, иллюстрируя оптимальность адаптивного управления. На правом графике рис. 2 иллюстрируется исключительное достоинство оптимального алгоритма в виде графика текущих оптимальных значений $I(\zeta_t)$, согласованных с текущими данными измерений (y_{1-n}^t, u_1^{t-1}) и удовлетворяющих неравенствам $I(\zeta_t) \leq J(\theta)$. Подчеркнем, что фактически гарантируемое качество управления заметно лучше оптимального значения $J(\theta)$, когда моделируемые возмущения фактически не являются наихудшими. Эти графики иллюстрируют несправедливость традиционной критики идентификации с помощью множественного оценивания (set-membership approach) как слишком грубого метода.

На рис. 3 представлены графики выхода y_t при МНК (слева) и оптимальном (справа) алгоритмах оценивания при детерминированных возмущениях (7.2) и одинаковых начальных данных y_{1-n}^0 . Левый график иллюстрирует превышение выходом y_t оптимальной верхней границы $J(\theta) \approx 2,76$ на два порядка. На правом графике рис. 3 показан нечасто наблюдавшийся небольшой всплеск выхода адаптивного оптимального управления за пределы оптимального интервала $[-J(\theta), J(\theta)]$.

Левый график на рис. 4 иллюстрирует выполнение неравенств (6.12) (ввиду больших всплесков в начальный период представлен только установившийся режим). График u_t (сплошная линия) при всех t находится в трубке $[-\bar{u}_t, \bar{u}_t]$, ограниченной пунктирными линиями. Отметим, что в многочисленных экспериментах не удалось найти пример возмущений, при которых нарушались бы неравенства (6.12). Правый график иллюстрирует выполнение неравенств $I(\zeta_t) \leq J(\theta)$, гарантирующих оптимальность адаптивного управления.

Известно, что переходные процессы в устойчивых линейных стационарных системах с ограниченными внешними возмущениями и без них могут сопровождаться значительными всплесками при неблагоприятных начальных данных [28, 29]. Следует отметить, что в силу “интегральной” природы идентификационного критерия (7.1) МНК, как правило, порождает существенно меньшие всплески на начальном отрезке времени. Оптимальный алгоритм (6.3)–(6.5) достаточно долго приписывает большие всплески наличию неопределенности с близкими к верхней границе 0,9 оценками δ_t . Это иллюстрируют правые графики на рис. 2 и 4, на которых достаточно долго $I(\zeta_t) = 0$ (что эквивалентно оценкам $\delta_t^w = 0$). Численные эксперименты показали, что использование МНК алгоритма оценивания вместо оптимального оценивания (6.3)–(6.5) на начальных отрезках времени длиной от $2 \dim \zeta$ до $10 \dim \zeta$ в большинстве случаев улучшает переходные процессы в адаптивной оптимальной системе.

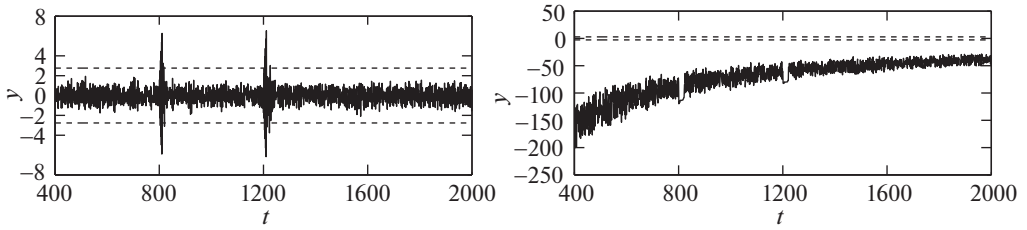


Рис. 1. Типичные выходы y_t при МНК алгоритме оценивания и случайных возмущениях.

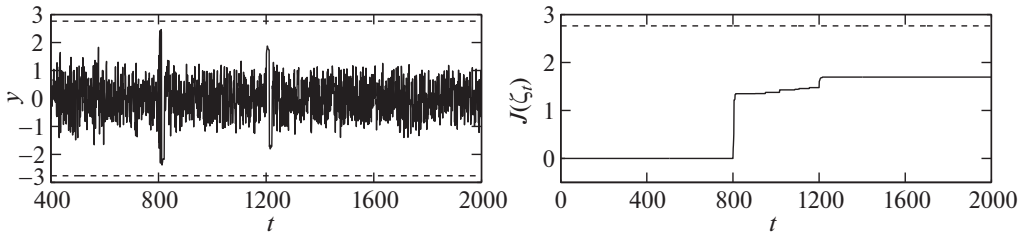


Рис. 2. Слева — выход y_t при оптимальном оценивании и случайных возмущениях; справа — график $I(\zeta_t)$.

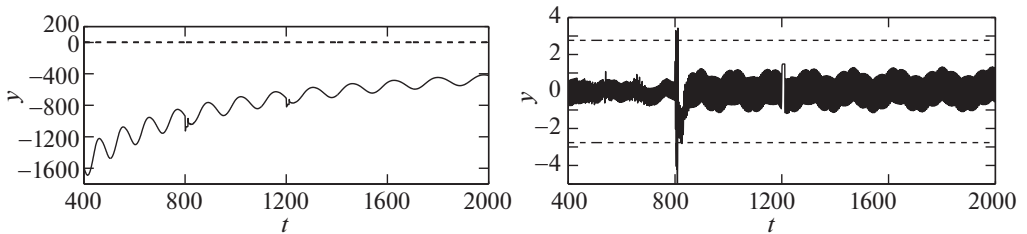


Рис. 3. Графики выхода y_t при МНК (слева) и оптимальном (справа) алгоритмах оценивания и детерминированных возмущениях (7.2).

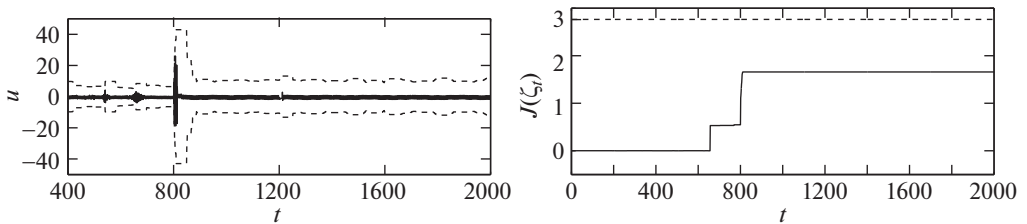


Рис. 4. Слева — графики u_t и $\pm \bar{u}_t$; справа — график $I(\zeta_t)$.

Время на моделирование одного эксперимента на ноутбуке с процессором 4xIntelCore i5-7200U CPU@2.50GHz было менее 0,2 с. при МНК оценивании и в окрестности 2 с. при оптимальном оценивании. Число обновлений оценок на интервале $[1, 2000]$ находилось в промежутке 50–75 и незначительно увеличивалось на интервале $[1, 10^5]$. Эти показатели иллюстрируют работоспособность алгоритма оптимального оценивания в онлайн режиме на примере системы с десятью неизвестными и девятью настраиваемыми параметрами, из которых 3 параметра (нормы внешнего ограниченного возмущения и неопределенностей по выходу и управлению) не оцениваются в рамках традиционных методов синтеза адаптивного управления.

8. Заключение

Согласно [30] “Основная задача управления для заданного процесса может быть сформулирована следующим образом: имея некоторую априорную информацию о процессе и конечное множество измерений, требуется построить регулятор с обратной связью, обеспечивающий заданное качество управления”. Более амбициозным вариантом этой задачи является требование асимптотической оптимальности управления за счет уточнения информации об управляемом процессе. Многие практические задачи управления формулируются в терминах допусков на отклонения выходов системы управления от заданных значений. Таким задачам соответствуют основное сигнальное пространство ℓ_∞ ограниченных последовательностей и соответствующая ему теория робастного управления в ℓ_1 -постановке. Настоящая работа посвящена решению для объекта с авторегрессионной номинальной моделью проблемы применения ℓ_1 -теории в стандартном для приложений случае, когда априорная информация о параметрах номинальной модели и уровнях возмущений и неопределенностей недостаточна для априорного синтеза регулятора и недостающую информацию приходится извлекать из текущих данных измерений y_{1-n}^t, u_0^{t-1} . При четко сформулированных априорных предположениях предложено решение задачи оптимальной стабилизации в условиях сильной априорной неопределенности и неидентифицируемости неизвестных параметров, базирующееся на множественном оценивании неизвестных параметров и использовании показателя качества задачи управления как идентификационного критерия.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Условие робастной устойчивости (3.3) следует из теоремы 7 [24], примененной к системе (2.1), (3.1). Для доказательства второго утверждения теоремы достаточно применить теоремы 5 и 6 [24] (см. также [15]). Для этого необходимо представить систему (2.1), (3.1) в стандартной $M - \Delta$ форме, представленной на рис. 5 и имеющей блочный

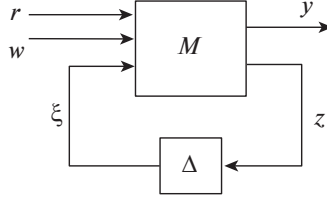


Рис. 5. М-Δ форма системы (2.1), (3.1).

вид.

$$(П.1) \quad \begin{pmatrix} y \\ z \\ \xi \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} r \\ w \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{yr} & M_{yw} & M_{y\xi} \\ M_{zr} & M_{zw} & M_{z\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ w \\ \xi \end{pmatrix}, \quad \xi = \Delta z.$$

Для системы (2.1), (3.1) сигнал $r = c^w \mathbf{1}$, $\mathbf{1} = (1, 1, \dots)$, и М – Δ форма имеет вид

$$(П.2) \quad \begin{pmatrix} y \\ z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ w \\ \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 & \delta^w & \delta^y & \delta^u \\ 0 & \delta^w & \delta^y & \delta^u \\ -\frac{c^w q}{b_1} & \delta^w G^\xi(q^{-1}) & \delta^y G^\xi(q^{-1}) & \delta^u G^\xi(q^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ w \\ \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix},$$

где

$$z_t = \begin{pmatrix} y_t \\ u_t \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta^1 & 0 \\ 0 & \Delta^2 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} \Delta^1(y) \\ \Delta^2(u) \end{pmatrix}.$$

Первая и вторая строки матрицы М в (П.2) соответствуют равенству (3.2). Третья строка М соответствует представлению оптимального регулятора (3.1) в форме

$$\begin{aligned} u_t &= -c^w/b_1 + G^\xi(q^{-1})y_t = \\ &= -c^w/b_1 + \delta^w G^\xi(q^{-1})w_t + \delta^y G^\xi(q^{-1})\xi_t^1 + \delta^u G^\xi(q^{-1})\xi_t^2. \end{aligned}$$

Формула для $J(\theta)$ в (3.4) соответствует показателю качества (2.4), в котором sup берется на множестве возмущений v с неопределенностями Δ^1 и Δ^1 с конечной памятью (см. [12]), и выводится по теореме 5 [24] следующим образом. Положим $\|z\|_{ss} = (\|z^1\|_{ss}, \dots, \|z^p\|_{ss})^T$ для векторной последовательности $z \in \ell_e^p$ и

$$[M]_1 := \begin{pmatrix} \|M_{11}\|_1 & \cdots & \|M_{1p}\|_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \|M_{q1}\|_1 & \cdots & \|M_{qp}\|_1 \end{pmatrix}$$

для устойчивой $q \times p$ матрицы M импульсных откликов $M_{ij} \in \ell_1$. Для матрицы M из (П.1) положим

$$M_{ss}(r) := \begin{pmatrix} [M_{yr}r]_{ss} + [M_{yw}]_1 & [M_{y\xi}]_1 \\ [M_{zr}r]_{ss} + [M_{zw}]_1 & [M_{z\xi}]_1 \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 5 из [24]

$$J(\theta) = [M_{yr}r]_{ss} + [M_{yw}]_1 + [M_{y\xi}]_1(I - [M_{z\xi}]_1)^{-1}([M_{zr}r]_{ss} + [M_{zw}]_1).$$

Тогда для системы (П.2) имеем

$$\begin{aligned} J(\theta) &= \delta^w + (\delta^y \ \delta^u) \left(I - \begin{pmatrix} \delta^y & \delta^u \\ \delta^y \|G^\xi\| & \delta^u \|G^\xi\| \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \delta^w \\ |c^w| \|\frac{-q}{b_1} r\|_{ss} + \delta^w \|G^\xi\| \end{pmatrix} = \\ &= \delta^w + (\delta^y \ \delta^u) \begin{pmatrix} 1 - \delta^y & -\delta^u \\ -\delta^y \|G^\xi\| & 1 - \delta^u \|G^\xi\| \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \delta^w \\ |c^w/b_1| + \delta^w \|G^\xi\| \end{pmatrix} = \\ &= \delta^w + \frac{1}{1 - \delta^y - \delta^u \|G^\xi\|} (\delta^y \ \delta^u) \begin{pmatrix} 1 - \delta^u \|G^\xi\| & \delta^u \\ \delta^y \|G^\xi\| & 1 - \delta^y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^w \\ |c^w/b_1| + \delta^w \|G^\xi\| \end{pmatrix} = \\ &= \delta^w + \frac{1}{1 - \delta^y - \delta^u \|G^\xi\|} (\delta^y \ \delta^u) \begin{pmatrix} \delta^w + \delta^u |c^w/b_1| \\ (1 - \delta^y) |c^w/b_1| + \delta^w \|G^\xi\| \end{pmatrix} = \\ &= \delta^w + \frac{\delta^y \delta^w + \delta^u |c^w| \|G^\xi\| + \delta^u \delta^w \|G^\xi\|}{1 - \delta^y - \delta^u \|G^\xi\|} = \frac{\delta^w + \delta^u |c^w/b_1|}{1 - \delta^y - \delta^u \|G^\xi\|}. \end{aligned}$$

Наконец, монотонная сходимость $J_\mu(\theta)$ к $J(\theta)$ в (3.4) гарантируется теоремой 6 из [24].

Доказательство утверждения 1. Вектор $\hat{\theta}$ удовлетворяет априорному предположению **АП1** в силу условий утверждения 1. Для всех $t > 0$ положим $\hat{v}_t = \hat{a}(q^{-1})y_t - \hat{b}_1 u_{t-1}$. Тогда объект управления с вектором параметров $\hat{\theta}$ и суммарным возмущением $\hat{v}$ удовлетворяет уравнению (2.1), и в силу (4.1) возмущение $\hat{v}$ удовлетворяет неравенствам

$$|\hat{v}_t - \hat{c}^w| \leq \hat{\delta}^w + \hat{\delta}^y p_t^y + \hat{\delta}^u p_t^u.$$

Значения $\hat{v}_t$ можно представить в виде (2.2), выбрав подходящие значения w_t , $\Delta^1(y)_t$, $\Delta^2(u)_t$, удовлетворяющие неравенствам (2.3), и обеспечив тем самым справедливость априорного предположения **АП2**.

Доказательство теоремы 2.

Докажем, что при каждом обновлении оценок расстояние от ζ_t до полупространства Ω_{t+1} больше ε . Поскольку ζ_t изменяется, только если $\psi_{t+1}^T \zeta_t < \nu_{t+1} - \varepsilon |\psi_{t+1}|$ и $\psi_{t+1}^T \hat{\zeta} \geq \nu_{t+1}$ для любого $\hat{\zeta} \in \Omega_{t+1}$, то

$$\varepsilon |\psi_{t+1}| < |\psi_{t+1}^T (\hat{\zeta} - \zeta_t)| \leq |\psi_{t+1}| |\hat{\zeta} - \zeta_t|$$

и, следовательно, $|\hat{\zeta} - \zeta_t| > \varepsilon$ для любого $\hat{\zeta} \in \Omega_{t+1}$. Таким образом, после добавления к описанию Z_t неравенства $\psi_{t+1}^T \hat{\zeta} \geq \nu_{t+1}$, описывающего полупространство Ω_{t+1} , полиэдр Z_{t+1} и все последующие не пересекаются с ε -окрестностью вектора $\zeta_t \in Z_t$. Из этого следует, что $\varepsilon/2$ -окрестности различных оценок ζ_t не пересекаются между собой. Так как $Z_{t+1} \subset Z_t$ для всех t , число изменений оценок Z_t и ζ_t будет конечным, если оценки ζ_t лежат в ограниченном множестве. Из уравнения адаптивного регулятора (6.1) для всех t имеем

$$|u_t| \leq |c_t^w / b_1^t| + \|G^{\xi_t}\| \|y_{t-n+1}^t\|.$$

Тогда для объекта (2.1) на промежутке времени $[0, t]$ справедливы неравенства (5.5) с параметрами

$$\tilde{\delta}_t^e = \delta^w + \delta^u \max_{s \leq t} |c_s^w / b_1^s|, \quad \tilde{\delta}_t = \delta^y + \delta^u \max_{s \leq t} \|G^{\xi_s}\|.$$

Следовательно $\tilde{\zeta}_t = (\xi_t^T, c_t^w, \tilde{\delta}_t^e, \tilde{\delta}_t)^T \in Z_t$ при всех t . Если выполнено предположение (6.7), то $I(\tilde{\zeta}_t) \leq \bar{I}$, где $\bar{I}$ определено в (6.9) (при этом правое неравенство в (6.9) очевидно следует из определения G_u в (6.6)). Из (6.5) для всех t следует

$$I(\zeta_t) \leq I(\tilde{\zeta}_t)$$

и тогда $I(\zeta_t) \leq \bar{I}$. Из ограниченности $I(\zeta_t)$ следует ограниченность оценок ζ_t и, таким образом, конечность числа обновлений оценок ξ_t и Z_t . Тогда $\zeta_t = \zeta_\infty = (\xi_\infty^T, c_\infty^w, \delta_\infty^e, \delta_\infty)$ с некоторого момента времени t_∞ и

$$(П.3) \quad \psi_{t+1}^T \zeta_\infty \geq \nu_{t+1} - \varepsilon |\psi_{t+1}| \quad \forall t \geq t_\infty.$$

Из (П.3) следует, что для всех $t \geq t_\infty$

$$\begin{aligned} |a_\infty(q^{-1})y_{t+1} - b_\infty(q^{-1})u_t - c_\infty^w| &\leq \delta_\infty^e + \delta_\infty p_{t+1} + \varepsilon |\psi_{t+1}| \leq \\ &\leq \delta_\infty^e + \delta_\infty p_{t+1} + \varepsilon(\sqrt{n+1} p_{t+1} + \sqrt{2} + |u_t|) \leq \\ &\leq \delta_\infty^e + \varepsilon(\sqrt{2} + |c_\infty^w / b_1^\infty|) + [\delta_\infty + \varepsilon(\sqrt{n+1} + \|G^{\xi_\infty}\|)] p_{t+1}. \end{aligned}$$

В силу утверждения 1 из раздела 4 из полученного неравенства следует, что выход y при всех $t \geq t_*$ удовлетворяет уравнению (2.1) с вектором параметров ζ_∞^e вида (6.10). Тогда теорема 1 гарантирует левое неравенство в (6.8). Для доказательства правого неравенства в (6.8), разность $I(\zeta_\infty^e) - I(\zeta_\infty)$ оценим сверху с помощью неравенства

$$\frac{C_1 + \varepsilon_1}{C_2 - \varepsilon_2} - \frac{C_1}{C_2} = \frac{C_2 \varepsilon_1 + C_1 \varepsilon_2}{C_2(C_2 - \varepsilon_2)} < \frac{\varepsilon_1 + C_1 \varepsilon_2}{(C_2 - \varepsilon_2)^2}$$

с параметрами $C_1 = \delta_\infty^e$, $C_2 = 1 - \delta_\infty \leq 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon(\sqrt{2} + |c_\infty^w / b_1^\infty|)$, $\varepsilon_2 = \varepsilon(\sqrt{n+1} + \|G^{\xi_\infty}\|)$. Тогда

$$I(\zeta_\infty^e) - I(\zeta_\infty) < \frac{\sqrt{2} + |c_\infty^w / b_1^\infty| + \delta_\infty^e(\sqrt{n+1} + \|G^{\xi_\infty}\|)}{(1 - \delta_\infty - \varepsilon(\sqrt{n+1} + \|G^{\xi_\infty}\|))^2} \varepsilon$$

и, следовательно, K_{ζ_∞} имеет вид (6.11). Первое утверждение теоремы 2 доказано.

Докажем второе утверждение. Пусть теперь в замкнутой адаптивной системе выполняются неравенства (6.12). Тогда из уравнения объекта (2.1) следуют неравенства (5.3) с постоянными $C_1 = |c^w/b_1|$ и $C_2 = \|G^\xi\|$. Это означает, что для неизвестного вектора параметров ζ , определенного в (5.9), при всех t выполняются целевые неравенства (5.5) с параметрами δ^e, δ вида (5.8) и включения $\zeta \in Z_t$. Тогда в силу выбора оптимальных оценок ζ_t согласно (6.5) при всех t

$$I(\zeta_t) \leq I(\zeta) = J(\theta),$$

где равенство $I(\zeta) = J(\theta)$ установлено в (5.9). Отсюда, как и в первом утверждении теоремы 2, следуют сходимость оценок ξ_t и Z_t за конечное время и неравенства (6.13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rohrs C., Valavani L., Athans M., Stein G. "Robustness of adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics" // The 21st IEEE Conference on Decision and Control. 1982. P. 3–11. <https://doi.org/10.1109/CDC.1982.268392>
2. Rohrs C., Valavani L., Athans M., Stein G. Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics // IEEE Transactions Automatic Control. 1985. V. 30. No. 9. P. 881–889. <https://doi.org/10.1109/TAC.1985.1104070>
3. Zhou K., Doyle J.C., Glover K. Robust and Optimal Control. Upper Saddle River. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
4. Annaswamy A.A., Fradkov A.L. A historical perspective of adaptive control and learning // Annual Reviews in Control. 2021. V. 52. P. 18–41. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2021.10.014>
5. Narendra K., Annaswamy A. Stable adaptive systems. Dover, 2005.
6. Ioannou P.A., Sun J. Robust adaptive control. PTR Prentice-Hall, NJ: Upper Saddle River, 1996.
7. Smith R.S., Dahleh M. (Eds.) The Modeling of Uncertainty in Control Systems (Lecture Notes in Control and Information Sciences). V. 192. London, U.K.: Springer-Verlag, 1994.
8. Ljung L., Guo L. The Role of Model Validation for Assessing the Size of the Unmodeled Dynamics // IEEE Trans. Automat. Control. 1997. V. 42. P. 230–239. <https://doi.org/10.1109/9.623084>
9. FLamnabhi-Lagarrique F., Annaswamy A., Engell S., Isaksson A., Khargonekar P., Murray R., Nijmeijer H., Samad T., Tilbury D., Van den Hof P. Systems & Control for the future of humanity, research agenda: Current and future roles, impact and grand challenges // Annual Reviews in Control. 2017. V. 43. P. 1–64. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2017.04.001>
10. Khammash M., Pearson J.B. Performance robustness of discrete-time systems with structured uncertainty // IEEE Trans. Automat. Control. 1991. V. AC-36. No. 4. P. 398–412. <https://doi.org/10.1109/9.75099>

11. *Khammash M., Pearson J.B.* Analysis and design for robust performance with structured uncertainty // *Syst. Control Lett.* 1993. V. 20. No. 3. P. 179–187.
12. *Khammash M.H.* Robust steady-state tracking // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1995. V. 40. No. 11. P. 1872–1880. <https://doi.org/10.1109/9.471208>
13. *Khammash M.H.* Robust Performance: Unknown Disturbances and Known Fixed Inputs // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1997. V. 42. No. 12. P. 1730–1734. <https://doi.org/10.1109/9.650028>
14. *Соколов В.Ф.* Асимптотическое робастное качество дискретной системы слежения в ℓ_1 -метрике // *АиТ.* 1999. № 1. С. 101–112.
Sokolov V.F. Asymptotic Robust Performance of the Discrete Tracking System in the ℓ_1 -metric // *Autom. Remote Control.* 1999. V. 60. No. 1. Part 2. P. 82–91.
15. *Соколов В.Ф.* Робастное управление при ограниченных возмущениях. Сыктывкар: Коми научный центр УрО РАН. 2011.
16. *Соколов В.Ф.* Адаптивное робастное управление дискретным скалярным объектом в ℓ_1 -постановке // *АиТ.* 1998. № 3. С. 107–131.
Sokolov V.F. Adaptive Robust Control of a Discrete Scalar Object in the ℓ_1 -statement // *Autom. Remote Control.* 1998. V. 59. No. 3. Part 2. P. 392–411.
17. *Sokolov V.F.* Adaptive ℓ_1 robust control for SISO system // *Systems Control Lett.* 2001. V. 42. No. 5. P. 379–393. [https://doi.org/10.1016/S0167-6911\(00\)00110-9](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(00)00110-9)
18. *Guo L.* Feedback and uncertainty: Some basic problems and results // *Annual Reviews in Control.* 2020 V. 49. P. 27–36. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2020.04.001>
19. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука. 1981.
20. *Sokolov V.F.* Control-oriented model validation and errors quantification in the ℓ_1 setup // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2005. T. 50. No. 10. P. 1501–1508. <https://doi.org/10.1109/TAC.2005.856646>.
21. *Sokolov V.F.* Model Evaluation for Robust Tracking Under Unknown Upper Bounds on Perturbations and Measurement Noise // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2014. T. 59. No. 2. P. 483–488. <https://doi.org/10.1109/TAC.2013.2273295>.
22. *Соколов В.Ф.* Моделирование системы субоптимального робастного слежения при неизвестных верхних границах внешних и операторных возмущений // *АиТ.* 2014. № 5. С. 115–136.
Sokolov V.F. Modeling the System of Suboptimal Robust Tracking Under Unknown Upper Bounds on the Uncertainties and External Disturbances // *Autom. Remote Control.* 2014. V. 75. No. 5. P. 900–916.
23. *Соколов В.Ф.* Задачи адаптивного оптимального управления дискретными системами с ограниченным возмущением и линейными показателями качества // *АиТ.* 2018. № 6. С. 155–171.
Sokolov V.F. Problems of Adaptive Optimal Control of Discrete-Time Systems under Bounded Disturbance and Linear Performance Indexes // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 6. P. 1086–1099.
24. *Sokolov V.F.* ℓ_1 robust performance of discrete-time systems with structured uncertainty // *Syst. Control Lett.* 2001. V. 42. No. 5. P. 363–377. [https://doi.org/10.1016/S0167-6911\(00\)00109-2](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(00)00109-2)

25. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex optimization. N.Y.: Cambridge University Press, 2004.
26. *Guo L.* Self-Convergence of Weighted Least-Squares with Applications to Stochastic Adaptive Control // IEEE Trans. Automat. Control. 1996 V. 41. No. 1. P. 79–89. <https://doi.org/10.1109/9.481609>
27. *Guo L., Chen H.-F.* The Åström-Wittenmark self-tuning regulator revisited and ELS-based adaptive trackers // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. No. 7. P. 802–812.
28. *Поляк Б.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В., Щербakov П.С., Смирнов Г.В.* Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // АиТ. 2015. № 6. С. 18–41.
Polyak B.T., Tremba A.A., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S., Smirnov G.V. Large Deviations in Linear Control Systems with Nonzero Initial Conditions // Autom. Remote Control. 2016. V. 76. No. 6. P. 957–976.
29. *Polyak D.T., Shcherbakova P.S., Smirnov G.* Peak effects in stable linear difference equations // J. Diff. Equat. and Appl. 2018. V. 24. No 9. P. 1488–1502. <https://doi.org/10.1080/10236198.2018.1504930>
30. *Dahleh M.A., Doyle J.C.* From Data to Control. Lecture Notes in Control and Information Sciences. 192. The modeling of Uncertainty in Control Systems. Springer Verlag, 1994. P. 61–63.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 25.04.2022

После доработки 24.01.2023

Принята к публикации 26.01.2023

Стохастические системы

© 2023 г. А.В. БОСОВ, д-р техн. наук (ABosov@frccsc.ru)
(Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, Москва)

ФИЛЬТРАЦИЯ СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ¹

Представлена модель стохастической системы наблюдения, позволяющая учесть временные задержки между поступившим наблюдением и фактическим состоянием наблюдаемого объекта, сформировавшим эти наблюдения. Такого рода задержки возможны при наблюдении за движением объекта в водной среде с применением акустических сонаров и оказывают принципиальное влияние на точность отслеживания положения. Приведены уравнения для решения оптимальной в среднем квадратическом задачи фильтрации. Поскольку практическое использование оптимального решения фактически невозможно из-за вычислительной сложности, основное внимание уделено альтернативному, неоптимальному, но вычислительно эффективному подходу. Именно, к предложенной модели адаптирован условно-минимаксный нелинейный фильтр (УМНФ), сформулированы достаточные условия существования его оценки. Проведен вычислительный эксперимент на близкой к практическим потребностям модели. Результаты эксперимента показали, с одной стороны, работоспособность УМНФ в рассматриваемой модели, с другой — значительное падение качества оценивания в сравнении с моделью без случайной задержки наблюдений, что можно рассматривать как источник для дальнейшего исследования модели и связанных с нею задач.

Ключевые слова: нелинейная стохастическая система наблюдения, наблюдения со случайными запаздываниями, условно-минимаксный нелинейный фильтр, имитационное моделирование.

DOI: 10.31857/S000523102306003X, EDN: CSDMWT

1. Введение

Одним из самых универсальных инструментов описания поведения систем, изменяющихся с течением времени, являются модели стохастических динамических систем. Если при этом информация о неизвестном состоянии системы доступна только посредством косвенных наблюдений, то ключевое

¹ Работа выполнена с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика» ФИЦ ИУ РАН, Москва).

значение для решения практически любых задач получает задача фильтрации — оценивания текущего состояния системы вместе с поступлением очередных наблюдений. Решение задачи фильтрации, важное само по себе, дает средства к решению других задач как анализа (например, идентификации параметров), так и синтеза (например, управления с обратной связью) стохастических систем. Эти задачи в течение многих лет сохраняют актуальность и для множества приложений, и для фундаментальных исследований. Среди множества приложений одними из самых значимых являются примеры применения методов стохастической фильтрации в задачах слежения и навигации [1]. Традиционный прикладной контекст таких приложений — это летательные аппараты (ЛА), управляемые или беспилотные, и радиолокационные средства наблюдения. В последние годы те же задачи даже более часто исследуются в другом прикладном контексте, в связи с автономными подводными аппаратами (Autonomous underwater vehicles, AUV) или «подводными дронами» [2] (ПА). Этот класс роботизированных систем находит много разнообразных применений, и в большинстве из них требуется решать задачи слежения и навигации [3–5]. К моделям этих систем вполне применимы известные методы стохастической фильтрации начиная от фильтра Калмана [6] и его нелинейных субоптимальных аналогов типа расширенного фильтра Калмана [7] до модных современных концепций сигма-точечных фильтров (пионерская работа по этой теме — [8], удачный обзор — [9]. Однако для задач, связанных с водной средой, обнаруживаются существенные особенности. Так, хорошо известным свойством акустических измерителей является зависимость скорости распространения акустической волны от температуры, солености и давления воды [10]. Это обстоятельство хорошо изучено в [11] в задаче построения робастной навигационной системы, в которой объединяются данные измерений акустических датчиков с информацией от других датчиков в бортовой инерциальной навигационной системе. Близкая модель и подход применены в [12], но с акцентом на результативность использования доплеровских сенсоров. Эта работа навела на мысль о возможности исследования модели наблюдателя, учитывающей задержки наблюдений в зависимости от дальности до объекта. Действительно, при моделировании движения подводных, в частности автономных, аппаратов и типовых средств наблюдения за ними наблюдения за положением аппарата считаются доступными немедленно и не учитывается временная задержка между инициацией очередного такта измерителя и получением результата этого измерения. Традиционно этой разницей пренебрегают, что вполне обосновано для ЛА и различных радиолокаторов и вполне физически понятно. Кроме того, не слишком популярные модели с временной задержкой таковы еще и потому, что никакого нового качества в задачу фильтрации детерминированная известная задержка не вносит. Наконец, надо понять, какова природа задержки, чтобы предложить содержательную модель. Движение ПА в отличие от ЛА дает содержательные ответы на эти вопросы. Именно, поскольку измерители используют не радио, а звуковые волны, которые передаются водной средой,

то задержки, во-первых, могут быть весьма существенны, а во-вторых, будут меняться вместе с изменением дальности до наблюдаемого объекта. Исходя из этих положений в статье предложена принципиально новая модель стохастической динамической системы наблюдения. Она описана в разделе 2. В разделах 3 и 4 приведены решения задачи фильтрации — оптимальный и условно-минимаксный фильтры [13]. В разделе 5 обсуждаются результаты численного эксперимента, в котором моделируется движение ПА в плоскости и с постоянной скоростью, за которым ведутся акустические наблюдения их двух удаленных точек (измеряются дальности и углы до цели). Иллюстрируется принципиальная разница результативности оценивания положения аппарата по наблюдениям без и с задержкой. Также обсуждаются перспективы решения других связанных с рассматриваемой моделью задач, в частности возможность идентификации параметров движения.

2. Модель динамической системы со случайными задержками наблюдений

Система наблюдения описывается в дискретном времени $t = -T, -T + 1, \dots, 0, 1, \dots$. Началом процесса фильтрации предполагается момент $t = 0$, в который требуется получить первую оценку состояния, но эволюционировать система начала некоторое время T ранее. Состояние системы $x_t \in \mathbb{R}^x$ описывается разностными уравнениями общего вида:

$$(1) \quad x_t = \varphi_t(x_{t-1}, w_t), \quad x_{-T-1} = \eta,$$

где $w_t \in \mathbb{R}^w$ — дискретный белый шум, моделирующий возмущения, $\eta \in \mathbb{R}^x$ — начальные условия.

Значение τ_t временной задержки наблюдений моделируется случайной последовательностью, элементы которой — дискретные случайные величины со значениями во множестве $\{0, 1, \dots, T\}$, и является функцией состояния x_t :

$$(2) \quad \tau_t = \theta_t(x_t).$$

Косвенные наблюдения $y_t \in \mathbb{R}^y$ описываются уравнениями следующего вида:

$$(3) \quad y_t = \psi_t(x_{t-\tau_t}, v_t),$$

где $v_t \in \mathbb{R}^v$ — дискретный белый шум, моделирующий ошибки измерения. Предполагается, что векторы η, w_t, v_t независимы в совокупности.

Таким образом, единственным отличием данной модели от традиционной нелинейной системы наблюдения с дискретным временем является зависимость текущего наблюдения y_t от состояния, вычисленного раньше момента t на случайную величину τ_t . Такая формулировка следует предложенной выше прикладной интерпретации задачи как слежение за движением автономного ПА. Цель предложить модель максимально общего вида не ставится,

например, в (2) нет самостоятельного возмущения, а в (3) все наблюдения запаздывают на одну и ту же величину. При необходимости можно расширить модель и учесть дополнительное возмущение в (2), просто расширив им вектор состояния. Также можно τ_t сделать вектором. Но более важным представляется сформировать качественное представление о модели (1)–(3), даже если она имеет не самый общий вид.

Рассматривается задача оценивания состояния x_t по наблюдениям y_s , $s = 0, 1, \dots, t$, критерий точности $\hat{x}_t$ среднеквадратический: $E \{ \|x_t - \hat{x}_t\|^2 \}$, $E \{x\}$ — математическое ожидание x , $\|x\|$ — обычная евклидова норма вектора x .

Отметим, что есть ряд причин, согласно которым модели как состояния (1), так и наблюдений (3) имеет смысл уточнять. Так, общим условием существования решения задачи фильтрации является наличие вторых моментов у процесса x_t , что обеспечивается ограничением линейного роста на функции φ_t , а это для практических целей слишком обременительно. Компромиссное описание требуется также для применения ряда наиболее популярных субоптимальных фильтров, например расширенного фильтра Калмана [7] или сигма-точечных фильтров [8]. И хотя в данной модели такие методы фильтрации применить не получится, но потребность замены модели (1)–(3) на некоторую диффузионного типа альтернативу ясна. Наконец, упрощенная форма (1)–(3) нужна для записи уравнений оптимальной фильтрации, представленных в следующем разделе.

3. Оптимальная фильтрация

Предлагаемый и, возможно, единственный подход к получению уравнений оптимальной фильтрации в рассматриваемой задаче состоит в записи рекуррентных байесовских соотношений для апостериорной плотности вероятности, что является типичным решением для дискретных систем наблюдения [14]. С целью упрощения представления предлагается уточнить модель (1)–(3) следующим образом:

$$(4) \quad \begin{aligned} x_t &= \varphi_t(x_{t-1}) + w_t, & x_{-T-1} &= \eta, \\ y_t &= \psi_t(x_{t-\tau_t}) + v_t. \end{aligned}$$

Предполагаются известными плотности вероятности векторов w_t , η , v_t . Для обозначения этих плотностей, а также плотностей других, в том числе условных распределений далее будем использовать один и тот же способ. Пусть случайный вектор $(x', y')'$, где $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$, $'$ — символ транспонирования, имеет и совместную, и маргинальные плотности вероятности. Тогда будем обозначать через $f_x(X)$ маргинальную плотность x , через $f_{x,y}(X, Y)$ совместную плотность x и y , через $f_{x|y}(X|Y)$ условную плотность x относительно y (предполагая дополнительно, что $f_y(Y) > 0$). Таким образом, для обозначения аргументов, соответствующих случайным переменным, используются те же буквы, только прописные.

Через y^t обозначим вектор всех наблюдений до момента t включительно, т.е. $y^t = (y'_0, \dots, y'_t)'$.

Заметим, что система с наблюдениями (4) не является марковской, но может быть представлена как компонент марковского процесса путем расширения вектора состояния. Введем новый вектор состояния $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^{(T+1)p_x}$ следующим образом: $\mathbf{x}_t = (x'_{t-T}, \dots, x'_{t-1}, x'_t)'$, т.е. включим в него все состояния от момента $t - T$ до текущего t . Обратим внимание, что для расширенного состояния и соответствующих ему вероятностных характеристик, используемых далее, записываются символы, выделенные полужирным шрифтом. Уравнения состояния теперь примут вид

$$(5) \quad \begin{aligned} (\mathbf{x}_t)_1^{p_x} &= (\mathbf{x}_{t-1})_{p_x+1}^{2p_x}, \\ &\dots \\ (\mathbf{x}_t)_{(T-1)p_x+1}^{Tp_x} &= (\mathbf{x}_{t-1})_{Tp_x+1}^{(T+1)p_x}, \quad \mathbf{x}_t = \Phi_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{w}_t, \quad \mathbf{w}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ w_t \end{pmatrix}, \\ (\mathbf{x}_t)_{Tp_x+1}^{(T+1)p_x} &= \varphi_t \left((\mathbf{x}_{t-1})_{Tp_x+1}^{(T+1)p_x} \right) + w_t, \end{aligned}$$

где через $(\mathbf{x})_i^j$ обозначен подвектор вектора $\mathbf{x}$ с элементами от i -го до j -го. Таким образом, функция состояния φ_t из (4) заменяется на Φ_t из (5). Функцию наблюдателя ψ_t заменит Ψ_t :

$$\Psi_t(\mathbf{x}_t) = \left(\psi'_t((\mathbf{x}_t)_1^{p_x}), \dots, \psi'_t((\mathbf{x}_t)_{Tp_x+1}^{(T+1)p_x}) \right)' = \left(\psi'_t(x_{t-T}), \dots, \psi'_t(x_t) \right)'.$$

Вместо (2) зададим функцию $\Theta_t(\mathbf{x}_t)$, принимающую значения во множестве единичных векторов $\{e_0, \dots, e_T\}$ пространства $\mathbb{R}^{T+1}$ так, чтобы $\Theta_t(\mathbf{x}_t) = e_i$, если $\theta_t(x_t) = i$. Это обозначение позволяет записать уравнение наблюдений в виде

$$(6) \quad y_t = \Theta'_t(\mathbf{x}_t) \Psi_t(\mathbf{x}_t) + v_t.$$

Таким образом, имеется каноническая форма марковской системы наблюдения с дискретным временем (5)–(6). Для условного распределения состояния $\mathbf{x}_t$ этой системы относительно наблюдений y_s , $s = 0, \dots, t$, можно формально записать рекуррентные байесовские соотношения для апостериорной плотности вероятности [14]:

$$(7) \quad \begin{aligned} f_{\mathbf{x}_t|y^t}(\mathbf{x}_t|Y^t) &= \\ &= \frac{\int f_{\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}) f_{\mathbf{x}_{t-1}|y^{t-1}}(\mathbf{x}_{t-1}|Y^{t-1}) d\mathbf{x}_{t-1} \cdot f_{y_t|\mathbf{x}_t}(Y_t|\mathbf{x}_t)}{\int \int f_{\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}) f_{\mathbf{x}_{t-1}|y^{t-1}}(\mathbf{x}_{t-1}|Y^{t-1}) d\mathbf{x}_{t-1} \cdot f_{y_t|\mathbf{x}_t}(Y_t|\mathbf{x}_t) d\mathbf{x}_t}. \end{aligned}$$

Записывается (7) в предположении, что все фигурирующие в выражении плотности существуют, поэтому требуются, как минимум, некоторые уточнения в связи с переходной плотностью $f_{\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}}(\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1})$, записать которую

можно только с помощью обобщенных δ -функций. Кроме того, можно уточнить вид плотности $f_{y_t|\mathbf{x}_t}(Y_t|\mathbf{X}_t)$. С этой целью внесем коррективы в вывод (7). Повторяя первые шаги, представим апостериорную плотность в виде

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{x}_t|y^t}(\mathbf{X}_t|Y^t) &= \frac{f_{\mathbf{x}_t,y^t}(\mathbf{X}_t,Y^t)}{f_{y^t}(Y^t)} = \frac{f_{\mathbf{x}_t,y^{t-1},y_t}(\mathbf{X}_t,Y^{t-1},Y_t)}{f_{y^t}(Y^t)} = \\ &= \frac{f_{\mathbf{x}_t,y^{t-1}}(\mathbf{X}_t,Y^{t-1}) f_{y_t|\mathbf{x}_t}(Y_t|\mathbf{X}_t)}{f_{y^t}(Y^t)}. \end{aligned}$$

Далее для первого множителя:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{x}_t,y^{t-1}}(\mathbf{X}_t,Y^{t-1}) &= f_{x_{t-T},\dots, x_t,y^{t-1}}(X_{t-T},\dots,X_t,Y^{t-1}) = \\ &= \int f_{x_{t-T-1}, x_{t-T},\dots, x_t,y^{t-1}}(X_{t-T-1},X_{t-T},\dots,X_t,Y^{t-1}) dX_{t-T-1} = \\ &= \int f_{x_t|\mathbf{x}_{t-1}, y^{t-1}}(X_t|\mathbf{X}_{t-1},Y^{t-1}) f_{\mathbf{x}_{t-1}, y^{t-1}}(\mathbf{X}_{t-1},Y^{t-1}) dX_{t-T-1} = \\ &= \int f_{x_t|x_{t-1}}(X_t|X_{t-1}) f_{\mathbf{x}_{t-1}|y^{t-1}}(\mathbf{X}_{t-1}|Y^{t-1}) dX_{t-T-1} \cdot f_{y^{t-1}}(Y^{t-1}) = \\ &= \int f_{\mathbf{x}_{t-1}|y^{t-1}}(\mathbf{X}_{t-1}|Y^{t-1}) dX_{t-T-1} \cdot f_{x_t|x_{t-1}}(X_t|X_{t-1}) f_{y^{t-1}}(Y^{t-1}) = \\ &= \int f_{\mathbf{x}_{t-1}|y^{t-1}}(\mathbf{X}_{t-1}|Y^{t-1}) dX_{t-T-1} \cdot f_{w_t}(X_t - \varphi_t(X_{t-1})) f_{y^{t-1}}(Y^{t-1}). \end{aligned}$$

Последние преобразования выполнены в предположении, что $T > 1$, которое должно выполняться, чтобы рассматриваемая модель запаздывания имела смысл.

Выполненный шаг с первым множителем позволяет вместо переходной плотности $f_{\mathbf{x}_t|\mathbf{x}_{t-1}}(\mathbf{X}_t|\mathbf{X}_{t-1})$ расширенного состояния использовать переходную плотность $f_{x_t|x_{t-1}}(X_t|X_{t-1})$ исходного состояния и, соответственно, вместо $\int \cdot d\mathbf{X}_{t-1}$, который вычисляется по пространству $\mathbb{R}^{(T+1)p_x}$, считать интеграл $\int \cdot dX_{t-T-1}$ по пространству $\mathbb{R}^{p_x}$.

Теперь для второго множителя:

$$\begin{aligned} f_{y_t|\mathbf{x}_t}(Y_t|\mathbf{X}_t) &= \sum_{i=0}^T I(\Theta_t(\mathbf{X}_t) = e_i) f_{y_t|\mathbf{x}_t}(Y_t|\mathbf{X}_t, \Theta_t(\mathbf{X}_t) = e_i) = \\ &= \sum_{i=0}^T I(\theta_t(X_t) = i) f_{y_t|\mathbf{x}_t, \tau_t=i}(Y_t|\mathbf{X}_t, \tau_t = i) = \\ &= \sum_{i=0}^T I(\theta_t(X_t) = i) f_{v_t}(Y_t - \psi_t(X_{t-i})). \end{aligned}$$

И окончательно получаем

$$\begin{aligned}
f_{\mathbf{x}_t|y^t} &= \\
&= \frac{\int f_{\mathbf{x}_{t-1}|y^{t-1}} dX_{t-T-1} \cdot f_{w_t}(X_t - \varphi_t(X_{t-1})) \sum_i I(\theta_t(X_t) = i) f_{v_t}(Y_t - \psi_t(X_{t-i}))}{f_{y^t}(Y^t) / f_{y^{t-1}}(Y^{t-1})} = \\
&= \frac{f_{w_t}(X_t - \varphi_t(X_{t-1})) \sum_i I(\theta_t(X_t) = i) f_{v_t}(Y_t - \psi_t(X_{t-i})) \int f_{\mathbf{x}_{t-1}|y^{t-1}} dX_{t-T-1}}{\int f_{w_t}(X_t - \varphi_t(X_{t-1})) \sum_i I(\theta_t(X_t) = i) f_{v_t}(Y_t - \psi_t(X_{t-i})) \int f_{\mathbf{x}_{t-1}|y^{t-1}} dX_{t-T-1} d\mathbf{X}_t}.
\end{aligned}$$

В последнем равенстве опущены аргументы у плотностей $f_{\mathbf{x}_t|y^t}(\mathbf{X}_t|Y^t)$ и $f_{\mathbf{x}_{t-1}|y^{t-1}}(\mathbf{X}_{t-1}|Y^{t-1})$, а также суммирование $\sum_{i=0}^T$ обозначено как $\sum_i$ и учтено, что коэффициент $f_{y^t}(Y^t) / f_{y^{t-1}}(Y^{t-1})$ является нормирующим множителем.

Таким образом, имеем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть для системы (4) существуют плотности вероятности возмущений $f_{w_t}(W_t)$, $t = -T, -T+1, \dots$, ошибок наблюдений $f_{v_t}(V_t)$, $t = 0, 1, \dots$, и начального условия $f_\eta(X_{-T-1})$. Тогда для апостериорной плотности вероятности $\rho_t = \rho_t(\mathbf{X}_t|Y^t)$ расширенного состояния $\mathbf{x}_t = (x'_{t-T}, \dots, x'_{t-1}, x'_t)'$, $t = 0, 1, \dots$, этой системы относительно наблюдений $y^t = (y'_0, \dots, y'_t)'$, $t = 0, 1, \dots$, и оценки оптимального фильтра $x_t^ = E\{x_t|Y^t\}$ состояния x_t выполнены рекуррентные равенства*

$$\begin{aligned}
\rho_t &= \frac{f_{w_t}(X_t - \varphi_t(X_{t-1})) \sum_i I(\theta_t(X_t) = i) f_{v_t}(Y_t - \psi_t(X_{t-i})) \int \rho_{t-1} dX_{t-T-1}}{\int f_{w_t}(X_t - \varphi_t(X_{t-1})) \sum_i I(\theta_t(X_t) = i) f_{v_t}(Y_t - \psi_t(X_{t-i})) \int \rho_{t-1} dX_{t-T-1} d\mathbf{X}_t}, \\
(8) \quad \mathbf{x}_t^* &= \int \mathbf{X}_t \rho_t(\mathbf{X}_t|Y^t) d\mathbf{X}_t, \quad x_t^* = (\mathbf{x}_t^*)_{T p_x + 1}^{(T+1)p_x},
\end{aligned}$$

с начальным условием

$$\begin{aligned}
\rho_{-1}(\mathbf{X}_{-1}|Y^{-1}) &= \rho_{-1}(\mathbf{X}_{-1}) = \rho_{-1}(X_{-T-1}, \dots, X_{-1}) = \\
&= f_\eta(X_{-T-1}) f_{w_{-T}}(X_{-T} - \varphi_{-T}(X_{-T-1})) \cdot \dots \cdot f_{w_{-1}}(X_{-1} - \varphi_{-1}(X_{-2})).
\end{aligned}$$

Здесь, как и выше, опущены аргументы у плотностей $\rho_t(\mathbf{X}_t|Y^t)$ и упрощена запись суммы. Отметим, что для полученного соотношения (8) нет формальных причин, препятствующих возможности его компьютерной реализации. В отличие от (7) все множители в (8) описываются обычными функциями, так что интегралы могут вычисляться любым приближенным методом. Другой вопрос — это реалистичность выполнить такой компьютерный расчет. Это вопрос к размерностям, которые определяет в большей степени

значение T , чем размерности системы наблюдения p_x и q_y . В примере, рассмотренном далее в статье, полагается $T = 75$, и такой выбор подтверждается примерами реально смоделированных траекторий. В более реалистичных условиях величина T может составлять несколько сотен. Соответственно, даже при использованных в модельном примере небольших размерностях состояния ($p_x = 2$) и наблюдений ($q_y = 4$) интегралы в (7) пришлось бы вычислять по пространствам $\mathbb{R}^{150}$ и $\mathbb{R}^{300}$, что, конечно, невозможно выполнить практически. Назначение соотношений (8) и канонической записи исследуемой системы наблюдения (5)–(6) состоит в том, чтобы обосновать отсутствие возможности как практической реализации даже приближенного оптимального фильтра, так и применения распространенных методов субоптимальной фильтрации. Так, формальная запись (5)–(6) не препятствует применению известных фильтров, например расширенного фильтра Калмана, полиномиальных, сигматочечных и иных аналогичных фильтров, равно как и более точных конструкций типа фильтра частиц [15]. Указанные особенности заранее показывают бесперспективность таких попыток. Единственная концепция практической фильтрации, сохраняющая актуальность для рассматриваемого случая, — это условно-минимаксная фильтрация.

4. Условно-минимаксная фильтрация

Идеи и детальное описание условно-минимаксного нелинейного фильтра (УМНФ) изложены в ряде доступных работ [13, 16], поэтому далее кратко приведены основные положения с учетом используемых в статье обозначений.

Оценка УМНФ $\hat{x}_t$ состояния x_t по наблюдениям y^t ищется в форме прогноз-коррекция $\hat{x}_t = \tilde{x}_t + \Delta\hat{x}_t$. Для вычисления прогноза используется базовая прогнозирующая функция $\xi_t = \xi_t(x)$, типичный пример которой — прогноз в силу системы (1), т.е. $\xi_t(\hat{x}_{t-1}) = \varphi_t(\hat{x}_{t-1}, E\{w_t\})$ и $\xi_t \in \mathbb{R}^{p_x}$. Для вычисления коррекции используется базовая корректирующая функция $\zeta_t = \zeta_t(x, y)$, типичный пример которой — невязка наблюдений (3), т.е. $\zeta_t(\tilde{x}_t, y_t) = y_t - \psi_t(\tilde{x}_t, E\{v_t\})$ и $\zeta_t \in \mathbb{R}^{q_y}$. Условно-минимаксные прогноз $\tilde{x}_t$ и коррекция $\Delta\hat{x}_t$ являются решениями следующих оптимизационных задач:

$$(9) \quad \begin{aligned} \tilde{x}_t &= \tilde{\Xi}_t(\xi_t), \quad \tilde{\Xi}_t = \operatorname{argmin}_{\Xi_t} \max_{\mathcal{F}_z} E \left\{ \|x_t - \Xi_t(\xi_t)\|^2 \right\}, \\ \Delta\hat{x}_t &= \hat{x}_t - \tilde{x}_t = \hat{Z}_t(\zeta_t), \quad \hat{Z}_t = \operatorname{argmin}_{Z_t} \max_{\mathcal{F}_z} E \left\{ \|x_t - \tilde{x}_t - Z_t(\zeta_t)\|^2 \right\}, \end{aligned}$$

где через $\mathcal{F}_z$ обозначено распределение вектора z , относительно которого предполагается, что $\mathcal{F}_z \in \mathcal{F}(m_z, D_z)$ — классу всех вероятностных распределений со средним m_z и ковариацией D_z . Соответственно в первой задаче $z = (x'_t, \xi'_t)'$, а во второй — $z = (x'_t - \tilde{x}'_t, \zeta'_t)'$. Таким образом, базовые прогноз и коррекция уточняются наилучшим (в смысле близости в среднем квадратическом к оцениваемому состоянию) образом в предположении, что известны только моментные характеристики второго порядка оцениваемых и наблюдаемых переменных.

Отметим, что в общем случае выбор базовых прогноза и коррекции может являться самостоятельной задачей с решением, которое позволит обеспечить учет особенностей конкретной динамической системы. В частности, ξ_t и ζ_t не ограничиваются размерностями p_x и q_y . Предложенный в рассматриваемой задаче типовой выбор базовой коррекции $\zeta_t(\tilde{x}_t, y_t) = y_t - \psi_t(\tilde{x}_t, E\{v_t\})$, по сути, игнорирует задержки наблюдений. Возможно, более правильным покажется выбор базовой коррекции в виде $\zeta_t(\tilde{x}_t, y_t) = y_t - \psi_t(\tilde{x}_{t-\tilde{\tau}_t}, E\{v_t\})$, $\tilde{\tau}_t = \theta_t(\tilde{x}_t)$, т.е. задействование в базовой структуре фильтра модели задержки (2). В дальнейшем эту структуру прогноза можно исследовать подробнее, но на данный момент она представляется избыточной. Оптимизация (9) параметров должна не менее эффективно использовать разность $y_t - \psi_t(\tilde{x}_t, E\{v_t\})$, при этом размерность фильтра окажется такой же, как в постановке без учета временной задержки, в то время как «более сложная» коррекция $y_t - \psi_t(\tilde{x}_{t-\tilde{\tau}_t}, E\{v_t\})$, $\tilde{\tau}_t = \theta_t(\tilde{x}_t)$, приведет к значительному увеличению размерности фильтра, так как потребует хранения всех прогнозов $\tilde{x}_{t-\tau}$, $\tau = 0, 1, \dots, T$.

Поскольку наилучшим распределением в задачах (9) является нормальное, а соответствующая ему наилучшая в среднем квадратическом оценка определяется теоремой о нормальной корреляции [17], то искомые минимаксно-оптимальные функции $\tilde{\Xi}_t(\xi_t)$ и $\hat{Z}_t(\zeta_t)$ являются линейными, т.е.

$$(10) \quad \begin{aligned} \tilde{x}_t &= F_t \xi_t + f_t, \quad \xi_t = \xi_t(\hat{x}_{t-1}), \\ \hat{x}_t &= \tilde{x}_t + H_t \zeta_t + h_t, \quad \zeta_t = \zeta_t(\tilde{x}_t, y_t), \end{aligned}$$

где

$$(11) \quad \begin{aligned} F_t &= \text{cov}(x_t, \xi_t) \text{cov}^+(\xi_t, \xi_t), \quad f_t = E\{x_t\} - F_t E\{\xi_t\}, \\ H_t &= \text{cov}(x_t - \tilde{x}_t, \zeta_t) \text{cov}^+(\zeta_t, \zeta_t), \quad h_t = -H_t E\{\zeta_t\}. \end{aligned}$$

В (11) использованы обозначения $\text{cov}(x, y)$ — ковариация x и y , $^+$ — операция псевдообращения по Муру-Пенроузу.

При этом прогноз $\tilde{x}_t$ и оценка состояния $\hat{x}_t$ являются несмещенными и обеспечивают следующее качество оценивания:

$$(12) \quad \begin{aligned} \tilde{K}_t &= \text{cov}(x_t - \tilde{x}_t, x_t - \tilde{x}_t) = \text{cov}(x_t, x_t) - F_t \text{cov}(\xi_t, x_t), \\ \hat{K}_t &= \text{cov}(x_t - \hat{x}_t, x_t - \hat{x}_t) = \tilde{K}_t - H_t \text{cov}(\zeta_t, x_t - \tilde{x}_t). \end{aligned}$$

Важно понимать, что соотношения (10)–(11) определяют условно-оптимальный фильтр Пугачева [18, 19], линейная структура которого постулируется изначально. Соответственно, концепция УМНФ дополняет этот фильтр минимаксным обоснованием структуры. Но не менее важен второй элемент концепции УМНФ — это способ практического определения коэффициентов F_t , f_t , H_t и h_t методом Монте-Карло, т.е. компьютерное имитационное моделирование, с помощью которого используемый фильтр получается заменой в (11) математических ожиданий и ковариаций их статистическими оценками, полученными в результате имитационного моделирования.

Применительно к рассматриваемой модели (1)–(3) или ее частному случаю (4) остается сформулировать условия существования решения (9). Удобный для практики вариант достаточных условий существования оценки УМНФ дает следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнено одно из следующих условий:

1) для системы наблюдения (1)–(3)

а) существует функция $C_\varphi(w) > 0$, $w \in \mathbb{R}^{p_w}$, такая что $E\{C_\varphi(w_t)\} < \infty$, $t = -T, -T+1, \dots, 0, 1, \dots$, и $\|\varphi_t(x, w)\|^2 < C_\varphi(w) (1 + \|x\|^2)$, $x \in \mathbb{R}^{p_x}$;

б) существует функция $C_\psi(v) > 0$, $v \in \mathbb{R}^{q_v}$, такая что $E\{C_\psi(v_t)\} < \infty$, $t = 0, 1, \dots$, и $\|\psi_t(y, v)\|^2 < C_\psi(v) (1 + \|y\|^2)$, $y \in \mathbb{R}^{q_y}$;

в) существуют константы $C_\xi > 0$ и $C_\zeta > 0$ такие, что для структурных функций УМНФ выполнено $\|\xi_t(x)\|^2 < C_\xi (1 + \|x\|^2)$ и $\|\zeta_t(x, y)\|^2 < C_\zeta (1 + \|x\|^2 + \|y\|^2)$;

2) для системы наблюдения (4)

а) возмущения w_t , ошибки наблюдений v_t и начальные условия η имеют нормальные распределения (или любые распределения со всеми конечными моментами);

б) существуют константы $C > 0$ и $D > 0$ такие, что $\|\varphi_t(x)\|^2 + \|\psi_t(y)\|^2 + \|\xi_t(x)\|^2 + \|\zeta_t(x, y)\|^2 < C (1 + \|x\|^D + \|y\|^D)$.

Тогда прогноз $\tilde{x}_t$ и оценка $\hat{x}_t$ условно-минимаксного фильтра (9) существуют, описываются соотношениями (10), (11) и обеспечивают качество фильтрации (12).

Данное утверждение является адаптацией теорем существования [13]. Доказательство состоит из двух принципиальных моментов. Во-первых, это решение минимаксных задач (9), которое дает уже упомянутое свойство линейной оценки, определяемой теоремой нормальной корреляции, в совокупности с наихудшим на классе $\mathcal{F}(m_z, D_z)$ нормальным распределением. Вторым элементом доказательства — это существование вторых моментов векторов $(x'_t, \xi'_t)'$ и $(x'_t - \tilde{x}'_t, \zeta'_t)'$ в предположении конечности момента $E\{\|\hat{x}_{t-1}\|^2\} < \infty$. Достаточность условий 1) применительно к модели (1)–(3) или 2) применительно к (4) удобно подтвердить, используя расширенную систему (5). Именно, записывая систему наблюдения с помощью переменной $\mathbf{x}_t$ и учитывая, что $\|\Theta_t(\mathbf{x})\| = 1$, получаем те же канонические обозначения системы наблюдения, что использованы в [13] и, следовательно, достаточность условий 1) и 2) для существования требуемых вторых моментов.

Качественное содержание условий 1) и 2) теоремы состоит в ограничении скорости роста функций модели и структуры фильтра на бесконечности: в условиях 1) — это линейный рост и ограниченность случайных факторов, в условиях 2) — это полиномиальный рост и существование всех моментов случайных факторов.

Таким образом, для подтверждения применимости оценки УМНФ в рассматриваемой задаче со случайным запаздыванием наблюдений остается проверить в рамках численного эксперимента возможность приближенного вычисления параметров (11) фильтра и сравнить реальное качество фильтрации с расчетными значениями (12), вычисленными с оценками Монте-Карло параметров (11).

5. Слежение за подводной целью, движущейся в плоскости с постоянной скоростью

Для практического эксперимента с исследуемой постановкой и алгоритмом фильтрации использована простая модель движения в плоскости с постоянной скоростью. Предполагается, что автономный ПА движется на глубине в горизонтальной плоскости Oxy . Описываемое далее движение ПА и наблюдения за ним схематически проиллюстрированы на рис. 1. Для обозначения координат траектории движения будем использовать общепринятые обозначения $x(t)$ и $y(t)$, единицей измерений этих величин принимаются километры (км). Использование здесь x , y не должно вызывать сложности в связи с общими обозначениями x_t , y_t , использованными выше для состояний и наблюдений. Начальное положение ПА задано вектором $(x(-T-1), y(-T-1))'$, который имеет нормальное распределение со средним $(0, 12,5)'$ и ковариацией $\text{diag}\{25, 100\}$. Координатные составляющие скорости постоянны и равны соответственно $v_x = 25$ км/ч, $v_y = 50$ км/ч. Единице измерения времени час (ч) отвечает шаг дискретизации наблюдений $h = 0,0001$ ч, что соответствует частоте около трех измерений в секунду. Рас-

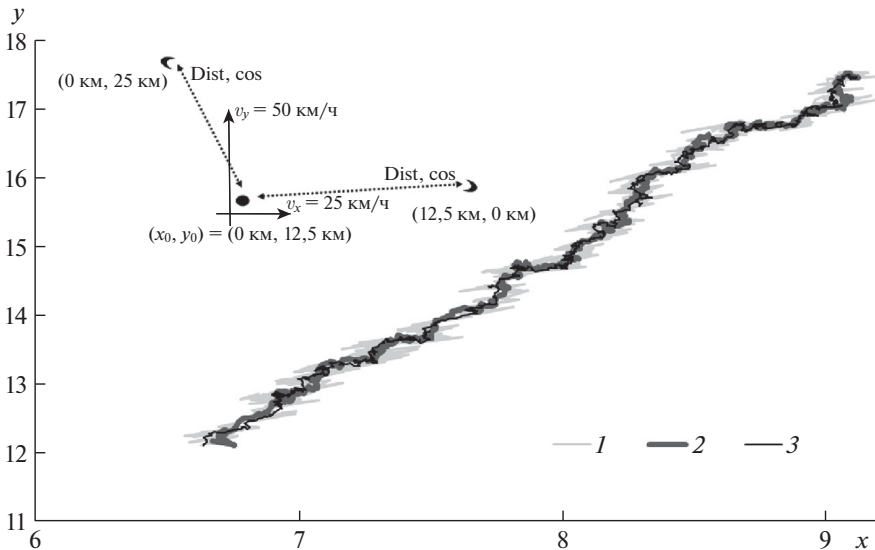


Рис. 1. Схема движения-наблюдения и пример типовых траекторий: 1 — прямая оценка положения $\check{x}_t$, 2 — траектория ПА x_t , 3 — оценка УМНФ $\hat{x}_t$.

чет выполняется для 1000 шагов дискретизации, что соответствует 6 мин движения. За это время ПА в среднем перемещается на расстояние порядка 5,5 км.

Величина задержки T будет принимать два значения. Сначала будут показаны результаты расчета для $T = 0$, т.е. в условиях обычных наблюдений, без задержки. Затем полагается $T = 75$, т.е. максимальная задержка 0,0075 ч или 27 с, на иллюстрациях ниже показано, что для выбранных параметров примера такая величина задержки отвечает используемой физической интерпретации, т.е. есть траектории, на которых задержка наблюдений близка к заданному максимуму.

Предполагается, что на движение ПА оказывают влияния неконтролируемые управляющие воздействия, которые моделируются аддитивными возмущениями $w_x(t)$ и $w_y(t)$, вектор $(w_x(t), w_y(t))'$ имеет нормальное распределение со средним $(0, 0)'$ и ковариацией $\text{diag}\{1, 4\}$. Таким образом, имеем следующую динамику:

$$(13) \quad \begin{aligned} x(t) &= x(t-1) + hv_x + \sqrt{h}w_x(t), \\ y(t) &= y(t-1) + hv_y + \sqrt{h}w_y(t). \end{aligned}$$

Наблюдатели расположены в двух точках на той же плоскости Oxy : первый имеет координаты $(0, l_y)$, $l_y = 25$, т.е. расположен в 25 км от начала координат по оси Oy , второй — $(l_x, 0)$, $l_x = 12,5$, т.е. расположен в 12,5 км от начала координат по оси Ox . Наблюдатели одинаковы, каждый измеряет дальность, $d_1(t)$ и $d_2(t)$, и направляющий косинус до объекта, $c_1(t)$ и $c_2(t)$. Вектор ошибок наблюдений $(v_{d_1}(t), v_{d_2}(t), v_{c_1}(t), v_{c_2}(t))'$ предполагается гауссовским со средним $(0, 0, 0, 0)'$ и ковариацией $\text{diag}\{0,001^2, 0,005^2, 0,001^2, 0,005^2\}$. Поскольку на практике такие измерения могут быть реализованы толькосонарами, то нужно отметить, что назначенные точностные параметры не вполне отражают точность реальных устройств [20]. В описываемом эксперименте такие точностные характеристики использованы с тем, чтобы сохранить хотя бы видимую конкурентность альтернативному алгоритму фильтрации, алгоритму прямого вычисления положения, описанному далее. Увеличение погрешностей наблюдений приводит к тому, что этот алгоритм теряет смысл.

Итак, имеются следующие наблюдения:

$$(14) \quad \begin{aligned} d_1(t) &= \sqrt{(x(t-\tau_t))^2 + (y(t-\tau_t) - l_y)^2} + v_{d_1}(t), \\ c_1(t) &= \frac{(y(t-\tau_t) - l_y)}{\sqrt{(x(t-\tau_t))^2 + (y(t-\tau_t) - l_y)^2}} + v_{c_1}(t), \\ d_2(t) &= \sqrt{(x(t-\tau_t) - l_x)^2 + (y(t-\tau_t))^2} + v_{d_2}(t), \\ c_2(t) &= \frac{(x(t-\tau_t) - l_x)}{\sqrt{(x(t-\tau_t) - l_x)^2 + (y(t-\tau_t))^2}} + v_{c_2}(t). \end{aligned}$$

Остается определить модель τ_t . Для первого расчета предположение $T = 0$ автоматически влечет $\tau_t = 0$. Для второго расчета модель τ_t удобно задать двумя случайными величинами $\tau_1(t)$ и $\tau_2(t)$, задающими задержки наблюдений соответственно для первого и второго наблюдателей. С учетом шага дискретизации $h = 0,0001$ ч и примерной скорости звука в воде $v_s = 5400$ км/ч $\tau_1(t)$ и $\tau_2(t)$ выражаются через дальности наблюдателей до ПА, т.е.

$$(15) \quad \begin{aligned} \tau_1(t) &= \min \left\{ T, \left[\frac{\sqrt{(x(t))^2 + (y(t) - l_y)^2}}{(hv_s)} \right] \right\}, \\ \tau_2(t) &= \min \left\{ T, \left[\frac{\sqrt{(x(t) - l_x)^2 + (y(t))^2}}{(hv_s)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Здесь использовано обозначение $[x]$ для целой части x и учтена потенциальная возможность удаления объекта на дистанцию, для которой величина задержки становится больше заданного максимума T . Заметим, что в (14) подразумевается использование вместо общего обозначения задержки τ_t значений $\tau_1(t)$ для $d_1(t)$ и $c_1(t)$, значений $\tau_2(t)$ для $d_2(t)$ и $c_2(t)$. Таким образом, модель задержки (15) имеет даже более общий вид, чем (2). На самом деле, никакого принципиального обобщения здесь нет и нетрудно скорректировать модель (2) так, чтобы учесть получившиеся в данном примере разные задержки для разных наблюдений. Поскольку на фильтрацию эти обстоятельства влияния не оказывают, то больше на них останавливаться не будем.

Для анализа качества фильтрации, обеспечиваемого оценкой УМНФ, требуется какой-то альтернативный вариант оценивания положения ПА. Как уже отмечалось выше, известные субоптимальные алгоритмы фильтрации к рассматриваемой модели неприменимы. По другой причине вычислительного характера, но с тем же результатом не представляется возможным рассчитывать оценку оптимального фильтра, определенного теоремой 1. Единственной реализуемой альтернативой на данном этапе исследования представляется алгоритм прямого вычисления положения или оценка по методу наименьших квадратов. Оценка $\check{x}_t = (\check{x}(t), \check{y}(t))'$ этого фильтра получается следующим образом. Сначала предположим, что в (14) нет задержки и отсутствуют ошибки наблюдений. Тогда каждая пара измеряемых дальности и косинуса очевидным образом может быть пересчитана в координаты $(\check{x}_1(t), \check{y}_1(t))$ и $(\check{x}_2(t), \check{y}_2(t))$. Теперь оценка положения $\check{x}_t$ — это середина отрезка, соединяющего эти две точки. Эта довольно примитивная оценка в данной задаче не так плоха. Дело в том, что использование других алгоритмов, например расширенного фильтра Калмана, разных вариантов сигма-точечных фильтров и других, используемых без учета задержки, скорее всего, приведет к расходимости фильтра, в то время как оценка фильтра прямого вычисления положения гарантированно не может расходиться, поскольку не учитывает динамику вообще и использует только одно точечное наблюдение.

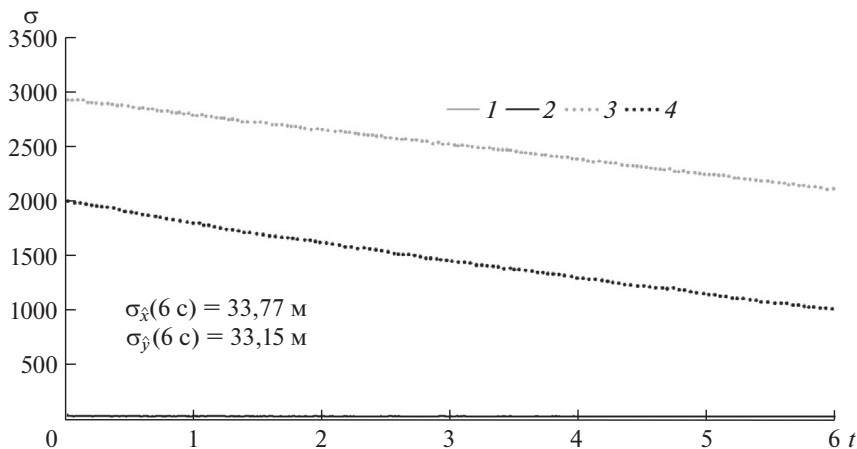


Рис. 2. Среднеквадратические отклонения: 1 — $\sigma_{\hat{x}}(t)$, 2 — $\sigma_{\hat{y}}(t)$, 3 — $\sigma_{\check{x}}(t)$, 4 — $\sigma_{\check{y}}(t)$.

Для синтеза УМНФ и анализа его качества моделировалось два независимых пучка по 100 000 траекторий. На первом пучке рассчитывались параметры фильтра по формулам (11) и (12), в которых математические ожидания заменялись статистическим средним, т.е. по методу Монте-Карло. На втором пучке оценивалось реальное качество оценки УМНФ $\hat{x}_t = (\hat{x}(t), \hat{y}(t))'$ и оценки $\check{x}_t$. Сравнивались точности оценивания координат положения ПА, определяемые средними квадратическими отклонениями ошибок оценок, обозначенных соответственно как $\sigma_{\hat{x}}(t)$, $\sigma_{\hat{y}}(t)$ для оценки УМНФ $\hat{x}_t$ и как $\sigma_{\check{x}}(t)$, $\sigma_{\check{y}}(t)$ для прямой оценки положения $\check{x}_t$.

Вначале рассмотрим результаты первого расчета, выполненного в предположении $T = 0$. На рис. 1, кроме уже упомянутой схемы движения, приведены пример типовой траектории движения ПА $(x(t), y(t))$ и соответствующие ей оценки $\check{x}_t$ и $\hat{x}_t$. Кроме очень высокой точности оценки УМНФ, отметим, что в сравнении с ней прямая оценка положения не очень информативна. Формальные характеристики приведены на рис. 2. Дополнительно отметим, что эксперимент подтверждает несмещенность оценки УМНФ, оценка $\check{x}_t$ немного смещена — примерно на 1 м по переменной x и на 0,5 м по переменной y , что при таком качестве оценивания вряд ли существенно. При довольно точных измерениях дальности низкое качество точечных наблюдений обеспечивается ошибкой измерения направляющего косинуса, которая на имеющейся удаленности до ПА приводит к очень большой километровой погрешности оценки положения. Конечно, такую оценку использовать не следует. Но в следующем расчете ее качество уже не будет представляться таким уж неприятным.

В следующем расчете сохранены все параметры, в том числе на иллюстрации рис. 3 приведена та же траектория $(x(t), y(t))$, что и на рис. 1, но предполагается $T = 75$. Визуально этот пример показывает, что точность оценки УМНФ значительно снизилась, а вот точность оценки прямых наблюдений

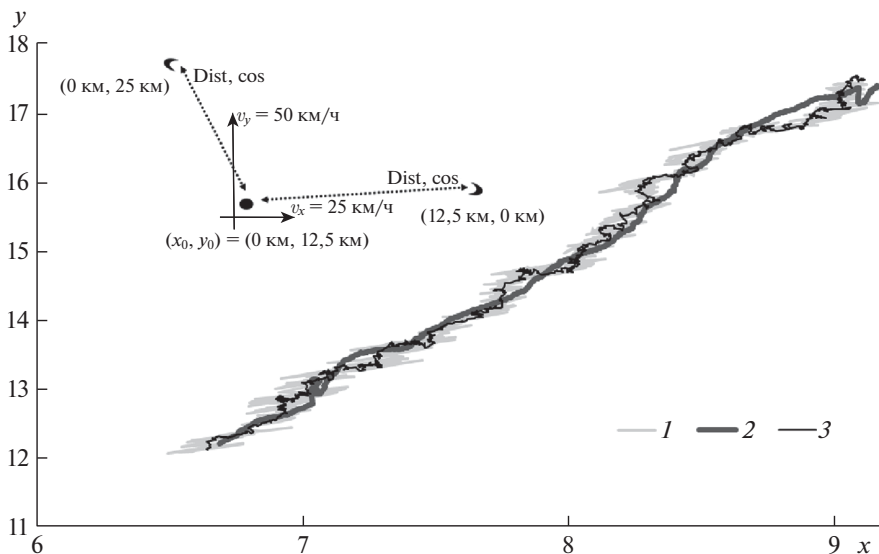


Рис. 3. Пример типовых траекторий в модели с запаздыванием: 1 — прямая оценка положения $\check{x}_t$, 2 — траектория ПА x_t , 3 — оценка УМНФ $\hat{x}_t$.

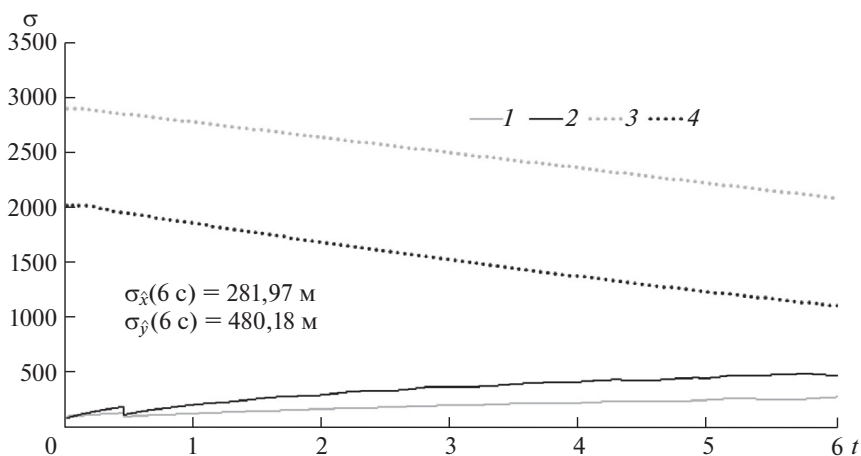


Рис. 4. Среднеквадратические отклонения в модели с запаздыванием: 1 — $\sigma_{\hat{x}}(t)$, 2 — $\sigma_{\hat{y}}(t)$, 3 — $\sigma_{\check{x}}(t)$, 4 — $\sigma_{\check{y}}(t)$.

изменилась не сильно. Этого следовало ожидать для оценки, использующей только одно точечное наблюдение. На нее не могла сильно повлиять задержка, так как в сравнении со скоростью звуковой волны даже в воде скорость ПА невелика в сравнении с уже имеющейся погрешностью оценки фильтра прямого вычисления положения. Формально качество иллюстрирует рис. 4, на котором представлены среднеквадратические отклонения для ошибок оценок координат положения ПА. И здесь главное — это падение качества оценки УМНФ на порядок, хотя, конечно, она продолжает значительно превос-

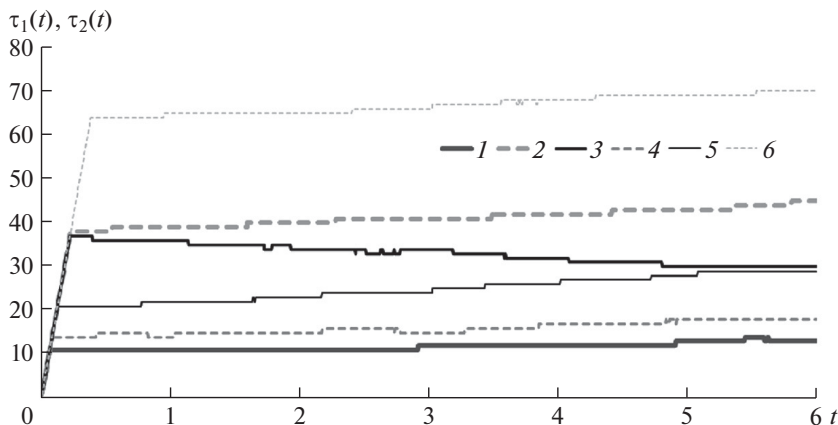


Рис. 5. Примеры траекторий задержек наблюдений: 1, 3, 5 — $\tau_1(t)$, 2, 4, 6 — $\tau_2(t)$, пары 1–2, 3–4, 5–6 отвечают одинаковым траекториям x_t .

ходить оценку прямых наблюдений. Причина этого ухудшения — процесс τ_t , или, точнее, $\tau_1(t)$ и $\tau_2(t)$. Реальные значения величин задержки иллюстрирует рис. 5. Как видно, речь может идти о десятках секунд — время, за которое ПА может уплыть на сотни метров. Выводы по эксперименту сформулированы в заключении. Заметим только, что участки линейного роста $\tau_1(t)$ и $\tau_2(t)$ на начальной стадии связаны с отсутствием наблюдений в начальные моменты $t = 0, 1, \dots$, пока не достигаются значения t большие, чем задержки для данной траектории. Такое отличие в реализации эксперимента в сравнении с формальным описанием модели (1)–(3) нужно для того, чтобы на одном и том же пучке моделировать оба случая, с задержкой наблюдений и без нее.

6. Заключение

Представленная в статье попытка приблизиться к физической реальности, отражающей работу сонаров, наблюдающих за подводной целью, выражена простой моделью случайной задержки наблюдений, неизвестной и зависящей от состояния системы. Такая простая модель задержки дала довольно сложную для задачи фильтрации модель системы наблюдения. Фактически задержка — это многомерный мультипликативный шум в наблюдениях. Бороться с таким шумом крайне сложно. Многие субоптимальные алгоритмы фильтрации еще на уровне модели наблюдения исключают даже возможность такого шума. Целями выполненного эксперимента было, во-первых, подтверждение работоспособности концепции условно-минимаксной фильтрации, во-вторых, понимание величины потерь в качестве оценивания в сравнении с моделью без задержки. Обе цели достигнуты, но остался ряд вопросов для дальнейшего изучения. Первое, что требует улучшения, — это качество оценки состояния, обеспечиваемое УМНФ. В статье использована самая простая структура фильтра, в то время как физика примера позво-

ляет обоснованно предложить более гибкие решения, на что ориентирована концепция условно-оптимальной фильтрации и УМНФ, в частности. Второе направление — это обобщение модели движения, включающее отсутствие информации о параметрах движения. Действительно, как минимум, скорость движения ПА, точнее ее систематическая составляющая, вряд ли может считаться известной. Таким образом, параллельно с фильтрацией надо решать и задачу идентификации. Это типичная ситуация для практики, но здесь она будет существенно отягощена случайной задержкой. Наконец, третий вопрос — это использование доплеровских наблюдений. В [12] было показано, насколько существенно оценивание по наблюдениям простыми сонарами улучшается, если есть даже не очень точные данные о скорости. В рассматриваемой модели этот эффект может оказаться даже более значительным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bar-Shalom Y., X.-R. Li, Kirubarajan T.* Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory, Algorithms and Software. John Wiley & Sons, Inc. 2002.
2. *Ehlers F. (Ed.)* Autonomous Underwater Vehicles: Design and Practice (Radar, Sonar & Navigation). London, UK: SciTech Publishing, 2020.
3. *Luo J., Han Y., Fan L.* Underwater Acoustic Target Tracking: A Review // *Sensors*. 2018. V. 18. No. 1(112).
4. *Ghafoor H., Noh Y.* An Overview of Next-Generation Underwater Target Detection and Tracking: An Integrated Underwater Architecture // *IEEE Access*. 2019. V. 7. P. 98841–98853.
5. *Su X., Ullah I., Liu X., Choi D.* A Review of Underwater Localization Techniques, Algorithms, and Challenges // *J. Sensors*. 2020. V. 2020 (6403161).
6. *Kalman R.E.* A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // *Trans. ASME-J. Basic Engineer*. 1960. V. 82. Ser. D. P. 35–45.
7. *Bernstein I., Friedland B.* Estimation of the State of a Nonlinear Process in the Presence of Nongaussian Noise and Disturbances // *J. Franklin Instit.* 1966. V. 281. No. 6. P. 455–480.
8. *Julier S.J., Uhlmann J.K., Durrant-Whyte H.F.* A new approach for filtering nonlinear systems // *Proc. IEEE Amer. Control Conf. (ACC'95)*, 1995. P. 1628–1632.
9. *Menegaz H.M.T., Ishihara J.Y., Borges G.A., Vargas A.N.* A Systematization of the Unscented Kalman Filter Theory // *IEEE Trans. Autom. Control*. 2015. V. 60. No. 10. P. 2583–2598.
10. *Christ R.D., Wernli R.L.* The ROV Manual: A User Guide for Remotely Operated Vehicles. 2nd Edition. Oxford, UK: Butterworth-Heinemann, 2013.
11. *Miller A., Miller B., Miller G.* Navigation of Underwater Drones and Integration of Acoustic Sensing with Onboard Inertial Navigation System // *Drones*. 2021. V. 5. No. 3 (83).
12. *Borisov A., Bosov A., Miller B., Miller G.* Passive Underwater Target Tracking: Conditionally Minimax Nonlinear Filtering with Bearing-Doppler Observations // *Sensors*. 2020. V. 20. No. 8 (2257).

13. *Pankov A.R., Bosov A.V.* Conditionally minimax algorithm for nonlinear system state estimation // IEEE Trans. Autom. Control. 1994. V. 39. No. 8. P. 1617–1620.
14. *Bertsekas D.P., Shreve S.E.* Stochastic Optimal Control: The Discrete-Time Case. N.Y.: Academic Press, 1978.
15. *Chen Z.* Bayesian Filtering: From Kalman Filters to Particle Filters, and Beyond // Statist. 2003. V. 182. No. 1. P. 1–69.
16. *Борисов А.В., Босов А.В., Кибзун А.И., Миллер Г.Б., Семенихин К.В.* Метод условно-оптимальной нелинейной фильтрации и современные подходы к оцениванию состояний нелинейных стохастических систем // АиТ. 2018. № 1. С. 3–17.
Borisov A.V., Bosov A.V., Kibzun A.I., Miller G.B., Semnikhin K.V. The Conditionally Minimax Nonlinear Filtering Method and Modern Approaches to State Estimation in Nonlinear Stochastic Systems // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 1. P. 1–11.
17. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989.
18. *Пугачев В.С.* Рекуррентное оценивание переменных и параметров в стохастических системах, описываемых разностными уравнениями // ДАН СССР. 1978. Т. 243. № 5. С. 1131–1133.
19. *Пугачев В.С.* Оценивание переменных и параметров в дискретных нелинейных системах // АиТ. 1979. № 6. С. 63–79.
Pugachev V.S. Estimation of Variables and Parameters in Discrete-time Nonlinear Systems // Autom. Remote Control. 1979. V. 40. No. 4. P. 39–50.
20. *Weirathmueller M., Weber T.C., Schmidt V., McGillicuddy G., Mayer L., Huff L.* Acoustic Positioning and Tracking in Portsmouth Harbor, New Hampshire // Proc. OCEANS 2007, Vancouver, BC, Canada, 29 September – 4 October, 2007. P. 1–4.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 21.12.2022

После доработки 14.02.2023

Принята к публикации 30.03.2023

Стохастические системы

© 2023 г. И.Б. БУРДОНОВ, д-р физ.-мат. наук (igor@ispras.ru),
Н.В. ЕВТУШЕНКО, д-р. техн. наук (evtushenko@ispras.ru),
А.С. КОСАЧЕВ, канд. физ.-мат. наук (kos@ispras.ru)
(Институт системного программирования РАН
им. В.П. Иванникова, Москва),
Н.Г. КУШИК, д-р физ.-мат. наук
(natalia.kushik@telecom-sudparis.eu)
(SAMOVAR, Telecom SudParis,
Institut Polytechnique de Paris, Палезо, Франция)

О СИНТЕЗЕ БЕЗУСЛОВНЫХ УСТАНОВОЧНЫХ И СИНХРОНИЗИРУЮЩИХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ НАБЛЮДАЕМЫХ ВХОДО-ВЫХОДНЫХ ПОЛУАВТОМАТОВ¹

Исследуется проблема построения синхронизирующих и установочных экспериментов для недетерминированных входо-выходных полуавтоматов; соответствующие входные последовательности активно используются при тестировании (неинициальных) дискретных систем. При активном тестировании появляется возможность установить предъявленный полуавтомат в известное состояние; при пассивном тестировании знание текущего состояния дает возможность сократить количество проверок требуемых свойств и, как следствие, снизить сложность тестирования. Отмечается, что такие эксперименты для входо-выходных полуавтоматов отличаются от хорошо известных “умозрительных” экспериментов с классическими конечными автоматами, устанавливаются условия существования и правила построения таких экспериментов при заранее определенной дисциплине подачи входных сигналов, что позволяет свести задачи построения установочного и синхронизирующего экспериментов к хорошо известной задаче построения установочного и синхронизирующего экспериментов для подходящих конечных автоматов.

Ключевые слова: конечный входо-выходной полуавтомат, установочная последовательность, синхронизирующая последовательность.

DOI: 10.31857/S0005231023060041, EDN: CSFOPZ

1. Введение

Проблема идентификации состояний в конечных автоматах (Finite State Machine или FSM в англоязычной литературе) является актуальной. Иден-

¹ Работа выполнена при частичной поддержке Российского научного фонда (проект № 22-029-01189).

тификация состояний используется в различных приложениях, в частности для уменьшения сложности при активном и пассивном тестировании [1, 4, 5]. При активном тестировании наличие идентификационных последовательностей позволяет сократить длину теста. В [5] иллюстрируются, как установочные и синхронизирующие последовательности могут ускорить / оптимизировать мониторинг (компонентов) систем связи. Идентификация состояний проводится на основе *умозрительного* (*gedanken*) эксперимента с конечным автоматом [1] и состоит в подаче входной последовательности на исследуемый автомат, наблюдении за выходной реакцией и заключении о начальном или текущем состоянии автомата. Если делается вывод о текущем состоянии конечного автомата (состоянии после эксперимента), то эксперимент называется *установочным* или *синхронизирующим*. При синхронизирующем эксперименте нет необходимости в наблюдении выходных реакций исследуемого автомата, в то время как в установочном эксперименте текущее состояние автомата, предъявленного к эксперименту, однозначно определяется на основе выходной реакции автомата. Если подаваемая входная последовательность определяется заранее и не изменяется в процессе эксперимента, то эксперимент называется безусловным. В этом случае можно говорить о синхронизирующей или установочной последовательности, и существует много публикаций о методах построения таких последовательностей для детерминированных и недетерминированных, полностью и частично определенных автоматов (см., например, [2, 7]).

Однако возможности конечных автоматов при описании поведения (компонентов) коммуникационных систем весьма ограничены. Более общей моделью является конечный входо-выходной полуавтомат [3, 8], который также активно используется при синтезе тестов. В таком полуавтомате переходы между состояниями помечаются не парой <входной, выходной символ>, а одним входным или выходным символом. В [6] проблема идентификации состояний для входо-выходных полуавтоматов изучалась для случая, когда в каждом состоянии разрешены только входные или только выходные символы, достаточно часто называемые также *действиями*. В настоящей работе этот подход расширяется на полуавтоматы с состояниями, в которых возможны и входные, и выходные действия. Основные отличия от предыдущей публикации следующие: расширяется класс исследуемых полуавтоматов и в связи с этим безусловный эксперимент определяется на трассе полуавтомата, а не для входной последовательности. Кроме того, рассматриваются необходимые при активном тестировании устойчиво установочные последовательности, соответствующие полным трассам, т.е. трассам, которые переводят полуавтомат из любого состояния в устойчивое состояние, где не определены переходы по выходным символам. Основной научный вклад данной статьи — определение установочных и синхронизирующих *экспериментов* для конечных входо-выходных полуавтоматов и адаптация известных методов для проверки существования и построения таких экспериментов.

Структура статьи следующая. Второй раздел содержит необходимые определения и обозначения. В третьем разделе вводятся понятия синхронизирующего и установочного экспериментов для входо-выходных полуавтоматов. Четвертый раздел посвящен методам проверки существования и синтеза таких экспериментов. В заключении подводятся итоги работы и обсуждаются перспективы дальнейших научных исследований.

2. Основные определения и обозначения

Конечный входо-выходной *полуавтомат* (далее просто *полуавтомат*) есть четверка $\mathbf{S} = (S, I, O, h_S)$, где S — конечное непустое множество состояний, I — конечное множество входных действий, O — конечное множество выходных действий, $I \cap O = \emptyset$, и $h_S \subseteq (S \times (I \cup O) \times S)$ есть отношение переходов. Из практических соображений предполагается, что множество $(I \cup O)$ не является пустым. Полуавтомат $\mathbf{S}$, в котором для любого действия в каждом состоянии существует не более одного перехода, помеченного этим действием, называется *наблюдаемым*. Полуавтомат $\mathbf{S}$, в котором каждое состояние может быть начальным, называется *неинициальным*. В данной работе мы рассматриваем наблюдаемые неинициальные полуавтоматы.

Существует переход из состояния s в состояние s' под действием символа a , если и только если тройка $(s, a, s') \in h_S$ принадлежит отношению переходов h_S . Полуавтомат *недетерминированный*, если в некотором состоянии определены несколько выходных символов [6]. Далее рассматриваются только наблюдаемые, возможно недетерминированные полуавтоматы, если явно не сказано иное. Полуавтомат обычно рассматривается как трассовая модель, где под трассой в состоянии s понимается последовательность действий из алфавита $(I \cup O)$, допустимая в этом состоянии. Обозначим через S_{st} множество состояний, в которых не определены переходы по выходным символам; такие состояния будем называть *устойчивыми* состояниями: полуавтомат может оставаться в таком состоянии сколь угодно долго, пока на его вход не будет подано некоторое входное воздействие (входной символ). В частности, в полуавтомате могут быть состояния, в которых не определены никакие действия. Множество всех таких состояний обозначается как S_{und} . Состояние полуавтомата называется *смешанным* состоянием, если в состоянии определены входные и выходные символы.

Трасса в состоянии s называется *полной*, если она заканчивается в состоянии из S_{st} . Для возможного наблюдения таких трасс вводится специальный выходной символ $\delta \notin I \cup O$, так называемый “*молчащий* символ (quiescence)” [8], т.е. в каждом состоянии, в котором не определены переходы по выходным символам, добавляется петля по символу δ , который считается выходным символом, и в результате получается полуавтомат $\mathbf{S}^\delta$. В полуавтомате $\mathbf{S}^\delta$ выходной алфавит есть $O \cup \{\delta\}$. Таким образом, трасса σ полуавтомата $\mathbf{S}$ является полной в состоянии s тогда и только тогда, когда в полуавтомате $\mathbf{S}^\delta$ в состоянии s есть трасса $\sigma\delta$, что соответствует тому, что после этой трассы

не может появиться ни один выходной символ из алфавита O (так называемые δ -трассы). По определению из каждой трассы полуавтомата S^δ после удаления символов δ получается трасса полуавтомата S , и наоборот, если в трассу σ полуавтомата S добавить любое число символов δ после каждого префикса σ , который является полной трассой, то получится трасса полуавтомата S^δ .

3. Установочные эксперименты с входо-выходными полуавтоматами

Так же, как и для конечных автоматов [1], “умозрительные” эксперименты с полуавтоматами заключаются в подаче на полуавтомат входной последовательности, которая в случае полуавтоматов может быть пустой последовательностью, наблюдении выходной последовательности, которая также может быть пустой последовательностью, и выводе заключения о некоторых свойствах полуавтомата. Эксперимент называется *синхронизирующим* или *установочным*, если в результате эксперимента можно установить финальное (текущее) состояние полуавтомата. В отличие от конечных автоматов “умозрительные” эксперименты с полуавтоматами в общем случае не удастся описать посредством множества входных последовательностей с допустимыми выходными реакциями. Причиной является тот факт, что для одной и той же входной последовательности возможны различные трассы с одной и той же выходной реакцией. Например, для входной последовательности $i_1 i_2$ возможны трассы $i_1 o_1 i_2 o_2$ и $i_1 i_2 o_1 o_2$. В первом случае входной символ i_2 подается только после получения реакции o_1 до истечения специального таймаута T_{ex} , а во втором случае входной символ i_2 подается в промежуток времени T_{ex} , и полуавтомат не “успевает” выдать выходной символ o_1 до получения входного символа i_2 . Соответственно при подаче входной последовательности должна учитываться определенная дисциплина подачи входных символов. Если начальное состояние, в котором подается входная последовательность, неизвестно, то *дисциплина* подачи такой последовательности должна удовлетворять каждому состоянию из множества начальных состояний.

Для формального представления дисциплины подачи входных сигналов в работе используются специальный входной символ ω и копия s' для каждого состояния s полуавтомата S^δ , в которую переносятся все выходные символы из состояния s . В состоянии s остаются только входные символы и символ ω , переводящий полуавтомат из состояния s в его копию s' . В результате получается полуавтомат $S^{\delta\omega}$. Соответственно из каждой трассы полуавтомата $S^{\delta\omega}$ после удаления символов δ и ω получается трасса полуавтомата S , и наоборот, если в трассу σ полуавтомата S добавить любое число символов δ после каждого префикса σ , который является полной трассой, и символ ω перед каждым выходным символом, включая δ , то получится трасса полуавтомата $S^{\delta\omega}$.

Для полуавтомата “умозрительные” эксперименты можно описать посредством трасс, которые содержат входные и выходные действия, а также “искусственные” символы δ и ω . Введенному символу ω соответствует специальный таймаут T_{ex} ; выходному символу δ — таймаут $T_{вых}$. Символ ω во входной последовательности “говорит”, что в пределах таймаута T_{ex} нельзя подать ни один входной символ. После этого ожидается выходной символ в пределах таймаута $T_{вых}$; если выходной символ не производится, то считается, что полуавтомат выдал выходной символ δ .

Как обычно, предполагается, что исходный полуавтомат имеет не менее двух состояний, поскольку для полуавтомата с одним состоянием отсутствует задача установки полуавтомата в известное состояние. Эксперимент по идентификации текущего состояния полуавтомата проводится следующим образом. Входная последовательность эксперимента есть последовательность вида $\alpha = \omega^{t_1} i_1 \dots \omega^{t_k} i_k \omega^{t_{k+1}}$, $i_j \in I$, $j = 1, \dots, k$. Если в текущий момент времени требуется подать входной символ $i_j \in I$, $j = 1, \dots, k$, то тестер подает этот входной сигнал в пределах временного промежутка T_{ex} , и после этого таймер “сбрасывается”. Если в последовательности находится символ ω , то тестер ожидает выходной сигнал. Если система выдает выходной символ, то таймер “сбрасывается”, и анализируется следующий входной символ последовательности α . Если за время $T_{вых}$ система не произвела выходного символа, то предполагается, что система выдала выходной символ δ , и таймер “сбрасывается”.

Пусть $\alpha = \omega^{t_1} i_1 \dots \omega^{t_k} i_k \omega^{t_{k+1}}$, $i_j \in I$, $j = 1, \dots, k$, — последовательность, содержащая входные символы полуавтомата и символ ω . Трасса σ в состоянии s полуавтомата $\mathbf{S}^\delta$ называется *совместимой* с α , если имеет вид $\beta_1 i_1 \dots \beta_k i_k \beta_{k+1}$, где β_j — последовательность длины t_j из выходных символов и символа δ , $j = 1, \dots, k + 1$. Для вхо-выходных полуавтоматов возможны два различных определения установочной последовательности, которые при тестировании дискретных систем, вообще говоря, неявно соответствуют различным режимам тестирования: активному и пассивному. При активном тестировании установочный эксперимент должен установить систему в известное конечное состояние, причем момент подачи самого теста может быть любым после установки системы. В этом случае установочная последовательность должна перевести полуавтомат в устойчивое состояние. При пассивном тестировании не требуется, чтобы установочная последовательность переводила полуавтомат в устойчивое состояние. Соответственно предлагаются два определения установочной последовательности.

Последовательность $\alpha \in (I \cup \{\omega\})^*$ называется *установочной* для полуавтомата $\mathbf{S}$, если 1) в каждом состоянии существует трасса в $\mathbf{S}^\delta$, совместимая с α , и 2) для любых двух состояний s_1 , s_2 и любой общей трассы σ в этих состояниях, совместимой с α , σ переводит полуавтомат из состояний s_1 и s_2 в одно и то же состояние. Если α — установочная последовательность для полуавтомата $\mathbf{S}$ и существует состояние s такое, что любая трасса σ , совме-

стимая с α , переводит полуавтомат из любого состояния в состояние s , то α называется *синхронизирующей* для полуавтомата $\mathbf{S}$.

Последовательность α называется *устойчиво установочной* для полуавтомата $\mathbf{S}$, если 1) в каждом состоянии существует трасса в $\mathbf{S}^\delta$, совместимая с α , причем совместимыми являются только полные трассы, 2) для любых двух состояний s_1, s_2 и любой общей полной трассы σ в этих состояниях, совместимой с α , σ переводит полуавтомат из состояний s_1 и s_2 в одно и то же состояние. В этом случае после подачи установочной последовательности полуавтомат закончит работу в устойчивом состоянии, в котором может оставаться бесконечно долго, например до подачи тестовой последовательности. Если α — устойчиво установочная последовательность для полуавтомата $\mathbf{S}$ и существует состояние s такое, что любая полная трасса σ , совместимая с α , переводит полуавтомат из любого состояния в состояние s , то α называется *устойчиво синхронизирующей* для полуавтомата $\mathbf{S}$. Непосредственно из определения установочной/синхронизирующей последовательности следует следующее

Утверждение 1. 1. В полуавтомате не существует установочной (синхронизирующей) последовательности, если для любой входной последовательности $\gamma \in I^*$ существует состояние, в котором отсутствует трасса с подходящей входной проекцией. 2. В полуавтомате не существует устойчиво установочной (синхронизирующей) последовательности, если для любой входной последовательности $\gamma \in I^*$ существует состояние, в котором отсутствует полная трасса с такой входной проекцией. 3. В полуавтомате с числом состояний не меньше двух не существует (устойчиво) установочной (синхронизирующей) последовательности, если множество S_{und} содержит больше одного состояния. 4. В полуавтомате не существует устойчиво установочной (устойчиво синхронизирующей) последовательности, если в каждом состоянии полуавтомата определен хотя бы один выходной символ, отличный от δ , т.е. множество S_{st} является пустым.

Если в полуавтомате $\mathbf{S}$ нет ни одного перехода, помеченного выходным символом из O , то входы-выходной полуавтомат становится классическим автоматом без выходных символов, для которого рассматривается только существование синхронизирующей последовательности [7]. Если в полуавтомате нет переходов, помеченных входными символами из I , то для наблюдаемого полуавтомата устойчиво установочная/синхронизирующая последовательность есть последовательность, состоящая только из символов ω , т.е. полуавтомат только выдает выходные символы с интервалом, не меньшим $T_{вых}$. Такая последовательность является устойчиво установочной для полуавтомата $\mathbf{S}$, если и только если любая трасса в любом состоянии полуавтомата $\mathbf{S}^\delta$, совместимая с такой последовательностью, является полной и для любых двух состояний s_1 и s_2 и любой общей выходной последовательности β в этих состояниях β переводит полуавтомат из состояний s_1 и s_2 в одно и то же состояние.

Пусть α — установочная последовательность для наблюдаемого полуавтомата $\mathbf{S}$ и $b \in I \cup \{\omega\}$. Если для последовательности αb ($b\alpha$) в каждом состоянии существует трасса в $\mathbf{S}^\delta$, совместимая с αb ($b\alpha$), то можно показать, что αb ($b\alpha$) тоже установочная последовательность. Подобное утверждение имеет место также для устойчиво установочных последовательностей.

Утверждение 2. 1. Если α — установочная последовательность для полуавтомата $\mathbf{S}$, то последовательности αb и $b\alpha$, $b \in I \cup \{\omega\}$, для которых в каждом состоянии существует трасса в $\mathbf{S}^\delta$, совместимая с αb ($b\alpha$ соответственно), также суть установочные последовательности для полуавтомата $\mathbf{S}$. 2. Если α — устойчиво установочная последовательность для полуавтомата $\mathbf{S}$, то последовательности αb и $b\alpha$, для которых в каждом состоянии существует полная трасса в $\mathbf{S}^\delta$, совместимая с αb ($b\alpha$ соответственно) и все такие совместимые трассы являются полными, являются устойчиво установочными последовательностями для полуавтомата $\mathbf{S}$.

4. Проверка существования и построение безусловной установочной и синхронизирующей последовательностей для входо-выходного полуавтомата

Так же, как в [6], для построения установочной/синхронизирующей последовательности полуавтомат $\mathbf{S}$ преобразуется в конечный автомат, чтобы воспользоваться хорошо известными методами идентификации финального состояния для конечных автоматов. Автомат $M_S^{\delta\omega}$ содержит все состояния полуавтомата $\mathbf{S}$ и строится следующим образом:

- в состоянии s для входного символа $i \in I$ есть переход в состояние q с выходным символом δ , если и только если в исходном полуавтомате есть переход из состояния s в состояние q по входному символу i ;
- в состоянии s для входного символа $\omega \notin I$ есть переход в состояние q с выходным символом o , если и только если в исходном полуавтомате в состоянии s есть переход в q с выходным символом o ;
- в состоянии s автомата есть петля, помеченная парой ω/δ , если и только если $s \in S_{st}$.

Показывается, что полуавтомат $\mathbf{S}$ имеет установочную (синхронизирующую) последовательность, если и только если $M_S^{\delta\omega}$ обладает такой последовательностью с определенными свойствами.

Рассмотрим полуавтомат $\mathbf{S}$ на рис. 1, по которому построен соответствующий конечный автомат $M_S^{\delta\omega}$. Построим установочную последовательность для этого автомата. Эта последовательность не может начинаться с входного символа i , так как этот входной символ не определен в состоянии 2. Поэтому в начальный момент времени подается ω (т.е. фактически ничего не подается). Ожидается или o_2 (полуавтомат перешел в известное состояние 4), или o_1 (полуавтомат перешел в состояние 2 или 5), или после выходного таймаута известно, что текущее состояние 4 или 5. Поскольку переход

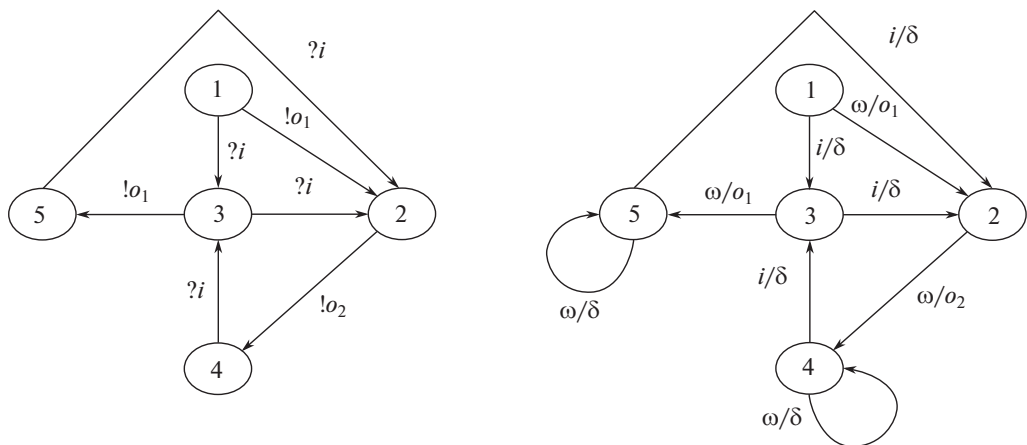


Рис. 1. Полуавтомат S и соответствующий ему конечный автомат $M_S^{\delta\omega}$.

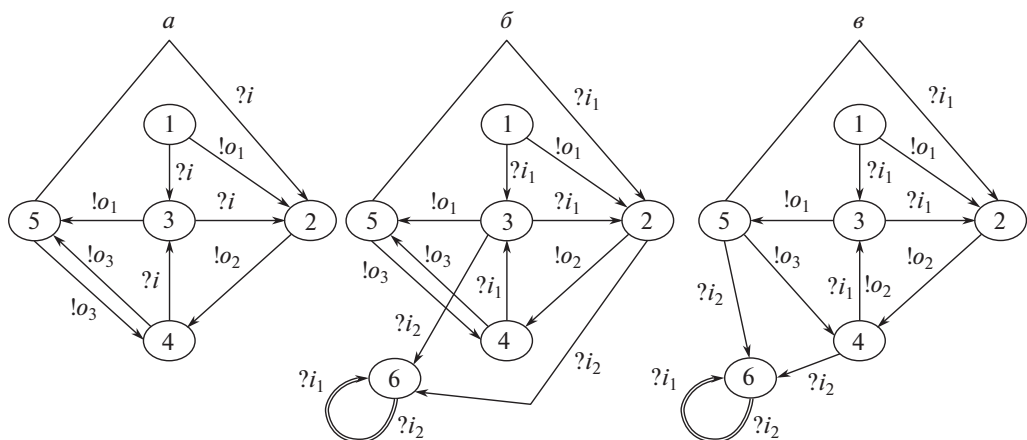


Рис. 2. Полуавтоматы с (устойчиво) установочными последовательностями.

по i не определен в состоянии 2, после выдачи выходного символа или истечения выходного таймута снова ожидается выходной символ. В данном случае известно, что полуавтомат или попал в состояние 4 (выходной символ o_2), или по-прежнему находится в состоянии 4 или 5. Подается входной символ i , полуавтомат попадает в состояние 2 или 3, и после этого снова ожидается выходной символ (входной символ ω). Если после этого выдается o_2 , то полуавтомат оказался в состоянии 4, а если получено o_1 , то — в состоянии 5. Таким образом, полуавтомат обладает установочной последовательностью $\omega\omega i\omega$, которая является в том числе устойчиво установочной, поскольку в любом состоянии каждая трасса, совместимая с $\omega\omega i\omega$, является полной.

Однако если в исходном полуавтомате не каждое состояние является устойчивым, то не всякая установочная последовательность автомата $M_S^{\delta\omega}$

будет устойчиво установочной; такая последовательность должна заканчиваться только в устойчивых состояниях автомата; тем не менее такой полуавтомат может обладать устойчиво установочной последовательностью. На рис. 2,а приведен пример полуавтомата для случая, когда в полуавтомате есть установочная последовательность $\omega\omega i\omega$, но отсутствует устойчиво установочная последовательность. В примере на рис. 2,б есть установочные последовательности $\omega\omega i_1\omega$ и $\omega\omega i_1i_2$, но только вторая последовательность устойчиво установочная. В примере на рис. 2,в устойчиво установочная последовательность $\omega\omega i_1\omega i_2$ является продолжением установочной последовательности $\omega\omega i_1\omega$, которая не является устойчиво установочной. Для построения устойчиво установочной последовательности используется понятие S_{st} -установочной последовательности (S' -установочная последовательность [7]).

Установочная последовательность γ автомата $M_S^{\delta\omega}$ называется S_{st} -установочной последовательностью, если все трассы автомата $M_S^{\delta\omega}$ с входной проекцией γ и одной и той же выходной проекцией независимо от начального состояния заканчиваются в одном и том же состоянии из множества S_{st} , где S_{st} — множество устойчивых состояний полуавтомата $\mathbf{S}$, т.е. состояний, в которых нет переходов по выходным действиям. Если все трассы автомата $M_S^{\delta\omega}$ с входной проекцией γ независимо от начального состояния и выходной проекции заканчиваются в одном и том же состоянии из множества S_{st} , то S_{st} -установочная последовательность называется S_{st} -синхронизирующей последовательностью. Если автомат не обладает установочной (синхронизирующей) последовательностью, то этот автомат не обладает и S_{st} -установочной (S_{st} -синхронизирующей) последовательностью; обратное, вообще говоря, не верно.

Утверждение 3. 1. Полуавтомат $\mathbf{S}$ имеет установочную последовательность, если и только если $M_S^{\delta\omega}$ обладает установочной последовательностью. 2. Полуавтомат $\mathbf{S}$ имеет устойчиво установочную последовательность, если и только если $M_S^{\delta\omega}$ обладает S_{st} -установочной последовательностью.

Доказательство. Пусть $\beta_1\alpha_1\dots\beta_k\alpha_k\beta_{k+1}$ есть трасса в алфавитах I и O полуавтомата $\mathbf{S}^\delta$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ — входные последовательности, $\beta_1, \dots, \beta_k, \beta_{k+1}$ — выходные последовательности, которые могут включать символ δ как выходной символ и каждая из которых может быть пустой последовательностью. По построению автомата $M_S^{\delta\omega}$ в полуавтомате $\mathbf{S}$ есть переход из состояния s в состояние s' под действием выходного символа o , если и только если такой переход существует в автомате $M_S^{\delta\omega}$ с пометкой ω/o . В полуавтомате $\mathbf{S}$ есть переход из состояния s в состояние s' под действием входного символа i , если и только если в автомате $M_S^{\delta\omega}$ есть переход из состояния s в состояние s' с пометкой i/δ . Таким образом, полуавтомат $\mathbf{S}$ в состоянии s имеет трассу $\beta_1\alpha_1\dots\beta_k\alpha_k\beta_{k+1}$, которая переводит полуавтомат в состояние s' , если и только если в автомате $M_S^{\delta\omega}$ есть трасса $\omega^{|\beta_1|}/\beta_1.\alpha_1/\delta^{|\alpha_1|}\dots\omega^{|\beta_k|}/\beta_k.\alpha_k/\delta^{|\alpha_k|}.\omega^{|\beta_{k+1}|}/\beta_{k+1}$, переводящая автомат из со-

стояния s в состояние s' , где запись $i_1 i_2 \dots i_k / o_1 o_2 \dots o_k$ обозначает последовательность $i_1 / o_1, i_2 / o_2, \dots, i_k / o_k$.

$\Leftarrow$ Пусть автомат $M_S^{\delta\omega}$ обладает установочной последовательностью $\omega^{t_1} i_1 \dots \omega^{t_k} i_k \omega^{t_{k+1}}$, $i_j \in I$, $j = 1, \dots, k$. По определению установочной последовательности последовательность $\omega^{t_1} i_1 \dots \omega^{t_k} i_k \omega^{t_{k+1}}$ определена в каждом состоянии автомата $M_S^{\delta\omega}$ и для любой выходной последовательности $\beta_1 \delta \dots \beta_k \delta \beta_{k+1}$, такой что трасса $\omega^{|\beta_1|} / \beta_1 . i_1 / \delta \dots \omega^{|\beta_k|} / \beta_k . i_k / \delta \omega^{|\beta_{k+1}|} / \beta_{k+1}$ выполняется хотя бы в одном состоянии s автомата, существует состояние s' , такое что $\omega^{|\beta_1|} / \beta_1 . i_1 / \delta \dots \omega^{|\beta_k|} / \beta_k . i_k / \delta \omega^{|\beta_{k+1}|} / \beta_{k+1}$ -преемник любого состояния s есть либо пустое множество, либо состояние s' . Таким образом, $\omega^{|\beta_1|} / \beta_1 . i_1 / \delta \dots \omega^{|\beta_k|} / \beta_k . i_k / \delta \omega^{|\beta_{k+1}|} / \beta_{k+1}$ есть установочная последовательность для полуавтомата $\mathbf{S}$.

$\Rightarrow$ Пусть теперь полуавтомат $\mathbf{S}$ обладает установочной последовательностью $\alpha = \omega^{t_1} i_1 \dots \omega^{t_k} i_k \omega^{t_{k+1}}$. Тогда по определению в каждом состоянии полуавтомата существует трасса в $\mathbf{S}^\delta$, совместимая с α ; и для любых двух состояний s_1, s_2 и любой общей трассы σ в этих состояниях, совместимой с α , σ переводит полуавтомат из состояний s_1 и s_2 в одно и то же состояние. Иными словами, для любой трассы σ , совместимой с α , финальное состояние определяется единственным образом независимо от начального состояния полуавтомата, однако эти состояния могут быть различными для трасс σ с различными выходными проекциями.

По определению автомата $M_S^{\delta\omega}$ из того, что в каждом состоянии полуавтомата существует трасса, совместимая с $\omega^{t_1} i_1 \dots \omega^{t_k} i_k \omega^{t_{k+1}}$, следует, что поведение конечного автомата в каждом состоянии определено на этой последовательности и более того для любой выходной реакции $\beta_1 \delta \dots \beta_k \delta \beta_{k+1}$ на эту последовательность существует состояние s' такое, что если $\omega^{t_1} / \beta_1 . i_1 / \delta \dots \omega^{t_k} / \beta_k . i_k / \delta \omega^{t_{k+1}} / \beta_{k+1}$ выполняется хотя бы в одном состоянии s полуавтомата, то $\omega^{t(1)} / \beta_1 . i_1 \dots \omega^{t(k)} / \beta_k . i_k . \omega^{t_{k+1}} / \beta_{k+1}$ -преемник любого такого состояния s есть либо пустое множество, либо множество $\{s'\}$. Таким образом, $\omega^{t_1} i_1 \dots \omega^{t_k} i_k \omega^{t_{k+1}}$ есть установочная последовательность для автомата $M_S^{\delta\omega}$.

Свойство 2 утверждения 3 доказывается аналогичным образом за исключением того факта, что в полуавтомате рассматриваются только полные трассы, а в конечном автомате — трассы, которые заканчиваются в состояниях из множества S_{st} .

Алгоритм проверки существования и построения S_{st} -установочной последовательности для конечного автомата в общем случае не известен; однако достаточно просто он может быть основан на продлении дерева преемников автомата [5], корень которого помечен множеством всех пар различных состояний, до получения только синглетонов $\{s\}$, $s \in S_{st}$.

Аналогично утверждению 3, можно доказать следующее

Утверждение 4. 1. Полуавтомат $\mathbf{S}$ обладает синхронизирующей последовательностью, если и только если $M_S^{\delta\omega}$ обладает синхронизирующей

последовательностью. 2. Полуавтомат S обладает устойчиво синхронизирующей последовательностью, если и только если $M_S^{\delta\omega}$ обладает S_{st} -синхронизирующей последовательностью.

В завершение заметим, что оценки длины и сложности построения установочных/синхронизирующих последовательностей совпадают с таковыми для конечных автоматов. Представляет интерес описание классов полуавтоматов, для которых всегда существует установочная/синхронизирующая последовательность полиномиальной длины.

5. Заключение

В настоящей работе обсуждается проблема построения установочных и синхронизирующих экспериментов для входо-выходных полуавтоматов. Вводится понятие таких «умозрительных» экспериментов, которое, вообще говоря, отличается от аналогичного понятия в теории автоматов, и предлагается метод построения установочных и синхронизирующих последовательностей на основе построения конечного автомата с тем же множеством трасс. Оценки сложности таких последовательностей совпадают с оценками сложности для подходящих классических конечных автоматов.

Поскольку для конечных автоматов адаптивность в некоторых случаях позволяет снизить сложность проверки существования и построения установочных и синхронизирующих экспериментов [2], в дальнейшем авторы предполагают рассмотреть адаптивные установочные и синхронизирующие эксперименты для полуавтоматов, а также выделить классы с «хорошими» оценками сложности для таких экспериментов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов. М.: Наука, 1966.
2. Евтушенко Н.В., Кушик Н.Г. Некоторые задачи идентификации состояний для недетерминированных автоматов. Томск: STT Publishing, 2018.
3. Burdonov I., Yevtushenko N., Kossatchev A. Separating Input/Output Automata With Nondeterministic Behavior // Rus. Digital Librar. J. 2020. V. 23. No. 4. P. 634–655.
4. Hennie F. Fault detecting experiments for sequential circuits // 5th Annual Symposium On Switching Circuit Theory And Logical Design, Princeton, New Jersey, USA, November 11–13, 1964, P. 95–110.
5. Kushik N., Lopez J., Cavalli A., Yevtushenko N. Improving Protocol Passive Testing through “Gedanken” Experiments with Finite State Machines. // 2016 IEEE International Conference On Software Quality, Reliability And Security, QRS 2016, Vienna, Austria, August 1–3, 2016, P. 315–322.
6. Kushik N., Yevtushenko N., Burdonov I., Kossachev A. Synchronizing and Homing Experiments for Input/output Automata // Syst. Inform. 2017. No. 10. P. 1–10.

7. *Sandberg S.* Homing and Synchronizing Sequences // Model-Based Testing Of Reactive Systems, Advanced Lectures [The Volume Is The Outcome Of A Research Seminar That Was Held In Schloss Dagstuhl In January 2004], 2004. P. 5–33.
8. *Tretmans J.* A Formal Approach to Conformance Testing // Protocol Test Systems, VI, Proceedings Of The IFIP TC6/WG6.1 Sixth International Workshop On Protocol Test Systems, Pau, France, 28–30 September, 1993. P. 257–276.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.Ф. Караваем.

Поступила в редакцию 24.12.2022

После доработки 25.01.2023

Принята к публикации 26.01.2023

Стохастические системы

© 2023 г. А.С. КОПОСОВ (koposov96@yandex.ru),
П.В. ПАКШИН, д-р физ.-мат. наук (pakshinpv@gmail.com)
(Арзамасский политехнический институт (филиал)
Нижегородского государственного технического
университета им. Р.Е. Алексеева)

УПРАВЛЕНИЕ С ИТЕРАТИВНЫМ ОБУЧЕНИЕМ СТОХАСТИЧЕСКИМИ МУЛЬТИАГЕНТНЫМИ СИСТЕМАМИ С ИЗМЕНЯЕМОЙ ЖЕЛАЕМОЙ ТРАЕКТОРИЕЙ И ТОПОЛОГИЕЙ¹

В современном интеллектуальном производстве роботы часто связаны сетью, и их задача может меняться по заранее заданной программе. Для роботов, выполняющих высокоточные операции, широко используется управление с итеративным обучением (УИО). В условиях сети, в случае смены программы, эффективность алгоритмов УИО может снижаться. Например, при изменении желаемой траектории ошибка обучения может временно увеличиться до недопустимого значения. В данной работе рассматривается сетевая система, в которой желаемая траектория и параметры изменяются между повторениями по известной программе, агенты подвергаются случайным возмущениям, а измерения производятся с шумами. Кроме того, топология сети также изменяется за счет выхода из сети некоторых агентов и подключения новых агентов по заданной программе. Предлагается метод синтеза распределенного УИО на основе векторных функций Ляпунова для повторяющихся процессов в сочетании с фильтрацией Калмана. Метод обеспечивает сходимость ошибки обучения и снижает ее переходные возрастания, вызванные изменением желаемой траектории и топологии сети. Приведен пример, подтверждающий эффективность предлагаемого метода.

Ключевые слова: управление с итеративным обучением, мультиагентная система, изменяемая топология, случайные возмущения, повторяющиеся процессы, устойчивость, стабилизация, векторная функция Ляпунова, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231023060053, EDN: CSGCPH

1. Введение

Новой парадигмой современной промышленности является интеллектуальное производство (ИП), которое часто называют четвертой промышленной революцией (Industry 4.0). Системы ИП интегрируют физические ком-

¹ Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 22-21-00612, <https://rscf.ru/project/22-21-00612>.

поненты производства с киберпространством. Эти системы появились благодаря разработке и использованию информационных технологий, таких как промышленный Интернет вещей, искусственный интеллект (ИИ) и облачные вычисления, в сочетании со значительно возросшей производительностью современных компьютеров. Создание интеллектуальных производств стало мощным движущим фактором в развитии машинного обучения (МО) и сетевых мультиагентных систем. МО и сетевые структуры обеспечивают гибкую адаптацию к сокращению сроков выполнения заказов, жестким допускам на параметры продукции, ограничениям по стоимости, частым изменениям спроса и постоянному совершенствованию технологий; см. [1, 2] и ссылки в них.

Для динамических систем в технике концепция МО была определена Я.З. Цыпкиным [3] еще в начале 60-х годов прошлого века как процесс получения в системе необходимой реакции на внешние сигналы путем многократных воздействий на нее и внешней корректировки. УИО полностью вписывается в эту концепцию, поскольку оно предназначено для повторяющихся процессов, и на каждом повторении корректируется на основе информации с предыдущих повторений. За счет этого последовательно улучшается тот или иной показатель качества, например, точность воспроизведения желаемой траектории движения. Начиная с новаторского исследования [4] УИО стало активно развивающейся областью исследований и находит многочисленные практические приложения, прежде всего в робототехнике. Для отправки точки в литературе можно рекомендовать обзорные статьи [5, 6].

В стандартной постановке УИО желаемая траектория не изменяется от повторения к повторению, а после очередного повторения система всякий раз возвращается в одно и то же начальное состояние. Эти допущения ограничивают возможности УИО во многих приложениях ИП. В современном ИП желаемые траектории и цели управления могут изменяться по определенным правилам, в связи с чем управление должно соответствующим образом перенастраиваться. Изменение желаемой траектории порождает переходную ошибку, которая часто снижает точность ниже допустимого уровня в течение нескольких повторений. Следовательно, необходимо разработать новые алгоритмы УИО для компенсации переходной ошибки. В [2] рассмотрен сценарий реконфигурации управления при заранее определенном изменении желаемой траектории между повторениями. Стохастическая версия того же сценария была рассмотрена в [7, 8]. В цитируемых работах переходная ошибка компенсировалась алгоритмами УИО на основе соответствующих правил переключения.

С момента публикации [9] распределенный (сетевой) закон УИО рассматривался в ряде статей; см. [10–15] и ссылки в них. Хорошие обзоры предоставлены в [16] и в [15, 17, 18]. Анализ современного состояния задачи показывает следующее: в подавляющем большинстве исследований по распределенному УИО для линейных систем использовался алгоритм Аримото или его дискретный аналог, а математический аппарат базировался на методе супервек-

торов [19]. Для нелинейных систем тот же алгоритм Аримото был объединен с техникой априорных оценок, что давало консервативные результаты. Как правило, степень консерватизма оценить невозможно: приведенные чисто иллюстративные примеры не отражают возможных приложений.

Работа [20] была одной из первых, где эффективность предложенных сетевых алгоритмов УИО была подтверждена как моделированием, так и экспериментами с группой квадрокоптеров. Результаты [20] получили дальнейшее развитие в [16]. В [21] эффективность предложенных сетевых алгоритмов УИО также подтверждена моделированием и экспериментами с группой мобильных роботов. При этом использовались дискретные модели с дискретными версиями алгоритмов Аримото.

В [17] была предложена конструкция УИО для мультиагентных систем на основе двумерных дискретных моделей (линейные повторяющиеся процессы). Вычислительная сложность алгоритма проектирования была уменьшена за счет использования двумерного аналога теоремы Факса–Мюррея, хорошо известного в теории сетевых систем. Подход [17] был расширен в [18] на стохастические мультиагентные системы. Значительно улучшены точность и скорость сходимости ошибки слежения по сравнению с известными алгоритмами; теоретические результаты были наглядно подтверждены примерами. В [22] рассмотрена задача синтеза УИО для мультиагентных неопределенных систем в детерминированной постановке с изменяемой топологией сети. Был предложен специальный закон переключения для уменьшения переходной ошибки, вызванной изменением топологии. В [23] рассмотрена задача синтеза УИО для мультиагентных стохастических систем с изменяемой желаемой траекторией и фиксированной топологией сети.

В отличие от известных работ, в данной статье впервые в литературе решается задача синтеза распределенного УИО для мультиагентной сетевой системы в стохастической постановке, когда желаемая траектория и топология сети изменяются на заранее известном и ограниченном интервале повторений по некоторой внешней программе.

2. Постановка задачи

Рассмотрим сетевую систему, состоящую из N линейных подсистем (агентов), задачей которых является выполнение одной и той же многократно повторяющейся операции. В процессе функционирования системы топология сети может изменяться. Динамика агента i описывается следующей дискретной моделью в пространстве состояний:

$$(2.1) \quad x_i(k, p+1) = A_{\sigma_i(k)} x_i(k, p) + B_{\sigma_i(k)} u_i(k, p) + D_{\sigma_i(k)} \omega_i(k, p),$$

$$(2.2) \quad y_i(k, p) = C x_i(k, p),$$

$$(2.3) \quad y_{vi}(k, p) = y_i(k, p) + G_{\sigma_i(k)} \nu_i(k, p), \quad i \in \mathcal{I}, \quad k \geq 0, \quad 0 \leq p \leq T-1,$$

где $x_i(k, p) \in \mathbb{R}^{n_x}$ — вектор состояния, $u_i(k, p) \in \mathbb{R}^1$ — скалярная переменная управления, $\omega_i(k, p) \in \mathbb{R}^{n_\omega}$ — вектор возмущений, действующих на объект, $y_i(k, p) \in \mathbb{R}^1$ — скалярная выходная переменная (профиль повторения), недоступная наблюдению, $y_{\nu i}(k, p) \in \mathbb{R}^1$ — наблюдаемая (измеряемая) выходная переменная, $\nu_i(k, p) \in \mathbb{R}^1$ — шум измерений, k — номер повторения, p — дискретное время на повторении k , T — продолжительность повторения, одинаковая для всех k , $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}$ — множество всех агентов. Начальные условия $x_i(k, 0)$ и $u_i(0, p)$ одинаковы для всех агентов.

Предполагается, что возмущения $\omega_i(k, p)$ и шумы измерений $\nu_i(k, p)$ представляют собой независимые гауссовские белые шумы с нулевым математическим ожиданием и с ковариациями

$$S_{i\omega} = \mathbb{E} \left[\omega_i(k, p) \omega_i^\top(k, p) \right],$$

$$S_{i\nu} = \mathbb{E} \left[\nu_i(k, p)^2 \right],$$

где $\mathbb{E}$ — символ математического ожидания. Также предположим, что $\omega_i(k, p)$ не зависит от начального вектора состояния.

Сигнал $\sigma_i(k)$, переключающий режим работы агента i , представляет собой кусочно-постоянную функцию, отображающую $\mathbb{Z}_+$ в $\{1, \dots, m\}$ (где m — количество режимов), точки разрыва которой будем называть *моментами переключения режима*. В каждом режиме задана своя желаемая траектория выходного сигнала $y_{\sigma_i(k)}^{ref}(p)$ и матрицы $A_{\sigma_i(k)} \in \{A_1, \dots, A_m\}$, $B_{\sigma_i(k)} \in \{B_1, \dots, B_m\}$, $D_{\sigma_i(k)} \in \{D_1, \dots, D_m\}$ и $G_{\sigma_i(k)} \in \{G_1, \dots, G_m\}$ агентов, при этом тройки $(A_{\sigma_i(k)}, B_{\sigma_i(k)}, C)$ полностью управляемы и наблюдаемы, а $CB_{\sigma_i(k)} \neq 0$.

Сигнал $\rho(k)$, переключающий топологию сети, представляет собой кусочно-постоянную функцию, отображающую $\mathbb{Z}_+$ в $\{1, \dots, c\}$ (где c — количество топологий), точки разрыва которой будем называть *моментами переключения топологии*. Каждая топология определяется множеством функционирующих агентов, которое представляется в виде набора их номеров $\mathcal{I}_{\rho(k)} = \{i_n\}_{n=1}^{N_{\rho(k)}} \subseteq \mathcal{I}$, где $N_{\rho(k)} \leq N$ — количество агентов, функционирующих при топологии $\rho(k)$, и связями между ними, которые представляются в виде направленного графа $\mathcal{G}_{\rho(k)} = (\mathcal{I}_{\rho(k)}, \mathcal{E}_{\rho(k)})$, где $\mathcal{E}_{\rho(k)} \subseteq \mathcal{I}_{\rho(k)} \times \mathcal{I}_{\rho(k)}$ — ребра графа. Возможность доступа агента i к выходным данным агента j ($i, j \in \mathcal{I}_{\rho(k)}$) задается ребром, направленным от вершины j к вершине i , и обозначается упорядоченной парой $(j, i) \in \mathcal{E}_{\rho(k)}$. Элементы матрицы смежности

$$\mathcal{S}_{\rho}(\mathcal{G}_{\rho}) = \begin{bmatrix} s_{i_1 i_1} & s_{i_1 i_2} & \cdots & s_{i_1 i_{N_{\rho}}} \\ s_{i_2 i_1} & s_{i_2 i_2} & \cdots & s_{i_2 i_{N_{\rho}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{i_{N_{\rho}} i_1} & s_{i_{N_{\rho}} i_2} & \cdots & s_{i_{N_{\rho}} i_{N_{\rho}}} \end{bmatrix}, \quad \rho = \rho(k)$$

задаются следующим образом: $s_{ij} > 0$, если $(j, i) \in \mathcal{E}_{\rho(k)}$, $s_{ij} = 0$ в противном случае, $s_{ii} = 0$. Матрица Лапласа графа $\mathcal{G}_{\rho(k)}$ задается выражением

$$\mathcal{L}_{\rho}(\mathcal{G}_{\rho}) = \begin{bmatrix} \sum_{j \in \mathcal{I}_{\rho}} s_{i_1 j} & -s_{i_1 i_2} & \cdots & -s_{i_1 i_{N_{\rho}}} \\ -s_{i_2 i_1} & \sum_{j \in \mathcal{I}_{\rho}} s_{i_2 j} & \cdots & -s_{i_2 i_{N_{\rho}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -s_{i_{N_{\rho}} i_1} & -s_{i_{N_{\rho}} i_2} & \cdots & \sum_{j \in \mathcal{I}_{\rho}} s_{i_{N_{\rho}} j} \end{bmatrix}, \quad \rho = \rho(k).$$

Будем считать, что непосредственный доступ к $y_{\sigma_i(k)}^{ref}(p)$ может иметь только некоторая подгруппа агентов, состав которой может меняться в зависимости от топологии сети. Возможность получения агентами информации о желаемой траектории выходного сигнала определяется матрицей $\mathcal{R}_{\rho(k)} = \text{diag}[r_{i_n}]_{n=1}^{N_{\rho(k)}}$, где $r_i = 1$, если i имеет доступ к $y_{\sigma_i(k)}^{ref}(p)$, и $r_i = 0$ в противном случае.

Агентов, для которых $r_i = 1$, будем именовать *глобальными лидерами*. Остальные могут получать информацию о выходном сигнале либо от глобальных лидеров, либо от любых других агентов. Агента i , для которого $r_i = 0$ и $\exists j : s_{ij} > 0$, будем называть *ведомым*, где агент j — один из агентов, передающих информацию агенту i , которых будем именовать *локальными лидерами* ведомого агента. Предполагается, что каждый ведомый агент не может передавать данные своим локальным лидерам.

Будем предполагать, что общее число переключений режима агентов и топологии сети $N_{\sigma\rho}$ конечно. Такой сценарий возникает, например, когда агенты представляют собой порталные роботы, функционирующие по некоторой программе в интеллектуальном производстве.

Ошибка обучения

$$e_i(k, p) = y_{\sigma_i(k)}^{ref}(p) - y_i(k, p)$$

недоступна для измерения и последующего формирования управления, поэтому в дальнейшем вместо нее будем использовать

$$(2.4) \quad \hat{e}_i(k, p) = y_{\sigma_i(k)}^{ref}(p) - \hat{y}_i(k, p),$$

где $\hat{y}_i(k, p) = C\hat{x}_i(k, p)$, $\hat{x}_i(k, p)$ — оценка состояния агента i , полученная с использованием фильтра Калмана

$$(2.5) \quad \hat{x}_i(k, p+1) = A_{\sigma_i(k)}\hat{x}_i(k, p) + B_{\sigma_i(k)}u_i(k, p) + F_{i\sigma_i(k)}(y_{\nu i}(k, p) - C\hat{x}_i(k, p))$$

с начальным условием $\hat{x}_i(k, 0) = F_{i\sigma_i(k)}y_{\nu i}(k, 0)$, $i \in \mathcal{I}_{\rho(k)}$, где $F_{i\sigma_i(k)} = A_{\sigma_i(k)}S_{i\sigma_i(k)}C^{\top} \left[CS_{i\sigma_i(k)}C^{\top} + G_{\sigma_i(k)}S_{i\nu}G_{\sigma_i(k)}^{\top} \right]^{-1}$, $S_{i\sigma_i(k)}$ — решение алгеб-

раического уравнения Риккати

$$\begin{aligned} S_{i\sigma_i(k)} &= A_{\sigma_i(k)} S_{i\sigma_i(k)} A_{\sigma_i(k)}^\top - \\ &- A_{\sigma_i(k)} S_{i\sigma_i(k)} C^\top \left[C S_{i\sigma_i(k)} C^\top + G_{\sigma_i(k)} S_{i\sigma_i(k)} G_{\sigma_i(k)}^\top \right]^{-1} C S_{i\sigma_i(k)} A_{\sigma_i(k)}^\top + \\ &+ D_{\sigma_i(k)} S_{i\omega} D_{\sigma_i(k)}^\top, \quad i \in \mathcal{I}_{\rho(k)}. \end{aligned}$$

Задача заключается в нахождении такого управления (протокола) $u_i(k, p)$, который позволит достичь консенсуса в следующем смысле:

$$(2.6) \quad \mathbb{E} [|\hat{e}_i(k, p)|^2] \leq \kappa \varrho^k + \delta, \quad \kappa > 0, \quad 0 < \varrho < 1, \quad \delta > 0,$$

$$(2.7) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E} [|u_i(k, p)|^2] = \mathbb{E} [|u_i(\infty, p)|^2] < \infty, \quad i \in \mathcal{I}, \quad 0 \leq p \leq T - 1.$$

Предельное значение $u_i(\infty, p)$ часто называют обученным управлением.

3. Построение 2D модели в приращениях переменных

3.1. Фиксированный режим агентов и фиксированная топология сети

Вначале рассмотрим случай, когда режим работы агентов и топология сети не меняются, т.е. рассмотрим интервал вдоль повторений, на котором сигналы $\sigma_i(k)$ и $\rho(k)$ не имеют точек разрыва и их значения равны для всех i и k . Далее при решении задачи в подобных случаях будем использовать обозначения $\sigma = \sigma_i(k)$ и $\rho = \rho(k)$. Зададим закон УИО как

$$(3.1) \quad u_i(k+1, p-1) = u_i(k, p-1) + \Delta u_i(k+1, p-1),$$

для которого корректирующую (обновляющую) поправку $\Delta u_i(k+1, p-1)$ будем формировать в виде, аналогичном принятому в [18, 22]:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \Delta u_i(k+1, p-1) &= K_{1\sigma\rho} (\hat{x}_i(k+1, p-1) - \hat{x}_i(k, p-1)) + \\ &+ K_{2\sigma\rho} \left(\sum_{j \in N_{\rho i}} s_{ij} (\hat{y}_j(k, p) - \hat{y}_i(k, p)) + r_i (y_\sigma^{ref}(p) - \hat{y}_i(k, p)) \right), \end{aligned}$$

где $K_{1\sigma\rho}$ и $K_{2\sigma\rho}$ — матрицы протокола в режиме σ и топологии ρ , $N_{\rho i} = \{j \in \mathcal{I}_\rho | (j, i) \in \mathcal{E}_\rho\}$ — множество агентов, информация о которых доступна агенту i в топологии ρ , s_{ij} и r_i — элементы матриц $\mathcal{S}_\rho$ и $\mathcal{R}_\rho$ соответственно.

Введем вектор приращения оценки состояния

$$\hat{\eta}_i(k+1, p+1) = \hat{x}_i(k+1, p) - \hat{x}_i(k, p),$$

ошибку оценивания $\tilde{x}_i(k, p) = x_i(k, p) - \hat{x}_i(k, p)$, приращение ошибки оценивания

$$\tilde{\eta}_i(k+1, p+1) = \tilde{x}_i(k+1, p) - \tilde{x}_i(k, p),$$

и запишем систему (2.1)–(2.3) в терминах приращений и оценки ошибки обучения (2.4):

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \hat{\eta}_i(k+1, p+1) = & A_\sigma \hat{\eta}_i(k+1, p) + F_{i\sigma} C \tilde{\eta}_i(k+1, p) + \\ & + B_\sigma \Delta u_i(k+1, p-1) + F_{i\sigma} G_\sigma \Delta \nu_i(k+1, p-1), \end{aligned}$$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \tilde{\eta}_i(k+1, p+1) = & (A_\sigma - F_{i\sigma} C) \tilde{\eta}_i(k+1, p) + \\ & + D_\sigma \Delta \omega_i(k+1, p-1) - F_{i\sigma} G_\sigma \Delta \nu_i(k+1, p-1), \end{aligned}$$

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \hat{e}_i(k+1, p) = & -C A_\sigma \hat{\eta}_i(k+1, p) - C F_{i\sigma} C \tilde{\eta}_i(k+1, p) + \hat{e}_i(k, p) - \\ & - C B_\sigma \Delta u_i(k+1, p-1) - C F_{i\sigma} G_\sigma \Delta \nu_i(k+1, p-1), \end{aligned}$$

где $\Delta \nu_i(k+1, p-1) = \nu_i(k+1, p-1) - \nu_i(k, p-1)$, $\Delta \omega_i(k+1, p-1) = \omega_i(k+1, p-1) - \omega_i(k, p-1)$. Второе уравнение в системе (3.3)–(3.5) не зависит от других, следовательно, справедлив хорошо известный для обычных линейных систем принцип разделения, согласно которому фильтр и регулятор можно синтезировать независимо. Поэтому $\tilde{\eta}_i$ можно рассматривать как внешнюю ограниченную переменную и для дальнейшего синтеза управления использовать следующую систему:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \hat{\eta}_i(k+1, p+1) = & A_\sigma \hat{\eta}_i(k+1, p) + B_\sigma \Delta u_i(k+1, p-1) + \\ & + F_{i\sigma} G_\sigma \Delta \nu_i(k+1, p-1), \end{aligned}$$

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \hat{e}_i(k+1, p) = & -C A_\sigma \hat{\eta}_i(k+1, p) + \hat{e}_i(k, p) - C B_\sigma \Delta u_i(k+1, p-1) - \\ & - C F_{i\sigma} G_\sigma \Delta \nu_i(k+1, p-1). \end{aligned}$$

Введем расширенные векторы

$$\begin{aligned} \hat{x}(k, p) &= \begin{bmatrix} \hat{x}_{i_1}^\top(k, p) & \dots & \hat{x}_{i_{N_\rho}}^\top(k, p) \end{bmatrix}^\top, \\ \hat{\eta}(k, p) &= \begin{bmatrix} \hat{\eta}_{i_1}^\top(k, p) & \dots & \hat{\eta}_{i_{N_\rho}}^\top(k, p) \end{bmatrix}^\top, \\ \hat{e}(k, p) &= \begin{bmatrix} \hat{e}_{i_1}(k, p) & \dots & \hat{e}_{i_{N_\rho}}(k, p) \end{bmatrix}^\top, \\ \Delta \nu(k, p) &= \begin{bmatrix} \Delta \nu_{i_1}(k, p) & \dots & \Delta \nu_{i_{N_\rho}}(k, p) \end{bmatrix}^\top, \end{aligned}$$

и, с учетом (3.2), перепишем расширенную систему (3.6)–(3.7) в виде

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \hat{\eta}(k+1, p+1) = & (\bar{A}_{11\sigma\rho} + \bar{B}_{1\sigma\rho} \bar{K}_{1\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_{1\rho}) \hat{\eta}(k+1, p) + \\ & + (\bar{A}_{12\sigma\rho} + \bar{B}_{1\sigma\rho} \bar{K}_{2\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_{2\rho}) \hat{e}(k, p) + \bar{F}_{1\sigma\rho} \Delta \nu(k+1, p-1), \end{aligned}$$

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \hat{e}(k+1, p) = & (\bar{A}_{21\sigma\rho} + \bar{B}_{2\sigma\rho} \bar{K}_{1\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_{1\rho}) \hat{\eta}(k+1, p) + \\ & + (\bar{A}_{22\sigma\rho} + \bar{B}_{2\sigma\rho} \bar{K}_{2\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_{2\rho}) \hat{e}(k, p) + \bar{F}_{2\sigma\rho} \Delta \nu(k+1, p-1), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{11\sigma\rho} &= I_{N_\rho} \otimes A_\sigma, \quad \bar{A}_{12\sigma\rho} = 0, \quad \bar{A}_{21\sigma\rho} = I_{N_\rho} \otimes (-CA_\sigma), \quad \bar{A}_{22\sigma\rho} = I_{N_\rho}, \\
\bar{B}_{1\sigma\rho} &= I_{N_\rho} \otimes B_\sigma, \quad \bar{B}_{2\sigma\rho} = I_{N_\rho} \otimes (-CB_\sigma), \\
\bar{K}_{1\sigma\rho} &= I_{N_\rho} \otimes K_{1\sigma\rho}, \quad \bar{K}_{2\sigma\rho} = I_{N_\rho} \otimes K_{2\sigma\rho}, \\
\bar{\mathcal{H}}_{1\rho} &= I_{N_\rho} \otimes \mathcal{H}_1, \quad \mathcal{H}_1 = I_{n_x}, \quad \bar{\mathcal{H}}_{2\rho} = (\mathcal{L}_\rho + \mathcal{R}_\rho) \otimes \mathcal{H}_2, \quad \mathcal{H}_2 = 1, \\
\bar{F}_{1\sigma\rho} &= \text{diag}[F_{i_n\sigma} G_\sigma]_{n=1}^{N_\rho}, \quad \bar{F}_{2\sigma\rho} = \text{diag}[-CF_{i_n\sigma} G_\sigma]_{n=1}^{N_\rho},
\end{aligned}$$

и $\otimes$ — символ произведения Кронекера.

Система (3.8)–(3.9) записана в стандартной форме повторяющегося процесса и дальнейший вывод условий сходимости будет основан на теории устойчивости стохастических повторяющихся процессов с переключениями [24].

3.2. Переключения режимов агентов и топологии

Рассмотрим случай, когда происходит переключение режима работы агентов. Это может происходить при неизменной топологии и сигнал, переключающий топологию, для краткости обозначим за ρ , подразумевая, что он одинаков на всех рассматриваемых повторениях. Начнем с рассмотрения глобальных лидеров. Пусть $k + 1$ — один из моментов переключения глобального лидера i . Его управляемая динамика описывается следующим образом:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \hat{x}_i(k+1, p) &= A_{\sigma_i(k+1)} \hat{x}_i(k+1, p-1) + F_{i\sigma_i(k+1)} C \tilde{x}_i(k+1, p-1) + \\ &+ B_{\sigma_i(k+1)} u_i(k+1, p-1) + F_{i\sigma_i(k+1)} G_{\sigma_i(k+1)} \nu_i(k+1, p-1), \end{aligned}$$

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \tilde{x}_i(k+1, p) &= (A_{\sigma_i(k+1)} - F_{i\sigma_i(k+1)} C) \tilde{x}_i(k+1, p-1) + \\ &+ D_{\sigma_i(k+1)} \omega_i(k+1, p-1) - F_{i\sigma_i(k+1)} G_{\sigma_i(k+1)} \nu_i(k+1, p-1), \end{aligned}$$

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \hat{e}_i(k+1, p) &= -C (A_{\sigma_i(k+1)} \hat{x}_i(k+1, p-1) - A_{\sigma_i(k)} \hat{x}_i(k, p-1)) - \\ &- C (F_{i\sigma_i(k+1)} C \tilde{x}_i(k+1, p-1) - F_{i\sigma_i(k)} C \tilde{x}_i(k, p-1)) + \hat{e}_i(k, p) - \\ &- C (B_{\sigma_i(k+1)} - B_{\sigma_i(k)}) u_i(k, p-1) - C B_{\sigma_i(k+1)} \Delta u_i(k+1, p-1) - \\ &- C (F_{i\sigma_i(k+1)} G_{\sigma_i(k+1)} \nu_i(k+1, p-1) - F_{i\sigma_i(k)} G_{\sigma_i(k)} \nu_i(k, p-1)) + \\ &+ \left(y_{\sigma_i(k+1)}^{ref}(p) - y_{\sigma_i(k)}^{ref}(p) \right). \end{aligned}$$

Поскольку $\tilde{x}_i(k+1, p)$ не зависит от других переменных и недоступна для измерения по причине, указанной в предыдущем разделе, при дальнейшем синтезе управления исключим ее из (3.10) и (3.12).

На шаге переключения, в отличие от раздела 3.1, в последнем уравнении (3.12) появляется возмущающее воздействие $\left(y_{\sigma_i(k+1)}^{ref}(p) - y_{\sigma_i(k)}^{ref}(p) \right)$, порождающее переходный процесс, за счет которого ошибка обучения может существенно возрасти, что является нежелательным эффектом, поэтому на

данном шаге закон управления целесообразно построить так, чтобы минимизировать влияние этого возмущения, а затем вернуться к исходному закону управления, гарантирующему сходимость. Такой закон управления можно найти из решения задачи минимизации отклонения выходного сигнала агента от доступного ему образа желаемой траектории. Аналогичная ситуация возникает при переключениях режима для ведомых агентов и при изменении топологии. Синтез управления для всех этих случаев будет описан далее.

4. Теорема о сходимости

Для нахождения условий сходимости воспользуемся результатами [24]. В отличие от указанного исследования, в рассматриваемой задаче число переключений конечно и нет необходимости оценивать среднее время ожидания. Определим на траекториях системы (3.8)–(3.9) векторную функцию Ляпунова

$$(4.1) \quad V_{\sigma\rho}(\xi, \epsilon) = \begin{bmatrix} V_{1\sigma\rho}(\xi) \\ V_{2\sigma\rho}(\epsilon) \end{bmatrix},$$

где $V_{1\sigma\rho}(\xi) > 0$, $\xi \neq 0$, $V_{2\sigma\rho}(\epsilon) > 0$, $\epsilon \neq 0$ и $V_{1\sigma\rho}(0) = 0$, $V_{2\sigma\rho}(0) = 0$, и дискретный аналог ее дивергенции

$$\begin{aligned} \mathcal{D}V_{\sigma\rho}(\xi, \epsilon) = & \mathbb{E}[V_{1\sigma\rho}(\hat{\eta}(k+1, p+1)) | \hat{\eta}(k+1, p) = \xi, \hat{\epsilon}(k, p) = \epsilon] - \\ & - V_{1\sigma\rho}(\xi) + \mathbb{E}[V_{2\sigma\rho}(\hat{\epsilon}(k+1, p)) | \hat{\eta}(k+1, p) = \xi, \hat{\epsilon}(k, p) = \epsilon] - V_{2\sigma\rho}(\epsilon). \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть существует векторная функция Ляпунова (4.1) и положительные скаляры c_1 , c_2 , c_3 и γ такие, что на траекториях системы (3.8)–(3.9) для всех пар $\sigma\rho$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} c_1 \|\xi\|^2 &\leq V_{1\sigma\rho}(\xi) \leq c_2 \|\xi\|^2, \\ c_1 |\epsilon|^2 &\leq V_{2\sigma\rho}(\epsilon) \leq c_2 |\epsilon|^2, \\ \mathcal{D}V_{\sigma\rho}(\xi, \epsilon) &\leq \gamma - c_3 (\|\xi\|^2 + |\epsilon|^2). \end{aligned}$$

Тогда закон управления (3.1) с корректирующей поправкой (3.2) обеспечивает условия сходимости (2.6).

Доказательство. Вычисляя $\mathcal{D}V_{\sigma\rho}(\xi, \epsilon)$ в силу системы (3.8)–(3.9) и следуя доказательству теоремы 1 из [24], получим, что для всех k , p справедлива оценка

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}[|\hat{\epsilon}(k, p-1)|^2] &\leq \mu^{\mathbf{N}_{\sigma\rho}+1} \left[\lambda^k \sum_{q=0}^{p-1} \lambda^{p-1-q} |\hat{\epsilon}(0, q)|^2 \right] + \\ &+ \frac{\gamma}{c_1(1-\lambda)^2}, \quad 0 < \lambda < 1, \end{aligned}$$

где $\mu = c_2/c_1 \geq 1$, откуда следует справедливость (2.6) при $\varrho = \lambda$, $\kappa = \frac{\mu^{N_{\sigma\rho}+1}|\bar{e}|^2}{1-\lambda}$, $|\bar{e}|^2 = \max_q |e(0, q)|^2$, $\delta = \frac{\gamma}{c_1(1-\lambda)^2}$. Параметр λ , а следовательно, и ϱ , зависит от c_2 и c_3 и определяет скорость сходимости ошибки обучения, в то время как μ зависит от c_1 и c_2 и определяет начальное значение оценки. Теорема доказана.

Заметим, что с учетом (4.2) из (2.4) для любого σ следует

$$(4.3) \quad \mathbb{E}[|C\hat{x}_i(k, p)|^2] = \mathbb{E}[|\hat{y}_i(k, p)|^2] \leq 2|y_{\sigma}^{ref}(p)|^2 + 2\mathbb{E}[|\hat{e}_i(k, p)|^2] < \infty.$$

Эта оценка будет использована в дальнейшем для доказательства условия (2.7).

5. Синтез управления

5.1. Управление при фиксированном режиме агентов и фиксированной топологии сети

Выберем компоненты векторной функции Ляпунова в виде квадратичных форм

$$\begin{aligned} V_{1\sigma\rho}(\xi) &= \xi^\top \bar{P}_{1\sigma\rho} \xi, \\ V_{2\sigma\rho}(\epsilon) &= \epsilon^\top \bar{P}_{2\sigma\rho} \epsilon, \end{aligned}$$

где $\bar{P}_{1\sigma\rho} = I_{N_\rho} \otimes P_{1\sigma\rho}$, $\bar{P}_{2\sigma\rho} = I_{N_\rho} \otimes P_{2\sigma\rho}$, и потребуем выполнения неравенства

$$(5.1) \quad DV_{\sigma\rho}(\xi, \epsilon) \leq \gamma - \left(\xi^\top \bar{Q}_{1\rho} \xi + \epsilon^\top \bar{Q}_{2\rho} \epsilon + \Delta u^\top \bar{R}_\rho \Delta u \right),$$

где $\bar{Q}_{1\rho} \succ 0$, $\bar{Q}_{2\rho} \succ 0$, $\bar{R}_\rho \succ 0$, $\bar{Q}_{1\rho} = I_{N_\rho} \otimes Q_{1\rho}$, $\bar{Q}_{2\rho} = I_{N_\rho} \otimes Q_{2\rho}$, $\bar{R}_\rho = I_{N_\rho} \otimes R_\rho$, и $\Delta u = \bar{K}_{1\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_{1\rho} \xi + \bar{K}_{2\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_{2\rho} \epsilon$.

Вычисляя аналог дивергенции векторной функции Ляпунова, получим

$$\begin{aligned} DV_{\sigma\rho}(\xi, \epsilon) &= \begin{bmatrix} \xi \\ \epsilon \end{bmatrix}^\top \left((\bar{A}_{\sigma\rho} + \bar{B}_{\sigma\rho} \bar{K}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho)^\top \bar{P}_{\sigma\rho} (\bar{A}_{\sigma\rho} + \bar{B}_{\sigma\rho} \bar{K}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho) - \bar{P}_{\sigma\rho} + \right. \\ &\quad \left. + \bar{Q}_\rho + (\bar{K}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho)^\top \bar{R}_\rho \bar{K}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho \right) \begin{bmatrix} \xi \\ \epsilon \end{bmatrix} + 2 \left(\text{tr} [\bar{P}_{1\sigma\rho} S_{1\sigma}] + \text{tr} [\bar{P}_{2\sigma\rho} S_{2\sigma}] \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A}_{\sigma\rho} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11\sigma\rho} & \bar{A}_{12\sigma\rho} \\ \bar{A}_{21\sigma\rho} & \bar{A}_{22\sigma\rho} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_{\sigma\rho} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{1\sigma\rho} \\ \bar{B}_{2\sigma\rho} \end{bmatrix}, \quad \bar{K}_{\sigma\rho} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{1\sigma\rho} & \bar{K}_{2\sigma\rho} \end{bmatrix}, \\ \bar{Q}_\rho &= \text{diag} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{1\rho} & \bar{Q}_{2\rho} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathcal{H}}_\rho = \text{diag} \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{H}}_{1\rho} & \bar{\mathcal{H}}_{2\rho} \end{bmatrix}, \quad \bar{P}_{\sigma\rho} = \text{diag} \begin{bmatrix} \bar{P}_{1\sigma\rho} & \bar{P}_{2\sigma\rho} \end{bmatrix}, \\ S_{1\sigma} &= \text{diag}[S_{1i_n\sigma}]_{n=1}^{N_\rho}, \quad S_{2\sigma} = \text{diag}[S_{2i_n\sigma}]_{n=1}^{N_\rho}, \\ S_{1i\sigma} &= F_{i\sigma} G_\sigma S_{i\nu} G_\sigma^\top F_{i\sigma}^\top, \quad S_{2i\sigma} = C F_{i\sigma} G_\sigma S_{i\nu} G_\sigma^\top F_{i\sigma}^\top C^\top. \end{aligned}$$

Полагая $\gamma = 2 \left(\text{tr} [\bar{P}_{1\sigma\rho} S_{1\sigma}] + \text{tr} [\bar{P}_{2\sigma\rho} S_{2\sigma}] \right)$, получим, что условия теоремы 1 будут выполнены, если неравенство

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \xi \\ \epsilon \end{bmatrix}^\top & \left((\bar{A}_{\sigma\rho} + \bar{B}_{\sigma\rho} \bar{K}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho)^\top \bar{P}_{\sigma\rho} (\bar{A}_{\sigma\rho} + \bar{B}_{\sigma\rho} \bar{K}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho) - \bar{P}_{\sigma\rho} + \right. \\ & \left. + \bar{Q}_\rho + (\bar{K}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho)^\top \bar{\mathcal{R}}_\rho \bar{K}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho \right) \begin{bmatrix} \xi \\ \epsilon \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned}$$

разрешимо относительно положительно определенной матрицы $\bar{P}_{\sigma\rho}$. Это неравенство эквивалентно следующему матричному неравенству:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} & (\bar{A}_{\sigma\rho} + \bar{B}_{\sigma\rho} \bar{K}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho)^\top \bar{P}_{\sigma\rho} (\bar{A}_{\sigma\rho} + \bar{B}_{\sigma\rho} \bar{K}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho) - \bar{P}_{\sigma\rho} + \bar{Q}_\rho + \\ & + (\bar{K}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho)^\top \bar{R}_\rho \bar{K}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho \preccurlyeq 0. \end{aligned}$$

Введем переменные

$$\begin{aligned} \bar{X}_{\sigma\rho} &= \text{diag} \begin{bmatrix} \bar{X}_{1\sigma\rho} & \bar{X}_{2\sigma\rho} \end{bmatrix} = \bar{P}_{\sigma\rho}^{-1}, \quad \bar{X}_{1\sigma\rho} = I_{N_\rho} \otimes X_{1\sigma\rho}, \quad \bar{X}_{2\sigma\rho} = I_{N_\rho} \otimes X_{2\sigma\rho}, \\ \bar{Z}_{\sigma\rho} &= \text{diag} \begin{bmatrix} \bar{Z}_{1\sigma\rho} & \bar{Z}_{2\sigma\rho} \end{bmatrix}, \quad \bar{Z}_{1\sigma\rho} = I_{N_\rho} \otimes Z_{1\sigma\rho}, \quad \bar{Z}_{2\sigma\rho} = I_{N_\rho} \otimes Z_{2\sigma\rho}, \\ \bar{Y}_{\sigma\rho} &= \begin{bmatrix} \bar{Y}_{1\sigma\rho} & \bar{Y}_{2\sigma\rho} \end{bmatrix} = \bar{K}_{\sigma\rho} \bar{Z}_{\sigma\rho}, \quad \bar{Y}_{1\sigma\rho} = I_{N_\rho} \otimes Y_{1\sigma\rho}, \quad \bar{Y}_{2\sigma\rho} = I_{N_\rho} \otimes Y_{2\sigma\rho}, \end{aligned}$$

где $\bar{Z}_{\sigma\rho}$ является решением уравнения

$$\bar{Z}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho = \bar{\mathcal{H}}_\rho \bar{X}_{\sigma\rho}.$$

Умножая (5.2) слева и справа на $\bar{P}_{\sigma\rho}^{-1}$ и применяя лемму Шура о дополнении, получим следующую систему матричных уравнений и неравенств:

$$(5.3) \quad \begin{bmatrix} \bar{X}_{\sigma\rho} & (\bar{A}_{\sigma\rho} \bar{X}_{\sigma\rho} + \bar{B}_{\sigma\rho} \bar{Y}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho)^\top & \bar{X}_{\sigma\rho} & (\bar{Y}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho)^\top \\ \bar{A}_{\sigma\rho} \bar{X}_{\sigma\rho} + \bar{B}_{\sigma\rho} \bar{Y}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho & \bar{X}_{\sigma\rho} & 0 & 0 \\ \bar{X}_{\sigma\rho} & 0 & \bar{Q}_\rho^{-1} & 0 \\ \bar{Y}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho & 0 & 0 & \bar{R}_\rho^{-1} \end{bmatrix} \succcurlyeq 0,$$

$$\bar{Z}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho = \bar{\mathcal{H}}_\rho \bar{X}_{\sigma\rho}, \quad \bar{X}_{\sigma\rho} \succ 0.$$

Таким образом, в рассмотренном случае закон УИО (3.1) с корректирующей поправкой (3.2) и матрицами протокола

$$K_{1\sigma\rho} = Y_{1\sigma\rho} Z_{1\sigma\rho}^{-1}, \quad K_{2\sigma\rho} = Y_{2\sigma\rho} Z_{2\sigma\rho}^{-1},$$

где $Z_{1\sigma\rho}$, $Z_{2\sigma\rho}$, $Y_{1\sigma\rho}$ и $Y_{2\sigma\rho}$ находятся из решения системы (5.3), обеспечивает выполнение условий сходимости (2.6). Матрицы $\bar{Q}_\rho$ и $\bar{R}_\rho$ здесь аналогичны весовым матрицам в теории линейно-квадратичного регулятора, изменяя которые можно корректировать управляющий сигнал и достичь желаемых характеристик.

5.2. Управление при переключениях режима

Как уже отмечалось, переключение режима приводит к появлению возмущающего воздействия, которое порождает переходный процесс. Этот процесс увеличивает достигнутое значение ошибки обучения на некоторое число шагов и замедляет сходимость. Поэтому на шаге переключения корректирующую поправку будем искать из условия минимизации ошибки. В случае с глобальным лидером введем функционал

$$J_{ml} = E[|\hat{e}_i(k+1, p)|^2 | (*)]$$

и будем искать корректирующую поправку из условия его минимума при ограничении, вытекающем из (3.10) и (3.12):

$$\begin{aligned} \hat{e}_i(k+1, p) = & -C \left(A_{\sigma_i(k+1)} \hat{x}_i(k+1, p-1) - A_{\sigma_i(k)} \hat{x}_i(k, p-1) \right) + \hat{e}_i(k, p) - \\ (5.4) \quad & -C \left(B_{\sigma_i(k+1)} - B_{\sigma_i(k)} \right) u_i(k, p-1) - CB_{\sigma_i(k+1)} \Delta u_i(k+1, p-1) - \\ & -C \left(F_{i\sigma_i(k+1)} G_{\sigma_i(k+1)} \nu_i(k+1, p-1) - F_{i\sigma_i(k)} G_{\sigma_i(k)} \nu_i(k, p-1) \right) + \\ & + \left(y_{\sigma_i(k+1)}^{ref}(p) - y_{\sigma_i(k)}^{ref}(p) \right), \end{aligned}$$

где символ $(*)$ означает, что математическое ожидание вычисляется при фиксированных значениях переменных состояния и управления в правой части (5.4). Полученная таким образом корректирующая поправка имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta u_i(k+1, p-1) = & (CB_{\sigma_i(k+1)})^{-1} \hat{e}_i(k, p) - \\ (5.5) \quad & - (CB_{\sigma_i(k+1)})^{-1} C \left(A_{\sigma_i(k+1)} \hat{x}_i(k+1, p-1) - A_{\sigma_i(k)} \hat{x}_i(k, p-1) \right) - \\ & - (CB_{\sigma_i(k+1)})^{-1} C (B_{\sigma_i(k+1)} - B_{\sigma_i(k)}) u_i(k, p-1) + \\ & + (CB_{\sigma_i(k+1)})^{-1} \left(y_{\sigma_i(k+1)}^{ref}(p) - y_{\sigma_i(k)}^{ref}(p) \right) \end{aligned}$$

для закона УИО (3.1).

Корректирующая поправка для ведомого агента находится аналогичным способом, однако поскольку такие агенты не имеют непосредственный доступ к информации о желаемой траектории, в качестве ее образа будет выступать взвешенная сумма оценок выходных сигналов соответствующих локальных лидеров с предыдущего повторения. В связи с этим вместо (2.4) введем отклонение оценки выходного сигнала ведомого агента от оценок выходных сигналов его локальных лидеров

$$\hat{e}_i(k+1, p) = \sum_{j \in N_{pi}} s_{ij} (\hat{y}_j(k, p) - \hat{y}_i(k+1, p)),$$

где s_{ij} — элемент матрицы $\mathcal{S}_\rho$, и корректирующую поправку будем искать, решая задачу минимизации функционала

$$J_{mf} = E \left[|\hat{e}_i(k+1, p)|^2 | (**) \right]$$

при ограничении

$$\begin{aligned}
 \hat{\varepsilon}_i(k+1, p) = & -\ell_{ii}C \left(A_{\sigma_i(k+1)} \hat{x}_i(k+1, p-1) - A_{\sigma_i(k)} \hat{x}_i(k, p-1) \right) - \\
 & -\ell_{ii}C \left(B_{\sigma_i(k+1)} - B_{\sigma_i(k)} \right) u_i(k, p-1) - \ell_{ii}CB_{\sigma_i(k+1)} \Delta u_i(k+1, p-1) + \\
 (5.6) \quad & + \sum_{j \in N_{\rho i}} s_{ij} (\hat{y}_j(k, p) - \hat{y}_i(k, p)) - \ell_{ii}C \left(F_{i\sigma_i(k+1)} G_{\sigma_i(k+1)} \nu_i(k+1, p-1) - \right. \\
 & \left. - F_{i\sigma_i(k)} G_{\sigma_i(k)} \nu_i(k, p-1) \right),
 \end{aligned}$$

где ℓ_{ii} — элемент матрицы $\mathcal{L}_\rho$, и символ $(**)$ означает, что математическое ожидание вычисляется при фиксированных значениях оценки состояния и управления в правой части (5.6). В результате получим

$$\begin{aligned}
 \Delta u_i(k+1, p-1) = & \ell_{ii}^{-1} (CB_{\sigma_i(k+1)})^{-1} \sum_{j \in N_{\rho i}} s_{ij} (\hat{y}_j(k, p) - \hat{y}_i(k, p)) - \\
 (5.7) \quad & - (CB_{\sigma_i(k+1)})^{-1} C (A_{\sigma_i(k+1)} \hat{x}_i(k+1, p-1) - A_{\sigma_i(k)} \hat{x}_i(k, p-1)) - \\
 & - (CB_{\sigma_i(k+1)})^{-1} C (B_{\sigma_i(k+1)} - B_{\sigma_i(k)}) u_i(k, p-1).
 \end{aligned}$$

Поскольку локальные лидеры передают данные, полученные ими на предыдущем повторении, переключение ведомого агента системы должно происходить с запаздыванием относительно переключения его локального лидера, чтобы информация о желаемой траектории соответствовала новому режиму. По аналогии с сигналом $\sigma_i(k)$, который теперь будем именовать *локальным сигналом, переключающим режим*, введем *глобальный сигнал* $\sigma(k)$, который запускает процесс переключения режимов агентов. Моменты переключения $\sigma_i(k)$ глобальных лидеров совпадают с моментами переключения $\sigma(k)$, т.е. $\sigma_i(k) = \sigma(k) \forall i : r_i = 1$. Для ведомых агентов локальный сигнал будет запаздывать относительно глобального сигнала: $\sigma_i(k) = \sigma_j(k-1) \forall i, j : r_i = 0, j \in N_{\rho i}$.

Таким образом, в момент переключения режима будем применять закон УИО (3.1) с корректирующими поправками (5.5) и (5.7) для глобальных лидеров и ведомых агентов соответственно. При переключении режима будем учитывать изложенное правило.

5.3. Управление при переключении топологии сети

Рассмотрим последний случай, когда происходит переключение топологии сети. При этом все агенты работают в одном и том же режиме на всех рассматриваемых повторениях, поэтому для краткости сигналы, переключающие режимы, обозначим через σ .

В момент переключения топологии агент может выполнить одно из следующих действий: подключиться к сети путем подключения к функционирующим агентам, отключиться от сети или сменить локальных лидеров. Во

втором и третьем случаях управление агентами производится согласно закону УИО (3.1) с корректирующей поправкой (3.2) с матрицами протокола, соответствующими новой топологии. В первом случае ошибка подключаемого агента при использовании этого же закона может существенно отличаться от достигнутой другими агентами в течение нескольких повторений после подключения.

Пусть $k + 1$ — момент переключения топологии с подключением агента i . С целью снизить ошибку агента при подключении, для поиска закона управления применим тот же подход, что и в предыдущем разделе, однако в этом случае проще найти не корректирующую поправку, а непосредственно управление. Введем функционал

$$J_c = E \left[|\hat{\varepsilon}_i(k+1, p)|^2 | (***) \right]$$

и будем искать управление для подключаемого агента из условия его минимума при ограничении

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \hat{\varepsilon}_i(k+1, p) = & \sum_{j \in N_{\rho(k+1)i}} s_{ij} \hat{y}_j(k, p) - \ell_{ii} C A_{\sigma_i(k+1)} \hat{x}_i(k+1, p-1) - \\ & - \ell_{ii} C B_{\sigma_i(k+1)} u_i(k+1, p-1) - \ell_{ii} C F_{i\sigma_i(k+1)} G_{\sigma_i(k+1)} \nu_i(k+1, p-1), \end{aligned}$$

где s_{ij} и ℓ_{ii} — элементы матриц $\mathcal{S}_{\rho(k+1)}$ и $\mathcal{L}_{\rho(k+1)}$ соответственно и символ $(***)$ означает, что математическое ожидание вычисляется при фиксированных значениях оценки состояния и управления в правой части (5.8). Полученный таким образом закон управления для подключаемой системы имеет вид

$$(5.9) \quad \begin{aligned} u_i(k+1, p-1) = & \ell_{ii}^{-1} (C B_{\sigma_i(k+1)})^{-1} \sum_{j \in N_{\rho(k+1)i}} s_{ij} \hat{y}_j(k, p) - \\ & - (C B_{\sigma_i(k+1)})^{-1} C A_{\sigma_i(k+1)} \hat{x}_i(k+1, p-1). \end{aligned}$$

5.4. Общий закон управления

Объединим полученные результаты в виде следующих правил переключения режима работы агентов, топологии информационной сети и закона управления.

Переключения инициируются сигналами $\sigma(k)$ и $\rho(k)$. Сигнал $\sigma(k)$, именуемый глобальным сигналом, переключающим режим, запускает процесс переключения режимов агентов. Переключение режима глобальных лидеров происходит в момент запуска процесса переключения глобальным сигналом, т.е. $\sigma_i(k) = \sigma(k) \forall i : r_i = 1$. Переключение остальных агентов происходит с запаздыванием в одно повторение после переключения их локальных лидеров, т.е. $\sigma_i(k) = \sigma_j(k-1) \forall i, j : r_i = 0, j \in N_{\rho(k)i}$. Сигнал $\rho(k)$ переключает топологию сети.

Управляющий сигнал на повторении $k + 1$ формируется в виде (3.1) с корректирующей поправкой (3.2), матрицы протокола которой находятся из решения системы (5.3), если $\sigma_i(k + 1) = \sigma_i(k)$ и $i \in \mathcal{I}_{\rho(k)}$, с корректирующей поправкой (5.5), если $r_i = 1$, $\sigma_i(k + 1) \neq \sigma_i(k)$ и $i \in \mathcal{I}_{\rho(k)}$, и поправкой (5.7), если $r_i = 0$, $\sigma_i(k + 1) \neq \sigma_i(k)$ и $i \in \mathcal{I}_{\rho(k)}$, где r_i — элемент матрицы $\mathcal{R}_{\rho(k+1)}$. Если $i \notin \mathcal{I}_{\rho(k)}$, то управляющий сигнал на повторении $k + 1$ формируется в виде (5.9).

Остается доказать условие ограниченности управления в среднем квадратичном (2.7). Рассмотрим интервал повторений до первого переключения. Из (2.5) имеем

$$(5.10) \quad u_i(k, p-1) = (CB_\sigma)^{-1} \left[C\hat{x}_i(k, p) - CA_\sigma^p \hat{x}_i(k, 0) - \right. \\ \left. - \sum_{q=0}^{p-2} CA_\sigma^{p-1-q} B_\sigma u_i(k, p) - \sum_{q=0}^{p-1} CA_\sigma^{p-1-q} (F_\sigma C \tilde{x}_i(k, q) + F_\sigma G_\sigma \nu_i(k, p)) \right].$$

В частности, при $p = 2$

$$u_i(k, 1) = (CB_\sigma)^{-1} \left[C\hat{x}_i(k, 2) - CA_\sigma^2 \hat{x}_i(k, 0) - CA_\sigma B_\sigma u_i(k, 0) - \right. \\ \left. - \sum_{q=0}^1 CA_\sigma^{p-1-q} (F_\sigma C \tilde{x}_i(k, q) + F_\sigma G_\sigma \nu_i(k, p)) \right].$$

Возведем обе части последнего равенства в квадрат и оценим правую часть в соответствии с известным неравенством между квадратом суммы и суммой квадратов $\left((\sum_{i=1}^n a_i)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)$. Применяя к полученному неравенству оператор математического ожидания с учетом того, что в силу (4.3) $E[|C\hat{x}_i(k, 2)|^2] < \infty$, и величины $||\hat{x}_i(k, 0)||^2$, $|u_i(k, 0)|^2$, $||\tilde{x}_i(k, q)||^2$ и $|\nu_i(k, q)|^2$ имеют ограниченные математические ожидания, получим, что $E[|u_i(k, 1)|^2] < \infty$. Последовательно изменяя в (5.10) p в пределах от 3 до T , получим, что $E[|u_i(k, p)|^2] < \infty$ для всех k до первого переключения. Последовательно рассматривая интервалы между переключениями, с учетом того, что в соответствии с подходом к выбору управления в моменты переключений в начале каждого интервала справедливо (4.3) аналогично получим, что $E[|u_i(k, p)|^2] < \infty$ для всех k до последнего переключения на шаге k_f . Повторяя аналогичную процедуру для $k \geq k_f$ и устремляя k к ∞ , убеждаемся в справедливости (2.7). Таким образом, полученное управление обеспечивает консенсус в смысле выполнения условий (2.6), (2.7).

6. Пример

Рассмотрим сетевую систему, состоящую из одинаковых манипуляторов с поворотным гибким звеном, управление которой построим в соответствии с полученными результатами. Динамика манипулятора с учетом случайных возмущений описывается следующей моделью в пространстве состояний с непрерывным временем:

$$(6.1) \quad \dot{x}_i(k, t) = A_{\sigma_i(k)}^{cont} x_i(k, t) + B^{cont} (u_i(k, t) + \mu_i(k, t)),$$

$$(6.2) \quad y_i(k, t) = C x_i(k, t) + \rho_i(k, t),$$

где $x = [\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}]^\top$, θ — угол поворота сервопривода, α — угол отклонения звена, $u = \tau$ — крутящий момент на силовом редукторе сервопривода, приводящем звено в движение, μ и ρ — независимые непрерывные гауссовские белые шумы с постоянными интенсивностями Q_n и R_n соответственно. Матрицы системы задаются следующим образом:

$$A_{\sigma}^{cont} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & K_s/J_{eq} & -B_{eq}/J_{eq} & 0 \\ 0 & -K_s(J_l(\sigma) + J_{eq})/J_{eq}J_l(\sigma) & B_{eq}/J_{eq} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B^{cont} = [0 \ 0 \ 1/J_{eq} \ -1/J_{eq}]^\top, \quad C = [1 \ 0 \ 0 \ 0],$$

где K_s — жесткость звена, J_{eq} — момент инерции сервопривода, B_{eq} — коэффициент вязкого трения сервопривода, $J_l(\sigma)$ — момент инерции звена относительно центра масс, $\sigma = \sigma_i(k)$.

Были приняты следующие параметры манипуляторов с гибким звеном: $K_s = 1,3 \text{ н} \cdot \text{м/рад}$, $J_{eq} = 2,08 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $B_{eq} = 0,004 \text{ н} \cdot \text{м/(рад/с)}$ [25], $Q_n = 5 \cdot 10^{-5}$, $R_n = 10^{-6}$.

Динамика агентов имеет два режима, в каждом из которых определена своя желаемая траектория выходного сигнала

$$y_{\sigma_i(k)}^{ref}(t) = \begin{cases} \pi \left(\frac{t^2}{6} - \frac{t^3}{27} \right), & \sigma_i(k) = 1, \\ \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi t}{6}, & \sigma_i(k) = 2, \end{cases}$$

кроме того, режимы отличаются моментом инерции звена

$$J_l(\sigma_i(k)) = \begin{cases} 0,0038 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, & \sigma_i(k) = 1, \\ 0,008 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, & \sigma_i(k) = 2. \end{cases}$$

Продолжительность повторения составляет 3 с. Перейдем от модели (6.1)–(6.2) к эквивалентной дискретной модели вида (2.1)–(2.3), в которой матрицы определяются соотношениями

$$A_{\sigma_i(k)} = \exp A_{\sigma_i(k)}^{\text{cont}} T_s, \quad B_{\sigma_i(k)} = \int_0^{T_s} \exp \left(A_{\sigma_i(k)}^{\text{cont}} \tau \right) B^{\text{cont}} d\tau,$$

$$D_{\sigma_i(k)} = \left[\int_0^{T_s} \exp \left(A_{\sigma_i(k)}^{\text{cont}} \tau \right) B^{\text{cont}} Q_n (B^{\text{cont}})^{\top} \left(\exp \left(A_{\sigma_i(k)}^{\text{cont}} \tau \right) \right)^{\top} d\tau \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$G_{\sigma_i(k)} = \left(\frac{R_n}{T_s} \right)^{\frac{1}{2}},$$

и шумы $\omega_i(k, p)$ и $\nu_i(k, p)$ имеют единичные ковариации $S_{i\omega} = I_{n_x}$ и $S_{i\nu} = 1$. Здесь T_s — период дискретизации, который выбран равным 0,01 с.

Рассмотрим сетевую систему из трех манипуляторов, среди которых выделен один глобальный лидер, и сначала работает только он, затем к глобальному лидеру подключается первый ведомый агент, и далее к первому ведомому агенту подключается второй. Такой сценарий соответствует производственной системе с изменением объема производства. Когда объем производства увеличивается, происходит подключение новых агентов, при уменьшении — отключение лишних. Соответствующая этой программе изменяемая топология сети описывается следующим образом:

$$\mathcal{I}_{\rho(k)} = \{1\}, \quad \mathcal{L}_{\rho(k)} = 0, \quad \mathcal{R}_{\rho(k)} = 1 \text{ при } \rho(k) = 1,$$

$$\mathcal{I}_{\rho(k)} = \{1, 2\}, \quad \mathcal{L}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ при } \rho(k) = 2,$$

$$\mathcal{I}_{\rho(k)} = \{1, 2, 3\}, \quad \mathcal{L}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ при } \rho(k) = 3.$$

Для фильтра Калмана были получены следующие матрицы усиления:

$$F_{i\sigma_i(k)} = \begin{bmatrix} 0,7106 & -0,5711 & 16,0723 & -12,8866 \end{bmatrix}^{\top} \text{ при } \sigma_i(k) = 1,$$

$$F_{i\sigma_i(k)} = \begin{bmatrix} 0,7038 & -0,6084 & 15,5888 & -13,9268 \end{bmatrix}^{\top} \text{ при } \sigma_i(k) = 2.$$

Решая (5.3) с весовыми матрицами

$$Q_{1\rho(k)} = \begin{cases} 10I_{n_x}, & \rho(k) = 1, \\ 10^{-4}I_{n_x}, & \rho(k) \neq 1, \end{cases}$$

$$Q_{2\rho(k)} = 10^5, \quad R_{\rho(k)} = 10^{-3},$$

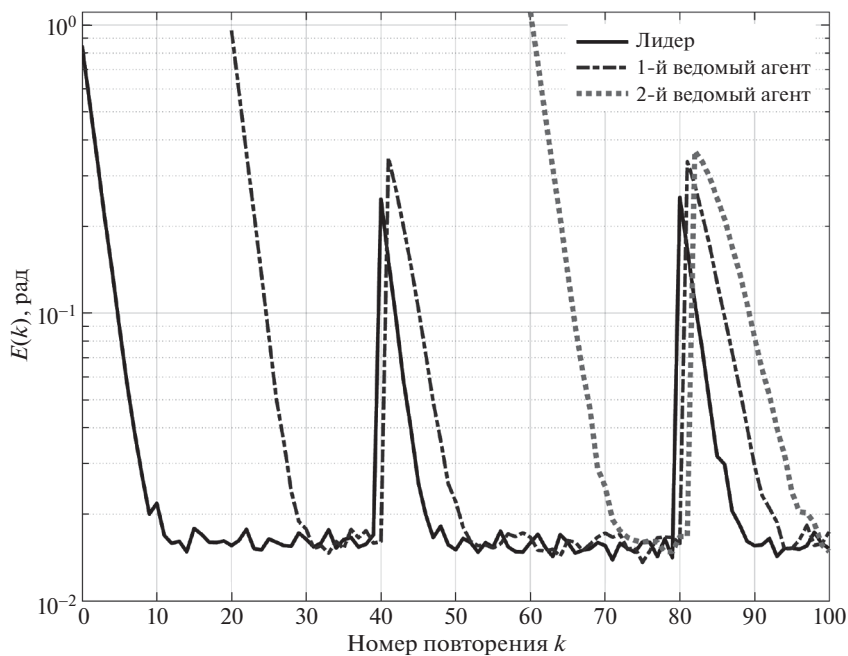


Рис. 1. Среднеквадратические ошибки обучения агентов без переключения закона управления.

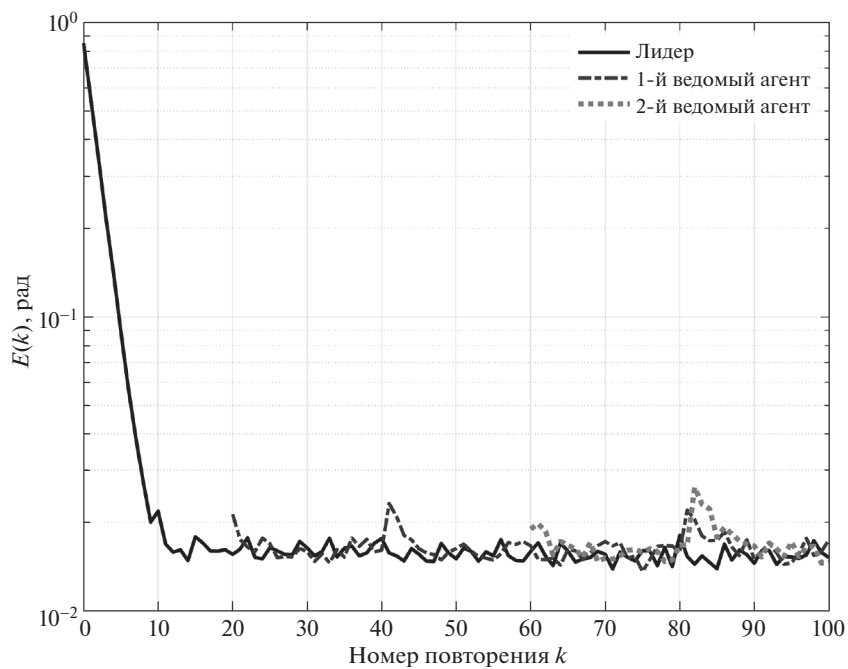


Рис. 2. Среднеквадратические ошибки обучения агентов с переключением закона управления.

получим следующие матрицы протокола для (3.2):

$$K_{1\sigma\rho} = \begin{bmatrix} -25,3429 & -1,2471 & -0,3469 & -0,0181 \end{bmatrix},$$

$$K_{2\sigma\rho} = 9,2965 \text{ при } \sigma = 1 \text{ и } \rho = 1,$$

$$K_{1\sigma\rho} = \begin{bmatrix} -41,8954 & -1,2959 & -0,416 & -0,0044 \end{bmatrix},$$

$$K_{2\sigma\rho} = 16,2678 \text{ при } \sigma = 1 \text{ и } \rho = 2,$$

$$K_{1\sigma\rho} = \begin{bmatrix} -41,9283 & -1,296 & -0,4161 & -0,0044 \end{bmatrix},$$

$$K_{2\sigma\rho} = 14,3248 \text{ при } \sigma = 1 \text{ и } \rho = 3,$$

$$K_{1\sigma\rho} = \begin{bmatrix} -25,3841 & -1,2813 & -0,3428 & -0,0139 \end{bmatrix},$$

$$K_{2\sigma\rho} = 9,2971 \text{ при } \sigma = 2 \text{ и } \rho = 1,$$

$$K_{1\sigma\rho} = \begin{bmatrix} -41,889 & -1,2981 & -0,4159 & -0,0044 \end{bmatrix},$$

$$K_{2\sigma\rho} = 16,4272 \text{ при } \sigma = 2 \text{ и } \rho = 2,$$

$$K_{1\sigma\rho} = \begin{bmatrix} -41,9326 & -1,2982 & -0,4161 & -0,0044 \end{bmatrix},$$

$$K_{2\sigma\rho} = 14,2538 \text{ при } \sigma = 2 \text{ и } \rho = 3,$$

где $\sigma = \sigma_i(k)$ и $\rho = \rho(k)$. Переключающие сигналы зададим в виде

$$\sigma(k) = \begin{cases} 1, & k < 40, \\ 2, & 40 \leq k < 80, \\ 1, & k \geq 80, \end{cases} \quad \rho(k) = \begin{cases} 1, & k < 20, \\ 2, & 20 \leq k < 60, \\ 3, & k \geq 60. \end{cases}$$

Для оценки эффективности алгоритма введем среднеквадратическую ошибку обучения

$$E_i(k) = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{p=0}^{T-1} |e_i(k, p)|^2}.$$

На рис. 1 представлены графики среднеквадратических ошибок обучения агентов без учета переключения управления при изменении режима работы и топологии сети, т.е. управление происходит согласно закону (3.1) с корректирующей поправкой (3.2) на всем протяжении функционирования системы, а на рис. 2 — с учетом переключения управления. Данные результаты демонстрируют, что разработанный закон управления действительно позволяет снизить величину переходной ошибки в моменты переключения.

7. Заключение

Предложенный алгоритм УИО позволяет снизить величину переходной ошибки в моменты переключения режима и подключения новых агентов, однако он накладывает некоторые ограничения на топологию сети. Во-первых, невозможен взаимный обмен информацией между агентами. В самом деле,

для переключения режима работы ведомого агента необходимо, чтобы режим работы его локальных лидеров на предыдущем повторении соответствовал тому, на который происходит переключение. По этой причине при взаимном обмене агенты будут ожидать смены режима друг друга, и в итоге оно не произойдет ни для одного из них. В рассмотренном примере такая ситуация возникла бы, если первый ведомый агент передавал свой выходной сигнал второму, а второй — первому. В этом случае первый ведомый агент не смог бы произвести переключения из-за ожидания переключения второго, а второй из-за ожидания первого. Также по этой причине невозможно реализовать замкнутую цепь информационного обмена. Во-вторых, в случае применения данного алгоритма к системе с последовательным соединением агентов процесс переключения всей сетевой системы на новый режим работы может занять недопустимо длительное время в связи с задержками переключения ведомых агентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Saez M.A., Maturana F.P., Barton K., Tilbury D.M.* Context-sensitive modeling and analysis of cyber-physical manufacturing systems for anomaly detection and diagnosis // *IEEE Transaction on Automation Science and Engineering*. 2020. V. 17. No. 1. P. 29–40.
2. *Balta E.C., Tilbury D.M., Barton K.* Switch Based Iterative Learning Control for Tracking Iteration Varying References // *IFAC PapersOnLine*. 2020. V 53. No. 2. P. 1493–1498.
3. *Tsyphkin Ya.Z.* Adaptation and Learning in Automatic Systems. New York: Academic Press, 1971.
4. *Arimoto S., Kawamura S., Miyazaki F.* Bettering operation of robots by learning // *Journal of Robotic Systems*. 1984. V. 1. No. 2. P. 123–140.
5. *Bristow D.A., Tharayil M., Alleyne A.* A survey of iterative learning control // *IEEE Control Systems Magazine*. 2006. V. 26. No. 3. P. 96–114.
6. *Ahn H.S., Chen Y.Q., Moore K.L.* Iterative learning control: Brief survey and categorization // *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews*. 2007. V. 37. No. 6. P. 1099–1121.
7. *Pakshin P., Emelianova J., Emelianov M.* Iterative learning control of stochastic linear systems under switching of the reference trajectory and parameters // *Proceedings of the 29th Mediterranean Conference on Control and Automation*. 2021. P. 1311–1316. 2021. Bari, Puglia, Italy.
8. *Pakshin P., Emelianova J., Rogers E., Galkowski K.* Iterative learning control of stochastic linear systems with reference trajectory switching // *Proceedings of the 60th IEEE Conference on Decision and Control*. 2021. P. 6565–6570.
9. *Ahn H.S., Chen Y.Q.* Iterative learning control for multi-agent formation // *In Proc. ICROS-SICE Int. Joint Conf.* 2009. P. 3111–3116.
10. *Liu Q., Bristow D.A.* An iteration-domain filter for controlling transient growth in iterative learning control // *Proc. 2010 Amer. Control Conf.* 2010. P. 2039–2044.
11. *Liu Y., Jia Y.* An iterative learning approach to formation control of multi-agent systems // *Systems & Control Letters*. 2012. V. 61. P. 148–154.

12. *Yang S., Xu J.X., Huang D., Tan Y.* Optimal iterative learning control design for multi-agent systems consensus tracking // *Systems & Control Letters*. 2014. V. 69 P. 80–89.
13. *Li J., Li J.* Adaptive iterative learning control for coordination of second-order multi-agent systems // *Int. J. Robust Nonlinear Control*. 2014. V. 24. P. 3282–3299.
14. *Meng D., Du W., Jia Y.* Data-driven consensus control for networked agents: an iterative learning control-motivated approach // *IET Control Theory & Applications*. 2015. V. 9. P. 2084–2096.
15. *Yu X., Hou Z., Polycarpou M.M.* Distributed Data-Driven Iterative Learning Consensus Tracking for Nonlinear Discrete-Time Multiagent Systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2022. V. 67. No. 7. P. 3670–3677.
16. *Hock A., Schoellig A.* Distributed iterative learning control for multi-agent systems // *Autonomous Robots*. 2019. V. 43. P. 1989–2010.
17. *Pakshin P.V., Emelianova J.P., Emelianov M.A.* (2018). Iterative learning control design for multiagent systems based on 2D models // *Automation and Remote Control*. 2018. V. 79. No. 6. P. 1040–1056.
18. *Pakshin P.V., Koposov A.S., Emelianova J.P.* Iterative learning control of a multiagent system under random perturbations // *Automation and Remote Control*, (2020). 81(3), 483–502.
19. *Ahn H.S., Moore K.L., Chen Y.Q.* Iterative Learning Control. Robustness and Monotonic Convergence for Interval Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag: London, 2007.
20. *Hock A., Schoellig A.* Distributed iterative learning control for a team of quadrotors // *Proceedings of the 55th IEEE Conference on Decision and Control*. 2016. P. 4640–4646.
21. *Sun S., Endo T., Matsuno F.* Iterative learning control based robust distributed algorithm for non-holonomic mobile robots formation // *IEEE Access*. 2018. V. 6. P. 61904–61917.
22. *Koposov A., Emelianova J., Pakshin P.* Iterative learning control of multi-agent systems under changing network configuration // *IFAC PapersOnLine*, 2021. V. 54. No. 20. P. 669–674.
23. *Koposov A., Emelianova J., Pakshin P.* Iterative learning control of multi-agent systems under changing reference trajectory // *IFAC PapersOnLine*, 2022. V. 55. No. 12. P. 759–764.
24. *Pakshin P., Emelianova J.* Iterative learning control design for discrete-time stochastic switched systems // *Autom. Remote Control*. 2020. V. 81. No. 11. P. 2011–2025.
25. *Apkarian J., Karam P., Levis M.* Workbook on Flexible Link Experiment for MatlabR/Simulink Users. Quanser, 2011.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 22.11.2022

После доработки 07.02.2023

Принята к публикации 30.03.2023

Стохастические системы

© 2023 г. М.М. ХРУСТАЛЕВ, д-р физ.-мат. наук (mmkhrustalev@mail.ru),
К.А. ЦАРЬКОВ, канд. физ.-мат. наук (k6472@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УЛУЧШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ КРИТЕРИЕВ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПО СОСТОЯНИЮ ДИФФУЗИОННО-СКАЧКООБРАЗНЫХ СИСТЕМ¹

Исследуются задачи вероятностной и квантильной оптимизации многомерной управляемой скачкообразной диффузии. Используются оценки вероятности чебышевского типа. Рассматриваемые задачи сводятся к одной вспомогательной детерминированной задаче оптимального управления моментными характеристиками процесса. К ее решению применяется метод глобального улучшения Кротова.

Ключевые слова: вероятностный критерий, квантильная оптимизация, скачкообразная диффузия, метод Кротова.

DOI: 10.31857/S0005231023060065, EDN: CSKLTC

1. Введение

С прикладной и теоретической точек зрения одинаково хорошо известны две близкие задачи вероятностной оптимизации: максимизировать вероятность попадания управляемого динамического объекта в некоторую область заданного размера и минимизировать размер области, в которую этот объект попадает с заданной вероятностью. Функционалы качества в таких задачах принято называть соответственно функционалом вероятности и квантильным критерием [1]. Задачи такого рода естественно формулируются для объектов, функционирующих под действием случайных внешних возмущений, динамика которых описывается теми или иными стохастическими уравнениями. В данной работе рассматривается класс динамических объектов, описываемых математической моделью центрированного случайного процесса с непрерывным временем диффузионно-скачкообразного типа. В качестве целевой области выбрана окрестность ожидаемого (нулевого) значения вектора состояния системы в конечный момент времени. Управление считается программным, т.е. ищется в виде детерминированной функции только одного аргумента — времени.

¹ Разделы 4, 6 и 8 написаны К.А. Царьковым за счет средств проекта Российского научного фонда № 22-11-00042 <https://rscf.ru/project/22-11-00042> в ИПУ РАН.

Задачи оптимизации вероятностных критериев имеют многочисленные приложения в экономике и технике. Обширный обзор таких приложений приведен в [1], там же обсуждается возможность использовать в качестве аналитического аппарата для исследования этих задач детерминированные оценки вероятности чебышевского типа. Конкретные алгоритмы решения изложены в [1] для конечномерных статических математических моделей. Динамические модели с дискретным временем и задачи оптимизации вероятностных критериев для них изучались в [2] и затем в [3, 4]. В бесконечномерном случае для задач оптимизации функционала вероятности хорошо известны достаточные условия оптимальности управления с обратной связью в диффузионных стохастических системах [5]. Аналогичные результаты для задач управления скачкообразными диффузиями приведены в [6]. Достаточные условия в задаче оптимизации квантильного критерия для диффузионной модели получены в [7]. В этих работах также приведены различные численные схемы приближенного решения указанных задач оптимизации управления с обратной связью. Общие необходимые условия оптимальности программного управления (стохастический принцип максимума) относительно функционала вероятности для диффузионно-скачкообразной модели при наличии плотности распределения содержатся в виде частного случая, например, в [8]. Однако конструктивных алгоритмов точного или приближенного поиска оптимальных функций управления в таких задачах авторам известно крайне мало. Отчасти к таковым можно отнести подход, основанный на аппроксимации плотности частичными суммами рядов по семиинвариантам [9].

В [10, 11] с точки зрения построения конструктивных алгоритмов исследовались задачи оптимального программного управления линейными по состоянию диффузионными и диффузионно-скачкообразными системами относительно линейно-квадратичного функционала качества. Такой функционал может быть записан явно в терминах моментных характеристик управляемого процесса. Рассматриваемые здесь задачи отличаются тем, что подобного явного выражения функционала качества в общем случае не имеют. В связи с этим решение задач в настоящей работе предлагается осуществить приближенно в несколько этапов. Сперва в явном виде при помощи моментных характеристик управляемого случайного процесса выписываются оценки вероятностных функционалов качества. Далее на основе этих оценок строится детерминированная задача оптимального управления, решение которой обеспечивает приближение к решению исходных задач. Затем к исследованию полученной детерминированной задачи применяется итерационный метод глобального улучшения, предложенный В.Ф. Кротовым [12]. На последнем этапе найденный результат анализируется при помощи упомянутых оценок.

Сформулированная выше схема решения в основном определяет структуру статьи. В следующих двух разделах формулируется и обсуждается математическая постановка задачи, в двух последних разделах разбирается ряд содержательных с точки зрения теории и практики примеров.

2. Постановки задач оптимизации

Рассмотрим управляемую динамическую систему

$$(1) \quad d\xi(t) = A(t, u(t))\xi(t)dt + \sum_{l=1}^{\nu_1} \left(B_l(t, u(t))\xi(t) + C_l(t, u(t)) \right) dw_l(t) + \\ + \sum_{r=1}^{\nu_2} D_r(t, u(t))\xi(t^-) dp_r(t), \quad \xi(0) = \xi_0,$$

где $t \in [0; T]$ — время; $\xi(t)$ — n -мерный вектор, характеризующий состояние системы в момент времени t ; ξ_0 — заданный центрированный случайный вектор с конечным вторым моментом; $u(t)$ — m -мерный вектор программы управления в момент t , причем $u(t) \in U$, где U — компактное множество в $\mathbb{R}^m$, и функция $t \mapsto u(t)$ кусочно-непрерывна (через $\mathcal{U}$ обозначим множество всех таких программ управления); $w_l(\cdot)$ — стандартные винеровские процессы; $p_r(\cdot)$ — пуассоновские процессы с управляемыми неоднородными интенсивностями скачков $\lambda_r(t, u(t))$; отображения A , B_l , C_l , D_r и λ_r заданы и непрерывны на $[0; T] \times U$, причем $\lambda_r(t, u) \geq 0 \forall (t, u) \in [0; T] \times U$; здесь и далее в работе используется обозначение $\xi(t^-) := \lim_{s \rightarrow t-0} \xi(s)$, $t \in (0; T]$, $\xi(0^-) := \xi_0$. Предполагается, что начальная точка ξ_0 , винеровские процессы $w_l(\cdot)$ и пуассоновские процессы $p_r(\cdot)$ независимы в совокупности.

Будем одновременно исследовать следующие две задачи относительно классических вероятностных критериев (см. [1, глава 2]). Пусть заданы вектор $\kappa \in \mathbb{R}_+^n$ и число $\varphi > 0$. Обозначим через Π_φ замкнутый параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ со сторонами $2\varphi\kappa_i$, $i = \overline{1, n}$, и центром в нуле, т.е.

$$\Pi_\varphi := \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq \varphi\kappa_i, i = \overline{1, n}\}.$$

В первой задаче требуется для заданного числа $\varphi > 0$ подобрать программу управления $u \in \mathcal{U}$ так, чтобы максимизировать вероятность попадания случайного вектора $\xi(T)$ в множество Π_φ . Иными словами, решается задача вероятностной оптимизации

$$(2) \quad P_\varphi(u) := \mathbf{P}\{\xi(T) \in \Pi_\varphi\} \rightarrow \sup_{u \in \mathcal{U}}.$$

Во второй задаче требуется для заданного числа $\alpha \in (0; 1)$ подобрать $u \in \mathcal{U}$ так, чтобы минимизировать размер φ параллелепипеда Π_φ , в который случайный вектор $\xi(T)$ попадает с вероятностью не меньшей, чем α . Иными словами, решается задача квантильной оптимизации

$$(3) \quad \varphi_\alpha(u) := \inf \{ \varphi > 0 : \mathbf{P}\{\xi(T) \in \Pi_\varphi\} \geq \alpha \} \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}}.$$

3. Линейные стохастические системы диффузионного типа

Предположим сперва, что в системе (1) $B_l = D_r = 0$, т.е. управляемый процесс задается линейным уравнением Ито

$$d\xi(t) = A(t, u(t))\xi(t)dt + C(t, u(t))dw(t), \quad \xi(0) = \xi_0,$$

где $C : [0; T] \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times \nu_1}$, $w(\cdot)$ — ν_1 -мерный стандартный винеровский процесс, и пусть, кроме того, случайный вектор ξ_0 имеет нормальное распределение с нулевым средним и положительно определенной ковариационной матрицей N_0 . Как известно [13, теорема 11.7], в этом случае при любом $t \in [0; T]$ вектор $\xi(t)$ также нормально распределен, имеет нулевое среднее и положительно определенную ковариационную матрицу $N(t)$. Важно, что известное распределение позволяет при любом фиксированном управлении $u \in \mathcal{U}$ точно вычислять значение вероятности $P_\varphi(u)$. Для этого можно использовать плотность распределения вектора $\xi(T)$ [13, стр. 300], с помощью которой получаем

$$(4) \quad P_\varphi(u) = (2\pi)^{-n/2} (\det[N(T)])^{-1/2} \int_{\Pi_\varphi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle y, N(T)^{-1} y \rangle \right\} dy.$$

Этот путь весьма привлекателен для линейных стохастических систем диффузионного типа, так как в дальнейшем позволяет решать экстремальную задачу (2) непосредственно, однако для задач общего вида (1) он не подходит.

4. Оценки вероятностных критериев

Пусть $u \in \mathcal{U}$ — какая-то программа управления. Тогда уравнение (1) имеет на интервале $[0; T]$ единственное сильное решение [14, стр. 517] с нулевым ожиданием и конечным вторым моментом. В частности, определена ковариационная матрица $N(T)$ случайного вектора $\xi(T)$.

Пусть $\varkappa \in \mathbb{R}_+^n$. Предположим, что все диагональные элементы матрицы $N(T)$ строго положительны. Справедлива следующая оценка, впервые полученная Олкином и Праттом в [15]:

$$\mathbf{P} \left\{ \max \left\{ \frac{|\xi_i(T)|}{\varkappa_i \sqrt{N_{ii}(T)}}, i = \overline{1, n} \right\} \geq 1 \right\} \leq \frac{\left(\sqrt{\eta} + \sqrt{(n\theta - \eta)(n - 1)} \right)^2}{n^2},$$

где

$$\eta = \sum_{i,j=1}^n \frac{N_{ij}(T)}{\varkappa_i \varkappa_j \sqrt{N_{ii}(T)} \sqrt{N_{jj}(T)}}, \quad \theta = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\varkappa_i^2}.$$

Положим $\varkappa_i = \varphi \kappa_i / \sqrt{N_{ii}(T)}$, тогда

$$\mathbf{P} \left\{ \max \left\{ \frac{|\xi_i(T)|}{\kappa_i}, i = \overline{1, n} \right\} \geq \varphi \right\} \leq \frac{\left(\sqrt{\eta} + \sqrt{(n\theta - \eta)(n-1)} \right)^2}{n^2},$$

$$\eta = \frac{1}{\varphi^2} \sum_{i,j=1}^n \frac{N_{ij}(T)}{\kappa_i \kappa_j}, \quad \theta = \frac{1}{\varphi^2} \sum_{i=1}^n \frac{N_{ii}(T)}{\kappa_i^2}.$$

Отметим, что эта формула уже имеет смысл и в том случае, когда некоторые из диагональных элементов матрицы $N(T)$ равны нулю.

Следствием полученной формулы являются такие две оценки значений $P_\varphi(u)$ и $\varphi_\alpha(u)$:

$$(5) \quad P_\varphi(u) \geq P_\varphi^*(u) := \frac{n^2 - \varphi^{-2} f(u)}{n^2},$$

$$(6) \quad \varphi_\alpha(u) \leq \varphi_\alpha^*(u) := \inf \{ \varphi > 0 : \varphi^{-2} f(u) \leq n^2(1 - \alpha) \} = n^{-1} \sqrt{(1 - \alpha)^{-1} f(u)},$$

где

$$f(u) = \left(\sqrt{\text{tr}[QEQN(T)]} + \sqrt{\text{tr}[Q\Lambda QN(T)]} \right)^2,$$

$$Q = \text{diag}(\kappa_1^{-1}, \dots, \kappa_n^{-1}), \quad E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} (n-1)^2 & 1-n & \dots & 1-n \\ 1-n & (n-1)^2 & \ddots & 1-n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1-n & 1-n & \dots & (n-1)^2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим две новые задачи оптимизации:

$$P_\varphi^*(u) = 1 - n^{-2} \varphi^{-1} f(u) \rightarrow \sup_{u \in \mathcal{U}}, \quad \varphi_\alpha^*(u) = n^{-1} \sqrt{(1 - \alpha)^{-1} f(u)} \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}}.$$

В силу оценок (5) и (6) их решение позволяет получить приближение к решению исходных задач (2) и (3). В то же время, как легко видеть, эти две задачи эквиваленты одной задаче

$$f(u) = \left(\sqrt{\text{tr}[QEQN(T)]} + \sqrt{\text{tr}[Q\Lambda QN(T)]} \right)^2 \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}},$$

в которой отсутствуют параметры φ и α , т.е. ее решение, если оно существует, является приближением к решению задач (2) и (3) для всех значений $\varphi > 0$ и $\alpha \in (0; 1)$ одновременно. Именно эту задачу и будем далее исследовать. После того как процедура исследования будет изложена, обсудим еще один возможный и достаточно естественный подход.

Замечание 1. Как известно [15, теорема 3.7], равенство в оценке Олкина-Пратта достигается только в случае распределения весьма специального вида, которому не может удовлетворять случайный вектор $\xi(T)$. Отсюда следует, что значения $P_\varphi^*(u)$ и $\varphi_\alpha^*(u)$, найденные в результате исследования задачи $f(u) \rightarrow \inf$, могут оказаться чересчур грубыми оценками искомых значений $P(u)$ и $\varphi_\alpha(u)$. Нужно, однако, иметь в виду, что последнее не соотносится напрямую с качеством результатов, получаемых предлагаемым ниже способом. Идея подхода настоящей работы основывается на предположении о том, что точные значения оптимизируемых функционалов и их оценки изменяются одновременно при выборе того или иного управления $u \in \mathcal{U}$. Это эвристическое соображение проверяется в разделе 9 на различных примерах.

5. Вспомогательная детерминированная задача оптимизации

Для любого $u \in \mathcal{U}$ ковариационная матричная функция $N(t)$ соответствующего случайного процесса $\xi(t)$ определена и является решением задачи Коши для некоторого обыкновенного матричного дифференциального уравнения. Это уравнение можно выписать явно, что и сделано, например, в [11, 16]. Вместе с начальным условием оно имеет вид

$$\begin{aligned}
 (7) \quad \dot{N}(t) = & A(t, u(t))N(t) + N(t)A(t, u(t))^T + \\
 & + \sum_{l=1}^{\nu_1} \left(B_l(t, u(t))N(t)B_l(t, u(t))^T + C_l(t, u(t))C_l(t, u(t))^T \right) + \\
 & + \sum_{r=1}^{\nu_2} \lambda_r(t, u(t)) \left(D_r(t, u(t))N(t) + N(t)D_r(t, u(t))^T + \right. \\
 & \left. + D_r(t, u(t))N(t)D_r(t, u(t))^T \right), \\
 & N(0) = \mathbb{E}[\xi_0 \xi_0^T].
 \end{aligned}$$

Дополним его полученной в предыдущем разделе задачей:

$$\begin{aligned}
 (8) \quad J(N(T)) = & \text{tr}[(QEQ + Q\Lambda Q)N(T)] + \\
 & + 2\sqrt{\text{tr}[QEQN(T)]\text{tr}[Q\Lambda QN(T)]} \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}}.
 \end{aligned}$$

Отметим, что задача (7)–(8) является детерминированной, задана относительно терминального (вообще говоря, невыпуклого) функционала качества управления и линейной по состоянию $N(t)$ динамической системы (7). Она допускает наглядное векторное представление

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) = & \tilde{A}(t, u(t))x(t) + \tilde{B}(t, u(t)), \quad x(0) = x_0, \\
 \tilde{J}(x(T)) = & \langle q_e + q_\lambda, x(T) \rangle + 2\sqrt{\langle q_e, x(T) \rangle \langle q_\lambda, x(T) \rangle} \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}},
 \end{aligned}$$

где векторы x и x_0 получены симметрической векторизацией матриц N и N_0 (симметричные элементы вне главной диагонали включаются в состав компонент соответствующего вектора только один раз), а векторы q_e и q_Λ получены аналогичным способом из матриц QEQ и $Q\Lambda Q$, но элементы вне главной диагонали удвоены, т.е., например,

$$q_e = ((QEQ)_{11}, 2(QEQ)_{12}, 2(QEQ)_{13}, \dots, (QEQ)_{22}, 2(QEQ)_{23}, \dots, (QEQ)_{nn}).$$

Матрица $\tilde{A}$ и вектор $\tilde{B}$ составлены в соответствии с уравнением (7).

К решению такой задачи может быть применен метод глобального улучшения В.Ф. Кротова [12], содержащий в себе, помимо итерационной процедуры, некоторые необходимые условия оптимальности. С их формулировки и начнем.

6. Необходимые условия оптимальности

Для удобства перепишем задачу, полученную в предыдущих разделах, в более стандартных обозначениях. Будем считать, что рассматривается управляемая динамическая система

$$(9) \quad \dot{x}(t) = A(t, u(t))x(t) + B(t, u(t)), \quad x(0) = x_0 \in C_q \subset \mathbb{R}^n,$$

где $A : [0; T] \times U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ и $B : [0; T] \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — известные непрерывные отображения, размерность вектора состояния $n \in \{1, 3, 6, \dots, k(k+1)/2, \dots\}$, множество C_q , которому принадлежит заданное начальное условие x_0 , характеризуется тем, что для всякого $x \in C_q$ числа $\langle q_1, x \rangle$ и $\langle q_2, x \rangle$ строго положительны, если только $|q_1||q_2| \neq 0$ и $q_1 \neq -q_2$, здесь $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^n$ — известные векторы. В случае $|q_1||q_2| = 0$ положим $C_q = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle q_1 + q_2, x \rangle > 0\}$. Случай $q_1 = -q_2$ исключим из рассмотрения. В соответствии с постановкой задачи (7)–(8) дополнительно предполагается, что отображения A и B таковы, что для любого $u \in \mathcal{U}$ и для любого $t \in [0; T]$ вектор $x(t)$ принадлежит множеству C_q . Решается задача

$$(10) \quad J(x(T)) = \langle q_1 + q_2, x(T) \rangle + 2\sqrt{\langle q_1, x(T) \rangle \langle q_2, x(T) \rangle} \rightarrow \inf_{u \in \mathcal{U}}.$$

Замечание 2. В действительности исходя из соотношений задачи (7)–(8) вектор $x(t)$ принадлежит некоторому фиксированному множеству, в которое переходит множество всех возможных ковариационных матриц при описанном в предыдущем разделе отображении векторизации. При этом уже векторы q_1 и q_2 по определению таковы, что выполняются неравенства $\langle q_1, x \rangle > 0$, $\langle q_2, x \rangle \geq 0$, причем $\langle q_2, x \rangle = 0 \Leftrightarrow q_2 = 0 \Leftrightarrow n = 1$. Однако для дальнейшего будет удобно расширить область определения функции (10), а векторы q_i считать произвольными (не направленными в противоположные стороны).

Итак, по построению для любых $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^n$, $q_1 \neq -q_2$, функция J вида (10) определена на множестве C_q и принимает строго положительные значения.

Лемма 1. Для любых $q_1 \neq -q_2$ множество C_q — это непустой открытый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$, а функция $J : C_q \rightarrow \mathbb{R}_+$ дифференцируема и вогнута на C_q .

Доказательство леммы 1. Свойства множества C_q очевидны по построению. Также из построений и теоремы о производной суперпозиции следует дифференцируемость функции J . Составим, наконец, для J функцию Вейерштрасса

$$\mathcal{E}(x, y) = J(x) - J(y) - \langle J'(y), x - y \rangle.$$

Вогнутость означает, что $\forall x, y \in C_q \quad \mathcal{E}(x, y) \leq 0$. Прямым подсчетом находим

$$\mathcal{E}(x, y) = - \frac{\left(\sqrt{\langle q_1, x \rangle \langle q_2, y \rangle} + \sqrt{\langle q_1, y \rangle \langle q_2, x \rangle} \right)^2}{\sqrt{\langle q_1, y \rangle \langle q_2, y \rangle}},$$

если оба вектора q_i отличны от нуля, и $\mathcal{E}(x, y) \equiv 0$, если один из них равен нулю. Лемма доказана.

В силу этого утверждения к задаче (9)–(10) применима классическая линейная реализация метода Кротова [17, 18], которая состоит в следующем.

Пусть $\mathcal{A}^n([0; T])$ обозначает пространство абсолютно непрерывных n -мерных вектор-функций на отрезке $[0; T]$ и пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}$ — некоторая произвольная программа управления, $\hat{x} \in \mathcal{A}^n([0; T])$ — соответствующее ей (единственное) решение линейной задачи Коши

$$(11) \quad \dot{x}(t) = A(t, \hat{u}(t))x(t) + B(t, \hat{u}(t)), \quad x(0) = x_0.$$

Пусть далее $\hat{\psi} \in \mathcal{A}^n([0; T])$ — решение задачи Коши для сопряженной системы

$$(12) \quad \dot{\psi}(t) = -A(t, \hat{u}(t))^T \psi(t), \quad \psi(T) = -J'(\hat{x}(T)).$$

Рассмотрим функции

$$(13) \quad \hat{R}(t, x, u) = \langle \dot{\hat{\psi}}(t), x \rangle + \langle \hat{\psi}(t), A(t, u)x + B(t, u) \rangle,$$

$$(14) \quad \hat{G}(x) = \langle \hat{\psi}(T), x \rangle - \langle \hat{\psi}(0), x_0 \rangle + J(x).$$

Здесь обозначения $\hat{R}$ и $\hat{G}$ связаны с тем, что эти функции определяются элементом $\hat{\psi} \in \mathcal{A}^n([0; T])$, т.е., в конечном счете, выбранным произвольно управлением $\hat{u} \in \mathcal{U}$.

Лемма 2. Пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}$, $\hat{x} \in \mathcal{A}^n([0; T])$ — решение (11), $\hat{\psi} \in \mathcal{A}^n([0; T])$ — решение (12). Тогда

$$(15) \quad \hat{R}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \hat{R}(t, x, \hat{u}(t)) \quad \forall t \in [0; T],$$

$$(16) \quad \hat{G}(\hat{x}(T)) = \max_{x \in C_q} \hat{G}(x).$$

Доказательство леммы 2. В силу (12)

$$\hat{R}(t, x, \hat{u}(t)) = \langle \hat{\psi}(t), B(t, \hat{u}(t)) \rangle \quad \forall t \in [0; T]$$

и условие (15) выполняется тривиально, а условие (16) эквивалентно соотношению

$$\mathcal{E}(x, \hat{x}(T)) = J(x) - J(\hat{x}(T)) - \langle J'(\hat{x}(T)), x - \hat{x}(T) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in C_q,$$

которое верно для всех вогнутых на C_q функций. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}$, $\hat{x} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ – решение (11), $\hat{\psi} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ – решение (12), а $\pi : [0; T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – произвольное отображение, удовлетворяющее условиям:

- 1) $\hat{R}(t, x, \pi(t, x)) = \max_{v \in U} \hat{R}(t, x, v) \quad \forall x \in C_q \quad \forall t \in [0; T];$
- 2) существует решение $\tilde{x} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ нелинейной задачи Коши

$$\dot{x}(t) = A(t, \pi(t, x(t)))x(t) + B(t, \pi(t, x(t))), \quad x(0) = x_0;$$

- 3) существует $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ такое, что $\tilde{u}(t) = \pi(t, \tilde{x}(t)) \quad \forall t \in [0; T].$

Тогда $J(\tilde{x}(T)) \leq J(\hat{x}(T)).$

Доказательство теоремы 1. Исходя из формулы Ньютона–Лейбница и определений (13), (14) имеем

$$J(\tilde{x}(T)) = \hat{G}(\tilde{x}(T)) - \int_0^T \hat{R}(t, \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) dt = \hat{G}(\tilde{x}(T)) - \int_0^T \hat{R}(t, \tilde{x}(t), \pi(t, \tilde{x}(t))) dt$$

в силу 2) и 3). Тогда из условия 1) и соотношений (15), (16)

$$J(\tilde{x}(T)) \leq \hat{G}(\tilde{x}(T)) - \int_0^T \hat{R}(t, \tilde{x}(t), \hat{u}(t)) dt \leq \hat{G}(\hat{x}(T)) - \int_0^T \hat{R}(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt = J(\hat{x}(T)).$$

Теорема доказана.

Теорема 1 естественным образом содержит в себе необходимые условия оптимальности в задаче (9)–(10).

Следствие 1. Пусть $\hat{u} \in \mathcal{U}$ – оптимальное управление в задаче (10), $\hat{x} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ – решение (11), $\hat{\psi} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ – решение (12). Тогда для любого отображения π , удовлетворяющего условиям 1)–3) теоремы 1, и для соответствующего ему в смысле этих условий $\tilde{x} \in \mathcal{AC}^n([0; T])$ выполняется $J(\tilde{x}(T)) = J(\hat{x}(T)).$

Следующим простым утверждением устанавливается связь полученного результата с принципом максимума.

Следствие 2. Пусть $\hat{u}$, $\hat{x}$, $\hat{\psi}$ взяты из теоремы 1. Если существует отображение π , для которого при некотором $\tilde{u}$ выполняются условия 1)–3) и при почти всех t верно равенство $\tilde{u}(t) = \hat{u}(t)$, то $\hat{u}$ — экстремаль Понтрягина.

Замечание 3. Неулучшаемость в смысле значения функционала J управления $\hat{u} \in \mathcal{U}$ за счет произвольного $\tilde{u} \in \mathcal{U}$, построенного по теореме 1, вообще говоря, не означает, что пара $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ удовлетворяет принципу максимума [19]. В то же время экстремаль Понтрягина может оказаться улучшаемой в том же смысле [20].

Замечание 4. При некоторых дополнительных предположениях (например, когда отображение π и траектория $\tilde{x}$ определены условиями 1) и 2) теоремы 1 однозначно) можно показать, что неулучшаемость управления $\hat{u}$ влечет выполнение принципа максимума для пары $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$. Здесь не будем останавливаться на этом вопросе подробно.

Следующим полезным замечанием авторы обязаны рецензенту настоящей статьи.

Замечание 5. В рамках задачи (7)–(8) оба вектора q_i в (10) не равны нулю тогда и только тогда, когда $n > 1$ (см. замечание 2). В соответствии с доказательством леммы 1 в этом случае функция J строго вогнута на C_q . Отсюда следует, что последнее неравенство в доказательстве теоремы 1 заведомо будет строгим при $\tilde{x}(T) \neq \hat{x}(T)$. Таким образом, при исследовании задачи (7)–(8) в случае $n > 1$ выполнение условий 1)–3) теоремы 1 и дополнительного требования $\tilde{x}(T) \neq \hat{x}(T)$ гарантирует улучшение управления $\hat{u}$.

7. Итерационный метод глобального улучшения

Наиболее важным для приложений следствием теоремы 1 является следующий метод последовательного глобального улучшения произвольно заданной программы управления $\hat{u} \in \mathcal{U}$.

- 1) Положить $u^{(0)} = \hat{u}$, $k = 0$.
- 2) Найти решение $x^{(k)}(t)$ задачи Коши

$$\dot{x}(t) = A(t, u^{(k)}(t))x(t) + B(t, u^{(k)}(t)), \quad x(0) = x_0.$$

- 3) Найти решение $\psi^{(k)}(t)$ задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -A(t, u^{(k)}(t))^T \psi(t),$$

$$\psi(T) = - \left(1 + \sqrt{\frac{\langle q_2, x^{(k)}(T) \rangle}{\langle q_1, x^{(k)}(T) \rangle}} \right) q_1 - \left(1 + \sqrt{\frac{\langle q_1, x^{(k)}(T) \rangle}{\langle q_2, x^{(k)}(T) \rangle}} \right) q_2.$$

- 4) Найти функцию позиционного управления $\pi^{(k)}(t, x)$, удовлетворяющую при всех $x \in C_q$ и почти всех $t \in [0; T]$ условию

$$\langle \psi^{(k)}(t), A(t, \pi^{(k)}(t, x))x + B(t, \pi^{(k)}(t, x)) \rangle = \max_{v \in U} \langle \psi^{(k)}(t), A(t, v)x + B(t, v) \rangle.$$

5) Найти решение $x^{(k+1)}(t)$ нелинейной задачи Коши

$$\dot{x}(t) = A(t, \pi^{(k)}(t, x(t)))x(t) + B(t, \pi^{(k)}(t, x(t))), \quad x(0) = x_0.$$

6) Проверить условие улучшения

$$J(x^{(k+1)}(T)) < J(x^{(k)}(T)),$$

при отсутствии улучшения положить $\tilde{u} = u^{(k)}$ и закончить расчеты.

7) Положить $u^{(k+1)}(t) = \pi^{(k)}(t, x^{(k+1)}(t))$.

8) Увеличить k на единицу и перейти к шагу 3.

Интегрирование нелинейной системы уравнений на шаге 5 возможно осуществить численно, параллельно с выполнением шага 4; в этом случае на шаге 4 всякий раз решается конечномерная задача минимизации и непосредственно определяются значения вектора $u^{(k+1)}(t)$; шаг 7 выполнять не требуется. В практических целях естественно заменить проверку условия улучшения на шаге 6 проверкой условия остановки

$$|J(x^{(k+1)}(T)) - J(x^{(k)}(T))| < \varepsilon,$$

где число $\varepsilon > 0$ выбрано заранее на шаге 1.

8. О минимизации нормы конечного состояния

Вернемся еще раз к исходным задачам (2)–(3). Вполне естественно предположить, что качественное приближение к решению этих задач может быть получено путем минимизации функционала

$$(17) \quad \mathcal{J}(N(T)) = \text{tr}[QN(T)].$$

В частности, если Q — единичная матрица (т.е. если в задачах (2)–(3) область Π_φ квадратная), то речь идет о минимизации стандартной нормы случайного вектора $\xi(T)$, так как в этом случае

$$\mathcal{J}(N(T)) = \text{tr}N(T) = \mathbb{E}[|\xi(T)|^2] =: \|\xi(T)\|^2.$$

Ясно, что задача оптимального управления системой (7) с функционалом (17) несколько проще задачи (7)–(8), так как она полностью линейна по переменной состояния. Для нее соответственно упрощаются, пусть и незначительно, запись и проверка необходимых условий оптимальности, а также итерационная процедура глобального улучшения Кротова. Упрощение состоит в том, что на шаге 3 метода улучшения двойственная задача Коши решается с известным заранее условием $\psi(T) = \text{const}$. Более того, линейная структура задачи позволяет сформулировать несколько альтернативных итерационных процедур глобального улучшения, двойственного и челночного типа [20],

которые, вообще говоря, не эквивалентны сформулированной выше прямой процедуре (см. по этому поводу примеры в [20, 21]).

Однако не всегда улучшение по Кротову в терминах функционала (17) является одновременно улучшением в терминах функционала (8). В самом деле, рассмотрим на интервале времени $[0; 1]$ управляемую систему

$$d\xi_1(t) = 0, \quad d\xi_2(t) = -u(t)\xi_1(t)dt + u(t)dw(t),$$

для которой заданы геометрические ограничения на управление $0 \leq u(t) \leq \varepsilon$, где $\varepsilon \in (0; 1)$. Пусть в начальный момент времени вектор $\xi(0)$ имеет нормальное распределение с нулевым ожиданием и ковариационной матрицей

$$N_0 = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}.$$

Целевую область Π_φ выберем квадратной, т.е. положим $\kappa = (1, 1)$.

Исходные данные для вспомогательной задачи (9)–(10) получаются такими: $t \in [0; 1]$, $x(t) \in \mathbb{R}^3$, $u(t) \in [0; \varepsilon] \subset \mathbb{R}$,

$$A(t, u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -u & 0 & 0 \\ 0 & -2u & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix},$$

векторы q_i имеют вид $q_1 = (1, 2, 1)$, $q_2 = (1, -2, 1)$.

Пусть задано управление $\hat{u}(t) \equiv 0$. Используем метод Кротова, чтобы улучшить это управление в смысле функционала $\mathcal{J}(x(1)) = x_1(1) + x_3(1)$. Для этого в формуле (14) заменим J на $\mathcal{J}$ и воспользуемся конструкциями из теоремы 1. Имеем, прежде всего,

$$\hat{x}_1(t) = \hat{x}_3(t) \equiv 1, \quad \hat{x}_2(t) \equiv \varepsilon,$$

так что

$$\mathcal{J}(\hat{x}(1)) = 2.$$

Далее, так как в данном случае $\hat{\psi}(1) = (-1, 0, -1)$, то

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1(t) = \hat{\psi}_3(t) &\equiv -1, \quad \hat{\psi}_2(t) \equiv 0, \\ \langle \hat{\psi}(t), A(t, v)x + B(t, v) \rangle &= -v^2 + 2x_2v. \end{aligned}$$

Применяем теорему 1. Из условия 1) находим

$$\pi(t, x) = \begin{cases} 0, & x_2 \leq 0 \\ x_2, & 0 < x_2 \leq \varepsilon \\ \varepsilon, & x_2 > \varepsilon, \end{cases}$$

из условия 2)

$$\tilde{x}_1(t) \equiv 1, \quad \tilde{x}_2(t) = \varepsilon e^{-t}, \quad \tilde{x}_3(t) = \frac{\varepsilon^2}{2} (e^{-2t} - 1) + 1,$$

из условия 3)

$$\tilde{u}(t) = \pi(t, \tilde{x}(t)) = \tilde{x}_2(t) = \varepsilon e^{-t}.$$

При этом

$$\mathcal{J}(\tilde{x}(1)) = 2 - \frac{\varepsilon^2}{2} (1 - e^{-2}).$$

В то же время

$$\begin{aligned} J(\hat{x}(1)) &= 2\mathcal{J}(\hat{x}(1)) + 2\sqrt{\mathcal{J}(\hat{x}(1))^2 - 4\hat{x}_2(1)^2} = 4 + 4\sqrt{1 - \varepsilon^2}, \\ J(\tilde{x}(1)) &= 2 - \varepsilon^2 (1 - e^{-2}) + 2\sqrt{\left(2 - \frac{\varepsilon^2}{2} (1 - e^{-2})\right)^2 - 4\varepsilon^2 e^{-2}}. \end{aligned}$$

Заметим, что для любого $\varepsilon \in (0; 1)$ одновременно выполнена пара неравенств

$$\mathcal{J}(\hat{x}(1)) > \mathcal{J}(\tilde{x}(1)), \quad J(\hat{x}(1)) < J(\tilde{x}(1)).$$

В частности, это верно при значениях ε , близких к 1. Более того, при таких значениях параметра численные эксперименты показывают, что оба неравенства остаются в силе при сколь угодно большом числе повторных итераций.

Отметим теперь, что рассматриваемая стохастическая система линейна, поэтому случайные векторы $\hat{\xi}(1)$ и $\tilde{\xi}(1)$, отвечающие управлениям $\hat{u}$ и $\tilde{u}$, так же, как и $\xi(0)$, имеют нормальное распределение, причем их ковариационные матрицы соответственно равны

$$\hat{N}(1) = \begin{pmatrix} \hat{x}_1(1) & \hat{x}_2(1) \\ \hat{x}_2(1) & \hat{x}_3(1) \end{pmatrix}, \quad \tilde{N}(1) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(1) & \tilde{x}_2(1) \\ \tilde{x}_2(1) & \tilde{x}_3(1) \end{pmatrix}.$$

При $\varepsilon = 0,9999$ по формуле (4) находим $P_1(\hat{u}) \approx 0,68$ и $P_1(\tilde{u}) \approx 0,58$, т.е., несмотря на уменьшение нормы случайного вектора конечного состояния, вероятность попадания в целевую область уменьшилась сразу на 10%.

Итак, существуют задачи, для которых улучшение некоторой программы управления по Кротову в смысле нормы вектора состояния системы в конечный момент времени является ухудшением не только в смысле оценок (5)–(6), но и в смысле решения исходных задач (2)–(3). В то же время подход, предложенный в данной статье, работает в этой ситуации корректно: оценки (5)–(6) ухудшены быть не могут. Тем не менее при его использовании в общем случае также может иметь место ухудшение качества управления относительно исходной вероятности в задачах (2)–(3), но в силу упомянутых оценок можно рассчитывать на то, что если это и произойдет, ухудшение окажется не настолько значительным (см. пример 2 далее).

9. Примеры

Пример 1. На интервале времени $[0; T]$ рассмотрим систему

$$\begin{aligned} d\xi_1(t) &= (u(t)\xi_1(t) - \xi_2(t))dt + (\xi_2(t) - \xi_1(t))dw(t), & \xi_1(0) &\sim \mathcal{N}(0, 1), \\ d\xi_2(t) &= (\xi_1(t) + u(t)\xi_2(t))dt + (\xi_1(t) + \xi_2(t))dw(t), & \xi_2(0) &\sim \mathcal{N}(0, 1), \end{aligned}$$

случайные величины $\xi_1(0)$ и $\xi_2(0)$ независимы. Геометрические ограничения на управление заданы в виде $|u(t)| \leq u_{\max}$. Целевую область Π_φ выберем квадратной, т.е. положим $\kappa = (1, 1)$.

Исходные данные для вспомогательной задачи (9)–(10) получаются такими: $t \in [0; T]$, $x(t) \in \mathbb{R}^3$, $u(t) \in [-u_{\max}; u_{\max}] \subset \mathbb{R}$, $B(t, u) \equiv 0$,

$$A(t, u) = \begin{pmatrix} 2u + 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2u & 0 \\ 1 & 4 & 2u + 1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

векторы q_i имеют вид $q_1 = (1, 2, 1)$, $q_2 = (1, -2, 1)$.

Заметим сразу, что в силу уравнения (9) для любого $u \in \mathcal{U}$ вторая компонента вектора $x(t)$ (смешанная ковариация компонент вектора $\xi(t)$) тождественно равна нулю. Отсюда следует, что

$$\langle q_1, x(T) \rangle = \langle q_2, x(T) \rangle = \langle q_0, x(T) \rangle, \quad q_0 = (1, 0, 1),$$

т.е.

$$J(x(T)) = 4\langle q_0, x(T) \rangle = 4\mathcal{J}(x(T))$$

и задача (9)–(10) полностью эквивалентна задаче (9), (17) минимизации нормы случайного вектора $\xi(T)$. Для удобства будем далее работать с функционалом $\mathcal{J}$.

Пусть задано управление $\hat{u}(t) \equiv 0$. Имеем

$$\hat{x}_1(t) = \hat{x}_3(t) = e^{2t}, \quad \hat{x}_2(t) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{J}(\hat{x}(T)) = 2e^{2T}.$$

Так как функционал $\mathcal{J}$ линеен, $\hat{\psi}(T) = -q_0$, откуда

$$\hat{\psi}_1(t) = \hat{\psi}_3(t) = -e^{2(T-t)}, \quad \hat{\psi}_2(t) \equiv 0,$$

$$\langle \hat{\psi}(t), A(t, v)x + B(t, v) \rangle = -2e^{2(T-t)}(v + 1)(x_1 + x_3), \quad x_1 + x_3 = \langle q_0, x \rangle > 0.$$

Следовательно, из условия 1) теоремы 1 $\pi(t, x) \equiv -u_{\max}$. В действительности, как нетрудно проверить, в рассматриваемой задаче для любого $u \in \mathcal{U}$

$$\mathcal{J}(x(T)) = 2e^{2T} \exp \left\{ 2 \int_0^T u(t) dt \right\},$$

поэтому $\tilde{u}(t) \equiv -u_{\max}$ доставляет абсолютный оптимум функционалу $\mathcal{J}$. Показано, что этот оптимум находится методом глобального улучшения Кротова ровно за одну итерацию.

Пусть для определенности $u_{\max} = 1$, $T = 1$, тогда $\tilde{u}(t) \equiv -1$ и $J(\tilde{x}(T)) = 4\mathcal{J}(\tilde{x}(T)) = 8$. Подставляя это значение вместо $f(u)$ в формулы (5)–(6) при $n = 2$, находим такие оценки для значений функционалов (2) и (3):

$$P_\varphi(\tilde{u}) \geq 1 - 2\varphi^{-2}, \quad \varphi_\alpha(\tilde{u}) \leq \sqrt{2(1 - \alpha)^{-1}}.$$

Пример 2. Завершим теперь исследование специального примера, построенного в предыдущем разделе. Напомним постановку задачи: на интервале времени $[0; 1]$ рассматривается управляемая система

$$d\xi_1(t) = 0, \quad d\xi_2(t) = -u(t)\xi_1(t)dt + u(t)dw(t),$$

$$\xi(0) \sim \mathcal{N}(0, N_0), \quad N_0 = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix},$$

геометрические ограничения на управление заданы в виде $0 \leq u(t) \leq \varepsilon$, $\varepsilon \in (0; 1)$, целевая область Π_φ — квадратная, $\kappa = (1, 1)$. Исходные данные для вспомогательной задачи (9)–(10): $t \in [0; 1]$, $x(t) \in \mathbb{R}^3$, $u(t) \in [0; \varepsilon] \subset \mathbb{R}$,

$$A(t, u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -u & 0 & 0 \\ 0 & -2u & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ 1 \end{pmatrix},$$

векторы q_i — те же самые, что и в примере 1.

Пусть задано управление $\hat{u}(t) \equiv 0$. Имеем

$$\hat{x}_1(t) = \hat{x}_3(t) \equiv 1, \quad \hat{x}_2(t) \equiv \varepsilon \quad \Rightarrow \quad J(\hat{x}(1)) = 4 + 4\sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Так как

$$\hat{\psi}(1) = -J'(\hat{x}(T)) = -\left(1 + \sqrt{\frac{\langle q_2, \hat{x}(T) \rangle}{\langle q_1, \hat{x}(T) \rangle}}\right) q_1 - \left(1 + \sqrt{\frac{\langle q_1, \hat{x}(T) \rangle}{\langle q_2, \hat{x}(T) \rangle}}\right) q_2,$$

получаем

$$\hat{\psi}_1(t) = \hat{\psi}_3(t) \equiv -\beta_1, \quad \hat{\psi}_2(t) \equiv -\beta_2,$$

$$\langle \hat{\psi}(t), A(t, v)x + B(t, v) \rangle = -\beta_1 v^2 + (\beta_2 x_1 + 2\beta_1 x_2)v,$$

где

$$\beta_1 = 2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}\right), \quad \beta_2 = -\frac{4\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

Из условия 1) теоремы 1 находим

$$\pi(t, x) = \begin{cases} 0, & \beta_2 x_1 + 2\beta_1 x_2 \leq 0 \\ \beta_2 x_1 + 2\beta_1 x_2, & 0 < \beta_2 x_1 + 2\beta_1 x_2 \leq \varepsilon \\ \varepsilon, & \beta_2 x_1 + 2\beta_1 x_2 > \varepsilon. \end{cases}$$

Так как для любого $\varepsilon \in (0; 1)$

$$\pi(0, x_0) = \beta_2 + 2\beta_1 \varepsilon = 4\varepsilon > \varepsilon$$

и

$$\beta_2 + 2\beta_1 \varepsilon (1 - t^*) = \varepsilon$$

при

$$t^* = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right)^{-1} \in (0; 1),$$

новое управление $\tilde{u}$ будет иметь переключения начиная с момента времени t^* .

Положим $\varepsilon = 0,9999$. Тогда $J(\hat{x}(1)) \approx 4,057$, а для нового управления $\tilde{u}$ и соответствующей ему траектории $\tilde{x}$ исходя из численного расчета находим $J(\tilde{x}(1)) \approx 4,041$. В силу оценки (5) это лишь означает, что $P_\varphi(\tilde{u}) \geq P_\varphi^*(\tilde{u}) \approx 1 - \varphi^{-1}$, так что $P_1(\tilde{u}) \geq 0$. Но в действительности ковариационная матрица для нового решения имеет вид

$$\tilde{N}(1) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(1) & \tilde{x}_2(1) \\ \tilde{x}_2(1) & \tilde{x}_3(1) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0,991 \\ 0,991 & 0,983 \end{pmatrix},$$

откуда в силу формулы (4)

$$P_1(\tilde{u}) \approx 0,681 > 0,68 \approx P_1(\hat{u}).$$

Таким образом, метод Кротова, построенный на основании оценок (5)–(6), позволяет даже в таком специально подобранном «плохом» примере повысить, пусть и незначительно, вероятность попадания в целевую область, при том что сами оценки никакой полезной информации не содержат. Влияние повторных итераций на результат здесь оказывается несущественным.

Пример 3. На интервале времени $[0; 1]$ рассмотрим систему

$$\begin{aligned} d\xi_1(t) &= \xi_2(t)dt + \xi_2(t^-)dp(t), \quad \xi_1(0) \sim \mathcal{N}(0, 1), \\ d\xi_2(t) &= u_1(t)\xi_1(t)dt, \quad \xi_2(0) = 0, \end{aligned}$$

где пуассоновский процесс $p(\cdot)$ имеет интенсивность $\lambda(t, u(t)) = u_2(t)$. Геометрические ограничения на управление заданы в виде $|u_1(t)| \leq 1$, $0 \leq u_2(t) \leq 1$. Целевая область Π_φ квадратная, $\kappa = (1, 1)$.

Исходные данные для вспомогательной задачи (9)–(10) получаются такими: $t \in [0; 1]$, $x(t) \in \mathbb{R}^3$, $u(t) \in [-1; 1] \times [0; 1] \subset \mathbb{R}^2$, $B(t, u) \equiv 0$,

$$A(t, u) = \begin{pmatrix} 0 & 2 + 2u_2 & u_2 \\ u_1 & 0 & 1 + u_2 \\ 0 & 2u_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Векторы q_i — те же самые, что и в примерах 1, 2.

Пусть задано управление $\hat{u}_1(t) = \hat{u}_2(t) \equiv 0$. Значение вспомогательного функционала качества (10) на нем равно 4. Дальнейшие расчеты выполним численно, следуя изложенной в разделе 7 итерационной процедуре. В результате через десять итераций будет найдено новое управление $\tilde{u}(t)$ (см. рис. 1 и 2), на котором функционал приблизительно равен 1,28. Используя теперь оценки (5) и (6), можно утверждать, что при управлении $\tilde{u}(t)$ вероятность

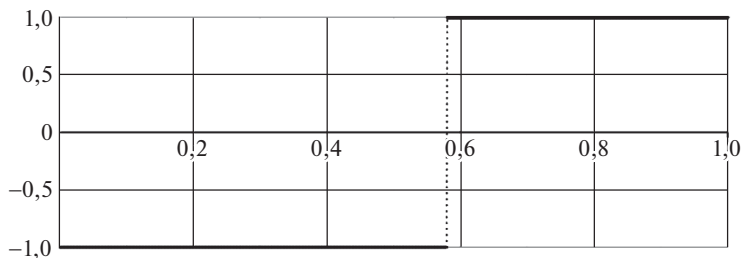


Рис. 1. Функция $\tilde{u}_1(t)$ в примере 3.

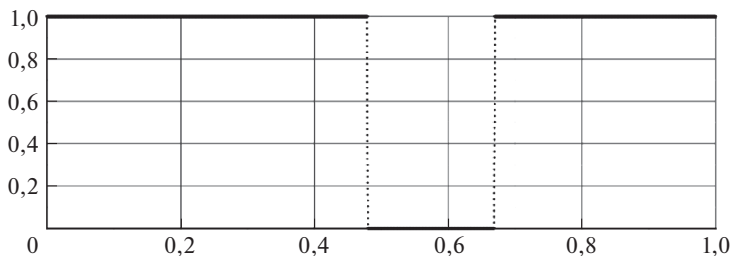


Рис. 2. Функция $\tilde{u}_2(t)$ в примере 3.

попадания случайного вектора $\tilde{\xi}(T)$ в квадрат Π_1 не меньше, чем 68%, а если требуется гарантировать вероятность попадания в заданную квадратную область с вероятностью не меньшей, чем $\alpha = 0,85$, то квадрат Π_1 следует увеличить как минимум в $\varphi = 1,46$ раза. Если заменить функционал (10) на функционал (17) и применить метод, то будет найдена другая программа управления $u^*(t)$, лишь немного отличающаяся (в большую сторону) от $\tilde{u}(t)$ по значению (10). При этом на каждой итерации вместе с уменьшением значений (17) будут уменьшаться и значения (10). Чтобы точнее оценить качество найденных программ, проведем численно моделирование некоторого количества реализаций случайного процесса $\xi(t)$ и оценим частоту попаданий величины $\xi(1)$ в целевую область Π_φ при разных ее размерах. Результаты представлены в таблице. Во втором столбце для сравнения приведены точные значения $P_\varphi(\hat{u})$, вычисленные по формуле (4).

Таким образом, в рамках рассматриваемого примера (так же, как и в случае с примером 1) задачу (9)–(10) без потери качества решения исходной пары проблем (1)–(3) можно поменять на более простую линейную задачу (9), (17).

Статистика попаданий в область Π_φ по результатам моделирования

φ	$P_\varphi(\hat{u})$	$\hat{u}(t) \equiv 0$	$u(t) = \tilde{u}(t)$	$u(t) = u^*(t)$
1	0,68	74 из 100	90 из 100	95 из 100
1,5	0,87	90 из 100	99 из 100	100 из 100
2,6	0,99	99 из 100	100 из 100	100 из 100

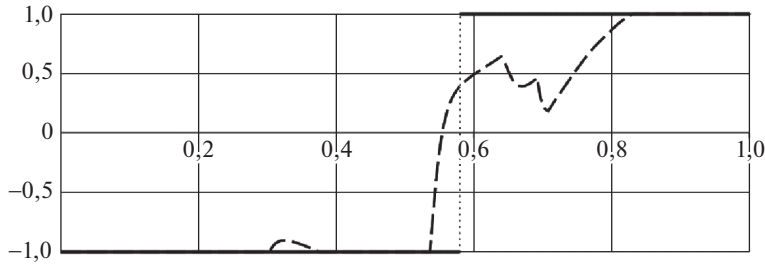


Рис. 3. Сравнение первых компонент вектор-функции $\tilde{u}(t)$ в примерах 3 и 4.

Пример 4. Предположим, что управление $u_1(t)$ в системе из предыдущего примера реализуется с ошибкой мультипликативного типа. Для этого на интервале времени $[0; 1]$ рассмотрим систему

$$\begin{aligned} d\xi_1(t) &= \xi_2(t)dt + \xi_2(t^-)dp(t), \quad \xi_1(0) \sim \mathcal{N}(0, 1), \\ d\xi_2(t) &= u_1(t)\xi_1(t)dt + \varepsilon u_1(t)\xi_1(t)dw(t), \quad \xi_2(0) = 0, \end{aligned}$$

где пуассоновский процесс $p(\cdot)$ имеет ту же интенсивность $\lambda(t, u(t)) = u_2(t)$. Геометрические ограничения не изменены и заданы в виде $|u_1(t)| \leq 1$, $0 \leq u_2(t) \leq 1$. Целевая область Π_φ квадратная, $\kappa = (1, 1)$. Исходные данные для вспомогательной задачи (9)–(10) отличаются от примера 3 только одним элементом матрицы $A(t, u)$, а именно, $A_{31}(t, u) = \varepsilon^2 u_1^2$, где ε возьмем равным 0,1.

Повторив расчеты примера 3 для того же начального приближения $\hat{u}_1(t) = \hat{u}_2(t) \equiv 0$, на десятой итерации получим новое управление $\tilde{u}(t)$, первая компонента которого, в отличие от представленной на рис. 1, становится непрерывной, а вторая не отличается от представленной на рис. 2. При этом подстановка управления $\tilde{u}$ из примера 3 в рассматриваемую здесь возмущенную систему дает значение оценочного функционала (10) приблизительно 1,4, в то время как на новом $\tilde{u}$ имеем меньшее значение 1,39. Сравнение функций $\tilde{u}_1(t)$, полученных в этом и предыдущем примерах, приведено на рис. 3.

Пример 5. Рассмотрим задачу стабилизации высоты летательного аппарата из [22]: на интервале $[0; T]$ задана система

$$\begin{aligned} dH(t) &= V(t)dt, \\ dV(t) &= (u_1(t)H(t) + u_2(t)V(t))dt + \epsilon(u_1(t)H(t) + u_2(t)V(t))dw_1(t) + cdw_2(t) \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$H(0) \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad V(0) = 0,$$

где H и V — отклонения высоты и вертикальной скорости от заданных значений, ϵ — коэффициент ошибки реализации управления, c — параметр силы ветрового воздействия. Геометрические ограничения на управление характеризуют технические возможности по усилению в линейном регуляторе обратной связи и заданы в виде $|u_i(t)| \leq u_{\max}$. В конечный момент времени T требуется максимизировать вероятность нахождения отклонений по высоте и скорости набора высоты в пределах заданных погрешностей. Будем считать,

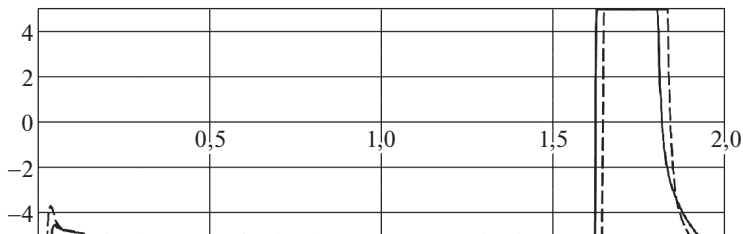


Рис. 4. Сравнение первых компонент найденных управлений в примере 5.

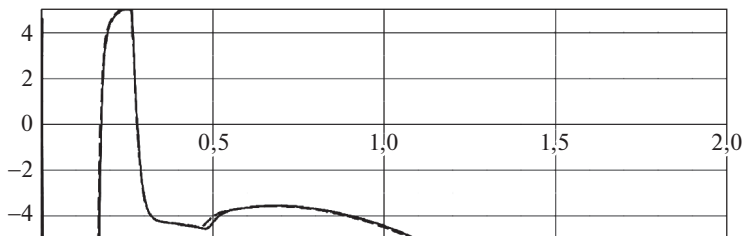


Рис. 5. Сравнение вторых компонент найденных управлений в примере 5.

что точная скорость вдвое важнее точной высоты. Иначе говоря, решается задача попасть в прямоугольную целевую область Π_φ при $\kappa = (2, 1)$ с наибольшей вероятностью. Такого рода задачи естественно возникают на практике, например при дозаправке самолетов в воздухе или при стыковке космических аппаратов.

Исходные данные для вспомогательной задачи (9)–(10) получаются такими: $t \in [0; T]$, $x(t) \in \mathbb{R}^3$, $u(t) \in [-u_{\max}; u_{\max}]^2 \subset \mathbb{R}^2$,

$$A(t, u) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ u_1 & u_2 & 1 \\ \epsilon^2 u_1^2 & 2u_1 + 2\epsilon^2 u_1 u_2 & 2u_2 + \epsilon^2 u_2^2 \end{pmatrix},$$

$$B(t, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c^2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

векторы q_i имеют вид $q_1 = (0, 25, 1, 1)$, $q_2 = (0, 25, -1, 1)$. Для определенности положим $\epsilon = 0, 1$, $c = 1$, $u_{\max} = 5$, $T = 2$.

Пусть задано управление $\hat{u}_1(t) = \hat{u}_2(t) \equiv 0$. Значение вспомогательного функционала качества (10) на нем примерно равно 10. Применяя численно метод глобального улучшения, построим новое управление $\tilde{u}$ со значением функционала (10) приблизительно 0,43. Как и ранее, построим для сравнения еще управление u^* , применяя метод к функционалу (17). Значение функционала (10) на нем получается примерно таким же. Графики обеих компонент представлены для сравнения на рис. 4 и 5 (соответствие графиков вариантам не существенно).

В завершение отметим, что при построении улучшений программ управления в разобранных примерах метод Кротова уже за одну итерацию находит программу со значением функционала J , существенно меньшим исходного, дальнейшие итерации вносят лишь небольшие корректировки. Аналогичная ситуация была ранее отмечена при решении линейных по состоянию задач оптимального управления [12, 17, 18].

10. Заключение

В работе исследованы задачи вероятностной и квантильной оптимизации многомерной управляемой скачкообразной диффузии. При помощи многомерных оценок вероятности чебышевского типа рассматриваемые задачи сведены к одной вспомогательной детерминированной задаче оптимального управления моментными характеристиками случайного процесса. К решению этой задачи применен метод последовательных глобальных улучшений В.Ф. Кротова. Эффективность подхода продемонстрирована на ряде примеров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кибзун А.И., Кан Ю.С. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
2. Малышев В.В., Кибзун А.И. Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987.
3. Азанов В.М., Кан Ю.С. Синтез оптимальных стратегий в задачах управления дискретными системами по вероятностному критерию // АиТ. 2017. № 6. С. 57–83.
Azanov V.M., Kan Yu.S. Design of optimal strategies in the problems of discrete system control by the probabilistic criterion // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 6. P. 1006–1027.
4. Кибзун А.И., Игнатов А.Н. О существовании оптимальных стратегий в задаче управления стохастической системой с дискретным временем по вероятностному критерию // АиТ. 2017. № 10. С. 139–154.
Kibzun A.I., Ignatov A.N. On the existence of optimal strategies in the control problem for a stochastic discrete time system with respect to the probability criterion // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 10. P. 1845–1856.
5. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1998.
6. Hanson F.B. Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions: Modeling, Analysis and Computation. Philadelphia, USA: SIAM Books, 2007.
7. Кан Ю.С. Оптимизация управления по квантильному критерию // АиТ. 2001. № 5. С. 77–88.
8. Параев Ю.И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М.: Сов. радио, 1976.
9. Роднищев Н.Е. Приближенный анализ точности дискретного оптимального управления нелинейных стохастических систем методом семинвариантов // Известия вузов. Авиационная техника. 1987. № 1. С. 63–69.

10. *Хрусталеv М.М., Румянцев Д.С., Царьков К.А.* Оптимизация квазилинейных стохастических систем диффузионного типа, нелинейных по управлению // *АиТ.* 2017. № 6. С. 84–105.
Khrustalev M.M., Rumyantsev D.S., Tsarkov K.A. Optimization of Quasilinear Stochastic Control-Nonlinear Diffusion Systems // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 6. P. 1028–1045.
11. *Хрусталеv М.М., Царьков К.А.* Оптимизация нелинейных по управлению стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа // *АиТ.* 2022. № 9. С. 128–149.
Khrustalev M.M., Tsarkov K.A. Optimization of Stochastic Jump Diffusion Systems Nonlinear in the Control // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 9. P. 1433–1451.
12. *Коннов А.И., Кротов В.Ф.* О глобальных методах последовательного улучшения управляемых процессов // *Автоматика и телемеханика.* 1999. № 10. С. 77–88.
Konnov A.I., Krotov V.F. On global methods for the successive improvement of control processes // *Autom. Remote Control.* 1999. V. 60. No. 10. P. 1427–1436.
13. *Миллер Б.М., Панков А.Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: Физматлит, 2002.
14. *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985.
15. *Olkin I., Pratt J.W.* A multivariate Tchebycheff inequality // *Annals Math. Stat.* 1958. V. 29. I. 1. P. 226–234.
16. *Хрусталеv М.М., Царьков К.А.* Достаточные условия относительного минимума в задаче оптимального управления квазилинейными стохастическими системами // *АиТ.* 2018. № 12. С. 83–102.
Khrustalev M.M., Tsarkov K.A. Sufficient Relative Minimum Conditions in the Optimal Control Problem for Quasilinear Stochastic Systems // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 12. P. 2169–2185.
17. *Кротов В.Ф., Булатов А.В., Батурина О.В.* Оптимизация линейных систем с управляемыми коэффициентами // *Автоматика и телемеханика.* 2011. № 6. С. 64–78.
Krotov V.F., Bulatov A.V., Baturina O.V. Optimization of linear systems with controllable coefficients // *Autom. Remote Control.* 2011. V. 72. No. 6. P. 1199–1212.
18. *Трушкова Е.А.* Алгоритмы глобального поиска оптимального управления // *Автоматика и телемеханика.* 2011. № 6. С. 151–159.
Trushkova E.A. Global control improvement algorithms // *Autom. Remote Control.* 2011. V. 72. No. 6. P. 1282–1290.
19. *Аргучинцев А.В., Дыхта В.А., Срочко В.А.* Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума // *Известия вузов. Математика.* 2009. № 1. С. 3–43.
20. *Дыхта В.А.* Нестандартная двойственность и нелокальные необходимые условия оптимальности в невыпуклых задачах оптимального управления // *АиТ.* 2014. № 11. С. 19–37.
Dykhta V.A. Nonstandard duality and nonlocal necessary optimality conditions in nonconvex optimal control problems // *Autom. Remote Control.* 2014. V. 75. No. 11. P. 1906–1921.

21. *Khrustalev M., Tsarkov K.* Global Improvement Methods for State-Linear Controllable Dynamical Systems // Proceedings of the 16th International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems” (Pyatnitskiy’s Conference) (STAB-2022, Moscow). М.: IEEE, 2022.
22. *Агапова А.С., Хрусталеv М.М.* Исследование проблемы равновесия по Нэшу в квазилинейных стационарных стохастических динамических системах, функционирующих на неограниченном интервале времени // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2021. № 6. С. 35–42.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 15.12.2022

После доработки 03.04.2023

Принята к публикации 19.04.2023

Управление в технических системах

© 2023 г. В.М. АБДУЛЛАЕВ, д-р физ.-мат. наук (vaqif_ab@rambler.ru)
(Азербайджанский Государственный Университет
нефти и промышленности, Баку;
Институт систем управления Министерства науки
и образования Азербайджанской Республики, Баку)

ОПТИМИЗАЦИЯ МЕСТ РАСПОЛОЖЕНИЯ И ЧИСЛА ТОЧЕК КОНТРОЛЯ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЯ ОБОГРЕВАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Решается задача синтеза управления процессом нагрева жидкого теплоносителя в теплообменнике за счет подаваемого в него пара. Процесс описывается линейным гиперболическим уравнением первого порядка с нелокальным краевым условием с запаздывающим во времени аргументом. Температура подаваемого пара ищется в виде линейной зависимости от значений температуры жидкости в теплообменнике в точках замера. Получены формулы градиента целевого функционала задачи управления в пространстве коэффициентов (параметров) обратной связи, участвующих в этой зависимости. Формулы использованы для построения численной схемы по определению параметров обратной связи, предложен алгоритм определения рационального (оптимального) числа точек замера.

Ключевые слова: система с распределенными параметрами, управление нагревом теплоносителя, обратная связь, точка контроля, градиент функционала, параметры обратной связи.

DOI: 10.31857/S0005231023060077, EDN: CSLSZB

1. Введение

Решается задача оптимального синтеза управления процессом нагрева жидкости в трубчатом теплообменнике, описываемого гиперболическим уравнением [1]. Нагрев жидкости осуществляется за счет подачи пара в теплообменник, температура которого является управлением. Нагретая жидкость циркулирует в замкнутой системе теплоснабжения. Это обуславливает наличие циклического краевого условия, связывающего значения температуры жидкости при выходе из теплообменника и возвращении в него после прохождения через обогревательную систему. Величина времени прохождения жидкости в системе нагрева задана и определяется скоростью движения жидкости и длиной трубопровода, по которому течет жидкость.

Целью управления является поддержание заданной температуры на выходе теплообменника. В рассматриваемой задаче температура подаваемого в теплообменник пара ищется в виде линейной зависимости от замеренных значений температуры жидкости в отдельных точках трубчатого теплообменника, т.е. для синтезируемого управления используется линейная зависимость

от замеренных значений температуры. Коэффициенты линейной зависимости, являющиеся синтезируемыми параметрами обратной связи, находятся минимизацией значения функционала, определяющего величину отклонения желаемой температуры жидкости в конце трубчатого теплообменника от вычисленной по имеющейся математической модели при заданных параметрах обратной связи. Подобная задача была рассмотрена в [1], позже в [2–5].

В данной статье, в отличие от ранее рассмотренных вариантов данной задачи, кроме определения значений синтезируемых параметров управления, предложен подход к оптимизации расположения мест точек замера температуры нагреваемой жидкости в трубчатом теплообменнике. Более того, исследуется вопрос эффективного (в определенном смысле, оптимального) количества точек замера температуры.

Предлагаемый ниже подход к решению задачи синтеза приводит исходное дифференциальное уравнение гиперболического типа к нагруженному дифференциальному уравнению, точками нагружения в котором являются оптимизируемые места точек замера. Подобные нагруженные задачи исследовались в [6, 7], а в [8, 9] предложены численные методы их решения.

Говоря в целом о задачах синтеза управления системами с распределенными параметрами, описываемыми дифференциальными уравнениями в частных производных [1, 10], необходимо отметить их сравнительно малую изученность в отличие от задач, описываемых дифференциальными уравнениями с обыкновенными производными [11]. Это объясняется, прежде всего, сложностью как построения адекватных математических моделей, так и их параметрической идентификации. Это связано с отсутствием или недостаточной точностью измеряемой оперативной информации о текущем состоянии исследуемых процессов. Не малое значение имело и отсутствие эффективных численных методов и вычислительных средств решения начально-краевых задач и надежного оборудования телемеханического контроля.

В последние годы интерес к этим задачам существенно возрос [12–18]. Это объясняется возросшими возможностями вычислительной и измерительной техники, развитием численных методов вычислительной математики, оптимизации, оптимального управления.

Задачам регулирования и оптимального управления системами как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами с обратной связью, в отличие от задач управления без обратной связи, посвящено сравнительно мало исследований, в которых предлагаются подходы к их решению [19–24]. В [11] приводится достаточно обширный анализ как истории исследований задач синтеза управления, так и современное их состояние.

Подход к решению задач синтеза, предлагаемый авторами, отличается от известных методов решения задач оптимального управления с обратной связью в основном тем, что исходная задача приводится к параметрической задаче оптимального управления относительно нагруженного дифференциального уравнения. Оптимизируемыми являются параметры обратной свя-

зи, а точками нагружения — места проведения замеров текущего состояния процесса. В частности, данный подход был применен в наших исследованиях [4, 16, 17] для решения задач синтеза управления, отличающихся от рассмотренной в данной статье типом дифференциальных уравнений, краевыми условиями и целевым функционалом.

Применение предлагаемого метода и полученных формул для синтеза параметров обратной связи иллюстрируется на примере решения тестовой задачи, приводятся результаты компьютерных экспериментов и их анализ.

2. Формулировка проблемы

Рассматривается задача оптимального управления процессом нагрева жидкости в трубчатом теплообменнике, которая далее поступает в систему теплоснабжения. Нагрев осуществляется за счет подачи горячего пара с регулируемой температурой в теплообменник (рис. 1). Процесс нагрева жидкости в трубчатом теплообменнике длиной L может быть описан следующим линейным дифференциальным уравнением переноса гиперболического типа [1]:

$$(2.1) \quad \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + v \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \lambda [q(t) - T(x, t)], \quad x \in (0, L), \quad t \in [0, t_f].$$

Здесь: $T(x, t)$ — непрерывная и почти всюду дифференцируемая функция, определяющая температуру жидкости в точке $x \in (0, L)$ в момент времени $t \in [0, t_f]$; t_f — длительность процесса нагрева; v — величина скорости установившегося движения жидкости, являющаяся постоянной во времени во всех точках; управляющая кусочно-непрерывная функция $q(t)$, $t \in [0, t_f]$ определяет температуру пара, подаваемого в теплообменник; λ — заданный коэффициент теплообмена между жидкостью в теплообменнике и подаваемого в него пара.

Температура подаваемого пара должна удовлетворять условиям технологического характера:

$$(2.2) \quad \underline{q} \leq q(t) \leq \bar{q}, \quad t \in [0, t_f].$$

Пусть нагретой в теплообменнике жидкости требуется время τ для возврата из системы теплоснабжения в теплообменник. Это время задано и оно

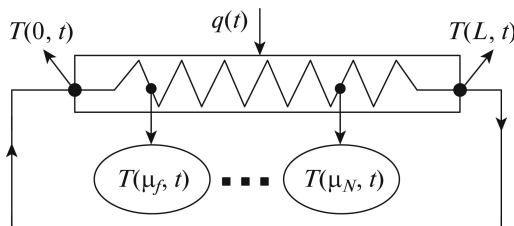


Рис. 1. Схема обогрвательной системы.

определяется длиной трубопроводной сети теплоснабжения l , которая многократно превосходит длину трубчатого теплообменника (т.е. $l \gg L$), а именно $\tau = (l + L) / \vartheta$. В процессе движения жидкость остужается за счет теплообмена со средой обогрева, причем известен диапазон возможных потерь температуры при движении. В таком случае имеем следующее условие на температуру жидкости в начале и конце теплообменника

$$(2.3) \quad T(0, t) = (1 - \gamma)T(L, t - \tau), \quad t \in [0, t_f],$$

$$(2.4) \quad \gamma \in \Gamma = [1 - \delta, 1].$$

Величина $\delta > 0$, определяющая диапазон потерь тепла жидкости при прохождении нагреваемой среды, считается заданной.

Задана также плотность распределения $\rho_\Gamma(\gamma)$ значений γ на множестве Γ такая, что

$$\rho_\Gamma(\gamma) \geq 0, \quad \int_{\Gamma} \rho_\Gamma(\gamma) d\gamma = 1.$$

Температура жидкости до начала процесса нагрева постоянна по времени и длине теплообменника, но задана не точно, а множеством возможных значений:

$$(2.5) \quad T(x, t) = \varphi = \text{const} \in \Phi = [\underline{\Phi}_0, \bar{\Phi}^0], \quad x \in [0, L], \quad t \leq 0,$$

где $\underline{\Phi}_0, \bar{\Phi}^0$ заданы. Задана и функция плотности распределения $\rho_\Gamma(\varphi)$ такая, что

$$\rho_\Phi(\varphi) \geq 0, \quad \int_{\Phi} \rho_\Phi(\varphi) d\varphi = 1.$$

Рассматриваемая задача управления процессом нагрева жидкости в теплообменнике заключается в нахождении функции $q(t)$, определяющей температуру подаваемого пара, минимизирующей следующий функционал

$$(2.6) \quad J(q) = \int_{\Phi} \int_{\Gamma} \int_{t_b}^{t_f} [T(L, t; q, \varphi, \gamma) - V]^2 \rho_\Gamma(\gamma) \rho_\Phi(\varphi) dt d\gamma d\varphi + \\ + \varepsilon \|q(t) - \tilde{q}(t)\|_{L^2[0, t_f]}^2.$$

Здесь $T(L, t; q, \varphi, \gamma)$ — значение температуры в конце теплообменника $x = L$, полученное из решения начально-краевой задачи (2.1), (2.3), (2.5) при заданных температуре подаваемого пара $q = q(t)$, $t \in [0, t_f]$, начальной температуре жидкости φ и величине коэффициента потери тепла γ_0 .

Специфика целевого функционала (2.6) заключается в том, что он оценивает качество управляющей функции $q(t)$, $t \in [0, t_f]$ при управлении пучком траекторий $T(x, t; q, \varphi, \gamma)$ при $\varphi \in \Phi$ и $\gamma \in \Gamma$. Таким образом, рассматриваемая задача управления заключается в определении управления $q(t)$, для ко-

торого указанный пучок траекторий доставляет минимум функционалу. Другими словами, ищется управление, которое оптимально в среднем по множествам значений возможных начальных условий Φ и коэффициентам потерь тепла Γ .

Заданное значение V равно желаемой температуре жидкости на выходе теплообменника при всевозможных начальных температурах $\varphi \in \Phi$ и коэффициентах потери тепла $\gamma \in \Gamma$, которую надо поддерживать на интервале времени $[t_b, t_f]$. Заданное значение t_b , $0 \leq t_b \leq t_f$, определяет момент времени, после которого температура жидкости на выходе теплообменника должна находиться в окрестности желаемой температуры V ; ε , $\tilde{q}(t)$ — заданные параметры регуляризации.

Функционал (2.6) оценивает поведение управляемого процесса нагрева в среднем по всевозможным значениям начальной температуры жидкости $\varphi \in \Phi$ и коэффициентом потерь тепла $\gamma \in \Gamma$. Функционал (2.6) оценивает качество управления пучком фазовых траекторий, определенных множествами значений начальных условий Φ и коэффициентов потерь тепла.

Предположим, что в точках трубчатого теплообменника $\mu_i \in [0, L]$, $i = 1, \dots, N$ ведутся замеры текущих значений температуры непрерывно

$$(2.7) \quad T_i(t) = T(\mu_i, t), \quad t \in [0, t_f], \quad i = 1, \dots, N,$$

или в заданные дискретные моменты времени $t_j = j\Delta t$, $j = 1, \dots, M$, $\Delta t = t_f/M$:

$$(2.8) \quad T_{ij} = T(\mu_i, t_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M.$$

В общем случае как точки размещения μ_i , $i = 1, \dots, N$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)$, так и их количество могут быть оптимизируемыми параметрами, причем они должны удовлетворять очевидным ограничениям:

$$(2.9) \quad 0 \leq \mu_i \leq L, \quad i = 1, \dots, N.$$

В случае непрерывных замеров (2.7) для назначения текущих значений температуры подаваемого пара используем линейную обратную связь (зависимость) в следующем виде:

$$(2.10) \quad q(t; \mathbf{P}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i [T(\mu_i, t) - T_i^{nom.}] = \sum_{i=1}^N [\alpha_i T(\mu_i, t) - \beta_i], \quad t \in [0, t_f].$$

Здесь использовано обозначение

$$\beta_i = \alpha_i T_i^{nom.}, \quad i = 1, \dots, N;$$

$$\mathbf{P} = (\mu_1, \alpha_1, \beta_1, \dots, \mu_N, \alpha_N, \beta_N) = (\mu, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{3N}.$$

Вектор параметров обратной связи $\mathbf{P}$, значения которого определяют текущее значение температуры пара, подаваемого в теплообменник, а следовательно, определяют функционирование процесса нагрева в целом. Коэффициенты α_i , $i = 1, \dots, N$, будем называть коэффициентами усиления (по аналогии с задачами синтеза управления в системах с сосредоточенными параметрами).

Оптимизируемые параметры T_i^{nom} , $i = 1, \dots, N$, определяют номинальные значения температуры, которые необходимо поддерживать в точках замера μ_i , $i = 1, \dots, N$, в процессе нагрева.

В случае, если замеры температуры проводятся в дискретные моменты времени, т.е. имеем (2.8), то для температуры пара, подаваемого в теплообменник, используем следующую кусочно-постоянную зависимость:

$$(2.11) \quad q(t; \mathbf{P}) = \sum_{i=1}^N [\alpha_i T_{ij} - \beta_i], \quad t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1, \dots, M.$$

Смысл параметров α_i , β_i , $i = 1, \dots, N$, такой же, что и выше. Подставляя управление вида (2.6) в уравнение (2.1), получим нагруженное дифференциальное уравнение [6, 8]:

$$(2.12) \quad \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + \vartheta \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \lambda \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i T(\mu_i, t) - \beta_i \right], \quad x \in (0, L), \quad t \in [0, t_f],$$

в котором точками нагружения являются точки размещения замеров температуры.

Подставляя в (2.1) зависимость (2.10), получим дифференциальное уравнение

$$(2.13) \quad \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} + \vartheta \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \lambda \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i T(\mu_i, t_{j-1}) - \beta_i \right],$$

$$x \in (0, L), \quad t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = 1, \dots, M,$$

со следующим естественным условием непрерывности процесса нагрева в моменты времени замера:

$$(2.14) \quad T(x, t_j + 0) = T(x, t_j), \quad x \in [0, L], \quad j = 1, \dots, M - 1.$$

Целевой функционал качества управления (2.6) для случаев с непрерывной (2.7) и дискретной обратной связью примет вид:

$$(2.15) \quad J(\mathbf{P}) = \int_{\Phi} \int_{\Gamma} \int_{t_b}^{t_f} [T(L, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) - V]^2 \rho_{\Gamma}(\gamma) \rho_{\Phi}(\varphi) dt d\gamma d\varphi +$$

$$+ \varepsilon \left\| \mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}} \right\|_{\mathbb{R}^{3N}}.$$

Здесь ε , $\tilde{\mathbf{P}}$ — параметры регуляризации; $T(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma)$ — решение начально-краевой задачи в случае непрерывных наблюдений (2.7) и задачи (2.13), (2.3), (2.5) при дискретных наблюдениях (2.9) и заданных значениях параметров обратной связи $\mathbf{P}$, начальной температуры $\varphi \in \Phi$, коэффициента потерь температуры $\gamma \in \Gamma$.

Будем предполагать, что известен диапазон возможных температур жидкости в трубчатом теплообменнике при всевозможных допустимых начальных температурах (2.5) и коэффициентах потерь температуры $\gamma \in \Gamma$:

$$(2.16) \quad \underline{T} \leq T(x, t) \leq \overline{T}, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, t_f).$$

Ясно, что условие (2.16) должно выполняться для всех замеренных значений:

$$\underline{T} \leq T(\mu_i, t) \leq \overline{T}, \quad x \in (0, L), \quad t \in (0, t_f), \quad i = 1, \dots, N.$$

Это означает, что N -мерный вектор

$$\tilde{T}(t) = (T(\mu_1, t), \dots, T(\mu_N, t)), \quad t \in (0, t_f)$$

принадлежит N -мерному кубу, вершины которого $\tilde{T}^s = (\tilde{T}_1^s, \dots, \tilde{T}_N^s)$, $s = 1, \dots, 2^N$ имеют координаты $\underline{T}$ или $\overline{T}$, т.е. T_j^s

$$\tilde{T}_j^s = \underline{T} \wedge \overline{T}, \quad x \in (0, L), \quad j = 1, \dots, N, \quad s = 1, \dots, 2^N.$$

Тогда условия на управление (2.2), учитывая зависимость (2.9), можно перенести на параметры как при непрерывной, так и дискретной обратной связи в виде ограничений:

$$(2.17) \quad \underline{q} \leq \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \overline{T} - \beta_i \right] \leq \bar{q}, \quad \underline{q} \leq \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \underline{T} - \beta_i \right] \leq \bar{q}.$$

Таким образом, рассматриваемая исходная задача управления температурой пара для нагрева теплоносителя и оптимизации мест расположения точек контроля при непрерывной обратной связи (2.7) приведена к задаче параметрического оптимального управления (2.12), (2.3), (2.5), (2.9), (2.16), (2.17), а при дискретной во времени обратной связи (2.8) вместо уравнения (2.12) должно использоваться уравнение (2.13). Размерность оптимизируемого конечномерного вектора параметров обратной связи $\mathbf{P}$ равна $3N$, относительно которых имеются линейные ограничения (2.9), (2.17).

Специфика полученной задачи заключается, как указывалось выше, в нагруженности дифференциального уравнения (2.1) и целевом функционале (2.6), оценивающем поведение пучка траекторий при заданных параметрах обратной связи. Важно, что, несмотря на выпуклость целевого функционала в исходной задаче (2.1)–(2.6) по управлению $q(t)$, целевой функционал (2.15)

не является выпуклым по параметрам $\mathbf{P}$ как для непрерывной, так и дискретной обратной связи (это следует из дифференциальных уравнений (2.12) и (2.13)). Отметим также небольшую размерность синтезируемого вектора параметров обратной связи, равного $3N$. В реальных приложениях N не превышает порядка 5–8, а следовательно, число постоянных параметров обратной связи не превышает порядка 20–30. Численное решение таких задач параметрического оптимального управления не представляет особых трудностей, учитывая, что решение не требуется проводить в режиме реального масштаба времени.

3. Необходимые условия оптимальности параметров обратной связи

Для исследования дифференцируемости и получения необходимых условий оптимальности первого порядка, используя известную технологию оценки приращения функционала, можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Функционал (2.15) относительно решения начально-краевой задачи (2.12), (2.3), (2.5) при непрерывной обратной связи (2.7) дифференцируем по параметрам $\mu_i, \alpha_i, \beta_i, i = 1, \dots, N$. Компоненты градиента функционала определяются следующими формулами:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \text{grad}_{\mu_i} J(\mathbf{P}) = & \int_{\Phi} \left[\int_{\Gamma} \left\{ -\lambda \alpha_i \int_0^{t_f} \left(\int_0^L \psi(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) dx \right) T_x(\mu_i, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) dt + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\sigma(\mu_i - \tilde{\mu}_i) \right\} \rho_{\Gamma}(\gamma) d\gamma \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi, \end{aligned}$$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \text{grad}_{\alpha_i} J(\mathbf{P}) = & \int_{\Phi} \left[\int_{\Gamma} \left\{ -\lambda \int_0^{t_f} (T(\mu_i, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) - \beta_i) \left(\int_0^L \psi(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) dx \right) dt + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\sigma(\alpha_i - \tilde{\alpha}_i) \right\} \rho_{\Gamma}(\gamma) d\gamma \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi, \end{aligned}$$

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \text{grad}_{\beta_i} J(\mathbf{P}) = & \int_{\Phi} \left[\int_{\Gamma} \left\{ \lambda \alpha_i \int_0^L \psi(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) dx + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\sigma(\beta_i - \tilde{\beta}_i) \right\} \rho_{\Gamma}(\gamma) d\gamma \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi, \end{aligned}$$

где $i = 1, \dots, N$.

Функция $\psi(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma)$ при заданных параметрах обратной связи $\mathbf{P}$, начальной температуре и коэффициенте потерь тепла φ является решением следующей сопряженной начально-краевой задачи

$$(3.4) \quad \psi_t(x, t) + \vartheta \psi_x(x, t) = \lambda \psi(x, t), \quad (x, t) \in \Omega,$$

$$(3.5) \quad \psi(x, t_f) = 0, \quad x \in [0, L],$$

$$(3.6) \quad \psi(L, t) = -\frac{2}{\vartheta}(T(L, t) - V), \quad t \in (t_f - \tau, t_f],$$

$$(3.7) \quad \psi(L, t) = -\frac{\lambda}{\vartheta}(1 - \gamma)\psi(0, t + \tau) - \frac{2}{a}(T(L, t) - V), \quad t \in (t_b, t_f - \tau],$$

$$(3.8) \quad \psi(L, t) = -\frac{\lambda}{\vartheta}(1 - \gamma)\psi(0, t + \tau), \quad t \in (0, t_b],$$

в точках μ_i , $i = 1, 2, \dots, N$, при $t \in [0, t_f]$ удовлетворяющей условиям:

$$(3.9) \quad \psi(\mu_i^-, t) = \psi(\mu_i^+, t) + \frac{\lambda}{\vartheta} \alpha_i \int_0^L \psi(x, t) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

а в момент времени t_b удовлетворяющей условиям:

$$(3.10) \quad \psi(x, t_b^-) = \psi(x, t_b^+), \quad x \in [0, L].$$

Теорема 2. Функционал (2.15) относительно решения в начально-краевой задаче (2.13), (2.3), (2.5) при дискретной обратной связи (2.8) дифференцируем по параметрам обратной связи, а компоненты градиента функционала определяются формулами:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \text{grad}_{\mu_i} J(\mathbf{P}) = & \\ = \int_{\Phi} \left[\int_{\Gamma} \left\{ -\lambda \alpha_i \sum_{j=1}^M \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\int_0^L \psi(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) dx \right) T_x(\mu_i, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) dt + \right. \right. & \\ \left. \left. + 2\sigma(\mu_i - \tilde{\mu}_i) \right\} \rho_{\Gamma}(\gamma) d\gamma \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi, \quad t_{j-1} \leq t \leq t_j, & \end{aligned}$$

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \text{grad}_{\alpha_i} J(\mathbf{P}) = & \\ = \int_{\Phi} \left[\int_{\Gamma} \left\{ -\lambda \sum_{j=1}^M \int_{t_{j-1}}^{t_j} (T(\mu_i, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) - \beta_i) \left(\int_0^L \psi(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) dx \right) dt + \right. \right. & \\ \left. \left. + 2\sigma(\alpha_i - \tilde{\alpha}_i) \right\} \rho_{\Gamma}(\gamma) d\gamma \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi, \quad t_{j-1} \leq t \leq t_j, & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{grad}_{\beta_i} J(\mathbf{P}) = \\
(3.13) \quad & = \int_{\Phi} \left[\int_{\Gamma} \left\{ \lambda \mu_i \int_0^L \psi(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) dx + 2\sigma(\beta_i - \tilde{\beta})_i \right\} \rho_{\Gamma}(\gamma) d\gamma \right] \rho_{\Phi}(\varphi) d\varphi,
\end{aligned}$$

где $i = 1, \dots, N$.

Функция $\psi(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma)$ при заданных значениях $\mathbf{P}$, φ , γ является решением следующей начально-краевой задачи:

$$(3.14) \quad \psi_t(x, t) + \vartheta \psi_x(x, t) = \lambda \psi(x, t), \quad t_{j-1} \leq t \leq t_j, \quad j = 1, \dots, M,$$

$$(3.15) \quad \psi(x, t_f) = 0, \quad x \in [0, L],$$

$$(3.16) \quad \psi(L, t) = -\frac{2}{\vartheta}(T(L, t) - V), \quad t \in (t_M - \tau, t_M],$$

$$(3.17) \quad \psi(L, t) = -\frac{\lambda}{\vartheta}(1 - \gamma)\psi(0, t + \tau) - \frac{2}{a}(T(L, t) - V), \quad t \in (t_b, t_M - \tau],$$

$$(3.18) \quad \psi(L, t) = -\frac{\lambda}{\vartheta}(1 - \gamma)\psi(0, t + \tau), \quad t \in (0, t_k],$$

в точках μ_i , $i = 1, 2, \dots, N$, при $t_{j-1} \leq t \leq t_j$, $j = 1, \dots, M$, удовлетворяющей условиям:

$$(3.19) \quad \psi(\mu_i^-, t) = \psi(\mu_i^+, t) + \frac{\lambda}{\vartheta} \alpha_i \int_0^L \psi(x, t) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

а в моменты времени t_j , $j = 1, \dots, M$, удовлетворяющей условиям:

$$\begin{aligned}
(3.20) \quad & \psi(x, t_j^-) = \psi(x, t_j^+) + \frac{\lambda}{\vartheta} \sum_{i=1}^N \alpha_i \delta(x - \mu_i) \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} \psi(x, t) dx dt, \\
& x \in [0, L], \quad j = 1, 2, \dots, M.
\end{aligned}$$

Сформулируем необходимые условия оптимальности в вариационной форме [25] относительно параметров обратной связи как для непрерывного, так и дискретного случая контроля, учитывая, как было указано в п. 2, возможность невыпуклости функционала (2.15).

Теорема 3. Пусть $3N$ -мерный вектор параметров обратной связи $\mathbf{P}^* = (\mu^*, \alpha^*, \beta^*)$, удовлетворяющий условиям (2.9), (2.16), (2.17), доставляет локальный минимум функционалу (2.15). Тогда для произвольного вектора $\mathbf{P} = (\mu, \alpha, \beta) \in R^{3N}$, удовлетворяющего условиям (2.9), (2.16), (2.17),

выполняются неравенства:

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial J(\mathbf{P}^*)}{\partial \mu}, \mu^* - \mu \right\rangle &\leq 0, \\ \left\langle \frac{\partial J(\mathbf{P}^*)}{\partial \alpha}, \alpha^* - \alpha \right\rangle &\leq 0, \\ \left\langle \frac{\partial J(\mathbf{P}^*)}{\partial \beta}, \beta^* - \beta \right\rangle &\leq 0.\end{aligned}$$

Здесь знак $\langle, \rangle$ означает скалярное произведение в N мерном пространстве.

4. Схема численного решения задачи синтеза и результаты компьютерных экспериментов

Как показано выше, определение оптимальных значений параметров как непрерывной (2.7), так и дискретной (2.8) обратной связи приводит к решению задач параметрического оптимального управления. Для этого предлагается использовать методы оптимизации первого порядка [25, 26]. Учитывая линейность ограничений (2.16), (2.17) на оптимизируемые параметры и приведенные в теоремах 1 и 2 формулы для градиентов функционалов, эффективно использовать метод проекции градиента

$$(4.1) \quad \mathbf{P}^{\gamma+1} = \text{Pr}[\mathbf{P}^{\gamma} - \eta_{\gamma} \text{grad } J(\mathbf{P}^{\gamma})].$$

Здесь $\text{Pr}[\cdot]$ – оператор проектирования на ограничения (2.16), (2.17), который, учитывая их линейность, имеет конструктивный характер [24, 25]. Величина шага η_{γ} может определяться каким-либо методом из следующей одномерной минимизации:

$$\eta_{\gamma} = \arg \min_{\eta \geq 0} J(\mathbf{P}^{\gamma} - \eta \text{grad } J(\mathbf{P}^{\gamma})).$$

Для учета запаздывания в краевых условиях как (2.3) для основной краевой задачи, так и условий (3.7) для сопряженной краевой задачи используется известный метод шагов с естественной величиной шага τ [27]. Он заключается в том, что временной интервал $[0; t_f]$ разбивается на интервалы длиной τ : $[t_s, t_{s+1}]$, $\tau = t_{s+1} - t_s$, $s = 1, \dots, m$, $m = \lfloor t_f/\tau \rfloor$, $t_0 = 0$, $t_m = t_f$ ($[a]$ – целая часть числа a , если t_f/τ не является целым, то $t_m = \lfloor t_f/\tau \rfloor + 1$). Далее начально-краевая задача решается последовательно от $s = 0$ до $s = m$, а сопряженная задача (3.4)–(3.9) решается в обратном порядке от $s = m$ до $s = 0$. В этом случае краевые условия при решении соответствующей начально-краевой задачи в каждом подынтервале запаздывание содержать не будут.

Другой спецификой задачи является нагруженность дифференциального уравнения (2.12). Подобные нагруженные задачи для различных типов дифференциальных уравнений исследованы в [6, 8]. Для численного их решения

в [8] были предложены методы, основанные на использовании методов сеток и специального представления для решения полученных редуцированных конечно-разностных краевых задач. Применение этого подхода для рассматриваемых задач не представляет сложности.

Для выбора параметров регуляризации ε , $\tilde{\mathbf{P}}$ в функционале (2.15) и проведения самой регуляризации задачи используются алгоритмы, предложенные в [25, 26].

Решение начально-краевых задач проводилось с применением неявной схемы метода сеток, а для выбора сеточных шагов h_x по x и h_t по времени проводились численные эксперименты.

5. Оптимизация числа точек замеров

Может оказаться, что количество точек замера состояния управляемого процесса не задано и требуется оптимизировать их число и места их размещения. В связи с этим рассмотрим следующий подход к оптимальному выбору числа точек замеров. Очевидно, что оптимальное число наблюдаемых точек в какой-то степени должно удовлетворять условию возможной минимальности их числа.

Обозначим через $J_N^* = J^*(\mathbf{P}^N; N)$ минимальное значение функционала задачи (2.3), (2.4)–(2.15) при заданном числе N точек наблюдения, $\mathbf{P}^N$ — оптимальные значения параметров синтезированного управления с обратной связью. Ясно, что $J_N^* = J^*(\mathbf{P}^N; N)$ как сложная функция аргумента N является невозрастающей, т.е. в общем случае имеет место неравенство

$$(5.1) \quad J^*(\mathbf{P}^*; \cdot) \leq J^*(\mathbf{P}^{N_1}; N_1) \leq J^*(\mathbf{P}^{N_2}; N_2), \quad N_2 < N_1.$$

Здесь $J_N^* = J^*(\mathbf{P}^N; N)$ — оптимальное значение функционала исходной задачи (2.1)–(2.6) при числе точек наблюдений, равном N ; $J^* = J^*(\mathbf{P}^*; \cdot)$ — оптимальное значение функционала задачи с обратной связью, распределенной по всему стержню, что соответствует замерам текущего состояния «почти» во всех точках стержня, т.е.

$$J^*(\mathbf{P}^*; \cdot) = \lim_{N \rightarrow \infty} J^*(\mathbf{P}^N; N).$$

Из (5.1) следует, что при увеличении числа наблюдаемых точек оптимальные значения целевого функционала могут лишь уменьшаться и приближаться сколь угодно близко к J^* (рис. 2). Следовательно, для произвольно заданного $\delta > 0$ можно определить число точек замера N_δ , при котором будет выполняться

$$J^*(\mathbf{P}^N; N) \leq J^* + \delta, \quad \text{при } N > N_\delta.$$

Для некоторых задач может оказаться, что существует определенное конечное значение N^* , для которого имеет место:

$$J^*(\mathbf{P}^N; N) = J^*, \quad \text{при } N > N^*.$$

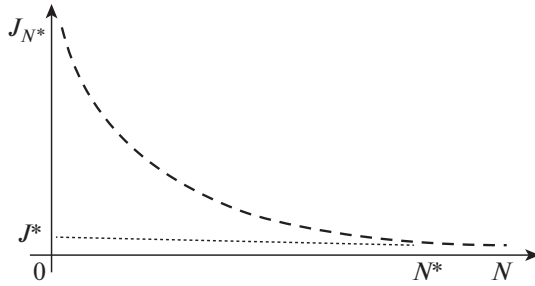


Рис. 2. Зависимость оптимального значения целевого функционала от числа замеров.

В качестве оптимального числа наблюдаемых точек предлагается принять такое минимальное значение N^* , при котором впервые выполняется одно из следующих неравенств:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \Delta J^*(\mathbf{P}^{N^*}; N^*) &= \left| J^*(\mathbf{P}^{N^*+1}; N^* + 1) - J^*(\mathbf{P}^{N^*}; N^*) \right| \leq \delta, \\ \Delta J^*(\mathbf{P}^{N^*}; N^*) / J^*(\mathbf{P}^{N^*}; N^*) &\leq \delta. \end{aligned}$$

Здесь δ — заданное положительное число, определяемое требуемой точностью решения задачи оптимизации числа наблюдаемых точек.

По результатам решения задачи синтеза параметров управления нагревом стержня с заданным числом N наблюдаемых точек можно уменьшить их число N , если для полученного оптимального вектора μ^N для расположения каких-либо двух соседних точек наблюдения выполнилось условие

$$(5.3) \quad |\mu_{j+1}^N - \mu_j^N| \leq \delta_1, \quad j = 1, 2, \dots, N-1,$$

где $\delta_1 > 0$ — заданное достаточно малое число. Выполнение условия (3.2) позволяет оставить одну из двух соседних точек замера, а следовательно, уменьшить на единицу число точек замера. Ясно, что уменьшение числа точек замера приводит как к увеличению надежности системы управления, так и уменьшению затрат на ее создание и эксплуатацию.

6. Результаты численных экспериментов

Приведем результаты компьютерных экспериментов, полученные при следующих значениях данных, участвующих в исходной задаче (2.1)–(2.6).

Задача решена при следующих значениях данных, участвующих в ее постановке: $L = 1$; $\vartheta = 1$; $\lambda = 0,1$; $\tau = 0,2$, $t_f = 5$, $V = 70$, $\Phi = [0, 0,2]$, $\underline{q} = 55$; $\bar{q} = 75$; $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = 8$, $\underline{\alpha}_1 = \underline{\alpha}_2 = 1$, $\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = 75$, $\underline{\beta}_1 = \underline{\beta}_2 = 57$. Функция плотности $\rho_\Gamma(\gamma)$ в расчетах была принята равномерно распределенной на $[0, 0,2]$, а аппроксимация интеграла по Γ осуществлялась методом прямоугольников с шагом 0,05.

Таблица 1. Начальные значения оптимизируемых параметров μ, α, β и соответствующие значения функционала

№	μ_1^0	μ_2^0	α_1^0	α_2^0	β_1^0	β_2^0	$J(\mathbf{P}^0)$
1	0,1	0,8	4	6	61	63	363,210004
2	0,2	0,9	3	5	65	60	357,150011
3	0,4	0,8	1	8	62	63	257,310003
4	0,5	0,7	5	2	63	66	165,150016
5	0,2	0,7	6	4	66	62	205,190007

Таблица 2. Полученные значения параметров и функционала

№	$\mu_1^{(6)}$	$\mu_2^{(6)}$	$\alpha_1^{(6)}$	$\alpha_2^{(6)}$	$\beta_1^{(6)}$	$\beta_2^{(6)}$	$J(\mathbf{P}^{(6)})$
1	0,2994	0,5994	5,9956	3,9952	66,9945	68,9949	0,3422
2	0,3000	0,6000	5,9977	3,9983	66,9978	68,9954	0,3259
3	0,2971	0,5971	5,9962	3,9988	66,9951	68,9948	0,3538
4	0,3000	0,6000	5,9978	3,9971	66,9991	68,9975	0,3145
5	0,3000	0,6000	5,9991	3,9961	66,9964	68,9973	0,3062

Отметим, что значения $\alpha_i, \bar{\alpha}_i, i = 1, 2$ были подобраны с использованием результатов проведенных пробных расчетов, при которых требовалось выполнение технологического условия (2.2) при заданных $q, \bar{q}$.

Численные эксперименты выполнены при разных начальных значениях параметров $(\mathbf{P}^0)^j = (\alpha_1^0, \alpha_2^0, \beta_1^0, \beta_2^0, \mu_1^0, \mu_2^0)^j, j = 1, 2, \dots, 5$, использованных для итерационной процедуры оптимизации (4.1). В табл. 1 приведены эти значения и соответствующие значения функционала, в этих точках.

В табл. 2 приведены значения параметров $(\mathbf{P}^{(6)})^j = (\mu_1^{(6)}, \mu_2^{(6)}, \alpha_1^{(6)}, \alpha_2^{(6)}, \beta_1^{(6)}, \beta_2^{(6)})^j$ и функционала $J(\mathbf{P}^{(6)})^j$, полученные на шестой итерации метода проекции градиента из начальных точек $(\mathbf{P}^0)^j, j = 1, 2, \dots, 5$, приведенных в табл. 1.

Как видно из табл. 3, при $N = 6$ и $N = 7$ минимальные значения функционалов удовлетворяют условию (5.2), а при $N = 7$ оптимальные значения второй и третьей компонент вектора μ удовлетворяют условию (5.3) при $\delta = \delta_1 = 0,01$. Значит, можно считать, что оптимальным числом точек замера является $N^* = 6$.

Проведены численные эксперименты, в которых точные значения наблюдаемых состояний процесса в точках замера $T(\mu_1, t), T(\mu_2, t)$ были зашумлены случайными помехами по формуле

$$T(\mu_i, t) = T(\mu_i, t) (1 + \chi(2\theta_i - 1)), \quad i = 1, 2,$$

где θ_i — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$, χ — уровень помех.

В табл. 4 приведены полученные значения функционала и относительные отклонения между получаемой и желаемой температурами на выходе агрега-

Таблица 3. Результаты решения задач при разном числе точек наблюдения

№	$(\mu^0); (\alpha^0); (\beta^0)$	$J(\mathbf{P}^0)$	$(\mu^*); (\alpha^*); (\beta^*)$	$J(\mathbf{P}^*)$
3	(0,1; 0,4; 0,7); (3; 4; 8); (61; 65; 67)	336,46	(0,300; 0,600; 0,899); (5,002; 4,201; 4,002); (66,998; 67,998; 68,998)	0,3456
4	(0,1; 0,5; 0,7; 0,8); (1; 4; 8; 2); (60; 63; 66; 67)	323,64	(0,150; 0,300; 0,600; 0,849); (5,001; 4,102; 4,006; 3,999); (66,996; 67,999; 68,001; 68,999)	0,3549
5	(0,1; 0,2; 0,5; 0,7; 0,8); (3; 5; 7; 8; 3); (61; 63; 64; 66; 67)	368,54	(0,250; 0,300; 0,610; 0,800; 0,896); (5,101; 4,126; 4,106; 4,012; 3,9982); (66,987; 67,979; 68,201; 68,571; 68,989)	0,3436
6	(0,1; 0,2; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8); (3; 5; 6; 7; 8; 3); (58; 61; 64; 65; 66; 68)	408,37	(0,208; 0,305; 0,481; 0,605; 0,805; 0,900); (5,003; 4,086; 4,015; 4,013; 3,906; 3,999); (66,997; 67,999; 68,121; 68,571; 68,989; 68,999)	0,3234
7	(0,1; 0,2; 0,3; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8); (3; 4; 5; 6; 7; 8; 3); (58; 60; 63; 64; 66; 67; 70)	217,23	(0,198; 0,303; 0,307; 0,491; 0,62; 0,791; 0,901); (0,162; 0,202; 0,198; 0,51; 0,303; 0,363; 0,371); (5,003; 4,086; 4,015; 4,013; 3,906; 3,912; 3,998); (66,998; 68,003; 68,323; 68,772; 68,979; 69,002; 69,012)	0,3023

Таблица 4. Значения функционала и относительные отклонения между получаемой и желаемой температурами на выходе агрегата при разных уровнях помех в измерениях

	$\chi = 0,00$	$\chi = 0,01$	$\chi = 0,03$	$\chi = 0,05$
$\max_{t \in [0,1]} T(L,t) - V / V $	0,021941	0,033052	0,038311	0,064574
$J^*(\mathbf{P}^*)$	0,3023	0,3543	0,3762	0,3916

та при уровнях помех, равных 0% (без помех), 1%, 3%, 5%, соответствующих значениям $\chi = 0$ (без помех), 0,01; 0,03; 0,05.

Как видно из табл. 4, управление процессом нагрева теплоносителя в печи нагреваемого аппарата с обратной связью достаточно устойчиво к погрешностям замеров.

7. Заключение

В статье исследуется задача синтеза управления температурой подаваемого пара в нагревательный аппарат для нагрева теплоносителя, циркулирующего в замкнутой системе теплоснабжения. Задача описывается линейным гиперболическим уравнением первого порядка, а краевые условия содержат запаздывание, обусловленное необходимым временем для циркуляции теплоносителя.

Температура пара, подаваемого в аппарат, назначается в зависимости от текущих значений температуры в точках замера. Исходная задача синтеза управления приводится к параметрической задаче оптимального управления относительно нагруженного дифференциального уравнения. Оптимизируемым является конечномерный вектор параметров обратной связи, являющихся коэффициентами в указанной выше зависимости. Получены условия оптимальности параметров обратной связи, содержащие формулы градиента целевого функционала. Приведены численные результаты решения тестовой задачи с применением полученных формул.

Предложенный подход может быть использован в задачах синтеза управления другими системами с распределенными параметрами.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Воспользуемся известной технологией получения формул для приращения функционала за счет приращения оптимизируемых аргументов функционала [25]. При этом линейная часть приращения функционала по каждому из аргументов и будет искомой компонентой градиента функционала по соответствующему аргументу.

Прежде чем приступить к получению формул для компонент градиента функционала, отметим следующее. Учитывая, что начальная температура теплоносителя $\varphi \in \Phi$ и параметр $\gamma \in \Gamma$, определяющий величину потерь тепла, взаимно независимы и они не зависят от самого процесса нагрева теплоносителя в теплообменнике, из (2.11), (2.12) имеем:

$$\begin{aligned} \text{grad } J(\mathbf{P}) &= \text{grad} \int_{\Phi} \int_{\Gamma} I(\mathbf{P}; \varphi, \gamma) \rho_{\Gamma}(\gamma) \rho_{\Phi}(\varphi) d\gamma d\varphi = \\ (\text{П.1}) \quad &= \int_{\Phi} \int_{\Gamma} \text{grad } I(\mathbf{P}; \varphi, \gamma) \rho_{\Gamma}(\gamma) \rho_{\Phi}(\varphi) d\gamma d\varphi, \end{aligned}$$

где использовано обозначение

$$I(\mathbf{P}; \varphi, \gamma) = \int_{t_b}^{t_f} [T(L, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) - V]^2 dt + \varepsilon \|\mathbf{P} - \tilde{\mathbf{P}}\|_{\mathbb{R}^{3N}}.$$

Поэтому получим формулу для $\text{grad } I(\mathbf{P}; \varphi, \gamma)$ при каких-либо допустимых произвольно заданных параметрах обратной связи $\mathbf{P}$, параметре потерь тепла $\gamma \in \Gamma$ и начальном условии $T(x, t) = \varphi$, $t \leq 0$.

Пусть $T(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma)$ есть решение нагруженной начально-краевой задачи (2.12), (2.3), (2.5) при произвольно выбранных векторе оптимизируемых параметров $\mathbf{P} = (\mu, \alpha, \beta)'$; начальном условии $\varphi \in \Phi$ и значении параметра потерь тепла $\gamma \in \Gamma$. Для краткости, где это не вызывает неоднозначность, у решения $T(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma)$ параметры $\mathbf{P}$, φ , γ будем опускать.

Пусть параметры $\mathbf{P} = (\mu, \alpha, \beta)'$ получили допустимое приращение $\Delta\mathbf{P} = (\Delta\mu, \Delta\alpha, \Delta\beta)'$, а $\tilde{T}(x, t) = \tilde{T}(x, t; \tilde{\mathbf{P}}, \varphi, \gamma) = T(x, t) + \Delta T(x, t)$ — решение задачи (2.12), (2.3), (2.5), которое соответствует приращенному вектору аргументов $\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}$.

Подставляя функцию $\tilde{T}(x, t)$ в условия (2.12), (2.3), (2.5), получим следующую начально-краевую задачу с точностью до слагаемых первого порядка малости относительно $\Delta T(x, t)$ -приращения фазовой переменной:

$$(II.2) \quad \Delta T_t(x, t) + \vartheta \Delta T_x(x, t) = \lambda \sum_{i=1}^N \left[\alpha_i \Delta T(\mu_i, t) + \alpha_i T_x(\mu_i, t) \Delta \mu_i + \right. \\ \left. + (T(\mu_i, t) - \beta_i) \Delta \alpha_i - \alpha_i \Delta \beta_i \right] - \lambda \Delta T(x, t), \quad (x, t) \in \Omega,$$

$$(II.3) \quad \Delta T(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l],$$

$$(II.4) \quad \Delta T(0, t) = \begin{cases} 0, & t \leq \tau, \\ (1 - \gamma) \Delta T(L, t - \tau), & t \geq \tau. \end{cases}$$

В получении формулы (II.2) было использовано соотношение:

$$T(\mu_i + \Delta \mu_i, t) = T(\mu_i, t) + T_x(\mu_i, t) \Delta \mu_i + o(|\Delta \mu_i|).$$

Для приращения функционала (2.12) несложно непосредственно получить представление:

$$\Delta I(\mathbf{P}; \varphi, \gamma) = I(\tilde{\mathbf{P}}; \varphi, \gamma) - I(\mathbf{P}; \varphi, \gamma) = I(\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}; \varphi, \gamma) - I(\mathbf{P}; \varphi, \gamma) = \\ = 2 \int_{t_b}^{t_f} [T(L, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma) - V] \Delta T(L, t) dt + 2\sigma \sum_{i=1}^{3N} (\mathbf{P}_i - \tilde{\mathbf{P}}_i) \Delta \mathbf{P}_i. \\ \sum_{i=1}^{3N} (\mathbf{P}_i - \tilde{\mathbf{P}}_i) \Delta \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^{3N} \left[(\mu_i - \tilde{\mu}_i) \Delta \mu_i + (\alpha_i - \tilde{\alpha}_i) \Delta \alpha_i + (\beta_i - \tilde{\beta}_i) \Delta \beta_i \right].$$

Пусть функция $\psi(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma)$ — пока произвольная непрерывная всюду в Ω , кроме точек $x = \mu_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, дифференцируемая по x при $x \in (\mu_i, \mu_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, N$, $\mu_0 = 0$, $\mu_{N+1} = L$, дифференцируемая по t при $t \in (0, T)$. Наличие аргументов $\mathbf{P}$, φ и γ у функции $\psi(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma)$ указывает на то, что она может меняться при изменении вектора параметров обратной связи $\mathbf{P}$, начальной температуры φ и параметра потерь тепла γ . Там, где это возможно, $\mathbf{P}$, φ и γ у функции $\psi(x, t; \mathbf{P}, \varphi, \gamma)$ указываться не будет. Умножим уравнение (II.2) на $\psi(x, t)$ и проинтегрируем его по прямоугольнику Ω .

С учетом принятых предположений и условий (П.3), (П.4) будем иметь:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{t_f} \int_0^L \psi(x, t) \Delta T_t(x, t) dx dt + \vartheta \sum_{i=0}^N \int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} \int_0^{t_f} \psi(x, t) \Delta T_x(x, t) dt dx - \\
 (П.5) \quad & - \lambda \int_0^{t_f} \int_0^L \psi(x, t) \sum_{i=1}^N \left[\alpha_i \Delta T(\mu_i, t) + \alpha_i T_x(\mu_i, t) \Delta \mu_i + \right. \\
 & \left. + (T(\mu_i, t) - \beta_i) \Delta \alpha_i - \alpha_i \Delta \beta_i \right] dx dt + \lambda \int_0^{t_f} \int_0^L \psi(x, t) \Delta T(x, t) dx dt = 0.
 \end{aligned}$$

Используя интегрирование по частям отдельно для первого и второго членов (П.5), учитывая (П.3)–(П.5), имеем:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{t_f} \int_0^L \psi(x, t) \Delta T_t(x, t) dx dt = \int_0^L \psi(x, t_f) \Delta T(x, t_f) dx + \\
 (П.6) \quad & + \int_0^L [\psi(x, t_b^-) - \psi(x, t_b^+)] \Delta T(x, t_b) dx - \int_0^{t_f} \int_0^L \psi_t(x, t) \Delta T(x, t) dx dt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \vartheta \sum_{i=0}^N \int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} \int_0^{t_f} \psi(x, t) \Delta T_x(x, t) dt dx = \vartheta \int_0^{t_f} [\psi(L, t) \Delta T(L, t) - \psi(0, t) \Delta T(0, t)] dt + \\
 & + \vartheta \sum_{i=1}^N \int_0^{t_f} [\psi(\mu_i^-, t) - \psi(\mu_i^+, t)] \Delta T(\mu_i, t) dt - \vartheta \int_0^{t_f} \int_0^L \psi_x(x, t) \Delta T(x, t) dx dt = \\
 (П.7) \quad & = \vartheta \int_0^{t_f} \psi(L, t) \Delta T(L, t) dt - \vartheta(1 - \gamma) \int_{\tau}^{t_f} \psi(0, t) \Delta T(L, t - \tau) dt + \\
 & + a \sum_{i=1}^N \int_0^{t_f} [\psi(\mu_i^-, t) - \psi(\mu_i^+, t)] \Delta T(\mu_i, t) dt - \vartheta \int_0^{t_f} \int_0^L \psi_x(x, t) \Delta T(x, t) dx dt = \\
 & = \vartheta \int_0^{t_f} \psi(L, t) \Delta T(L, t) dt - \vartheta(1 - \gamma) \int_0^{t_f - \tau} \psi(0, t + \tau) \Delta T(L, t) dt + \\
 & + \vartheta \sum_{i=1}^N \int_0^{t_f} [\psi(\mu_i^-, t) - \psi(\mu_i^+, t)] \Delta T(\mu_i, t) dt - \vartheta \int_0^{t_f} \int_0^L \psi_x(x, t) \Delta T(x, t) dx dt.
 \end{aligned}$$

Здесь использовано обозначение

$$\psi(\mu_i^-, t) = \psi(\mu_i - 0, t), \quad \psi(\mu_i^+, t) = \psi(\mu_i + 0, t).$$

Учитывая (П.5)–(П.7), для приращения функционала будем иметь:

$$\begin{aligned}
 \Delta I = & \int_0^L \psi(x, t_f) \Delta T(x, t_f) dx + \int_{t_f - \tau}^{t_f} [\vartheta \psi(L, t) + 2(T(L, t) - V)] \Delta T(L, t) dt + \\
 & + \int_{t_k}^{t_f - \tau} [\vartheta \psi(L, t) + \lambda(1 - \gamma)\psi(0, t + \tau) + 2(T(L, t) - V)] \Delta T(L, t) dt + \\
 & + \int_0^{t_b} [\vartheta \psi(L, t) + \lambda(1 - \gamma)\psi(0, t + \tau)] \Delta T(L, t) dt + \\
 (П.8) \quad & + \int_0^{t_f} \int_0^L [-\psi_t(x, t) - \vartheta \psi_x(x, t) + \lambda \psi(x, t)] \Delta T(x, t) dx dt + \\
 & + a \sum_{i=1}^N \int_0^{t_f} \left[\psi(\mu_i^-, t) - \psi(\mu_i^+, t) - \frac{\lambda}{\vartheta} \alpha_i \int_0^L \psi(x, t) dx \right] \Delta T(\mu_i, t) dt - \\
 & - \lambda \int_0^{t_f} \int_0^L \psi(x, t) \sum_{i=1}^N [\alpha_i T_x(\mu_i, t) \Delta \mu_i + (T(\mu_i, t) - \beta_i) \Delta \alpha_i - \alpha_i \Delta \beta_i] dx dt + \\
 & + 2\sigma \sum_{i=1}^N [(\mu_i - \tilde{\mu}_i) \Delta \xi_i + (\alpha_i - \tilde{\alpha}_i) \Delta \alpha_i + (\beta_i - \tilde{\beta}_i) \Delta \beta_i].
 \end{aligned}$$

В силу произвольности функции $\psi(x, t)$ потребуем, чтобы она почти всюду являлась решением начально-краевой задачи (3.5)–(3.9).

Учитывая, что компоненты градиента функционала определяются линейной частью приращения функционала при приращениях соответствующих аргументов, получим:

$$\begin{aligned}
 (П.9) \quad \text{grad}_{\mu_i} I = & -\lambda \alpha_i \int_0^{t_f} \left(\int_0^L \psi(x, t) dx \right) T_x(\mu_i, t) dt + 2\sigma(\mu_i - \tilde{\mu}_i), \\
 & i = 1, 2, \dots, N,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (П.10) \quad \text{grad}_{\alpha_i} I = & -\lambda \int_0^{t_b} (T(\mu_i, t) - \beta_i) \left(\int_0^L \psi(x, t) dx \right) dt + 2\sigma(\alpha_i - \tilde{\alpha}_i), \\
 & i = 1, 2, \dots, N,
 \end{aligned}$$

$$(П.11) \quad \text{grad}_{\beta_i} I = \lambda \alpha_i \int_0^L \psi(x, t) dx + 2\sigma(\beta_i - \tilde{\beta}_i), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Таким образом, можно считать теорему доказанной.

Для получения сопряженной начально-краевой задачи в эквивалентном (3.5)–(3.9) виде (3.10) и без условий скачка (3.9), пользуясь свойством δ -функции, третье слагаемое из равенства (П.5) приведем к виду:

$$\begin{aligned} & \lambda \int_0^{t_f} \int_0^L \psi(x, t) \sum_{i=1}^N (\alpha_i \Delta T(\mu_i, t) + \alpha_i T_x(\mu_i, t) \Delta \mu_i + \\ & \quad + (T(\mu_i, t) - \beta_i) \Delta \alpha_i - \alpha_i \Delta \beta_i) dx dt = \\ & = \lambda \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_0^{t_f} \int_0^L \int_0^L \psi(\zeta, t) \delta(\zeta - \mu_i) \Delta T(\zeta, t) d\zeta dx dt + \\ & + \lambda \int_0^{t_f} \int_0^L \psi(x, t) \sum_{i=1}^N (\alpha_i T_x(\mu_i, t) \Delta \mu_i + (T(\mu_i, t) - \beta_i) \Delta \alpha_i - \alpha_i \Delta \beta_i) dx dt. \end{aligned}$$

Сделав в первом тройном интеграле смену порядка интегрирования по ζ и x и снова переименовав переменные интегрирования по ζ и x между собой, получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \int_0^L \int_0^L \psi(\zeta, t) \delta(\zeta - \mu_i) \Delta T(\zeta, t) d\zeta dx dt = \\ (П.12) \quad & = \int_0^{t_f} \int_0^L \left(\int_0^L \psi(\zeta, t) d\zeta \right) \delta(x - \mu_i) \Delta T(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Учитывая (П.12) в формуле (П.5), в которой, сделав перегруппировку слагаемых, вместо (3.5), (3.8) получим интегро-дифференциальное уравнение (3.12) для сопряженной задачи.

Автор выражает искреннюю благодарность чл.-кор. НАН Азербайджана, профессору Айда-заде К.Р. за ценные советы и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ray W.H. Advanced Process Control. McGraw-Hill Book Company. 1981.
2. Кулиев С.З. Синтез зональных управлений для одной задачи нагрева с запаздыванием в неразделенных условиях // Кибернетика и системный анализ. 2018. Т. 54. № 1. С. 124–136.

Guliyev S.Z. Synthesis of Zonal Controls for a Problem of Heating with Delay Under Nonseparated Boundary Conditions // Cybern. Syst. Anal. 2018. V. 54. No. 1. P. 110–121.

3. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Об одном подходе к синтезу управления процессами с распределенными параметрами // *АиТ.* 2012. № 9. С. 3–19.
Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On an Approach to Designing Control of the Distributed-Parameter Processes // *Autom. Remote Control.* 2012. V. 73. No. 2. P. 1443–1455.
4. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Оптимизация размещения точек контроля при синтезе управления процессом нагрева // *АиТ.* 2017. № 9. С. 49–66.
Aida-zade K.R., Abdullayev V.M. Optimizing placement of the control points at synthesis of the heating process control // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 9. P. 1585–1599.
5. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Управление процессом нагрева стержня с использованием текущей и предыдущей по времени обратной связи // *АиТ.* 2022. № 1. С. 130–149.
Aida-zade K.R., Abdullayev V.M. Controlling the Heating of a Rod Using the Current and Preceding Time Feedback // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 1. P. 106–122.
6. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012, 232 с.
7. *Дженалиев М.Т.* Оптимальное управление линейными нагруженными параболическими уравнениями // *Дифференц. уравнения.* 1989. Т. 25. № 4. С. 641–651.
8. *Abdullayev V.M., Aida-zade K.R.* Finite-Difference Methods for Solving Loaded Parabolic Equation // *Comput. Math. Math. Phys.* 2016. V. 56. No. 1. P. 93–105.
9. *Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.* Подход к численному решению задач оптимального управления нагруженными дифференциальными уравнениями с нелокальными условиями // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2019. Т. 59. № 5. С. 739–751.
Abdullayev V.M., Aida-zade K.R. Approach to the Numerical Solution of Optimal Control Problems for Loaded Differential Equations with Nonlocal Conditions // *Comput. Math. Math. Phys.* 2019. V. 59. No. 5. P. 696–707.
10. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1984.
11. *Егоров А.И.* Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004.
12. *Shang H., Forbes J. F., Guay M.* Feedback Control of Hyperbolic PDE Systems // *IFAC Proceedings Volumes.* 2000. V. 33. No. 10. P. 533–538.
13. *Coron J.M., Wang Zh.* Output Feedback Stabilization for a Scalar Conservation Law with a Nonlocal Velocity // *SIAM J. Math. Anal.*, 2013. V. 45. No. 5. P. 2646–2665.
14. *Afifi L., Lasri K., Joundi M., Amimi N.* Feedback controls for exact remediability in disturbed dynamical systems // *IMA Journal of Mathematical Control and Information.* 2018. V. 35. No. 2. P. 411–425.
15. *Aida-zade K.R., Hashimov V.A., Bagirov A.H.* On a problem of synthesis of control of power of the moving sources on heating of a rod // *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, NAS of Azerbaijan.* 2021. V. 47. No. 1. P. 183–196.
16. *Айда-заде К.Р., Гашимов В.А.* Оптимизация размещения точек контроля в одной задаче синтеза граничного управления процессом нагрева стержня // *АиТ.* 2018. № 9. С. 122–142.
Aida-zade K.R., Hashimov V.A. Optimization of Measurement Points Positioning in a Border Control Synthesis Problem for the Process of Heating a Rod // *Autom. Remote Control.* 2018. V. 79. No. 9. P. 1643–1660.

17. *Abdullayev V.M., Aida-zade K.R.* Optimization of Loading Places and Load Response Functions for Stationary Systems // Comput. Math. Math. Phys. 2017. V. 57. No. 4. P. 634–644.
18. *Mitkowski W., Bauer W., Zagórowska M.* Discrete-time feedback stabilization // Archives of Control Sciences. 2017. V. 27. No. 2. P. 309–322.
19. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
20. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019.
21. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
22. *Ахметзянов А.В.* Вычислительные аспекты управления процессами фильтрации жидкостей и газов в пористых средах // АиТ. 2008. № 1. С. 3–15.
23. *Ахметзянов А.В., Кулибанов В.Н.* Проблемы оптимального управления фильтрацией грунтовых вод // АиТ. 1999. № 8. С. 51–60.
24. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
25. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2008.
26. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Изд-во Ленанд, 2014.
27. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 11.11.2022

После доработки 17.01.2023

Принята к публикации 26.01.2023

Управление в технических системах

© 2023 г. А.И. МАТАСОВ, д-р физ.-мат. наук (alexander.matasov@gmail.com),
Х. ИНЬ (yhl2671818702@gmail.com)
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

КАЛИБРОВКА ПРОСТРАНСТВЕННОГО СЕНСОРА ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА ЕГО ОРИЕНТАЦИИ

Пространственные сенсоры обычно нуждаются в калибровке. В некоторых случаях ошибки масштабных коэффициентов сенсора зависят от знаков проекций векторного входного сигнала на оси чувствительности сенсора. Для устранения неоднозначности в определении ошибок масштабных коэффициентов можно ограничить угловые положения сенсора в процессе калибровки так, чтобы соответствующие проекции пробного входного сигнала заведомо имели определенный знак. В работе получено аналитическое решение для задачи оптимальной калибровки пространственного сенсора при ограничении на его допустимые угловые ориентации.

Ключевые слова: пространственный сенсор, калибровка, гарантирующий подход к оцениванию.

DOI: 10.31857/S0005231023060089, **EDN:** CSOYUD

1. Введение

Рассмотрим пространственный сенсор, предназначенный для измерения какой-либо векторной физической величины. Такой величиной, например, может быть удельная сила, действующая на чувствительную массу блока ньютометров, или напряженность электрического (магнитного) поля. Свяжем с корпусом пространственного сенсора так называемый приборный (правый ортогональный) трехгранник с началом в условном центре чувствительного элемента пространственного сенсора. Пусть пространственный сенсор состоит из трех одномерных датчиков, оси чувствительности которых в идеале перпендикулярны друг другу и направлены по осям приборного трехгранника.

Положим, что модель показаний пространственного сенсора имеет вид

$$(1) \quad f' = (I_3 + \Gamma)f_z + \Delta f^0 + \varrho'',$$

где $f' \in \mathbb{R}^3$ — показания сенсора; $I_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ — единичная матрица; $\Gamma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ — матрица погрешностей сенсора (диагональные элементы которой характеризуют ошибки масштабных коэффициентов, а внедиагональные — малые угловые отклонения осей чувствительности одномерных датчиков от осей приборного трехгранника); $f_z \in \mathbb{R}^3$ — вектор соответствующей физической величины

в проекциях на оси приборного трехгранника; $\Delta f^0 \in \mathbb{R}^3$ — систематические смещения показаний сенсора; $\varrho'' \in \mathbb{R}^3$ — флуктуационная составляющая ошибок измерений.

Вектор f_z является “полезным” сигналом, который надо извлечь из тройки f' измерений его компонент. Параметрические ошибки Γ и Δf^0 препятствуют этому. Определение величин Γ и Δf^0 составляет цель калибровки. После калибровки, т.е. после решения соответствующей задачи оценивания параметров, влияние указанных величин можно компенсировать очевидным образом.

В процессе калибровки пространственный сенсор при помощи поворотного стенда устанавливают в различные угловые положения относительно постоянного векторного пробного сигнала, а затем составляют систему уравнений для нахождения Γ и Δf^0 . Одной из основных проблем является определение набора этих угловых положений. Проведение калибровочных экспериментов — технологически не простая процедура, поэтому количество таких положений нужно сократить.

Исходные показания сенсора содержат существенную высокочастотную ошибку. Поэтому рассматривается набор серий показаний сенсора, в каждой из которых его угловое положение не меняется, а показания осредняются. Это позволяет существенно уменьшить флуктуационную составляющую ошибок измерений. Здесь предполагается, что соотношение (1) описывает уже осредненные измерения.

Например, при калибровке блока ньютонометров [1] упомянутая физическая величина является разностью между удельной силой, действующей на чувствительную массу блока со стороны подвеса, и удельной силой тяготения; если блок неподвижен относительно Земли, что имеет место при статических испытаниях, то рассматриваемая величина равна ускорению силы тяжести в точке проведения экспериментов с обратным знаком. Тогда традиционная модель показаний блока ньютонометров [2] определяется (1). Проблема калибровки сенсоров инерциальных навигационных систем особенно актуальна (см., например, [3–8]).

В некоторых случаях модели показаний сенсора являются неоднородными: ошибки масштабных коэффициентов сенсора зависят от знаков проекций векторного входного сигнала на оси чувствительности сенсора [7]. Для устранения неоднозначности в определении ошибок масштабных коэффициентов можно ограничить угловые положения сенсора в процессе калибровки так, чтобы соответствующие проекции пробного входного сигнала имели определенный знак. Это обстоятельство заметно усложняет анализ и решение задачи оценивания, возникающей при математической формализации проблемы калибровки.

Природа флуктуационной составляющей ошибок измерений (после естественного осреднения) в электромеханических приборах довольно разнообразна и с трудом формализуется. При проведении серии калибровочных экс-

периментов традиционно используемая модель белого шума, как правило, не имеет серьезного обоснования. Более того, даже предположение о статистической устойчивости значений компонент погрешностей (и тем самым наличие статистических характеристик) нередко сомнительно. Со значительно большей достоверностью можно считать, что компоненты вектора флуктуационной составляющей ошибок измерений ограничены известной величиной. Спектр же этих компонент после осреднения обычно не имеет внятной модели. Поэтому будем считать, что указанные компоненты лишь ограничены по абсолютной величине известной константой (а внутри этих ограничений могут принимать любые значения). Такое предположение приводит к использованию гарантирующего подхода для решения соответствующей задачи оценивания.

Гарантирующий подход к оцениванию в так называемой априорной постановке впервые был сформулирован в классических исследованиях [9–11] (см. также [12]). Он был развит в [13, 14] в связи с решением задач космической баллистики (см. также [15, 16]). Гарантирующий подход при незначительной модификации является удобным инструментом для формализации задачи калибровки пространственного сенсора. В случае блока ньютонометров без асимметрии ошибок масштабных коэффициентов применение гарантирующего подхода осуществлено в [17–19].

Ниже для калибровки блока ньютонометров при грубой информации об угловых положениях сенда будет применяться метод скаляризации, который позволяет радикально сократить нежелательное влияние ошибок в знании угловой ориентации сенда. Впервые в доступной литературе этот метод был предложен в [20] (см. также [18, 21–23]).

В данном исследовании в рамках гарантирующего подхода будет получено аналитическое решение задачи оптимальной калибровки пространственного сенсора при существенном ограничении его допустимых угловых положений.

2. Сведение задачи калибровки к проблеме моментов

2.1. Применение метода скаляризации

Нормализуем соотношение (1), разделив его на модуль вектора пробного сигнала g , который для простоты будет считаться точно известным. (Неточность в его знании, конечно, можно учесть, но это не повлияет ни на какие принципиальные выводы.) Тогда исходная модель показаний сенсора (1) представится в виде

$$(2) \quad \frac{f'}{g} = (I_3 + \Gamma) n_z + \varepsilon + \varrho', \quad \|n_z\| = 1, \\ n_z = \frac{f_z}{g}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta f^0}{g}, \quad \varrho' = \frac{\varrho''}{g}.$$

Приближенное значение единичного вектора n_z (постоянного относительно основания сенда) определяется по измерениям углов поворота сенда. Обо-

значим через $n \in \mathbb{R}^3$ это приближенное значение n_z ; тогда n точно известно и принадлежит единичной сфере. Погрешность в знании ориентации стенда (с точностью до малых второго порядка) опишем кососимметрической матрицей $\hat{\alpha}$ с неизвестными малыми элементами:

$$n_z = (I_3 + \hat{\alpha}) n, \quad \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad |\alpha_i| \ll 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Положим, что каждая компонента ошибок измерений показаний ньютонометров $\varrho' = \text{col}(\varrho'_1, \varrho'_2, \varrho'_3)$ ограничена известной величиной σ . Вводя новую точно известную величину $z'(n) = g^{-1}f'(n) - n \in \mathbb{R}^3$, соотношение (2) с точностью до малых второго порядка можно переписать в виде

$$(3) \quad z'(n) = (\Gamma + \hat{\alpha}(n))n + \varepsilon + \varrho'(n), \quad |\varrho'_i(n)| \leq \sigma, \quad i = 1, 2, 3.$$

Существенным отличием постановки задачи калибровки в данной работе от постановок, рассмотренных ранее, является дополнительное важное ограничение на допустимые ориентации пространственного сенсора. Для того, чтобы устранить неоднозначность параметров, описывающих ошибки масштабных коэффициентов, будем считать, что компоненты вектора ориентации $n = \text{col}(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^3$ неотрицательны (другие варианты распределений знаков могут быть рассмотрены аналогично). Иными словами, положим, что

$$n \in S^+ = S \cap \mathbb{R}_+^3,$$

где S — единичная сфера, а $\mathbb{R}_+^3$ — неотрицательный октант.

При калибровке на относительно грубых стендах неизвестный член $\hat{\alpha}(n)n$ (разный для каждого очередного углового положения) оказывает существенное мешающее влияние на точность оценивания — им нельзя пренебречь. Метод скаляризации состоит в том, что вместо трехмерных измерений (3) рассматривается одномерное скалярное измерение

$$(4) \quad \begin{aligned} z(n) &= n^\top z'(n) = n^\top (\Gamma + \hat{\alpha}(n))n + n^\top \varepsilon + n^\top \varrho(n) = \\ &= n^\top \Gamma n + n^\top \varepsilon + n^\top \varrho'(n), \quad n \in S^+. \end{aligned}$$

При этом волевым образом устраняется влияние неизвестной помехи $\alpha(n)$, так как, очевидно, $n^\top \hat{\alpha}(n)n = 0$ [17, 18]. Новую помеху измерений $\varrho(n) = n^\top \varrho'(n) \in \mathbb{R}^1$, очевидно, можно оценить неравенством (с возможным завышением)

$$(5) \quad |\varrho(n)| \leq \sqrt{3} \sigma, \quad n \in S^+.$$

Случай более точной оценки для новой помехи измерений $\varrho(n)$ будет исследован отдельно в разделе 5.

Из формулы (4) следует, что внедиагональные элементы матрицы Γ входят в нее не по отдельности, а только в виде соответствующих сумм, характеризующих взаимные перекосы осей чувствительности. Таким образом, задача калибровки принимает вид задачи оценивания, в которой по континууму всех измерений $z(n)$, определяемых соотношением

$$(6) \quad z(n) = H^T(n)q + \varrho(n), \quad n \in S^+,$$

где

$$H(n) = \text{col}(n_1^2, n_2^2, n_3^2, n_1n_2, n_1n_3, n_2n_3, n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{R}^9,$$

требуется оценить элементы вектора неизвестных параметров

$$(7) \quad q = \text{col}(\Gamma_{11}, \Gamma_{22}, \Gamma_{33}, \Gamma_{12} + \Gamma_{21}, \Gamma_{13} + \Gamma_{31}, \Gamma_{23} + \Gamma_{32}, \varepsilon) \in \mathbb{R}^9$$

на фоне помехи, ограниченной неравенством (5). Иногда матрица Γ исходно задается нижнетреугольной или симметричной. Тогда неоднозначность в нахождении Γ автоматически устраняется.

Замечание 1. Строго говоря, для обеспечения неотрицательности проекций входного сигнала на оси приборного трехгранника, нужно потребовать, чтобы компоненты вектора n_z , а не n были неотрицательные. Однако для простоты эта деталь при решении сформулированной ниже оптимальной задачи оценивания будет игнорироваться. А соответствующие незначительные (поскольку $n_z \approx n$) коррекции оптимального плана можно произвести после решения соответствующей задачи оценивания.

2.2. Метод гарантирующего оценивания

Рассмотрим скалярные измерения (6), (5), в которых помеха $\varrho(n)$ является всюду определенной на S^+ интегрируемой по Лебегу функцией. Поставим задачу оценивания скалярной величины $l = a^T q \in \mathbb{R}^1$, где q определяется (7), для различных заданных векторов $a \in \mathbb{R}^9$. В рассматриваемой задаче $a = e^{(\nu)}$, где $e^{(\nu)}$ — один из единичных координатных ортов из $\mathbb{R}^9$ с единицей на ν -м месте, (что соответствует оценке каждой компоненты q [18]). Введем линейные оценщики для $l = a^T q$ вида

$$(8) \quad \tilde{l} = \int_{S^+} \Phi_0(n) z(n) dS + \sum_{k=1}^M \Phi^{[k]} z(n^{[k]}),$$

где интеграл берется по поверхности S^+ , $\Phi_0(n): S^+ \rightarrow \mathbb{R}^1$ — некоторая весовая функция, интегрируемая по Лебегу, а $\Phi^{[k]} \in \mathbb{R}^1$ и $n^{[k]} \in S^+$, $k = 1, \dots, M$ (M произвольно) — некоторые числа и векторы ориентации. В отличие от традиционной формы оценщика этот оценщик содержит не только интегральный член, но и слагаемые, зависящие от измерений при некоторых отдельных ориентациях.

Для простоты будем писать

$$\tilde{l} = \int_{S^+} \Phi(n) z(n) dS, \quad \Phi(n) = \Phi_0(n) + \sum_{k=1}^M \Phi^{[k]} \delta(n - n^{[k]}),$$

где формально положим $\int_{S^+} f(n) \delta(n - n^{[k]}) dS = f(n^{[k]})$, т.е., что $\delta(n - n^{[k]})$ есть дельта-функция Дирака. Обозначим множество всех таких функций $\Phi(n)$ через $\mathcal{F}$.

Величина

$$(9) \quad I(\Phi(n)) = \sup_{q \in \mathbb{R}^9, |\varrho(n)| \leq \sqrt{3}\sigma} |\tilde{l} - l|$$

называется гарантированной ошибкой оценки.

При выбранном оценителе это — максимальное значение ошибки оценки при всевозможных значениях неопределенных факторов. Будем искать весовую функцию $\Phi(n)$, минимизирующую гарантированную ошибку оценки, т.е. искать ее из решения следующей минимаксной задачи:

$$(10) \quad \inf_{\Phi(n) \in \mathcal{F}} \sup_{q \in \mathbb{R}^9, |\varrho| \leq \sqrt{3}\sigma} |\tilde{l} - l|.$$

Такая задача называется задачей оптимального гарантирующего оценивания [9–11]. Таким образом, для решения задачи калибровки нужно решить 9 отдельных задач для всех указанных выше a . Интересно отметить, что привлечение нелинейных оценителей в дополнение к линейным оценителям вида (8) не приводит к уменьшению гарантированной ошибки оценки [16, 24–27], т.е. можно ограничиться линейными оценителями.

После несложных вычислений нетрудно получить, что

$$I(\Phi(n)) = \begin{cases} \sqrt{3}\sigma \int_{S^+} |\Phi(n)| dS, & \text{если } \int_{S^+} H(n)\Phi(n) dS = a \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поэтому решение задачи оптимальной калибровки сводится к решению проблемы моментов (далее опускаем постоянный множитель $\sqrt{3}\sigma$)

$$(11) \quad I_0 = \inf_{\Phi \in \mathcal{F}} \int_{S^+} |\Phi(n)| dS$$

при условии несмещенности

$$(12) \quad \int_{S^+} H(n)\Phi(n) dS = a, \quad H(n) \in \mathbb{R}^m \quad (m = 9).$$

Основное содержание работы состоит в получении аналитического (т.е. в явном виде) решения проблемы моментов (11), (12) для $m = 9$ единичных векторов вида $a = a_{(\nu)} = \text{col}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где единица стоит на ν -м месте, $\nu = 1, \dots, 9$.

3. Решение проблемы моментов

3.1. Вспомогательные сведения

Для решения проблемы моментов (11), (12) удобно использовать двойственную задачу [28–30], имеющую вид

$$(13) \quad I^0 = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} a^\top \lambda \quad (m = 9)$$

при условии

$$(14) \quad |H^\top(n)\lambda| \leq 1, \quad n \in S^+.$$

При рассмотрении двойственной задачи исходную проблему моментов называют прямой задачей.

Теорема 1. Пусть функция $H(n) \in \mathbb{R}^m$ непрерывна на S^+ . Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Для прямой задачи (11), (12) существует, по крайней мере, одно импульсное решение с не более чем m импульсами

$$(15) \quad \Phi^0(n) = \sum_{i=1}^m \Phi^{(i)} \delta(n - n^{(i)}).$$

2. Решение двойственной задачи (13), (14) λ^0 существует.

3. Значения прямой и двойственной задачи равны: $I_0 = I^0$.

4. Если оптимальный оценщик импульсный и задается формулой (15) со всеми отличными от нуля коэффициентами, то

$$(16) \quad |H^\top(n^{(i)})\lambda^0| = 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad \text{причем} \quad \text{sign } \Phi^{(i)} = \text{sign} \left(H^\top(n^{(i)})\lambda^0 \right).$$

5. На множестве векторов ориентации n таких, что $|H^\top(n)\lambda^0| < 1$, оптимальный оценщик равен нулю.

6. Если $\Phi(n)$ — допустимый элемент прямой задачи, а λ — допустимый элемент двойственной задачи и значения функционалов прямой и двойственной задачи на этих элементах равны, то оба они являются решениями соответствующих задач.

Эти утверждения являются следствиями общих теорем выпуклого анализа. Их доказательства для случая, когда n исчерпывает всю сферу S , содержатся в [18]. Для $n \in S^+$ доказательства аналогичны.

Рассмотрим набор из девяти векторов ориентации

$$(17) \quad \begin{aligned} n^{(1)} &= \text{col}(1, 0, 0), \quad n^{(2)} = \text{col}(0, 1, 0), \quad n^{(3)} = \text{col}(0, 0, 1), \\ n^{(4)} &= \text{col}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \quad n^{(5)} = \text{col}\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad n^{(6)} = \text{col}\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\ n^{(7)} &= \text{col}\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad n^{(8)} = \text{col}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \quad n^{(9)} = \text{col}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right). \end{aligned}$$

Пусть $\Phi_{(\nu)}$ есть решение соответствующей системы уравнений, полученной из условий несмещенности (12) при подстановке в них импульсного решения типа (15), сосредоточенного на векторах ориентации (17):

$$(18) \quad \mathcal{H}\Phi_{(\nu)} = a_{(\nu)},$$

где $\mathcal{H} = \left(H(n^{(1)}), \dots, H(n^{(9)}) \right)$, $\Phi_{(\nu)} = \text{col} \left(\Phi_{(\nu)}^{(1)}, \dots, \Phi_{(\nu)}^{(9)} \right)$, $\nu = 1, 4, 7$.

При помощи теоремы 1 можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Оцениватели

$$(19) \quad \Phi_{(\nu)}^0(n) = \sum_{i=1}^9 \Phi_{(\nu)}^{(i)} \delta(n - n^{(i)}), \quad \nu = 1, 4, 7,$$

где $n^{(i)}$ и $\Phi_{(\nu)}^{(i)}$ определяются (17) и (18), доставляют решение проблемы моментов (11), (12).

Доказательство теоремы 2 составляет основное содержание работы. Оно приведено ниже. Отметим, что решения (19) не единственны. Решения проблемы моментов для остальных ν получаются из предыдущих циклической заменой координат.

3.2. Численные результаты

Сначала проведем анализ численных решений. Рассмотрим дискретные аналоги прямой и двойственной задачи при $a = a_{(1)} = \text{col}(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^9$, то есть при оценивании $q_1 = \Gamma_{11}$ (индекс (1) для простоты опускаем). Для этого построим приблизительно равномерную сетку на S^+ из M точек ($M \sim 10^5$). Тогда, взяв всевозможные импульсные функции, сосредоточенные на этой сетке, получим аналог прямой задачи (11), (12):

$$\min_{\Phi \in \mathbb{R}^M} \sum_{k=1}^M |\Phi^{[k]}|$$

при условиях несмещенности

$$\sum_{k=1}^M H(n^{[k]}) \Phi^{[k]} = a = \text{col}(1, 0, \dots, 0), \quad H(n^{[k]}), a \in \mathbb{R}^m \quad (m = 9)$$

и аналог двойственной задачи (13), (14):

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}^m} a^\top \lambda$$

при ограничениях

$$|H(n^{[k]})\lambda| \leq 1, \quad k = 1, \dots, M, \quad n^{[k]} \in S^+.$$

Эти задачи естественным образом сводятся к задачам линейного программирования и решаются стандартными численными процедурами (для довольно больших $M \sim 10^5$). При этом, как хорошо известно, решение прямой задачи содержит не более чем $m = 9$ отличных от нуля компонент. По полученным численным результатам можно сделать наблюдение, что численные решения обладают следующими свойствами: а) соответствующие ненулевым компонентам $\Phi^{[k]}$ векторы $n^{[k]} \in \mathbb{R}^3$ состоят из четырех векторов

$$\text{col}(1, 0, 0), \quad \text{col}(0, 1, 0), \quad \text{col}(0, 0, 1), \quad \text{col}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

и еще пяти векторов из S^+ ; б) решение двойственной задачи обладает структурой:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6, \quad \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9.$$

Для построения точных решений непрерывных задач (11), (12), (13), (14) примем гипотезу, что *точные решения также обладают свойствами а) и б)*. В то время как свойство а) имеет отчасти размытый характер, свойство б) математически насыщенное и указывает на важность анализа двойственной задачи.

3.3. Построение предположительного решения двойственной задачи

С учетом принятой выше гипотезы построим предполагаемое решение двойственной задачи. Впоследствии будет доказано, что оно и есть истинное решение. Пусть $a = a_{(1)} = \text{col}(1, 0, \dots, 0)$. Рассмотрим функцию из ограниченных двойственной задачи

$$S(n; \lambda) = H^T(n) \lambda = \lambda_1 + \lambda_4(n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3) + \lambda_7(n_1 + n_2 + n_3), \quad n \in S^+.$$

Представим ее в более компактном виде:

$$(20) \quad S(n; \lambda) = \lambda_1 + \lambda_4 \frac{(n_1 + n_2 + n_3)^2 - 1}{2} + \lambda_7(n_1 + n_2 + n_3) = s(t(n); \lambda_1, \lambda_4, \lambda_7),$$

$$t = n_1 + n_2 + n_3, \quad 1 \leq t \leq \sqrt{3},$$

где

$$s(t; \lambda_1, \lambda_4, \lambda_7) = \lambda_1 + \lambda_4 \frac{(t^2 - 1)}{2} + \lambda_7 t.$$

Тогда двойственная задача сильно упростится:

$$(21) \quad \max_{\lambda_1, \lambda_4, \lambda_7} \lambda_1 \quad \text{при условии} \quad |s(t; \lambda_1, \lambda_4, \lambda_7)| \leq 1, \quad 1 \leq t \leq \sqrt{3}.$$

Обозначим $\lambda^0 = \text{col}(\lambda_1^0, \dots, \lambda_9^0)$ решение задачи (13), (14). В соответствии со свойством а) оптимальный оценщик Φ^0 должен быть сосредоточен в тех векторах ориентации n , для которых $t(n) = 1$, $t(n) = \sqrt{3}$ и $t(n) = t^{(i)}$ для какого-то набора $i = 1, \dots, i^0, i^0 \leq 5$. Согласно утверждению 4 теоремы 1, для упомянутых ориентаций функция $S(n; \lambda^0)$ принимает свои экстремальные значения: $|S(n; \lambda^0)| = 1$.

Покажем, что $\lambda_4^0 \neq 0$. Действительно, допустим обратное: $\lambda_4^0 = 0$. Тогда согласование со свойством а) возможно лишь и при $\lambda_7^0 = 0$, а тогда $|\lambda_1| \leq 1$. Но оптимальное значение функционала в задаче (21) больше единицы: например, элемент $\lambda = (1 + \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, очевидно, является допустимым.

Функция $s(t(n); \lambda_1^0, \lambda_4^0, \lambda_7^0) \triangleq s^0(t(n))$ при $\lambda_4^0 \neq 0$ есть парабола относительно t и поэтому она принимает свои экстремальные значения не более чем в трех точках: на концах и в вершине параболы. Следовательно,

$$(22) \quad |s^0(1)| = 1, \quad \left| s^0 \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) \right| = 1, \quad |s^0(\sqrt{3})| = 1,$$

а для остальных значений t выполняется строгое неравенство:

$$(23) \quad |s^0(t)| < 1, \quad t \neq 1, \quad t \neq \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \quad t \neq \sqrt{3}.$$

Причем, в силу формы параболы,

$$(24) \quad \text{sign } s^0(1) = -\text{sign } s^0 \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) = \text{sign } s^0(\sqrt{3}).$$

Соотношения (22), (24) порождают систему трех линейных уравнений относительно λ_i^0 , $i = 1, 4, 7$ и определяют λ^0 с точностью до знака. Ясно, что его следует выбрать так, чтобы $a^T \lambda^0 = \lambda_1^0$ было бы положительным (в противном случае $-\lambda^0$ доставляло бы большее значение функционалу). Решая эту систему уравнений, нетрудно подсчитать, что полученный допустимый элемент двойственной задачи (который предположительно является ее решением) имеет вид

$$(25) \quad \begin{aligned} \lambda_1^0 &= \lambda_2^0 = \lambda_3^0 = 3(7 + 4\sqrt{3}), \\ \lambda_4^0 &= \lambda_5^0 = \lambda_6^0 = 8(2 + \sqrt{3}), \\ \lambda_7^0 &= \lambda_8^0 = \lambda_9^0 = -4(5 + 3\sqrt{3}), \end{aligned}$$

причем

$$(26) \quad \text{sign } s^0(1) = -\text{sign } s^0 \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right) = \text{sign } s^0(\sqrt{3}) = 1.$$

3.4. Построение предположительного решения прямой задачи

Пусть предполагаемое решение прямой задачи имеет вид (15). В соответствии с утверждением 4 теоремы 1 и (22), (23) оно сосредоточено только на векторах ориентации, для которых либо $t(n) = 1$, либо $t(n) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, либо $t(n) = \sqrt{3}$. Согласно свойству а), без потери общности можно считать, что

$$(27) \quad n^{(1)} = \text{col}(1, 0, 0), \quad n^{(2)} = \text{col}(0, 1, 0), \quad n^{(3)} = \text{col}(0, 0, 1) \rightarrow t(n) = 1,$$

$$(28) \quad n^{(4)}, n^{(5)}, n^{(6)}, n^{(7)}, n^{(8)} \in S^+ \rightarrow t(n) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2},$$

$$(29) \quad n^{(9)} = \text{col}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow t(n) = \sqrt{3}.$$

Сигнатура двойственной задачи

$$e = \text{col}\left(\text{sign}\left(H(n^{(1)})^T \lambda^0\right), \dots, \text{sign}\left(H(n^{(9)})^T \lambda^0\right)\right)$$

в соответствии с (26)–(29) имеет вид

$$(30) \quad e = \text{col}\left(+1, +1, +1, -1, -1, -1, -1, -1, +1\right).$$

Множество

$$(31) \quad C = \left\{ n \in S^+ \mid t(n) = n_1 + n_2 + n_3 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right\}$$

порождено пересечением плоскости $n_1 + n_2 + n_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (с нормальным вектором $\text{col}(1, 1, 1)$) с единичной сферой S (что есть окружность) с дополнительным ограничением на неотрицательность компонент, т.е. состоит из трех дуг $[\alpha_1, \alpha_2]$, $[\alpha_3, \alpha_4]$, $[\alpha_5, \alpha_6]$ указанной окружности. На рис. 1 изображена поверхность $S^+ = S \cap \mathbb{R}_+^3$ (утолщенной линией), указанная окружность (замкнутой линией обычной толщины), точки пересечения S^+ с осями координат (точками малого размера), точка пересечения диагонали октанта с поверхностью S^+ (точкой большого размера) и точки пересечения указанной окружности с S^+ (точками среднего размера). Легко подсчитать, что эти точки пересечения окружности с S^+ делят соответствующие дуги большого круга, лежащие в координатных плоскостях, на три равные части (по 30°).

В качестве кандидата на решение прямой задачи можно взять решение, для которого векторы ориентации из множества C лежат в крайних точках C , т.е. на концах дуг $[\alpha_1, \alpha_2]$, $[\alpha_3, \alpha_4]$, $[\alpha_5, \alpha_6]$. Таких точек шесть, а требуется определить пять. Отбросим, например, точку, соответствующую вектору ориентации $n = \text{col}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$; на рис. 1 она обозначена α_2 .

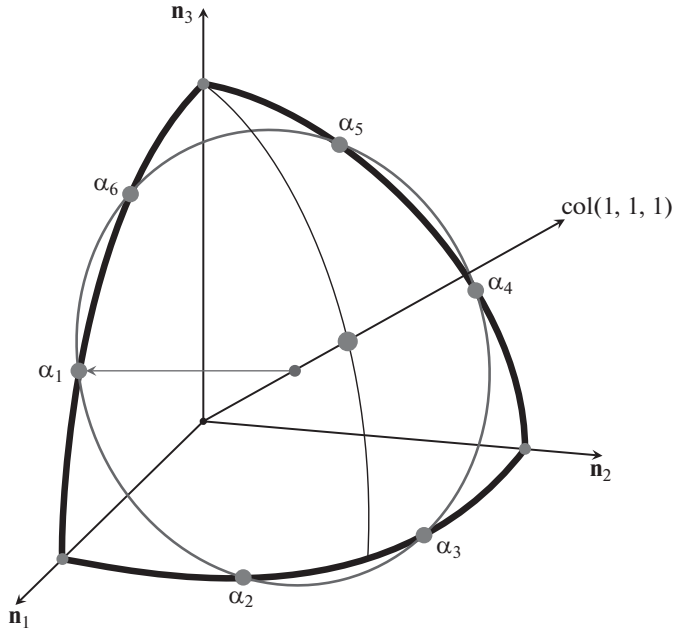


Рис. 1. Поверхность допустимых ориентаций.

Тогда недостающие векторы ориентации примут вид

$$(32) \quad n^{(4)} = \text{col} \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \quad n^{(5)} = \text{col} \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad n^{(6)} = \text{col} \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \\ n^{(7)} = \text{col} \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad n^{(8)} = \text{col} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2} \right).$$

Составим соответствующие этим векторам ориентации систему условий несмещенности (которая получится при подстановке в (12) импульсной функции, порожденной векторами (27), (29) и (32)):

$$(33) \quad \mathcal{H}\Phi = a, \quad \text{где } \mathcal{H} = \left(H(n^{(1)}), \dots, H(n^{(9)}) \right), \quad \Phi = \text{col}(\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(9)});$$

как уже было указано выше, для простоты нижний индекс (1) опускается. Отметим, что $\det \mathcal{H} \neq 0$. В этом можно убедиться, приведя матрицу $\mathcal{H}$ к верхнетреугольной форме, например, методом исключения Гаусса, игнорируя общие множители в строках или столбцах; этот способ довольно трудоемкий. Кроме того, и численные расчеты показывают, что при QR-разложении абсолютные значения диагональных элементов верхнетреугольной матрицы лежат в интервале (0,07; 1,5), а при SVD-процедуре сингулярные числа (все девять) — в интервале (0,02; 3).

Построим предполагаемое решение прямой задачи $\Phi^0(n)$ в форме (15), в которой весовые коэффициенты определяются Φ из (33). Очевидно, $\Phi =$

$= \mathcal{H}^{-1}a$. Явное нахождение вектора Φ из (33), чего было бы достаточно для обоснования оптимальности решения, едва ли практически осуществимо вследствие высокого порядка системы. Можно поступить более тонко. Из (16), (26), (30) вытекает равенство

$$(34) \quad \mathcal{H}^T \lambda^0 = e.$$

Из (34) следует, что $a^T \lambda^0 = a^T (\mathcal{H}^T)^{-1} e$. Поэтому

$$(35) \quad e^T \Phi = e^T \mathcal{H}^{-1} a = a^T \lambda^0.$$

Так как $\det \mathcal{H} \neq 0$ и число обусловленности $\mathcal{H}$ вполне умеренное (~ 150), то уравнения несмещенности (33) можно без труда решить численно. Найденные значения весовых коэффициентов таковы, что $\max_{i=1,\dots,9} |\Phi^{(i)}| > 1,8$; поэтому численная информация о знаках $\Phi^{(i)}$ надежна (более формальное обоснование этого утверждения содержится в приложении). При этом оказывается, что

$$(36) \quad \text{col}(\text{sign } \Phi^{(1)}, \dots, \text{sign } \Phi^{(9)}) = e.$$

Тогда из (35), (36) следует, что для построенных допустимых элементов прямой и двойственной задачи $\Phi^0(n)$ и λ^0

$$(37) \quad \int_{S^+} |\Phi^0(n)| dS = \sum_{i=1}^9 |\Phi^{(i)}| = e^T \Phi = a^T \lambda^0.$$

Таким образом, в силу утверждения 6 теоремы 1 эти $\Phi^0(n)$ и λ^0 являются решениями прямой и двойственной задачи. При этом оптимальное значение функционала $I_{0,(1)} = 3(7 + 4\sqrt{3})$ (с точностью до множителя $\sqrt{3}\sigma$ совпадающего с оптимальной гарантированной ошибкой оценки). Отметим, что несмотря на численную аргументацию при обосновании (36), финальное утверждение (37) строго доказано. Случаи $\nu = 4$ и $\nu = 7$ исследуются аналогично. При этом соответствующие решения двойственной задачи с точностью до знака совпадают с λ^0 из (25), а оптимальные значения функционала равны $I_{0,(4)} = 8(2 + \sqrt{3})$ и $I_{0,(7)} = 4(5 + 3\sqrt{3})$. Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Сосредоточим внимание на оценивании, например, параметров $\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \Gamma_{22}, \varepsilon_1, \varepsilon_2$. В задаче без ограничений на угловые положения, когда вектор ориентации приборного трехгранника может пробегать всю единичную сферу S , оптимальный план калибровки для плоской задачи, т.е. при $n_3 = 0$, является оптимальным и для пространственной задачи [17]. Для рассматриваемого в настоящей статье случая с ограничениями на допустимые угловые положения пространственного сенсора это не так. Если ограничиться лишь “плоскими” планами ($n_3 = 0$), то гарантированная ошибка оценки будет почти в три раза больше оптимальной. Это не очевидная особенность задачи с ограничениями на угловые положения.

3.5. О других решениях

Из доказательства теоремы 2 следует, что если какой-то набор векторов ориентации из C , дополненный векторами (27) и (29) до невырожденной матрицы, сохраняет сигнатуру двойственной задачи e весовых коэффициентов, то этот набор порождает новый оптимальный оценитель. Используя это достаточное условие, можно легко убедиться, что если из шести точек границы C исключить вектор ориентации $n = \text{col}(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2})$ (на рис. 1 соответствующая точка обозначена α_1), то оставшиеся пять точек (с (27) и (29)) породят еще одно решение для случая $\nu = 1$ и $\nu = 7$. А если из шести крайних точек C удалить вектор $n = \text{col}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ (α_3 на рис. 1), то можно прийти к новому решению для случая $\nu = 4$.

Обратим внимание на другой класс решений, чья оптимальность также вытекает из указанного достаточного условия. Рассмотрим симметричный набор векторов ориентации $n^{(5)}$, $n^{(6)}$, $n^{(7)}$ из C (см. (31)), в котором концы векторов лежат на серединах дуг $[\alpha_1, \alpha_2]$, $[\alpha_3, \alpha_4]$, $[\alpha_5, \alpha_6]$ соответственно (иными словами, эти концы находятся на больших кругах — биссектрисах сферического треугольника S^+):

$$\begin{aligned} n^{(5)} &= \text{col} \left(\frac{\sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{4 - \sqrt{3}}}{6}, \frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{4 - \sqrt{3}}}{6}, \frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{4 - \sqrt{3}}}{6} \right), \\ n^{(6)} &= \text{col} \left(\frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{4 - \sqrt{3}}}{6}, \frac{\sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{4 - \sqrt{3}}}{6}, \frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{4 - \sqrt{3}}}{6} \right), \\ n^{(7)} &= \text{col} \left(\frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{4 - \sqrt{3}}}{6}, \frac{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{4 - \sqrt{3}}}{6}, \frac{\sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{4 - \sqrt{3}}}{6} \right). \end{aligned}$$

Дополним его всегда присутствующими в решении векторами $n^{(1)}$, $n^{(2)}$, $n^{(3)}$, $n^{(9)}$ из (27), (29). Для образования невырожденной матрицы $\mathcal{H}$ в условиях несмещенности нужно присоединить к ним еще два вектора. Аналогично доказательству оптимальности решения $\Phi_{(1)}^0(n)$ можно убедиться, что если присоединить одну из трех следующих пар векторов $n^{(4)}$, $n^{(8)}$ — крайних точек C (они явно указаны справа):

$$(38) \quad \begin{cases} \text{col} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)_{\alpha_1} \\ \text{col} \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)_{\alpha_3} \end{cases}, \quad \begin{cases} \text{col} \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)_{\alpha_6} \\ \text{col} \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)_{\alpha_3} \end{cases}, \quad \begin{cases} \text{col} \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)_{\alpha_6} \\ \text{col} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)_{\alpha_2} \end{cases},$$

то полученный невырожденный набор девяти векторов образует оптимальное решение одновременно для случаев $\nu = 1$ и $\nu = 7$. А если присоединить одну

из следующих четырех пар $n^{(4)}, n^{(8)}$:

$$(39) \quad \begin{cases} \text{col} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)_{\alpha_1} \\ \text{col} \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)_{\alpha_5}, \end{cases} \quad \begin{cases} \text{col} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)_{\alpha_1} \\ \text{col} \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)_{\alpha_4}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{col} \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)_{\alpha_6} \\ \text{col} \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)_{\alpha_5}, \end{cases} \quad \begin{cases} \text{col} \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)_{\alpha_6} \\ \text{col} \left(\frac{0, \sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)_{\alpha_4}, \end{cases}$$

то полученный невырожденный набор девяти векторов образует оптимальное решение для случая $\nu = 4$.

Итак, решение прямой задачи не единственно. Кроме того, достаточно малые деформации (в рамках C) набора векторов ориентации, порождающего решение прямой задачи, не изменяют сигнатуру решений уравнений несмещенности. Поэтому они также приводят к новому решению прямой задачи. Полное описание всех решений выходит за рамки данной работы.

4. Упрощенная форма проблемы моментов

Из полученных выше результатов (с учетом утверждения 5 теоремы 1) следует, что оптимальный оценщик отличен от нуля только на трех сечениях S^+ тремя плоскостями. Первая плоскость — это $n_1 + n_2 + n_3 = 1$; в силу очевидного неравенства $1 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \leq n_1 + n_2 + n_3$, это возможно только для трех векторов (27). Вторая плоскость определяется равенством $n_1 + n_2 + n_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Третья плоскость описывается уравнением $n_1 + n_2 + n_3 = \sqrt{3}$; согласно неравенству Коши-Буняковского пересечение состоит только из одного элемента (29). Таким образом, проблема моментов “сосредоточена” лишь на четырех векторах и множестве C , задаваемом (31).

Для явного учета этого обстоятельства введем ортогональную систему координат $0m_1m_2m_3$, повернутую относительно $0n_1n_2n_3$ следующим образом (см. рис. 2). Пусть ось поворота лежит в плоскости $0n_1n_2$ и в этой плоскости уравнение оси вращения имеет вид $n_1 + n_2 = 0$; очевидно, это диагональ второго и четвертого квадранта (на рис. 2 она изображена штриховой линией). Повернем исходную систему координат $0n_1n_2n_3$ вокруг этой оси поворота на угол γ так, чтобы третья ось $0m_1m_2m_3$ совпала с вектором $\text{col}(1, 1, 1)$ (в исходной системе координат $0n_1n_2n_3$), т.е. так, чтобы третья ось легла вдоль диагонали октанта $\mathbb{R}_+^3$.

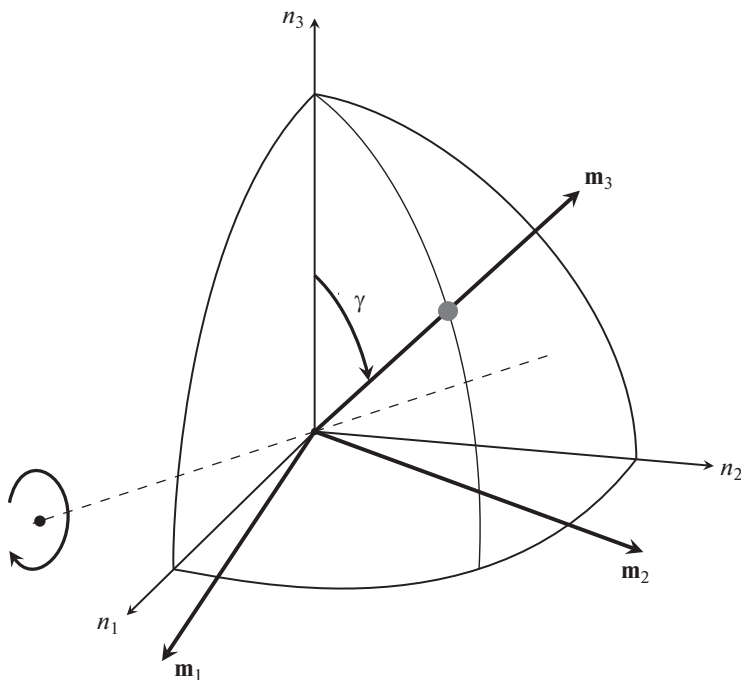


Рис. 2. Повернутая система координат.

Нетрудно убедиться, что

$$(40) \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+3}{6} & \frac{\sqrt{3}-3}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}-3}{6} & \frac{\sqrt{3}+3}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}.$$

Введем в трехграннике $0m_1m_2m_3$ сферические координаты

$$m_1 = \cos \alpha \cos \theta, \quad m_2 = \sin \alpha \cos \theta, \quad m_3 = \sin \theta, \quad 0 \leq \alpha, \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

В сечении второй плоскостью

$$m_3 = \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}(n_1 + n_2 + n_3) = \frac{\sqrt{3}+3}{6}, \quad \text{откуда} \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{6}}$$

и поэтому

$$m_1 = \sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{6}} \cos \alpha, \quad m_2 = \sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{6}} \sin \alpha.$$

После некоторых выкладок можно получить выражения для граничных углов множества C (здесь одной буквой обозначены и точки на C , и соответствующие им углы в сферической системе координат)

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= -\arcsin \frac{5\sqrt{3}-3}{2\sqrt{6(4-\sqrt{3})}}, & \alpha_2 &= \arcsin \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6(4-\sqrt{3})}}, \\
 \alpha_3 &= \arcsin \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3(4-\sqrt{3})}}, & \alpha_4 &= \pi - \arcsin \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6(4-\sqrt{3})}}, \\
 \alpha_5 &= \pi + \arcsin \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6(4-\sqrt{3})}}, & \alpha_6 &= \pi + \arcsin \frac{9-\sqrt{3}}{2\sqrt{6(4-\sqrt{3})}}.
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

С учетом (40), на множестве C , определяемом (31), (41),

$$\begin{aligned}
 n_1(\alpha) &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{6}} \left[(\sqrt{3}+3) \cos \alpha + (\sqrt{3}-3) \sin \alpha \right] + \frac{\sqrt{3}+1}{6}, \\
 n_2(\alpha) &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{6}} \left[(\sqrt{3}-3) \cos \alpha + (\sqrt{3}+3) \sin \alpha \right] + \frac{\sqrt{3}+1}{6}, \\
 n_3(\alpha) &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{6}} [\cos \alpha + \sin \alpha] + \frac{\sqrt{3}+1}{6}.
 \end{aligned}$$

Тогда исходная проблема моментов (11), (12), заданная на поверхности S^+ , преобразуется к проблеме моментов на дугах окружности:

$$\begin{aligned}
 \min_{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi(\alpha)} & \left(|\varphi_1| + |\varphi_2| + |\varphi_3| + |\varphi_4| + \int_C |\varphi(\alpha)| d\alpha \right), \\
 C &= [\alpha_1, \alpha_2] \cup [\alpha_3, \alpha_4] \cup [\alpha_5, \alpha_6]
 \end{aligned}$$

при условии несмещенности

$$H(n^{(1)})\varphi_1 + H(n^{(2)})\varphi_2 + H(n^{(3)})\varphi_3 + H(n^{(9)})\varphi_4 + \int_C H(n(\alpha))\varphi(\alpha) d\alpha = a,$$

где векторы ориентации $n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}, n^{(9)}$ определяются (27) и (29), а граничные углы α_i задаются формулами (41). Такая редукция с понижением размерности сетки существенно облегчает численные расчеты.

5. Уточненная проблема моментов

Рассмотренная выше проблема моментов (11), (12) исходила из простой, но несколько завышенной оценки помехи $\varrho(n)$ (5). Можно построить дости-

жимую оценку помехи:

$$|\varrho(n)| = |n^T \varrho'(n)| \leq (n_1 + n_2 + n_3) \sigma, \quad n \in S^+.$$

Тогда проблема моментов будет иметь более сложную формулировку (для простоты опускаем постоянный множитель σ и сохраняем обозначения I_0, I^0 для значений задач):

$$(42) \quad I_0 = \inf_{\Phi(n) \in \mathcal{F}} \int_{S^+} (n_1 + n_2 + n_3) |\Phi(n)| dS$$

при условии несмещенности

$$(43) \quad \int_{S^+} H(n) \Phi(n) dS = a, \quad H(n) \in \mathbb{R}^m \quad (m = 9).$$

Двойственная задача изменится следующим образом:

$$I^0 = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^m} a^T \lambda \quad (m = 9)$$

при условии

$$|H^T(n) \lambda| \leq n_1 + n_2 + n_3, \quad n \in S^+.$$

При этом теорема 1 остается верной, если в утверждении 4 заменить равенство (16): $|H^T(n^{(i)}) \lambda^0| = 1$ на $|H^T(n^{(i)}) \lambda^0| = n_1^{(i)} + n_2^{(i)} + n_3^{(i)}$, а в утверждении 5 неравенство $|H^T(n) \lambda^0| < 1$ заменить на $|H^T(n) \lambda^0| < n_1 + n_2 + n_3$. Для простоты также ограничимся подробным рассмотрением лишь случая $a = a_{(1)} = \text{col}(1, 0, \dots, 0)$. Численные решения уточненной прямой и двойственной задачи вновь дает основание для введения гипотезы из раздела 3.2. Тогда редуцированная двойственная задача примет вид

$$\max_{\lambda_1, \lambda_4, \lambda_7} \lambda_1 \quad \text{при условии} \quad \left| \frac{s(t; \lambda_1, \lambda_4, \lambda_7)}{t} \right| \leq 1, \quad 1 \leq t \leq \sqrt{3},$$

где функция $s(t; \lambda_1, \lambda_4, \lambda_7)$ задается в соотношениях (20). Из гипотезы также, как и в разделе 3.3, вытекает, что оптимальный оценщик отличен от нуля для тех векторов ориентации, для которых t находится, по крайней мере, в трех точках отрезка $[1, \sqrt{3}]$, причем две из них есть концы этого отрезка, а остальные находятся внутри него. При этом из утверждения 4 теоремы 1 следует, что для этих значений t

$$(44) \quad \left| \frac{s^0(t)}{t} \right| = 1, \quad \text{где} \quad s^0(t) = s(t; \lambda_1^0, \lambda_4^0, \lambda_7^0),$$

а λ^0 — решение уточненной двойственной задачи.

Допустим, что $\lambda_4^0 = 0$. Тогда из принятой гипотезы следует, что и $\lambda_1 = 0$, иначе (44) не сможет выполняться для более чем двух точек t . Ясно, что вектор $(\lambda_1, \lambda_4, \lambda_7) = (1, 0, 0)$ доставляет большее значение функционалу двойственной задачи. Поэтому $\lambda_4^0 \neq 0$.

Производная функции, входящей в ограничение упрощенной двойственной задачи, имеет вид

$$(45) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{s^0(t)}{t} \right) = \frac{\lambda_4^0 - 2\lambda_1^0}{t^2} - \lambda_4^0,$$

причем $\lambda_4^0 - 2\lambda_1^0 \neq 0$, иначе свойство а) отсутствует. Отсюда следует, что эта производная монотонна и имеет единственный нуль $t^0 \in (1, \sqrt{3})$ (в противном случае свойства а) нет). Так что $t^{-1}s^0(t)$ либо выпукла, либо вогнута. Таким образом, функция $t^{-1}s^0(t)$ имеет близкую к параболе форму. Поэтому для проверки допустимости элемента λ достаточно проверить допустимость для крайних значений $s^0(t)$ в трех ее экстремальных точках; для остальных точек t допустимость будет выполняться автоматически. Рассуждая далее как в разделе 3.3, нетрудно получить соотношения, аналогичные (22), (24):

$$(46) \quad s^0(1) = - \left(\frac{s^0(t^0)}{t^0} \right) = \left(\frac{s^0(\sqrt{3})}{\sqrt{3}} \right), \quad \text{где с учетом (45)} \quad t^0 = \sqrt{\frac{2\lambda_1^0}{\lambda_4^0} - 1}.$$

При этом $\text{sign } s^0(1) = \pm 1$; при правильном выборе знака $\lambda_1^0 > 0$, а при неправильном $\lambda_1^0 < 0$. Тогда в явной форме равенства (46) (с учетом (44) и сигнатуры $\text{sign } s^0(1) = 1$) примут вид

$$(47) \quad \lambda_1^0 + \lambda_7^0 = 1, \quad \frac{2\lambda_1^0 - \lambda_4^0}{\sqrt{\frac{2\lambda_1^0}{\lambda_4^0} - 1}} + \lambda_7^0 = -1, \quad \frac{\lambda_1^0 + \lambda_4^0}{\sqrt{3}} + \lambda_7^0 = 1.$$

Из первого и третьего уравнения в (47) следует, что

$$\sqrt{3}\lambda_1^0 = \lambda_1^0 + \lambda_4^0, \quad \text{откуда с учетом (46)} \quad t^0 = \sqrt[4]{3}.$$

Тогда предполагаемое решение уточненной двойственной задачи имеет вид

$$(48) \quad \begin{aligned} \lambda_1^0 &= \lambda_2^0 = \lambda_3^0 = \frac{(1 + \sqrt[4]{3})^2 (1 + \sqrt{3})^3}{2}, \\ \lambda_4^0 &= \lambda_5^0 = \lambda_6^0 = (1 + \sqrt[4]{3})^2 (1 + \sqrt{3})^2, \\ \lambda_7^0 &= \lambda_8^0 = \lambda_9^0 = -\frac{(1 + \sqrt[4]{3})^4 (1 + \sqrt{3})^2}{4}. \end{aligned}$$

Правильность выбора сигнатуры в (47) подтверждается положительностью λ_1^0 в (48).

Перейдем к анализу прямой задачи. Введем множество C_M , аналогичное (31); только теперь $n_1 + n_2 + n_3 = \sqrt[4]{3}$. Соответствующий рисунок подобен рис. 1 и поэтому не приводится. Тогда значения углов, аналогичных углам $\{\alpha_i\}_1^6$ из (41), также изменятся и станут определяться выражениями

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= -\arcsin \frac{\sqrt{3} + 1 - (\sqrt{3} - 1)\sqrt{2\sqrt{3} - 3}}{4\sqrt{\sqrt{3} - 1}}, \\
 \beta_2 &= \arcsin \frac{1 - \sqrt{2\sqrt{3} - 3}}{2\sqrt{\sqrt{3} - 1}}, \\
 \beta_3 &= \arcsin \frac{1 + \sqrt{2\sqrt{3} - 3}}{2\sqrt{\sqrt{3} - 1}}, \\
 \beta_4 &= \pi - \arcsin \frac{\sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)\sqrt{2\sqrt{3} - 3}}{4\sqrt{\sqrt{3} - 1}}, \\
 \beta_5 &= \pi + \arcsin \frac{(\sqrt{3} + 1)\sqrt{2\sqrt{3} - 3} - \sqrt{3} + 1}{4\sqrt{\sqrt{3} - 1}}, \\
 \beta_6 &= \pi + \arcsin \frac{\sqrt{3} + 1 + (\sqrt{3} - 1)\sqrt{2\sqrt{3} - 3}}{4\sqrt{\sqrt{3} - 1}}.
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

В качестве кандидата на решение прямой задачи также можно взять решение, для которого векторы ориентации лежат на краях множества C_M , т.е. на концах дуг $[\beta_1, \beta_2]$, $[\beta_3, \beta_4]$, $[\beta_5, \beta_6]$ (здесь опять для простоты одной буквой β обозначаются и точки на C_M , и значения углов — это не приводит к недоразумению). Таких векторов шесть, а нужно пять. Отбросим точку β_2 , соответствующую вектору ориентации $n = \text{col}\left(\frac{\sqrt[4]{3} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, \frac{\sqrt[4]{3} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, 0\right)$.

Тогда векторы ориентации, лежащие на краях C_M , примут вид

$$\begin{aligned}
 n^{(4)} &= \text{col}\left(\frac{\sqrt[4]{3} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, \frac{\sqrt[4]{3} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, 0\right), \\
 n^{(5)} &= \text{col}\left(0, \frac{\sqrt[4]{3} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, \frac{\sqrt[4]{3} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}\right), \\
 n^{(6)} &= \text{col}\left(0, \frac{\sqrt[4]{3} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, \frac{\sqrt[4]{3} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}\right), \\
 n^{(7)} &= \text{col}\left(\frac{\sqrt[4]{3} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, 0, \frac{\sqrt[4]{3} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}\right), \\
 n^{(8)} &= \text{col}\left(\frac{\sqrt[4]{3} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, 0, \frac{\sqrt[4]{3} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}\right).
 \end{aligned}
 \tag{50}$$

Аналогично (33) составим соответствующую векторам ориентации (50) систему условий несмещенности. Произведя QR-разложение или реализовав SVD-процедуру, можно также, как и выше, убедиться в невырожденности матрицы условий несмещенности. Более того, знаки коэффициентов предполагаемого решения прямой задачи совпадают с сигнатурой решения уточненной двойственной задачи. Тогда аналогично (37) оказывается, что для построенных допустимых элементов прямой и двойственной задачи (для уточненной проблемы моментов) $\Phi^0(n)$ и λ^0

$$\int_{S^+} (n_1 + n_2 + n_3) |\Phi^0(n)| dS = a^T \lambda^0.$$

Следовательно, в силу утверждения 6 теоремы 1, эти $\Phi^0(n)$ и λ^0 являются решениями уточненной прямой и двойственной задачи. При этом оптимальное значение функционала $I_{0,(1)} = (1 + \sqrt[4]{3})^2(1 + \sqrt{3})^3/2$ (с точностью до множителя σ совпадающего с оптимальной гарантированной ошибкой оценки). Случаи $\nu = 4$ и $\nu = 7$ исследуются по указанной выше схеме. При этом соответствующие решения уточненной двойственной задачи с точностью до знака совпадают, а $I_{0,(4)} = (1 + \sqrt[4]{3})^2(1 + \sqrt{3})^2$ и $I_{0,(7)} = (1 + \sqrt[4]{3})^4(1 + \sqrt{3})^2/4$.

Как и выше, нетрудно убедиться, что если из шести точек границы C_M исключить вектор ориентации $\text{col}\left(\frac{\sqrt[4]{3} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, 0, \frac{\sqrt[4]{3} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}\right)$, соответствующий точке β_1 , то оставшиеся пять точек (с (27) и (29)) породят еще одно решение для случая $\nu = 1$ и $\nu = 7$. А если из шести крайних точек C_M удалить вектор $\text{col}\left(\frac{\sqrt[4]{3} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, \frac{\sqrt[4]{3} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}, 0\right)$ (соответствующий β_3), то можно прийти к новому решению для случая $\nu = 4$.

Аналогично возьмем симметричный набор векторов ориентации $n^{(5)}, n^{(6)}, n^{(7)}$ из C_M , в котором концы векторов лежат на серединах дуг $[\beta_1, \beta_2], [\beta_3, \beta_4], [\beta_5, \beta_6]$ соответственно:

$$\begin{aligned} n^{(5)} &= \text{col}\left(\frac{\sqrt[4]{3} + \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}}{3}, \frac{2\sqrt[4]{3} - \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}}{6}, \frac{2\sqrt[4]{3} - \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}}{6}\right), \\ n^{(6)} &= \text{col}\left(\frac{2\sqrt[4]{3} - \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}}{6}, \frac{\sqrt[4]{3} + \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}}{3}, \frac{2\sqrt[4]{3} - \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}}{6}\right), \\ n^{(7)} &= \text{col}\left(\frac{2\sqrt[4]{3} - \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}}{6}, \frac{2\sqrt[4]{3} - \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}}{6}, \frac{\sqrt[4]{3} + \sqrt{6 - 2\sqrt{3}}}{3}\right). \end{aligned}$$

Дополним его векторами из (27), (29). Для образования невырожденной матрицы $\mathcal{H}$ нужно присоединить к ним еще два вектора. Как и выше, можно убедиться, что если присоединить к ним одну и трех пар векторов — крайних точек C_M , аналогичных (38), то полученный невырожденный набор девяти векторов образует оптимальное решение одновременно для случаев $\nu = 1$

и $\nu = 7$. А если присоединить одну из четырех пар, аналогичных (39), то полученный невырожденный набор девяти векторов образует оптимальное решение для случая $\nu = 4$.

На множестве C_M

$$(51) \quad \begin{aligned} n_1(\alpha) &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} \left[(\sqrt{3}+3) \cos \alpha + (\sqrt{3}-3) \sin \alpha \right] + \frac{\sqrt[4]{3}}{3}, \\ n_2(\alpha) &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} \left[(\sqrt{3}-3) \cos \alpha + (\sqrt{3}+3) \sin \alpha \right] + \frac{\sqrt[4]{3}}{3}, \\ n_3(\alpha) &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} [\cos \alpha + \sin \alpha] + \frac{\sqrt[4]{3}}{3}. \end{aligned}$$

Тогда проблема моментов (42), (43), заданная на поверхности S^+ , преобразуется к проблеме моментов на дугах окружности C_M :

$$\min_{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi(\alpha)} \left(|\varphi_1| + |\varphi_2| + |\varphi_3| + \sqrt{3}|\varphi_4| + \int_{C_M} (n_1(\alpha) + n_2(\alpha) + n_3(\alpha)) |\varphi(\alpha)| d\alpha \right),$$

$$C_M = [\beta_1, \beta_2] \cup [\beta_3, \beta_4] \cup [\beta_5, \beta_6]$$

при условии несмещенности

$$H(n^{(1)})\varphi_1 + H(n^{(2)})\varphi_2 + H(n^{(3)})\varphi_3 + H(n^{(9)})\varphi_4 + \int_{C_M} H(n(\alpha))\varphi(\alpha) d\alpha = a,$$

где векторы ориентации $n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}, n^{(9)}$ определяются (27) и (29), $n(\alpha)$ на этот раз задаются (51), а граничные углы β_i указаны формулами (49).

6. Заключение

В статье рассмотрена задача калибровки трехмерного сенсора в поле постоянного калибровочного сигнала при существенных ограничениях на его допустимые угловые положения. Такие ограничения возникают, например, при асимметричных (зависящих от знака входного сигнала) моделях показаний сенсора. Эта задача сведена к проблеме моментов на неотрицательном октанте. В явном виде (в аналитически замкнутой форме) получены решения этой проблемы моментов. Тем самым определены оптимальный план угловых положений сенда, соответствующие оптимальные оценки параметров погрешностей пространственного сенсора и точности этих оценок.

Сначала докажем, что в (33) $\det \mathcal{H} \neq 0$. Пусть $\mathcal{H}_\delta$ — численный образ матрицы $\mathcal{H}$: $\mathcal{H}_\delta = \mathcal{H} + \delta\mathcal{H}$. Обозначим через B приближенно вычисленную обратную матрицу к $\mathcal{H}$; матрица B точно известна. Тогда $B\mathcal{H}_\delta + \Delta m = I + \Delta\mathcal{H}$, где Δm — матрица ошибок при перемножении матриц B и $\mathcal{H}$, а $\Delta\mathcal{H}$ — известная ошибка, характеризующая точность обращения. Из указанных равенств вытекает, что

$$(П.1) \quad B\mathcal{H} = I + \Delta\mathcal{H} - \Delta m - B\delta\mathcal{H}.$$

Прямые вычисления матрицы $\Delta\mathcal{H}$ показывают, что ее элементы удовлетворяют неравенству $|(\Delta\mathcal{H})_{ij}| \leq 10^{-14}$, $i, j = 1, \dots, 9$. Положим, что для элементов Δm и $\delta\mathcal{H}$ справедливы ограничения

$$|\Delta m_{ij}| \leq \epsilon, \quad |\delta\mathcal{H}_{ij}| \leq \epsilon, \quad i, j = 1, \dots, 9, \quad \text{где } \epsilon \ll 1.$$

Тогда $|(B\delta\mathcal{H})_{ij}| \leq \epsilon \sum_{s=1}^9 |B_{is}|$ и, следовательно,

$$|(\Delta\mathcal{H} - \Delta m - B\delta\mathcal{H})_{ij}| \leq 10^{-14} + \epsilon \left[1 + \sum_{s=1}^9 |B_{is}| \right] \quad i, j = 1, \dots, 9.$$

Элементы известной матрицы B находятся в следующих пределах: $0,1 < |B_{ij}| < 12$. Поэтому $|(\Delta\mathcal{H} - \Delta m - B\delta\mathcal{H})_{ij}| \leq 109\epsilon + 10^{-14}$. Будем считать, что $\epsilon \leq 10^{-5}$; это заведомо гарантируется современными вычислительными средствами. Тогда матрица $I + \Delta\mathcal{H} - \Delta m - B\delta\mathcal{H}$ из (П.1) имеет диагональное доминирование и, следовательно, по теореме Леви-Деспланка [31] является невырожденной. Стало быть, невырождена и $\mathcal{H}$, и B .

Рассмотрим случай $a = a_{(1)}$. В соответствии с (П.1)

$$\Phi = \mathcal{H}^{-1}a = (I + \Delta\mathcal{H} - \Delta m - B\delta\mathcal{H})^{-1}Ba = (I + W)Ba = \Phi_{\text{calc}} + \Delta\Phi,$$

где $\Phi_{\text{calc}} = Ba$ — вычисленное значение Φ , $\Delta\Phi = WBa$ — ошибка вычислений,

$$\|W\| \leq \frac{\|\Delta\mathcal{H} - \Delta m - B\delta\mathcal{H}\|}{1 - \|\Delta\mathcal{H} - \Delta m - B\delta\mathcal{H}\|},$$

где $\|W\|$ — спектральная норма W . Тогда $\|\Delta\Phi\| \leq \|W\|\|Ba\|$, где $\|\Delta\Phi\|$ и $\|Ba\|$ — евклидовы нормы соответствующих векторов. Ясно, что

$$\|W\| \leq \frac{\|\Delta\mathcal{H}\|_F + \|\Delta m + B\delta\mathcal{H}\|_F}{1 - \|\Delta\mathcal{H}\|_F - \|\Delta m + B\delta\mathcal{H}\|_F};$$

здесь индексом F обозначена норма Фробениуса, мажорирующая спектральную норму (величину ошибки вычисления спектральной нормы труднее оценить). Поэтому

$$\|W\| \leq \frac{3\epsilon R + 10^{-13}}{1 - 3\epsilon R - 10^{-13}}, \quad R = \sqrt{\sum_{i=1}^9 \left[1 + \sum_{s=1}^9 |B_{is}| \right]^2}.$$

Положим, что точность вычисления величины R не превышает ϵ . Тогда (с учетом, что $\|Ba\| \leq 16$)

$$\|W\| \leq \frac{429\epsilon + 3\epsilon^2 + 10^{-13}}{1 - (429\epsilon + 3\epsilon^2 + 10^{-13})} \quad \text{и} \quad \|\Delta\Phi\| \leq \frac{0,069 \cdot 10^5 \epsilon + 3\epsilon^2 + 2 \cdot 10^{-12}}{1 - (0,005 \cdot 10^5 \epsilon + 3\epsilon^2 + 10^{-12})}.$$

Таким образом, $\|\Delta\Phi\| \leq 0,07$ при $\epsilon = 10^{-5}$ и $\|\Delta\Phi\| \leq 0,007$ при $\epsilon = 10^{-6}$.

Принимая во внимание, что известные элементы вектора $Ba = Ba_{(1)}$ по абсолютной величине не меньше числа 1,8, мы доказали, что приближенные вычисления гарантированно устанавливают знаки компонент искомого вектора Φ . Для $\nu = 4$ и $\nu = 7$ обоснование аналогично.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976.
2. *Голован А.А., Парусников Н.А.* Математические основы навигационных систем. Ч. I. Математические модели инерциальной навигации. М.: МАКС Пресс, 2011.
3. *Cai Q., Yang G., Song N., Lin Y.* Systematic calibration for ultra-high accuracy of inertial measurement unit // *Sensors*. 2016. V. 16. P. 940–955.
4. *Secer G., Barshan B.* Improvements in deterministic error modeling and calibration of inertial sensors and magnetometers // *Sensors and Actuators A*. 2016. (247). P. 522–538.
5. *Вавилова Н.Б., Васинева И.А., Голован А.А., Козлов А.В., Папуша И.А., Парусников Н.А.* Калибровка в инерциальной навигации // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2018. Т. 22. № 2. С. 89–115.
6. *Kozlov A., Tarygin I.* Real-time estimation of temperature time derivative in inertial measurement unit by finite-impulse-response exponential regression on updates // *Sensors*. V. 20. No. 5. P. 1299–1319.
7. *Голован А.А., Матасов А.И., Тарыгин И.Е.* Калибровка блока ньютонометров с асимметричными моделями показаний чувствительных элементов // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. 2022. № 5. С. 107–119.
8. *Bolotin Y., Savin V.* Turntable IMU calibration algorithm based on the Fourier transform technique // *Sensors*. 2023. No. 2. P. 1045–1060.
9. *Лидов М.Л.* К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов // *Космич. исследования*. 1964. Т. 2. № 5. С. 713–715.
10. *Красовский Н.Н.* К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // *Прикл. математика и механика*. 1964. Т. 28. № 1. С. 3–14.
11. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
12. *Лидов М.Л.* Минимаксные методы оценивания. М.: Препринт № 71. Ин-т прикл. мат. им. М.В. Келдыша РАН. 2010.
13. *Бахтиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е.* Определение и коррекция движения. М.: Наука, 1980.
14. *Белоусов Л.Ю.* Оценивание параметров движения космических аппаратов. М.: Физматлит, 2002.
15. *Матасов А.И.* Метод гарантирующего оценивания. М.: Изд-во МГУ, 2009.

16. *Matasov A.I.* Estimators for Uncertain Dynamic Systems. Dordrecht–Boston–London: Springer Science+Business Media, B.V., 2013.
17. *Бобрюк Г.И., Матасов А.И.* Оптимальное гарантирующее оценивание параметров блока акселерометров // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1993. № 5. С. 8–14.
18. *Акимов П.А., Деревянкин А.В., Матасов А.И.* Гарантирующее оценивание и l_1 -аппроксимация в задачах оценивания параметров БИНС при стендовых испытаниях. М.: Изд-во МГУ, 2012.
19. *Матасов А.И.* Вариационные задачи для калибровки блока ньютонометров // АиТ. 2019. № 12. С. 59–79. 2019.
20. *Браславский Д.А., Поликовский Е.Ф., Якубович А.М.* Метод калибровки трехосного блока акселерометров // Заявка на изобретение № 2422425/23 с приоритетом от 24 ноября 1976 г.
21. *Чесноков Г.И., Поликовский Е.Ф., Молчанов А.В., Кремер В.И.* Некоторые пути улучшения тактико-технических характеристик бесплатформенных инерциальных навигационных систем / Сб. X СПб междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. Сб. матер. СПб.: ГНЦ РФ “ЦНИИ Электроприбор”, 2003. С. 155–164.
22. *Измайлов Е.А., Лепе С.Н., Молчанов А.В., Поликовский Е.Ф.* Скалярный способ калибровки и балансировки бесплатформенных инерциальных навигационных систем / Сб. Юбилейная XV СПб междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. Сб. матер. СПб.: ГНЦ РФ “ЦНИИ Электроприбор”, 2008. С. 145–154.
23. *Болотин Ю.В., Голиков В.П., Ларионов С.В., Требухов А.В.* Алгоритм калибровки платформенной инерциальной навигационной системы // Гироскопия и навигация. 2008. № 3. С. 13–27.
24. *Смоляк С.А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М.: Механико-мат. факультет МГУ, 1965.
25. *Марчук А.Г., Осипенко Л.Ю.* Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек // Математические заметки. 1975. Т. 17. № 3. С. 359–368.
26. *Milanese M., Tempo R.* Optimal algorithms theory for robust estimation and prediction // IEEE Transact. Autom. Control. 1985. AC-30. No. 8. P. 730–743.
27. *Матасов А.И.* Об оптимальности линейных алгоритмов гарантированного оценивания, I, II // Космич. исследования. 1988. Т. 26. № 5–6. С. 643–653, 807–812.
28. *Эккланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
29. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2007.
30. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: Книжный дом “Либроком”, 2011.
31. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 19.10.2022

После доработки 18.03.2023

Принята к публикации 30.03.2023

СОДЕРЖАНИЕ

Обзоры

Гераськин М.И. Обзор новейших достижений в теории игр олигополии	3
---	---

Нелинейные системы

Соколов В.Ф. Субоптимальная робастная стабилизация неизвестного авторегрессионного объекта с неопределенностью и смещенным внешним возмущением	26
---	----

Стохастические системы

Босов А.В. Фильтрация состояния нелинейной динамической системы по наблюдениям со случайными запаздываниями	49
Бурдонов И.Б., Евтушенко Н.В., Косачев А.С., Кушик Н.Г. О синтезе безусловных установочных и синхронизирующих экспериментов для наблюдаемых входо-выходных полуавтоматов	67
Копосов А.С., Пакшин П.В. Управление с итеративным обучением стохастическими мультиагентными системами с изменяемой желаемой траекторией и топологией	79
Хрусталева М.М., Царьков К.А. Метод последовательного улучшения в задачах оптимизации вероятностных критериев для линейных по состоянию диффузионно-скачкообразных систем	100

Управление в технических системах

Абдуллаев В.М. Оптимизация мест расположения и числа точек контроля в одной задаче синтеза управления обогревательной системы	122
Матасов А.И., Инь Х. Калибровка пространственного сенсора при ограничении на его ориентации	144

C O N T E N T S

Surveys

Geraskin M.I. Overview of the Latest Achievements in Game Theory of Oligopoly . . 3

Nonlinear Systems

Sokolov V.F. Suboptimal Robust Stabilization of Unknown Autoregressive Plant
under Uncertainty and Biased External Disturbance 26

Stochastic Systems

Bosov A.V. Nonlinear System State Filtering by Observations with Random
Delays 49

Burdonov I.B., Evtushenko N.V., Kossachev A.S, Kushik N.G. On Preset Homing
and Synchronizing Experiments for Observable Input/Output Automata 67

Koposov A.S., Pakshin P.V. Iterative Learning Control of Stochastic Multi-Agent
Systems with Variable Reference Trajectory and Topology 79

Khrustalev M.M., Tsarkov K.A. Step-by-Step Improvement Method in Proba-
bilistic Criteria Optimization Problems for Linear-in-State Jump Diffusion
Systems 100

Control in Technical Systems

Abdullayev V.M. Optimization of Locations and Number of Control Points in
One Control Synthesis Problem for a Heating System 122

Matasov A.I., Yin H. Calibration of a 3-D Sensor under Restrictions on Its
Orientation 144