

ISSN 0005-2310

А Т АВТОМАТИКА И ЭЛЕМЕХАНИКА



4

2023



Российская Академия Наук

А АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

4

АПРЕЛЬ

Москва

2023

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Поляк Б.Т., Попков Ю.С.,
Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М.,
Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф.,
Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П.,
Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,
Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М.,
Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А.,
Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталеv М.М., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ООО «Тематическая редакция»

Нелинейные системы

© 2023 г. В.А. АЛЕКСАНДРОВ, канд. техн. наук
(va.alexandrov@yandex.ru)

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),

Е.Ю. ЗЫБИН, д-р техн. наук (zybin@mail.ru),

В.В. КОСЬЯНЧУК, д-р техн. наук (kos.vl.v@gmail.com),

Н.И. СЕЛЬВЕСЮК, д-р техн. наук (nis@gosniias.ru)

(ФАУ Государственный научно-исследовательский институт
авиационных систем, Москва),

Е.А. СТЕФАНЮК (stefa@ipu.ru),

А.А. ТРЕМБА, канд. физ.-мат. наук (atremba@ipu.ru),

М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;

Национальный исследовательский университет

“Московский физико-технический институт”)

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫСОТНО-СКОРОСТНОГО ПРОФИЛЯ КРЕЙСЕРСКОГО ПОЛЕТА ВОЗДУШНОГО СУДНА В РЕАЛЬНОЙ АТМОСФЕРЕ¹

Задача минимизации расхода топлива дозвукового турбореактивного самолета на этапе крейсерского полета с фиксированным временем прибытия рассматривается с учетом данных о состоянии реальной атмосферы. Используются значения на протяжении маршрута полета попутной составляющей скорости ветра на различных эшелонах, температуры воздуха на различных высотах и атмосферного давления. Оптимизация высотно-скоростного профиля полета осуществляется методом покоординатного спуска с ограничениями. Рассмотрена оптимизация расхода топлива крейсерского полета среднемагистрального самолета с использованием примера данных температуры, давления и скорости ветра. Получено снижение расхода топлива на 1,2% при оптимизации с учетом реальной атмосферы.

Ключевые слова: оптимизация, дозвуковой турбореактивный самолет, расход топлива, температура воздуха, скорость ветра, моделирование полета.

DOI: 10.31857/S0005231023040013, EDN: QHPVML

1. Введение

Актуальность проблемы минимизации расхода топлива повышается не только в связи с ростом требований к экономичности полетов, но и важностью сокращения выбросов CO_2 . Поэтому решения, обеспечивающие снижение

¹ Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 21-71-30005, <https://rscf.ru/project/21-71-30005/>

расхода хотя бы на доли процента, представляют явный практический интерес. В [1] рассматривалась задача оптимизации высотно-скоростного профиля крейсерского полета воздушного судна для условий стандартной атмосферы и при отсутствии ветра. На примере полета на расстояние 5000 км среднемагистрального самолета показана возможность снижения расхода топлива на 0,4%. Это, с одной стороны, подтверждает вывод статьи [2] о том, что при полете на расстояние менее 5000 км маневрирование по скорости и высоте не дает заметной экономии топлива. С другой стороны, экономию топлива 0,4% можно считать значимым результатом.

Рассматривая задачу прибытия в точку назначения в заданное время, очевидно, что ее содержательное решение невозможно без учета скорости ветра на маршруте полета [3, 4]. Преобладающие значения скорости ветра на типовых эшелонах полета даже могут учитываться в расписании полетов. Но для каждого полета необходимо анализировать текущие прогнозные данные. Среди недавних публикаций по этой тематике отметим [5–7]. В [5] ищется оптимальный профиль скорости с учетом попутной/встречной составляющей ветра при полете на постоянной заданной высоте, и предполагается, что известна аппроксимирующая функция зависимости расхода топлива от массы воздушного судна и скорости полета. В [6] анализируется влияние профиля ветра на оптимальный высотно-скоростной профиль полета. Оптимизация прямых эксплуатационных расходов, объединяющих расход топлива и время полета, в условиях изменения ветра вдоль маршрута рассмотрена в [7].

В [8] показано значительное влияние температуры атмосферного воздуха на результаты оптимизации программы полета. При этом рассматриваются отличные от стандартной атмосферы, но типовые распределения температуры, характерные для различных климатических зон. Расчет значений параметров атмосферы в текущей точке полета из прогнозных значений для отдельных точек маршрута рассмотрен в [9], где подчеркнута важность использования данных атмосферы для расчета траектории полета.

В настоящей статье исследуется задача оптимизации высотно-скоростного профиля крейсерского полета, используя данные температуры атмосферного воздуха и скорости попутной/встречной составляющей ветра на различных высотах на протяжении маршрута полета. Необходимые данные могут быть получены от метеорологических служб. Так, в [9] используются данные глобальной системы прогноза погоды с шагом $0.25^\circ \times 0.25^\circ$ по широте и долготе для 27 фиксированных изобарических уровней по высоте. Такие прогнозы выпускаются каждые 12 ч с интервалом прогноза 3 ч. В [10] использованы аналогичные данные глобальной спектральной модели, которые обновляются каждые 6 ч. В настоящей статье описан набор необходимых данных без привязки к какой-то определенной структуре данных метеорологической службы. Статья содержит 7 разделов, считая введение. В разделе 2 описана структура данных о температуре воздуха и скорости ветра, используемая в настоящей статье, а также приведены формулы расчета других параметров атмосферы. В разделе 3 сформулирована решаемая задача оптимизации рас-

хода топлива. Значение целевой функции оптимизации — расхода топлива на этапе крейсерского полета — находится путем численного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих движение центра масс воздушного судна. Эта система рассмотрена в разделе 4. Раздел 5 посвящен разработанной процедуре оптимизации. Пример оптимизации расхода топлива дозвукового турбореактивного пассажирского самолета представлен в разделе 6. Заключительные выводы приведены в разделе 7.

2. Параметры атмосферы

Известно, что атмосферное давление P на высоте h_t определяется как

$$(1) \quad P = P_0 \exp \left(- \int_{h_0}^{h_t} \frac{g}{RK(h)} dh \right),$$

где P_0 — значение атмосферного давления на известной высоте h_0 , g — ускорение свободного падения, R — газовая постоянная воздуха, $K(h)$ — температура в Кельвинах, зависящая от высоты.

Будем считать, что состояние реальной атмосферы описано набором прогнозных данных для нескольких точек маршрута $[L_0, L_1, \dots, L_{n_L}]$, где L_i — это расстояние от начала оптимизируемого маршрута крейсерского полета, и для удобства изложения принимаем, что прогнозные данные есть в том числе для начальной и конечной точек маршрута, т.е. $L_0 = 0$ и $L_{n_L} = r_{cr}$, где r_{cr} — заданное расстояние крейсерского полета. Для каждой точки L_i , ($i = 0, \dots, n_L$) должны быть данные о температуре $K(h)$ для различных высот $[h_{K_0}, h_{K_1}, \dots, h_{K_{n_h}}]$, где $h_{K_{n_h}}$ не меньше максимальной высоты крейсерского полета, и значение давления P_0 на высоте h_{K_0} . Для простоты будем считать, что значения этих высот одинаковы для всех точек маршрута L_i . Количество и значения высот должны быть достаточными для численной оценки с приемлемой точностью интеграла в (1) для $h_{K_i} \leq h_t < h_{K_{i+1}}$ через сумму

$$(2) \quad \int_{h_{K_0}}^{h_t} \frac{g}{RK(h, L)} dh \approx \sum_{j=1}^i \frac{g(h_{K_j} - h_{K_{j-1}})}{R \frac{K(h_{K_{j-1}}, L) + K(h_{K_j}, L)}{2}} + \frac{g(h_t - h_{K_i})}{R \frac{K(h_t, L) + K(h_{K_i}, L)}{2}},$$

где значения $K(h_t, L)$ для высоты $h_t \neq h_i$ и $K(h, L)$ для произвольной точки маршрута $L \neq L_i$ определяются методом линейной интерполяции. Следует отметить, что при выборе высот с данными температуры должна учитываться тропопауза.

Таким образом, по этим данным можно вычислять оценку значения давления $P(h, L)$ в каждой точке полета. Эта оценка является весьма важной, поскольку крейсерский полет осуществляется на барометрической высоте, т.е. полет на заданном эшелоне — это полет на заданном значении атмосферного давления. Кроме того, по этим данным можно получить оценки значений

скорости звука a и плотности воздуха ρ для любой точки полета, используя стандартные формулы

$$(3) \quad a(h, L) = \sqrt{\kappa R K(h, L)},$$

$$(4) \quad \rho(h, L) = \frac{P(h, L)}{R K(h, L)},$$

где $\kappa = 1,4$ — показатель адиабаты воздуха.

Аналогично должна быть задана таблица скорости встречного/попутного ветра для нескольких точек маршрута $[L_{\text{wind}_0}, L_{\text{wind}_1}, \dots, L_{\text{wind}_{n_w}}]$, которые могут не совпадать с точками маршрута, для которых есть данные температуры. Скорость ветра должна быть задана для всех возможных эшелонов крейсерского полета, а для текущей точки полета определяться также методом линейной интерполяции. Таким образом, параметры атмосферы представляют собой следующий набор значений и прогнозных данных:

$$(5) \quad \begin{aligned} L_K &= [L_0, L_1, \dots, L_{n_L}], h_K = [h_{K_0}, h_{K_1}, \dots, h_{K_{n_h}}], \\ K_{\text{data}} &= \begin{bmatrix} K(h_{K_{n_h}}, L_0) & \dots & K(h_{K_{n_h}}, L_{n_L}) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(h_{K_0}, L_0) & \dots & K(h_{K_0}, L_{n_L}) \end{bmatrix}, P_{0\text{data}} = [P_0(L_0), \dots, P_0(L_{n_L})], \\ L_{\text{wind}} &= [L_{\text{wind}_0}, L_{\text{wind}_1}, \dots, L_{\text{wind}_{n_w}}], h_{\text{wind}} = [h_{\text{wind}_1}, \dots, h_{\text{wind}_{n_{FL}}}], \\ V_{\text{wind}_{\text{data}}} &= \begin{bmatrix} V_{\text{wind}}(h_{\text{wind}_{n_{FL}}}, L_{\text{wind}_0}) & \dots & V_{\text{wind}}(h_{\text{wind}_{n_{FL}}}, L_{\text{wind}_{n_w}}) \\ \dots & \dots & \dots \\ V_{\text{wind}}(h_{\text{wind}_1}, L_{\text{wind}_0}) & \dots & V_{\text{wind}}(h_{\text{wind}_1}, L_{\text{wind}_{n_w}}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Эти данные позволяют моделировать полет с учетом прогнозных данных реальной атмосферы. Следует учитывать, что так как значения скорости ветра и параметров атмосферы для текущей точки полета находятся методом линейной интерполяции из данных (5), то точность моделирования зависит от того, насколько эти данные отражают все изменения значений скорости ветра и параметров атмосферы по маршруту полета.

3. Постановка задачи

Задача прохождения заданного расстояния r_{cr} за заданное время t_{cr} для крейсерского полета с учетом данных о скорости ветра и температуры в самом простом варианте может быть решена как полет на выбранном эшелоне с постоянным числом Маха, которое можно вычислить как

$$(6) \quad M = \left(\frac{r_{\text{cr}}}{t_{\text{cr}}} - V_{\text{wind}_{\text{av}}} \right) / a_{\text{av}},$$

где $V_{\text{wind}_{\text{av}}}$ — средняя скорость ветра и a_{av} — среднее значение скорости звука на выбранном эшелоне. Но выбор эшелона должен осуществляться исходя из минимизации расхода топлива, учитывая не только плотность воздуха,

определяющую подъемную силу и силу лобового сопротивления, но и расход топлива, необходимый для набора дополнительной высоты, а также разную скорость ветра на разных эшелонах.

Если расстояние крейсерского полета велико настолько, что может быть разрешена смена эшелона, то можно усложнить задачу, формируя высотный профиль полета следующим образом: для заданного количества N участков по высоте и заданного минимального времени полета без смены эшелона $t_{FL_{\min}}$ найти оптимальные значения эшелона h_{FL_i} из множества разрешенных эшелонов

$$(7) \quad h_{FL_i} \in \{h_1, \dots, h_{n_{FL}}\}$$

на каждом из N участков и времени t_{FL_i} каждого участка при условиях

$$(8) \quad t_{FL_i} \geq t_{FL_{\min}},$$

$$(9) \quad \sum_{i=1}^N t_{FL_i} = t_{cr}.$$

Уменьшение массы воздушного судна по мере расходования топлива, разная плотность воздуха на различных участках полета, определяемая прогнозом температуры и давления, и разная скорость ветра могут приводить к тому, что изменение скорости полета на различных участках даже при выполнении условия прилета в заданное время может давать экономию топлива. Поэтому в настоящей работе, как и в [1], предлагается формировать скоростной профиль этапа крейсерского полета следующим образом: разделить этап крейсерского полета на n участков равного размера $r = r_{cr}/n$, для каждого из которых искать оптимальные значения времени t_{V_i} , затраченного на каждый участок, соблюдая условие

$$(10) \quad \sum_{i=1}^n t_{V_i} = t_{cr}.$$

На каждом таком участке по скорости полет будет проходить с числом Маха, определяемым аналогично (5):

$$(11) \quad M_i = \left(\frac{r}{t_{V_i}} - V_{\text{wind}_{av_i}} \right) / a_{av_i},$$

где $V_{\text{wind}_{av_i}}$ и a_{av_i} — средние значения скорости ветра и звука на i -м участке.

Тогда сформулируем задачу оптимизации.

Задача 1. Для этапа крейсерского полета для заданных параметров воздушного судна, начальных условий полета, расстояния r_{cr} и времени t_{cr} крейсерского полета, числа участков n по скорости и N по высоте, разрешенных эшелонов полета и прогнозных значений параметров атмосферы (5) найти значения вектора

$$(12) \quad x = [t_{V_1}, \dots, t_{V_n}, h_{FL_1}, \dots, h_{FL_N}, t_{FL_1}, \dots, t_{FL_N}],$$

удовлетворяющие ограничениям (7)–(10) и минимизирующие расход топлива

$$(13) \quad q_{cr}(x) = \int_0^{t_{cr}} q_c(t) dt,$$

где $q_c(t)$ — секундный расход топлива.

Следует помнить, что соотношение заданных расстояния r_{cr} и времени t_{cr} крейсерского полета должно быть достижимым для минимального и максимального разрешенного числа Маха с учетом скорости ветра.

4. Моделирование расхода топлива

В (13) значение секундного расхода топлива упрощенно можно выразить как

$$(14) \quad q_c = \eta(M, T, h)T,$$

где T — текущее значение суммарной тяги двигателей, а $\eta(M, T, h)$ — удельный расход топлива, зависящий от текущих значений числа Маха, тяги, высоты полета и других параметров. Обычно для получения значения $\eta(M, T, h)$ используются аппроксимирующие формулы, соответствующие различным режимам работы двигателей исследуемого воздушного судна [11]. Значение тяги можно оценить в зависимости от текущих значений скорости и массы воздушного судна по статической модели, принимая воздушную скорость и высоту полета постоянными значениями [1].

Особенность рассматриваемой задачи с учетом данных реальной атмосферы состоит в том, что переходные процессы возникают не только при нечистых изменениях требуемых значений скорости и высоты в соответствии с выбранным высотнo-скоростным профилем полета, но и в связи с изменением температуры воздуха в зависимости от текущей точки маршрута, которое приводит к изменению скорости звука, а следовательно, к изменению воздушной скорости для поддержания заданного числа Маха. Изменение атмосферного давления приводит к маневрированию по геометрической высоте для полета на постоянной барометрической высоте эшелона. Поэтому для более точной оценки значений тяги и удельного расхода топлива предлагается численно моделировать систему дифференциальных и алгебраических уравнений, описывающую движение центра масс воздушного судна. Эту систему логически можно разделить на три части. Первая отражает законы физики [1, 12, 13]:

$$(15) \quad m\dot{V} = T \cos(\alpha + \phi) - \frac{1}{2}c_x\rho SV^2 - mg \sin \Theta + Vq_c,$$

$$(16) \quad mV\dot{\Theta} = T \sin(\alpha + \phi) - \frac{1}{2}c_y\rho SV^2 - mg \cos \Theta,$$

$$(17) \quad \dot{h} = V \sin \Theta,$$

$$(18) \quad \dot{L} = V \cos \Theta + V_{wind},$$

$$(19) \quad \dot{m} = -q_c,$$

где m — масса воздушного судна, V — воздушная скорость, T — суммарная тяга двигателей, α — угол атаки, ϕ — угол установки двигателей, c_x, c_y — аэродинамические коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы, ρ — плотность воздуха, S — площадь крыла, g — ускорение свободного падения, Θ — угол наклона траектории, h — высота полета, L — пройденное расстояние, V_{wind} — скорость попутной/встречной составляющей ветра.

Вторая часть — это модели динамики тяги и тангажа, которые для целей моделирования расхода топлива можно упростить до дифференциальных уравнений первого порядка. Тангаж — это угол между осью воздушного судна и горизонтом, управляемый рулем высоты. Из значений тангажа и угла наклона траектории находим значение угла атаки:

$$(20) \quad \dot{T} = -k_1 T + k_2 \delta_T,$$

$$(21) \quad \dot{\theta} = -k_3 \theta + k_4 \delta_\theta,$$

$$(22) \quad \alpha = \theta - \Theta,$$

где θ — тангаж, δ_T, δ_θ — значения сигналов управления, k_1, k_2, k_3, k_4 — коэффициенты моделей. К этой же части нужно отнести уравнение (14) вычисления секундного расхода топлива.

Третья часть — это моделирование системы управления. Предполагается, что управление тягой формируется ПИД-регулятором скорости, выраженной числом Маха:

$$(23) \quad \delta_T(t) = \text{PID}(M_i - M(t)),$$

где M_i — это значение, полученное из (11) для текущего участка по скорости, а значение $M(t) = V(t)/a(t)$, где $V(t)$ получено из (15), а текущее значение скорости звука $a(t)$ находим по формуле (3), используя данные (5) реальной атмосферы для текущей точки полета. Для целей настоящей работы не требуется точное воспроизводство функционирования системы управления, а достаточно упрощенного моделирования для получения переходных процессов, близких к реальным, для оценки секундного расхода топлива. Поэтому можно в (20) принять $k_2 = k_1$, и тогда коэффициент пропорциональности регулятора (23) должен выбираться так, чтобы значение $\delta_T(t)$ было равно требуемой тяге. В этом случае значение $\delta_T(t)$ ограничено значениями тяги в режиме малого газа и максимальной доступной тяги на текущих скорости и высоте полета. В крейсерском полете эти значения обычно не достигаются. Управление тангажом можно упрощенно моделировать как ПИ-регулятор барометрической высоты:

$$(24) \quad \delta_\theta(t) = \text{PI}(P_i - P(t)),$$

где P_i — это значение атмосферного давления, соответствующего выбранному эшелону для текущего участка по высоте, а $P(t)$ — текущее значение атмосферного давления для высоты $h(t)$, полученной из (17), определяемое

по формулам (1), (2), используя данные (5) реальной атмосферы. Здесь также можно в (21) принять $k_4 = k_3$, и тогда коэффициент пропорциональности регулятора (24) выбирается так, чтобы значение $\delta_\theta(t)$ было равно требуемому тангажу. Ограничение для $\delta_\theta(t)$ — это сумма текущего значения угла атаки и максимального значения угла наклона траектории для крейсерского полета.

Для решения системы (14)–(24) должны быть заданы константы ϕ и S в (15), (16), коэффициенты уравнений (20), (21), коэффициенты регуляторов (23), (24), таблицы или аппроксимирующие функции для значений аэродинамических коэффициентов c_x и c_y в (15), (16), которые зависят от угла атаки и числа Маха, и аппроксимирующая функция для значения удельного расхода топлива $\eta(M, T, h)$ в (14). Ускорение свободного падения принимаем равным стандартному значению $g_0 = 9,80665$. Плотность воздуха ρ для (15), (16) и скорость ветра V_{wind} для (18) получаем из данных реальной атмосферы (5).

Таким образом, для выбранного вектора (12) и заданных начальных условий находим значение целевой функции (13), решая систему уравнений (14)–(24) для заданного времени t_{cr} . Для получения приемлемой точности при ограниченной вычислительной сложности предлагается численно решать эту систему методом Эйлера первого порядка с шагом одна секунда. При этом разница результата моделирования по сравнению с методом Рунге–Кутты четвертого порядка пренебрежимо мала [1]. Такой шаг можно считать достаточно малым для моделируемой системы, но увеличение шага может приводить к некорректному моделированию системы управления. Кроме того, при моделировании полета не будут использоваться упрощенные статические уравнения расчета расхода на участках с постоянной воздушной скоростью и высотой полета, предложенные в [1], так как при моделировании реальной атмосферы такие участки малы или могут отсутствовать.

Для корректности сравнения значений целевой функции, полученных для вариантов вектора (12) с разной конечной высотой h_{FL_N} , кроме начальных условий будем дополнительно задавать требуемое значение эшелона в конце этапа крейсерского полета $h_{FL_{\text{final}}}$ и выделять фиксированное достаточное дополнительное время t_{add} для достижения этого эшелона с любого разрешенного эшелона h_{FL_N} . Тогда моделирование полета в течение времени $t_{\text{cr}} + t_{\text{add}}$ для выбранного вектора (12) будет давать значение расхода топлива для одной и той же конечной высоты $h_{FL_{\text{final}}}$.

5. Процедура оптимизации

Решение рассматриваемой здесь задачи минимизации расхода топлива с учетом данных реальной атмосферы не приводит к необходимости изменения процедуры оптимизации, предложенной в [1]. Поэтому еще раз изложим только основную идею.

Так как значение целевой функции (13) находится путем моделирования, то аналитическая функция градиента отсутствует. Поэтому предлагается использовать детерминированный безградиентный поисковый метод оп-

тимизации, основанный на покоординатном спуске [14], с вспомогательными точками-кандидатами и с учетом ограничений.

Вектор варьируемых переменных (12) состоит из трех групп: $x = [x^1, x^2, x^3]$, где $x^1 = [t_{V_1}, \dots, t_{V_n}, h_{FL_1}]$ — значения времени для каждого из n участков по скорости, $x^2 = [h_{FL_1}, \dots, h_{FL_N}]$ — значения эшелонов для каждого из N участков по высоте и $x^3 = [t_{FL_1}, \dots, t_{FL_N}]$ — длительность каждого из этих N участков. Особенность второй группы варьируемых переменных x^2 состоит в том, что ее элементы принадлежат заданному конечному множеству разрешенных эшелонов $h_{FL_i} \in \{h_1, \dots, h_{n_{FL}}\}$, причем число элементов n_{FL} этого множества небольшое. Поэтому точками-кандидатами будут все разрешенные эшелоны. Для варьируемых переменных из групп x^1 и x^3 должны выполняться ограничения (10) и (9) соответственно. Это можно обеспечить, например, следующим образом: при увеличении выбранной компоненты все остальные компоненты группы уменьшаются так, чтобы было выполнено соответствующее равенство. Кроме того, для группы x^3 должно выполняться ограничение (8). Отметим, что ограничения на число Маха

$$(25) \quad M_i \in [M_{\min}, M_{\max}]$$

при учете скорости ветра не могут быть точно преобразованы в ограничения для компонент группы x^1 . Поэтому будем использовать максимально широкий интервал

$$t_{V_i} \in \left[\frac{r}{M_{\max} a_{\max} + V_{\text{wind}_{\max}}}, \frac{r}{M_{\min} a_{\min} + V_{\text{wind}_{\min}}} \right],$$

но проверять, что если в результате получаем значение числа Маха, выходящее за допустимые пределы, то этот вариант вектора варьируемых переменных отбраковывается. Эта проверка реализована в процедуре вычисления значения целевой функции, и при нарушении ограничений (25) вычисление расхода топлива не производится, а значение целевой функции принимается максимальным.

Таким образом, процедура оптимизации организуется как покоординатный поиск минимума целевой функции, пока не будет достигнуто условие, что при прохождении по всем координатам не найден новый минимум целевой функции с учетом выбранного порога. Кроме того, установлено ограничение максимального числа шагов поиска.

6. Пример

Для проверки предложенных процедур моделирования расхода топлива и оптимизации разработано программное обеспечение, где заданы необходимые коэффициенты уравнений (20), (21), аппроксимирующие функции для аэродинамических коэффициентов и удельного расхода топлива, и реализована модель системы управления (23), (24) так, чтобы поведение системы

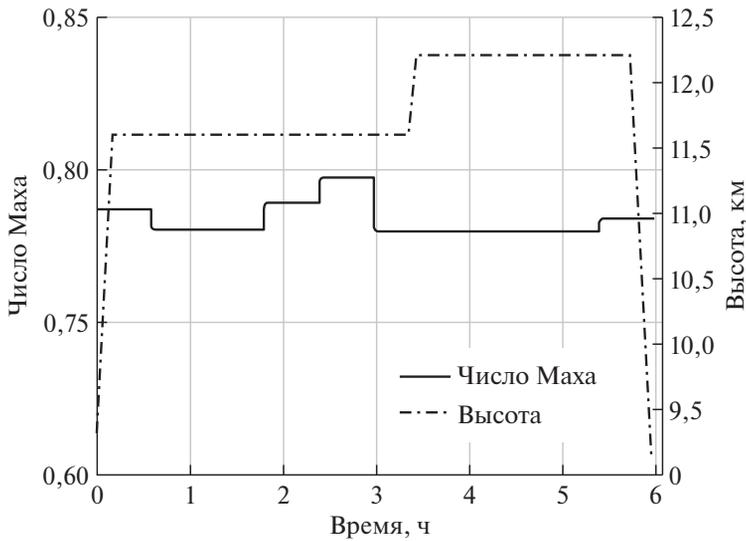


Рис. 1. Скорость, выраженная числом Маха, и высота полета в стандартной атмосфере.

соответствовало реальному воздушному судну. В табл. 1 для моделируемого среднемагистрального пассажирского самолета приведены начальные значения, ограничения и другие параметры.

Полученный для этих данных при помощи описанной выше процедуры оптимизации высотно-скоростной профиль для стандартной атмосферы [15] при отсутствии ветра приведен на рис. 1. Оценка расхода топлива составила 12 385 кг. Полученный профиль полета и расход топлива отличаются от полученных в [1], так как использована более точная аппроксимация аэродинамических коэффициентов, а в системе управления моделируется регулятор числа Маха вместо регулятора истинной воздушной скорости.

Таблица 1. Параметры моделирования

Наименование	Обозначение	Значение	Комментарий
Начальная масса	$m(0)$	75 000 кг	75 т
Начальная высота	h_{FL_0}	9144 м	FL300
Требуемая конечная высота	$h_{FL_{final}}$	9144 м	FL300
Начальная скорость	M_0	0,77	
Моделируемое расстояние	r_{cr}	5 000 000 м	5000 км
Время крейсерского полета	t_{cr}	21 600 с	6 ч
Минимальная скорость	M_{min}	0,6	
Максимальная скорость	M_{max}	0,85	
Максимальный наклон траектории	Θ_{max}	1 град	
Число участков по скорости	n	10	
Число участков по высоте	N	4	

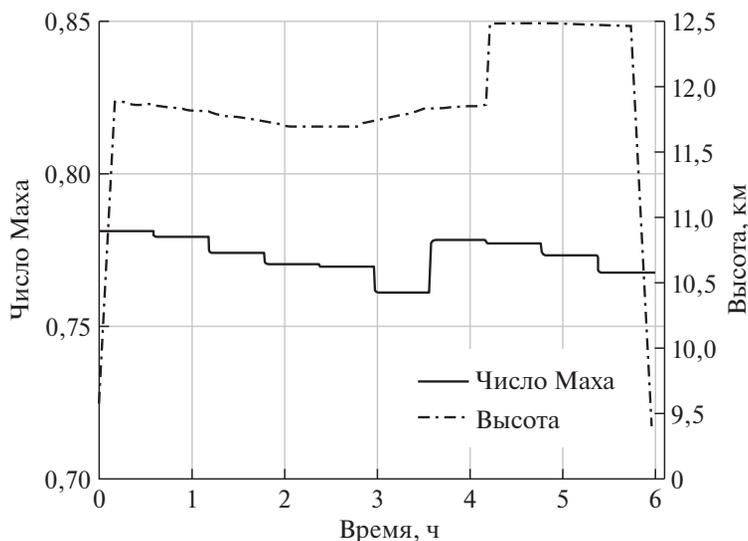


Рис. 2. Скорость, выраженная числом Маха, и высота полета в реальной атмосфере с данными из табл. 2.

В табл. 2 приведен пример данных температуры и давления на протяжении маршрута, отличных от стандартной атмосферы, и для сравнения в крайней правой колонке, обозначенной ISA, приведены соответствующие значения стандартной атмосферы.

Если промоделировать крейсерский полет с высотно-скоростным профилем, полученным для стандартной атмосферы, с использованием данных

Таблица 2. Прогнозные данные температуры и атмосферного давления

Точки маршрута, км	0	400	900	1750	2250	3000	4000	5000	ISA
Давление, гПа, (высота 2 м)	1019	1014	1013	1008	1002	997	999	1000	1013
Температура, °С, на высоте: 2 м	30	30	25	14	16	23	32	27	15
500 м	24	24	19	10	12	20	32	30	11,75
1000 м	21	19	14	4	6	16	28	27	8,5
1500 м	15	15	10	2	4	14	23	21	5,25
2000 м	11	12	9	1	1	11	19	17	2
2500 м	10	8	6	-1	-3	10	14	12	-1,25
3000 м	6	5	4	-2	-5	6	9	6	-4,5
3600 м	2	1	-2	-4	-6	1	4	2	-8,4
4200 м	-2	-3	-6	-7	-10	-3	-1	0	-12,3
5500 м	-11	-12	-14	-16	-20	-11	-9	-9	-20,75
9000 м	-42	-42	-42	-44	-40	-38	-37	-38	-43,5
11 000 м	-54	-53	-50	-45	-40	-48	-57	-58	-56,5
12 000 м	-54	-53	-50	-45	-40	-48	-57	-58	-56,5

Таблица 3. Скорость попутного ветра, м/с

Точки маршрута, км / Эшелон	0	400	900	1750	2250	3000	4000	5000
FL300	21	31	22	25	48	29	38	33
FL320	20	31	22	26	46	29	40	32
FL340	19	32	23	26	43	30	42	31
FL360	18	30	23	27	39	29	41	32
FL380	17	26	24	29	32	27	40	33
FL400	17	24	24	30	30	26	40	33

табл. 2 и формул параметров атмосферы из раздела 2, то получим расход топлива 12 445 кг, что больше, чем получено для стандартной атмосферы, и время прилета в заданную точку на 4,5 мин меньше, что не соответствует требованию прилета в заданное время.

Теперь проведем поиск оптимального высотного-скоростного профиля для тех же исходных данных полета, но с использованием значений температуры и давления реальной атмосферы из табл. 2. В этом случае достигнут расход топлива 12 296 кг, т.е. экономия составила 1,2% при выполнении требования заданного времени прилета. Полученная в этом примере абсолютная величина снижения расхода 149 кг — это экономически существенный результат. Полученный высотный-скоростной профиль приведен на рис. 2. Заметим, что геометрическая высота h , показанная на рисунке, не постоянна при полете на одном эшелоне, а меняется в соответствии с изменением атмосферного давления на протяжении маршрута.

Добавим к этому маршруту данные о скорости ветра. В табл. 3 приведены значения скорости попутной составляющей ветра. Обозначение “FL300” подразумевает, что это эшелон (Flight Level), соответствующий высоте полета 30 000 футов при стандартной атмосфере. Отрицательное значение используется, если это скорость встречного ветра. Рассмотрим пример, когда на всем маршруте ветер попутный. Очевидно, что в этом случае, используя профиль, полученный для стандартной атмосферы без учета скорости ветра, фактическое время прибытия будет меньше, чем заданное. В рассматриваемом примере время полета на расстояние 5000 км составило 5 ч 15 мин и расход топлива 11 157 кг. Профиль, показанный на рис. 3, получен при оптимизации с учетом данных табл. 2 реальной атмосферы и скоростей ветра из табл. 3. При этом получен расход топлива 11 112 кг, т.е. дополнительная экономия 0,4% при выполнении требования заданного времени прилета. На рис. 3 видно, что при попутном ветре и получающейся низкой воздушной скорости оказывается неэкономичным полет на высоких эшелонах.

Для примера полета с встречным ветром возьмем данные из табл. 3 с обратным знаком. Заметим, что в этом случае невозможно выполнить ограничение $M < 0,85$ для заданных расстояния и времени крейсерского полета. Преобладающее направление ветра для данного маршрута обычно учитывается

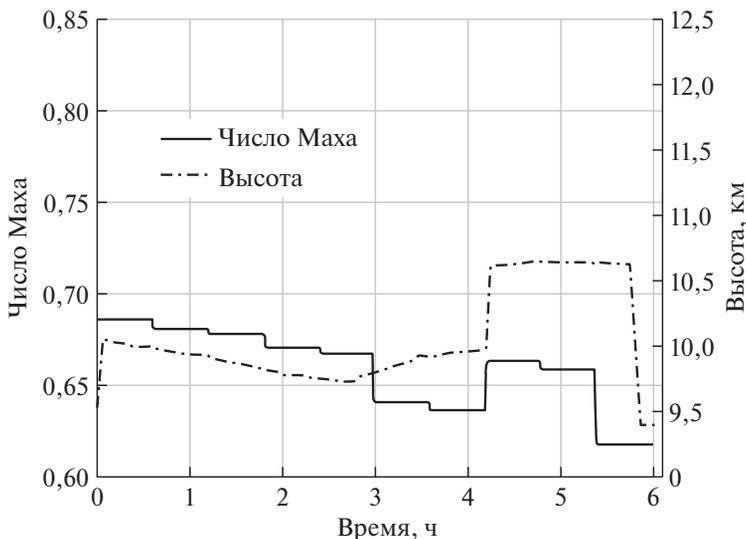


Рис. 3. Скорость, выраженная числом Маха, и высота полета в реальной атмосфере с попутным ветром с данными из табл. 2 и 3.

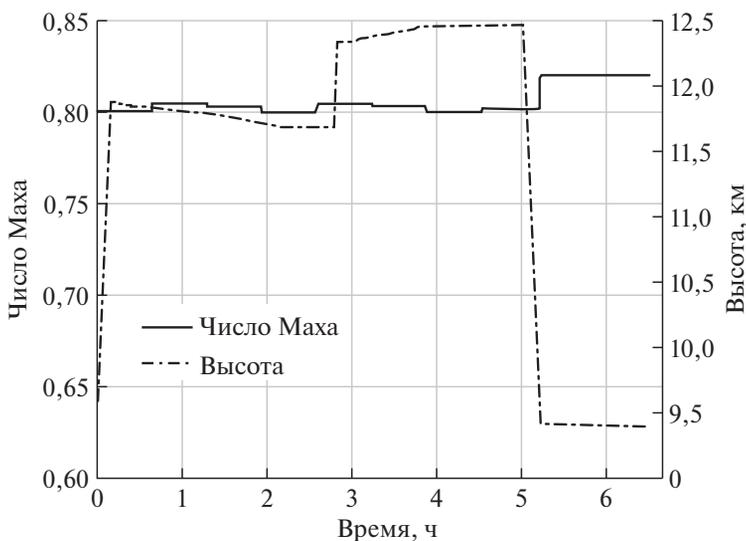


Рис. 4. Скорость, выраженная числом Маха, и высота полета в реальной атмосфере с встречным ветром с данными из табл. 2 и 3.

в расписании. Если это нестандартный прогноз, то очевидно, что выделенное время должно быть увеличено. Проведем оптимизацию для $t_{cr} = 23\,400$ с (6,5 ч). Получен расход топлива 15 720 кг, высотно-скоростной профиль приведен на рис. 4. Следует отметить, что процедура оптимизации учитывает разницу скорости ветра на разных эшелонах.

В приведенных примерах для вычислений использовался персональный компьютер средней производительности с процессором Intel Core i5 2.8 ГГц. Процедура вычисления целевой функции путем численного решения системы дифференциальных уравнений (14)–(24) методом Эйлера первого порядка с шагом одна секунда при моделировании 6 ч полета выполняется примерно за 1 с. Процедура оптимизации для приведенных в табл. 1 значений $n = 10$, $N = 4$, что дает 18 варьируемых переменных в векторе (12), сходится за 100–150 шагов. Так, в одном из примеров число шагов составило 135, и при этом целевая функция вычислялась 703 раза. Таким образом, процедура оптимизации была выполнена примерно за 12 мин, что приемлемо для практической реализации. Следует заметить, что при полете меньшей дальности не только сокращается время вычисления целевой функции, так как моделируется меньшее время полета, но и существенно снижается число шагов процедуры оптимизации, так как для меньшего расстояния выбираются меньшие значения числа участков по скорости n и высоте N , уменьшая число варьируемых переменных. Для полетов большой дальности можно реализовать поэтапную оптимизацию, когда первоначально задаются меньшие значения числа участков n и N , что позволит быстро получить предварительное решение. Кроме того, на практике и для окончательной оптимизации скорее всего будут выбираться меньшие значения n и N , так как, например, для полетов на расстояние 5000 км обычно смена эшелона проводится не более 1 раза, т.е. $N = 2$. В статье для примеров выбрано большее значение, чтобы найти возможные оптимальные решения. При этом только в примере, график высоты которого приведен на рис. 4, оптимальное решение имеет 2 смены эшелона, а в остальных примерах при $N = 4$ были определены одинаковые значения эшелонов для первых двух и последних двух участков, т.е. для $N = 2$ было бы получено такое же решение.

7. Заключение

Значение расхода топлива для заданных исходных данных получается как результат моделирования полета на всем рассматриваемом этапе. При этом важной составляющей модели являются текущие параметры атмосферы — значения атмосферного давления, плотности воздуха и скорости звука в каждой точке полета. Для определения этих значений используются данные об атмосферном давлении на протяжении маршрута и температуре воздуха на некоторой сетке высот от базовой, для которой определено атмосферное давление, до максимально возможной высоты полета. Заметим, что в этих данных температуры учитывается тропопауза. Оптимизация высотно-скоростного профиля крейсерского полета с использованием этих данных реальной атмосферы на протяжении маршрута позволяет получить заметное снижение расхода топлива (более 1%) для дозвукового турбореактивного пассажирского самолета.

Данные о скорости ветра на различных эшелонах на протяжении маршрута полета позволяют не только выбрать скоростной профиль, обеспечи-

вающий прибытие в точку назначения в заданное время, но и получить дополнительную экономию топлива. Учет скорости ветра существенно влияет на выбор экономичного эшелона полета, в том числе учитывая зависимость скорости ветра от высоты.

Таким образом, для оптимизации полета важно иметь максимальное количество и точность текущих и прогнозных данных о состоянии реальной атмосферы: атмосферного давления, температуры воздуха и скорости ветра по всему маршруту.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В.А., Зыбин Е.Ю., Косьянчук В.В., Сельвесюк Н.И., Тремба А.А., Хлебников М.В. Оптимизация высотно-скоростного профиля крейсерского полета воздушного судна при фиксированном времени прибытия // *АиТ*. 2021. № 7. С. 69–85.
Alexandrov V.A., Zybin E.Y., Kosyanchuk V.V., Selvesyuk N.I., Tremba A.A., Khlebnikov M.V. Optimization of the Altitude and Speed Profile of the Aircraft Cruise with Fixed Arrival Time // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 7. P. 1169–1182.
2. Губарева Е.А., Мозжорина Т.Ю. Оптимизация программы полета дозвукового пассажирского самолета на участке крейсерского полета // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2014. Вып. 12(36).
3. Голубева А.А., Григоров П.Ю., Куланов Н.В. Современная методология решения задачи вертикальной навигации самолетов гражданской и военно-транспортной авиации // XII мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2019). 2019. С. 32–35.
4. Сагалаков А.Э., Филатьев А.С. К оптимизации траекторий летательных аппаратов в реальной атмосфере // *Ученые записки ЦАГИ*. 2019. Т. 50. № 4. С. 31–52.
5. Saucier A., Maazoun W., Soumis F. Optimal speed-profile determination for aircraft trajectories // *Aerosp. Sci. Technol.* 2017. V. 67. P. 327–342.
6. Franco A., Rivas D. Optimization of Multiphase Aircraft Trajectories Using Hybrid Optimal Control // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2015. Vol. 38. No. 3. P. 452–467.
7. Valenzuela A., Rivas D. Analysis of along-track variable wind effects on optimal aircraft trajectory generation // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2016. Vol. 39. No. 9. P. 2148–2155.
8. Мозжорина Т.Ю., Губарева Е.А. Моделирование влияния атмосферных условий на результаты оптимизации программы полета дозвукового пассажирского самолета // *Математическое моделирование и численные методы*. 2014. № 3. С. 74–88.
9. Dancila R.I., Botez R.M. New atmospheric data model for constant altitude accelerated flight performance prediction calculations and flight trajectory optimization algorithms // *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*. 2021. 235(4). P. 405–426.
10. Takeichi N. Adaptive prediction of flight time uncertainty for ground-based 4D trajectory management // *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*. 2018. Vol. 95. P. 335–345.

11. *Bartel M., Young T.M.* Simplified Thrust and Fuel Consumption Models for Modern Two-Shaft Turbofan Engines // Journal of Aircraft. 2008. No. 45(4). P. 1450–1456.
12. *Григоров П.Ю., Куланов Н.В.* Применение концепции обратных задач динамики в задачах вертикальной навигации // Известия РАН. Теория и системы управления. 2016. № 3. С. 130–140.
13. *Hull D.G.* Fundamentals of Airplane Flight Mechanics. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.
14. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. 2-е издание, исправленное и дополненное. М.: ЛЕНАНД, 2014.
15. ГОСТ 4401-81. Атмосфера стандартная. Параметры. М.: Изд-во стандартов, 2004.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.

Поступила в редакцию 03.07.2022

После доработки 11.11.2022

Принята к публикации 30.11.2022

© 2023 г. Ю.А. ДУБНОВ (yury.dubnov@phystech.edu)

(Федеральный исследовательский центр

“Информатика и управление” РАН, Москва;

Национальный исследовательский университет

“Высшая школа экономики”, Москва),

А.Ю. ПОПКОВ, канд. техн. наук (aporkov@isa.ru)

(Федеральный исследовательский центр

“Информатика и управление” РАН, Москва),

Б.С. ДАРХОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук (darbor2004@mail.ru)

(Федеральный исследовательский центр

“Информатика и управление” РАН, Москва)

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМА ОЦЕНИВАНИЯ ГЁЛЬДЕРОВОЙ ЭКСПОНЕНТЫ НА БАЗЕ КОНЦЕПЦИИ ϵ -СЛОЖНОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ¹

В работе приводится описание метода оценивания гёльдеровой экспоненты на базе недавно сформулированной концепции ϵ -сложности непрерывных функций. Приведены результаты вычислительных экспериментов по оценке гёльдеровой экспоненты для гладких и фрактальных функций, а также результаты вычислительных экспериментов с траекториями дискретных детерминированных и стохастических систем.

Ключевые слова: ϵ -сложность непрерывных функций, гёльдерова экспонента.

DOI: 10.31857/S0005231023040025, EDN: QHSZBL

1. Введение

Процессы фрактального типа (в частности, винеровский и фрактальный винеровский процессы) в последнее время широко используются при построении моделей различных событий, эффектов и трендов, включая так называемые процессы с длительной памятью. Большое распространение такие процессы находят в различных областях физики (см., например, [1]), биологии и других областях науки. Довольно сложно найти область науки, в которой не встречались бы представители этого класса процессов.

Важной характеристикой стохастических случайных процессов является показатель Хёрста (определение можно найти, например, в [2]). Оценка этого показателя по наблюдаемой реализации случайного процесса представляет достаточно сложную проблему. В недавней работе [3] предложен метод такого оценивания.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-07-00221).

Одной из особенностей фрактальных функций является то, что они, будучи непрерывными, являются нигде недифференцируемыми, однако большой класс подобных функций удовлетворяет условию Гёльдера. Оценка гёльдеровской экспоненты (см. ниже точное определение) для фрактальных функций имеет такое же значение, как и оценка показателя Хёрста в стохастическом случае, поскольку, как известно (см. [4]), для винеровского и фрактального винеровского процессов с вероятностью единица локальная гёльдеровская экспонента сколь угодно близка к константе Хёрста. С другой стороны, гёльдеровская экспонента тесным образом связана с размерностью Хаусдорфа или показателем скейлинга, описывающего сохраняемость геометрии или статистических характеристик при изменении масштаба. Приведенные соображения делают задачу оценивания гёльдеровской экспоненты актуальной и интересной для многочисленных приложений.

В этой работе приводится экспериментальный анализ принципиально нового подхода к проблеме оценивания гёльдеровской экспоненты (и, как было отмечено выше, константы Хёрста). Этот подход основан на развиваемой в последние годы разработанной авторами концепции ϵ -сложности непрерывных функций, которая в идейном плане согласуется с подходом А.Н. Колмогорова к понятию «сложность объекта». Отметим, что концепция сложности объекта находит применения не только в теории управления, но и в широком классе иных приложений [5]. С другой стороны, применения концепции ϵ -сложности непрерывных функций в последние несколько лет вызывают определенный интерес у читателей ведущих научных журналов, в том числе в первом-втором квартилях WoS/Scopus [6–9]. Поэтому данная работа может не только познакомить читателей журнала с новой концепцией ϵ -сложности, но и потенциально привести к новым направлениям научных и практических исследований в данной области.

Основные результаты концепции ϵ -сложности непрерывных функций и метод оценивания гёльдеровской экспоненты на основе этой концепции можно найти в [8, 10]. В разделе 2, для удобства чтения, приводятся на содержательном уровне соответствующие результаты из этих работ. В разделе 3 описываются процедура оценивания и объекты анализа — некоторые гладкие и фрактальные непрерывные функции, а также последовательности, порождаемые стохастическими или детерминированными хаотическими механизмами. В разделе 4 приведены результаты вычислительных экспериментов.

2. ϵ -сложность и оценка гёльдеровской экспоненты

Неформально можно сказать, что ϵ -сложность оценивает число равномерных дискретных отсчетов непрерывной функции (заданной без ограничения общности на отрезке $[0, 1]$), которые необходимы для ее восстановления заданным набором *методов аппроксимации* с заданной точностью. Иными словами, эта величина оценивает минимальный объем информации (*на языке теории приближений*), который требуется для описания функции. В этом

отношении концепция ϵ -сложности согласуется с предложенным А.Н. Колмогоровым в середине 60-х годов понятием «сложность» объектов. Основная содержательная идея колмогоровского подхода (см., например, [11]) состоит в том, что: «сложный» объект требует для своего описания много информации, а «простой» — мало, т.е. сложность объекта целесообразно оценивать через минимальный объем информации, требующийся для его описания.

Методом восстановления (аппроксимации) непрерывной функции по ее дискретным отсчетам на равномерной решетке с некоторым шагом $1 > h > 0$ называем произвольную борелевскую функцию, переводящую конечный набор отсчетов (число которых определяется величиной h) в какую-либо ограниченную функцию на $[0, 1]$ (в пространстве ограниченных функций введена равномерная метрика). Фиксируем произвольные счетные наборы борелевских функций со значениями в пространстве ограниченных функций, зависящих соответственно, от $1, 2, 3, \dots$ аргументов. Будем называть *списком* объединение этих счетных наборов. Список содержит счетный набор методов восстановления для всех $h > 0$. Фиксируем некоторый список методов восстановления \mathbb{F} . Всюду далее символом \mathcal{F} обозначается произвольное непустое подмножество \mathbb{F} , содержащее какие-то наборы борелевских функций от $1, 2, 3, \dots$ аргументов. Будем говорить, что наборы \mathcal{F} (и соответственно списки \mathbb{F} при $\mathcal{F} = \mathbb{F}$) являются *допустимыми*, если они содержат методы аппроксимации кусочно-постоянными (ступенчатыми) функциями и степенными полиномами. Положим

$$\delta^{\mathcal{F}}(h) = \inf_{\hat{x}_h(\cdot) \in \mathcal{F}} \sup_{t \in [0, 1]} |\hat{x}_h(t) - x(t)|.$$

Здесь символом $\hat{x}_h(\cdot) \in \mathcal{F}$ обозначаются оценки $x(\cdot)$ по ее отсчетам с шагом h , полученные методами семейства \mathcal{F} . В случае, когда $\mathcal{F} = \mathbb{F}$, для оценки используются все функции, входящие в \mathbb{F} .

Имеет место следующее утверждение.

Множество непрерывных функций, которые не могут быть точно восстановлены по конечному числу своих отсчетов методами произвольного, но фиксированного допустимого списка \mathbb{F} , всюду плотно в пространстве всех непрерывных функций на $[0, 1]$.

Назовем \mathcal{F} -нетривиальными функции, которые *не могут быть точно восстановлены* методами произвольного непустого допустимого подмножества $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{F}$.

Пусть \mathbb{F} — фиксированный допустимый список и $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{F}$ — произвольное непустое допустимое подмножество. Пусть $x(t)$ — \mathcal{F} -нетривиальная функция, $\max_{t \in [0, 1]} |x(t)| = R$. Для достаточно малых $\epsilon > 0$ положим

$$h_x^*(\epsilon, \mathcal{F}) = \inf \left\{ h \leq 1 : \frac{\delta^{\mathcal{F}}(h)}{R} > \epsilon \right\}.$$

Будем называть (ϵ, \mathcal{F}) -сложностью непрерывной функции $x(\cdot)$ величину $\mathbb{S}_x(\epsilon, \mathcal{F}) = -\log h_x^*(\epsilon, \mathcal{F})$.

Если функция не является \mathcal{F} -нетривиальной (т.е. восстанавливается точно по конечному числу своих отсчетов), то полагаем, что ее (ϵ, \mathcal{F}) -сложность равна нулю. Таким образом, из приведенного выше утверждения следует, что «почти все» непрерывные функции имеют ненулевую (ϵ, \mathcal{F}) -сложность при любом непустом допустимом $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{F}$ для произвольного фиксированного допустимого списка \mathbb{F} .

Заметим, что $h_x^*(\epsilon, \mathcal{F}) > 0$ при $\epsilon > 0$ и $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_x^*(\epsilon, \mathcal{F}) = 0$ для \mathcal{F} -нетривиальной функции. С другой стороны, $\lim_{h \rightarrow 0} \delta^{\mathcal{F}}(h) = 0$. Поэтому для любого (достаточно малого) $\epsilon > 0$ существует $\eta(\epsilon) > 0$, $\eta(\epsilon) \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$, такое, что $\delta^{\mathcal{F}}(h_x^*(\cdot)) \leq \eta(\epsilon)$.

Величина $1/h_x^*(\epsilon, \mathcal{F})$ оценивает число отсчетов функции. Поэтому (ϵ, \mathcal{F}) -сложность функции есть логарифм числа ее отсчетов, которые требуются для ее восстановления методами семейства \mathcal{F} с относительной погрешностью не более $R^{-1}\eta(\epsilon)$. Иными словами, можно говорить, что это *кратчайшее описание функции* данными методами с данной точностью, что и было отмечено в начале этого раздела.

Пусть $x(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\max_{t \in [0, 1]} |x(t)| = R$, непрерывная функция такая, что существуют константы $K > 0$ и $0 < p \leq 1$ (показатель Гельдера, или *гельдерова экспонента*), для которых справедливо неравенство $\sup_{(t_1, t_2) \in [0, 1], t_1 \neq t_2} |t_1 - t_2|^{-p} |x(t_1) - x(t_2)| \leq K$ (отметим, что если в этом неравенстве предполагается $|t_1 - t_2| \leq \epsilon$ для некоторого $\epsilon > 0$, то говорится о *локальной гельдеровой экспоненте*).

Пусть фиксирован некоторый допустимый список методов восстановления \mathbb{F} и пусть \mathcal{T} — множество гельдеровых функций, *не восстанавливаемых точно методами \mathbb{F} по конечному числу своих отсчетов*. Пусть функция $x(\cdot)$ принадлежит некоторому плотному подмножеству $T_0 \subseteq \mathcal{T}$ и задается своими n отсчетами (т.е. своим следом) на некоторой равномерной решетке отрезка $[0, 1]$. Из основного результата концепции ϵ -сложности следует, что для всех допустимых семейств аппроксимирующих методов $\mathcal{F} : \mathcal{F}^* \subset \mathcal{F} \subseteq \mathbb{F}$, где $\mathcal{F}^* \subset \mathbb{F}$ — достаточно богатое множество, и достаточно малых $\epsilon > 0$ существует шаг решетки $h_x^*(\epsilon, \mathcal{F})$ такой, что сложность $\mathbb{S}_x(\epsilon, \mathcal{F}) = -\log h_x^*(\epsilon, \mathcal{F})$ допускает эффективное описание.

Фиксируем (достаточно малое) число $\epsilon > 0$ и предположим, что набор методов восстановления есть $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}^*$, а число отсчетов n , задающих функцию, удовлетворяет условию $n \geq n_0$, где $[h_x^*(\epsilon, \mathcal{F})n_0] = C$, $C \gg 1$ (здесь и далее символ $[a]$ означает целую часть числа a). Это означает, что если из каждых $[h_x^*(\cdot)n]$ отсчетов оставить один (а остальные выбросить), то этого будет достаточно для восстановления функции с точностью до $R^{-1}\eta(\epsilon)$.

Выберем число $0 < S < 1$ и выбросим из первоначальных n отсчетов функции $x(\cdot)$ некоторую часть так, чтобы оставшиеся $[Sn]$ отсчеты были расположены *равномерно*.

Имеет место следующее утверждение.

Для произвольной гёльдеровской функции из плотного подмножества \mathcal{T}_0 , заданной своими n отсчетами на некоторой равномерной решетке отрезка $[0, 1]$, при достаточно богатом множестве методов аппроксимации \mathcal{F} , достаточно большом n и достаточно малом $\epsilon > 0$ имеет место соотношение:

$$(1) \quad \log \epsilon = A_n - p \log S + \varphi(\epsilon, n),$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{\log n} = -p$ и $\varphi(\cdot)$ — ограниченная функция.

Алгоритм оценивания гёльдеровской экспоненты состоит в следующем. Задаются несколько значений параметра $0 < S < 1$, $S = S_k$, $k = 1, \dots, m$ и для каждого S_k вычисляется наименьшая (по имеющемуся списку методов аппроксимации \mathcal{F}) погрешность ϵ_k аппроксимации функции (в выброшенных точках, так как функция представлена только своим следом на решетке). Затем по набору пар $(\log \epsilon_k, \log S_k)$ стандартным методом наименьших квадратов определяются оценки \hat{A}_n, \hat{B}_n коэффициентов линейной части соотношения (1). Пусть $\hat{A}_n = A_n + \rho(\epsilon, n, m)$, где $\rho(\epsilon, n, m)$ — погрешность оценивания методом наименьших квадратов. В силу ограниченности функции $\varphi(\cdot)$ погрешность $\rho(\epsilon, n, m)$ также ограничена. Отсюда получаем следствие:

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{A}_n}{\log n} = -p.$$

3. Процедура оценивания. Объекты анализа

3.1. Описание алгоритмической процедуры

Пусть $\{x(k)\}_{k=1}^n$ — след непрерывной функции на некоторой равномерной решетке. В силу изложенного в предыдущем пункте для минимальной погрешности аппроксимации имеет место приближенное равенство

$$(3) \quad \log \epsilon \approx A_n + B_n \log S,$$

здесь смысл символа \approx подразумевает приближенное восстановление линейной зависимости $\log \epsilon$ от $\log S$ с точностью до остатков линейной регрессии, обозначение которых в данном выражении опущено. Коэффициенты A_n, B_n назовем *коэффициентами сложности*. Оценка этих коэффициентов и есть цель алгоритмической процедуры.

Выбираем параметр S из следующего ряда: $S = 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/10$. В зависимости от величины S оставшиеся после выбрасывания значения наблюдаемой последовательности $\{x(k)\}$ могут располагаться разными способами. Например, при $S = 1/2$ можно оставить значения $x(1), x(3), x(5), \dots$ или значения $x(2), x(4), x(6), \dots$. Для других значений S число возможных размещений оставляемых значений функции увеличивается.

Последовательность вычислений такова:

1. При выбранном значении S для каждого варианта размещения оставшихся после выбрасывания точек последовательности $\{x(k)\}$ определяется минимальная по всем имеющимся в наличии методам аппроксимации погрешность $\epsilon(S, i)$ восстановления в выброшенных точках по оставшимся точкам. Здесь i — номер варианта размещения оставшихся точек. После этого вычисляется $\epsilon(S) = \min_i \epsilon(S, i)$ — минимальная по всем вариантам размещения оставшихся точек погрешность восстановления для данного значения S .
2. Описанный процесс повторяется при каждом значении S из указанного выше ряда.
3. В результате проведения вычислений по пп. 1 и 2 получаем наборы $(\log \epsilon(S), \log S)$. По этому набору стандартным методом наименьших квадратов находим коэффициенты сложности в (3) для длины выборки n . Затем все вычисления повторяются для исследования предельного (при $n \rightarrow \infty$) поведения этих коэффициентов.

В силу конечномерности выбор нормы для вычисления погрешности аппроксимации не принципиален. Здесь использовали норму l_1 . Набор методов аппроксимации в проведенных экспериментах содержал кусочные полиномы до четвертой степени включительно.

3.2. Объекты анализа

В экспериментах исследовались следующие функции.

1. Гладкая функция вида

$$x(t) = \sum_{i=1}^k a_i \sin \omega_i t,$$

где ω_i — несоизмеримые частоты. Хотя внешне такая функция производит впечатление «сложной», она дифференцируема и ее гёльдерова экспонента равна единице.

2. Функция Вейерштрасса ([4])

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t),$$

где $1 < \lambda$, $1 < s < 2$. Гельдеровская экспонента этой функции равна $(2 - s)$.

3. Стандартный винеровский процесс (броуновское движение). Известно (см., например, [12]), что траектория этого процесса описывается с вероятностью единица следующим рядом:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} C_0 t + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{\sin kt}{k},$$

где C_k — стандартные независимые нормальные случайные величины. Известно (см., например, [13]), что *локальная гёльдеровская экспонента* этого процесса с вероятностью единица сколь угодно близка к $1/2$.

При работе с функциями, заданных рядами, было необходимо оценить достаточное число членов этих рядов, так как моделировать возможно только конечные суммы. Целесообразным представляется следующее правило: погрешность (по отношению к шкале сигнала) от замены ряда конечной суммой должна быть по крайней мере на два порядка меньше, чем погрешность при аппроксимации функции в выброшенных точках при помощи имеющегося набора методов. Для стохастического процесса под погрешностью понимается величина среднеквадратичного отклонения. При анализе стохастических процессов все результаты вычислений должны усредняться по большому количеству реализаций.

В данной работе также рассмотрены траектории дискретных динамических систем как стохастических, так и детерминированных хаотического типа. Любая числовая последовательность конечной длины может рассматриваться как след некоторой непрерывной функции на конечном интервале. Действительно, например, полином соответствующего порядка будет проходить через все значения последовательности, так что множество непрерывных функций, следом которых является данная числовая последовательность, не пусто. Если оставаться на этой позиции, то для любой конечной числовой последовательности можно применить концепцию ϵ -сложности и использовать основное соотношение (3).

Многочисленные эксперименты, в том числе и с реальными данными, результаты которых были опубликованы в работах авторов в последние годы, свидетельствуют о том, что соотношение (3) работает для числовых последовательностей, порождаемых динамическими системами с дискретным временем как стохастического, так и детерминированного типа. Однако особый интерес представляет исследование поведения коэффициентов сложности для различных последовательностей при росте их длины.

4. Результаты вычислительных экспериментов

4.1. Гладкие функции

В первом эксперименте в качестве исследуемой функции рассматривалась сумма синусоид со взаимно простыми частотами, вид функции представлен на рис. 1.

На рис. 2 приведены графики зависимости вычисляемых коэффициентов ϵ -сложности при росте количества точек на отрезке $[0, 1]$. Здесь и далее результаты представлены в виде двух графиков: зависимость величины $A(n)/\ln(n)$ (слева) и зависимость коэффициента $B(n)$ (справа).

Как видно из графиков на рис. 2, обе величины стремятся к -1 при росте n в полном соответствии с исследуемой гипотезой о гёльдеровой экспоненте.

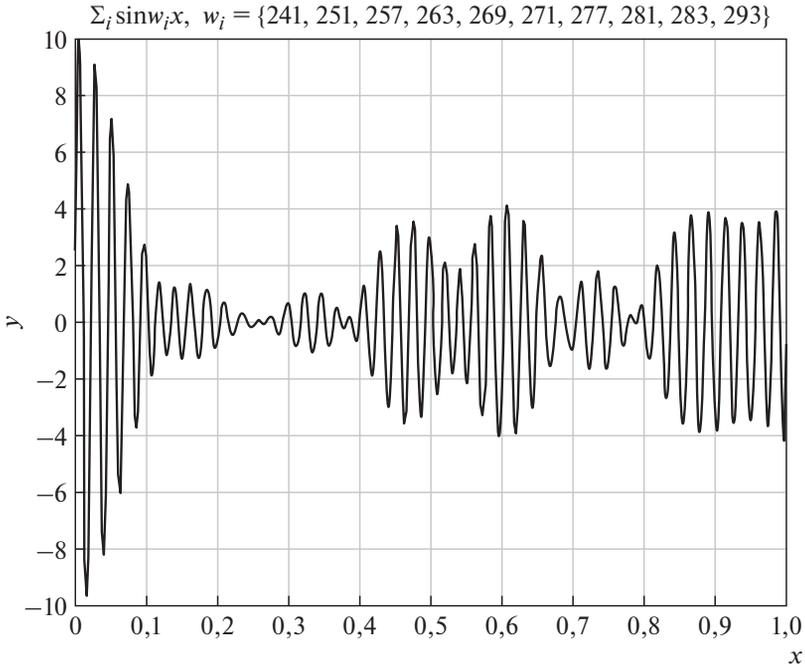


Рис. 1. Пример гладкой функции.

$\sum_i \sin w_i x, w_i = \{241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293\}$
 $n = [10000, 300000]$

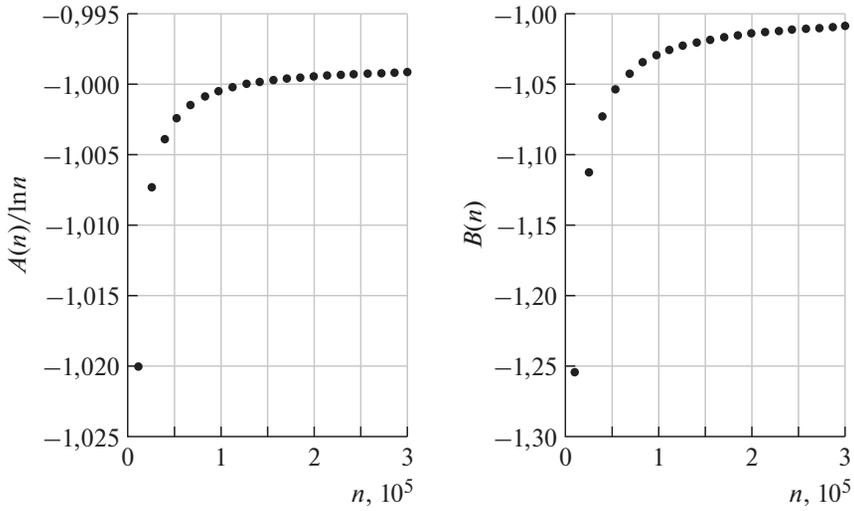


Рис. 2. Результаты вычислений для гладкой функции.

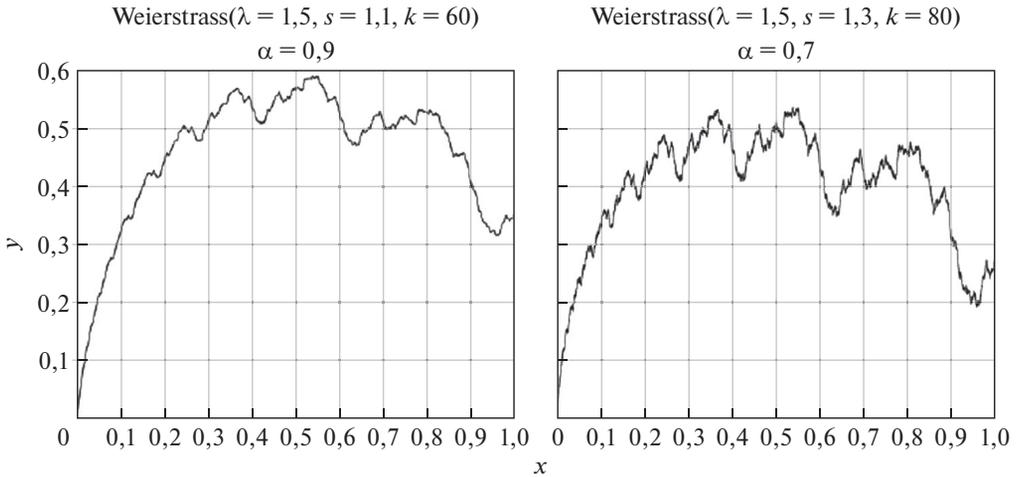


Рис. 3. Пример моделирования функции Вейерштрасса со значениями $s = 1,1$ и $s = 1,3$.

4.2. Функция Вейерштрасса

Моделирование функции Вейерштрасса производится по формуле, приведенной в разделе 3.2 для некоторого конечного числа слагаемых k_0 . Приведем кратко формулу для оценки предельной величины остаточной суммы, учитывая, что $\lambda^{(s-2)} < 1$ при $1 < \lambda$, $1 < s < 2$:

$$\begin{aligned}
 S_{rest} &= \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t) \leq \\
 &\leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} = \frac{\lambda^{(s-2)(k_0+1)}}{1 - \lambda^{(s-2)}} = \frac{A}{2} \lambda^{(s-2)k_0},
 \end{aligned}$$

где константа $A = \frac{2}{\lambda^{(2-s)} - 1}$ используется для нормировки шкалы сигнала.

В работе было рассмотрено два варианта функции Вейерштрасса со значениями $s = 1,1$ и $s = 1,3$ (рис. 3), т.е. со значениями гильдеровой экспоненты $\alpha = 0,9$ и $\alpha = 0,7$ соответственно. Результаты вычислений для функции Вейерштрасса приведены на рис. 4.

Стоит отметить, что при недостаточном количестве слагаемых ряда, когда остаточная сумма оказывается велика, наблюдается ситуация, при которой коэффициенты сложности сходятся к -1 , как в случае гладких функций, т.е. моделируемая функция теряет свои фрактальные свойства.

В обоих рассмотренных примерах предельные значения коэффициентов превышают -1 . Так, в эксперименте при $s = 1,1$ значения коэффициента B сходятся приблизительно к $-0,8$, а при $s = 1,3$ — к $-0,57$. Что касается коэффициента A , то, вероятно, с учетом предельного характера отношения

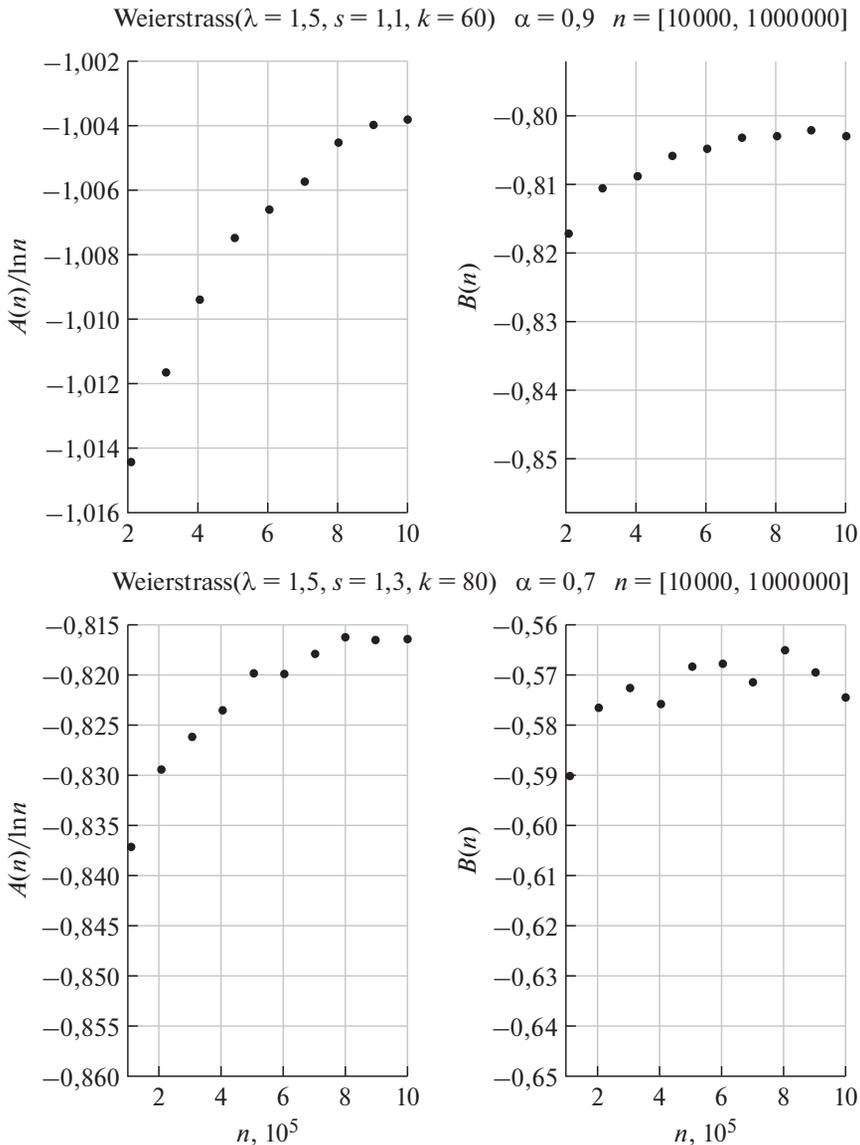


Рис. 4. Результаты вычислений для функции Вейерштрасса со значениями $s = 1,1$ и $s = 1,3$.

$A(n)/\ln(n)$ рассмотренного объема точек недостаточно для достижения сходимости к показателю $-p$ согласно (1).

4.3. Винеровский процесс

Моделирование винеровского процесса отличается наличием случайной компоненты, поэтому в данном случае оценивается не величина остаточной суммы ряда, а ее дисперсия. Итак, согласно формуле для винеровского про-

цесса, приведенной в предыдущем разделе, сумма всех слагаемых, начиная после некоторого номера k_0 , равна

$$S_{rest} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} C_k \frac{\sin(kt)}{k},$$

где $C_k \propto \mathcal{N}(0, 1)$ — независимые случайные величины со стандартным нормальным распределением.

Тогда дисперсия данной суммы выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}[S_{rest}] &= \mathcal{D} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} C_k \frac{\sin(kt)}{k} \right] = \frac{2}{\pi} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \mathcal{D} \left[C_k \frac{\sin(kt)}{k} \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\sin^2(kt)}{k^2} \mathcal{D}[C_k] = \frac{2}{\pi} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\sin^2(kt)}{k^2} \leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{k^2} \right) = \frac{\pi}{3} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{k^2}, \end{aligned}$$

и тогда

$$\delta = 3 * \text{std}(S_{rest}) = 3\sqrt{\mathcal{D}[S_{rest}]} \leq \sqrt{\frac{\pi}{3} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{k^2}}.$$

В силу гауссовости исследуемого процесса именно величина δ , вычисляемая как трехкратное среднеквадратическое отклонение остатка ряда, используется для определения количества слагаемых при усечении ряда. Так, например, δ принимает значения: $2,4 \times 10^{-2}$ при использовании $k_0 = 10\,000$ слагаемых, $3,4 \times 10^{-3}$ — при $k_0 = 500\,000$ и $7,5 \times 10^{-4}$ — при $k_0 = 10$ млн. слагаемых. Разумным допущением будет выбор k_0 таким образом, чтобы трехкратное стандартное отклонение остаточной суммы оказалось как минимум на 2 порядка ниже погрешности аппроксимации при вычислении коэффициентов сложности.

Итак, при моделировании использовалось значение $k_0 = 10^7$, кроме того, в силу случайности процесса все результаты усреднялись по реализациям процесса в количестве $n_{mc} = 100$. Пример реализации продемонстрирован на рис. 5, а результаты вычислений представлены на рис. 6.

Результаты расчетов демонстрируют чувствительность технологии вычисления коэффициентов сложности к типу процесса. Как и в случае с функцией Вейерштрасса, в данном примере коэффициенты сложности сходятся к некоторому значению, отличающемуся от -1 . Согласно графику на рис. 6 коэффициент B принимает значения около $-0,405$ вместо теоретического значения $-0,5$, соответствующего гёльдеровой экспоненте для винеровского процесса.

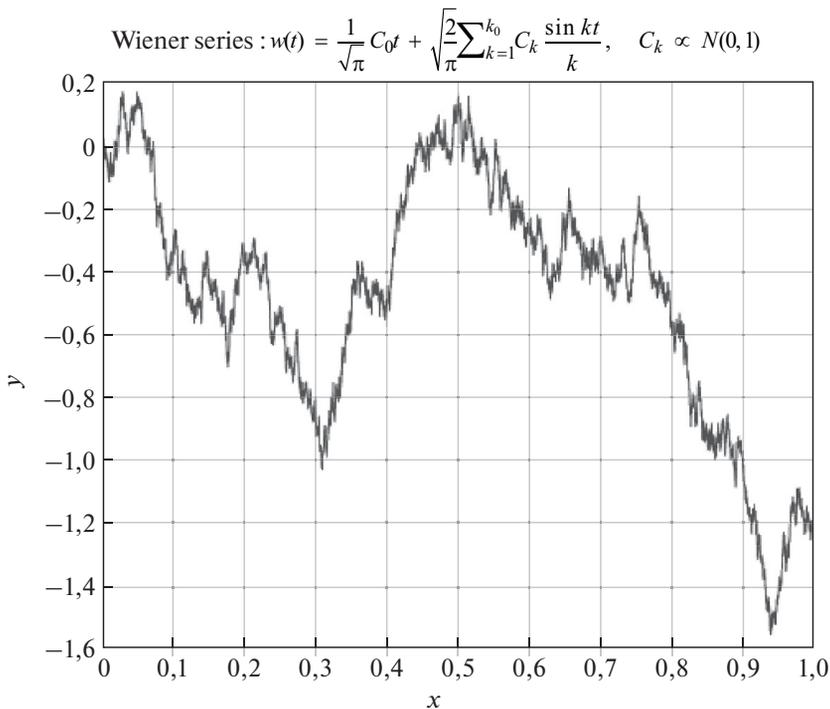


Рис. 5. Пример моделирования винеровского процесса.

Wiener series : $w(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} C_0 t + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{k_0} C_k \frac{\sin kt}{k}$, $C_k \propto N(0, 1)$ $n = [1000, 10\ 000]$

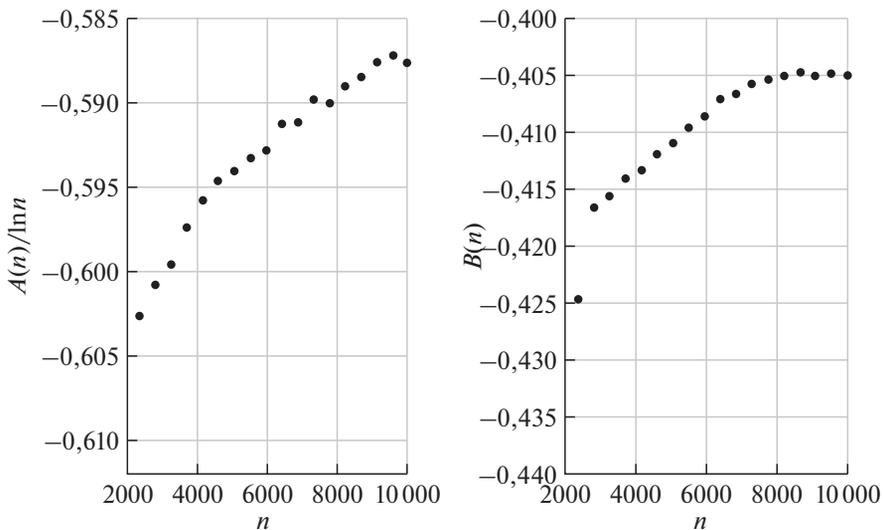


Рис. 6. Результаты вычислений для винеровского процесса.

Таким образом, в рассмотренных примерах погрешность экспериментального вычисления гёльдеровой экспоненты составила от 12 до 19%. Поскольку проверяемая гипотеза имеет предельный характер, то, очевидно, повысить точность вычислений позволит увеличение объема точек n . Кроме того, как было указано выше, в экспериментах в качестве методов аппроксимации использовалась лишь кусочно-полиномиальная аппроксимация различных порядков. Поэтому расширение данного списка (скажем, сплайнами, вейвлет преобразованиями и пр.), приведет к более точному соответствию расчетов с теорией.

4.4. Траектории дискретных динамических систем

В данной серии экспериментов траектории дискретных динамических систем анализировались с помощью коэффициентов эpsilon сложности. В отличие от предыдущих экспериментов в данном случае представляют интерес не предельные значения коэффициентов сложности, а разброс их значений при увеличении длины последовательности.

Рассмотрим две системы:

- 1) классическая авторегрессионная модель со скользящим средним $ARMA(p, q)$ с параметрами $p = 3$ и $q = 2$ (рис. 7);
- 2) детерминированная последовательность хаотического типа, так называемая логистическая карта (рис. 8):

$$x_{k+1} = 4x_k(1 - x_k), \quad x_0 = 0,2.$$

В случае 2) вид траектории существенно зависит от начального значения, что является одним из свойств хаотических последовательностей. Поэтому при моделировании пропускались первые 1000 значений последовательности прежде, чем приступить к вычислению коэффициентов сложности.

Здесь результаты вычислений удобнее представить в виде таблицы, чем графиков. В таблице для каждого из рассмотренных процессов приведены средние значения коэффициентов сложности и их среднеквадратическое отклонение при варьировании длины последовательности.

В результате вычислений было установлено, что относительная величина стандартного отклонения обоих коэффициентов уменьшается от 1,7–2% до

Результаты расчетов для последовательностей

n	100–1000		1000–10 000		10 000–100 000	
Назв. послед-ти	A_{mean} A_{std}	B_{mean} B_{std}	A_{mean} A_{std}	B_{mean} B_{std}	A_{mean} A_{std}	B_{mean} B_{std}
$ARMA(3, 2)$	–0,4420 0,0071	–0,1856 0,0039	–0,4458 0,0030	–0,1880 0,0015	– –	– –
<i>Logistic</i>	–1,0199 0,0173	–0,0223 0,0121	–1,0432 0,0089	–0,0247 0,0048	–1,0384 0,0031	–0,0263 0,0014

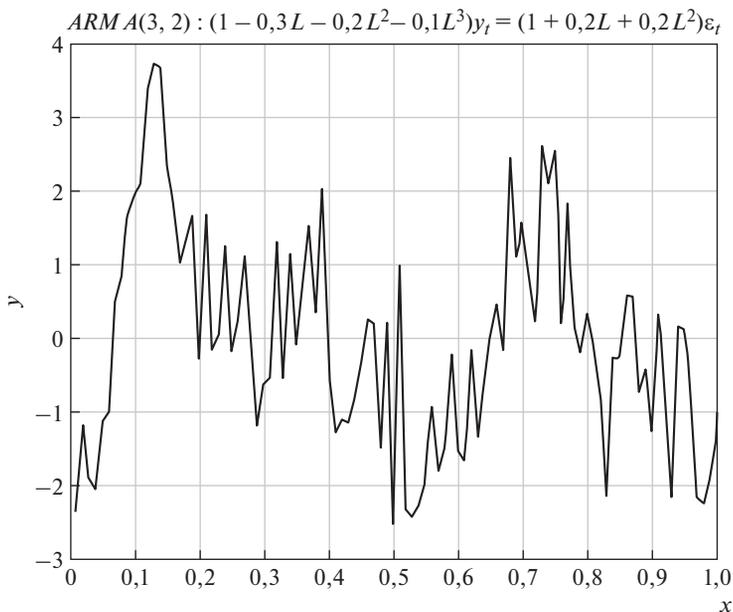


Рис. 7. Пример стохастической последовательности.

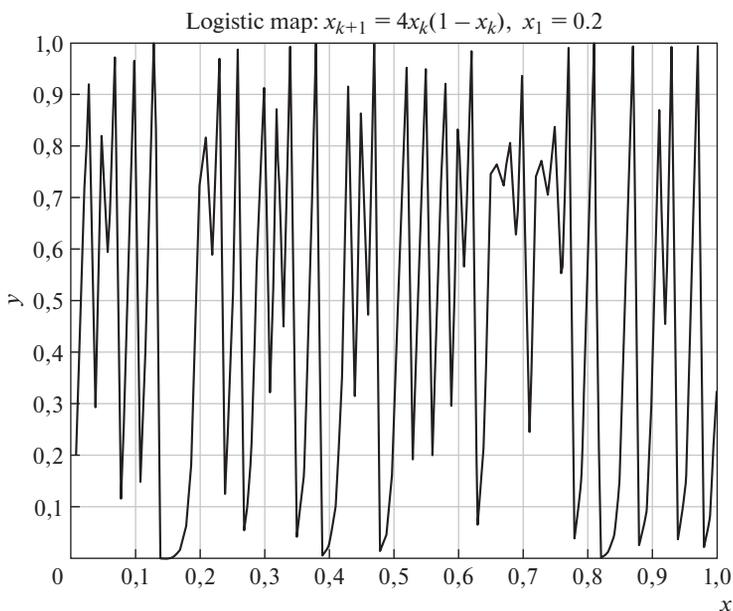


Рис. 8. Пример последовательности хаотического типа.

0,7–0,8% уже при достижении 10 тыс. точек. для модели $ARMA$, а для хаотической последовательности — до 0,3% для коэффициента A и 5,3% для коэффициента B при достижении 100 тысяч точек.

Отметим, что статистики среднего и стандартного отклонения в данном случае вычисляются не по различным реализациям случайного процесса, а по различным длинам последовательности в указанных диапазонах. Именно такой эксперимент имеет практический смысл для анализа реальных данных, когда неизвестны модель процесса и тем более истинное значение гёльдеровой экспоненты для него.

5. Заключение

В работе приводятся описание метода оценивания гёльдеровой экспоненты на базе концепции ϵ -сложности непрерывных функций и соответствующие вычислительные эксперименты. Эта концепция согласуется с общей идеей А.Н. Колмогорова о том, как следовало бы измерять «сложность» тех или иных объектов. Для функций гёльдера класса ϵ -сложность эффективно описывается так называемыми *коэффициентами сложности*. Использование коэффициентов сложности открывает возможность оценивания гёльдеровой экспоненты, которая широко применяется при анализе данных фрактального типа в самых разных приложениях. В частности, гёльдерова экспонента практически совпадает с константой Хёрста для фрактального броуновского движения, которое используется для моделирования многих физических и финансовых процессов. Предлагаемый метод оценивания гёльдеровой экспоненты достаточно прост в реализации и не требует статистических процедур. В проведенных экспериментах коэффициенты сложности вычислялись на основе весьма бедного набора методов аппроксимации (набор таких методов составляет основу концепции ϵ -сложности непрерывных функций), и полученные результаты свидетельствуют об эффективности метода даже при таких условиях. Эффективность метода может быть существенно улучшена при расширении набора алгоритмов аппроксимации непрерывных функций по их дискретным отсчетам. Были проведены также эксперименты для оценки поведения коэффициентов сложности для траекторий дискретных динамических систем. Хотя строгой математической теории для этого случая пока нет, оказалось, что коэффициенты сложности имеют предельные значения при росте объема выборки. Этот факт позволяет применять технологию вычисления коэффициентов сложности дискретных процессов произвольной природы в скользящем окне сравнительно малого объема при решении задач сегментации и классификации данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Павлов А.Н., Анципенко В.С. Мультифрактальный анализ сложных сигналов // Успехи физических наук. 2007. Т. 177. С. 859–876.
2. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. 2016. МЦНМО.
3. Савицкий А.В. Метод оценки показателя Хёрста фрактального броуновского движения // Доклады РАН. 2019. Т. 489. № 5. С. 456–460.

4. *Falconer K.J.* Fractal Geometry: Mathematical foundations and Applications. Wiley, 2003.
5. *Ming L., Vitanyi P.* An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications (англ.). 2nd ed. Springer, 1997.
6. *Piryatinska A., Darkhovsky B., Kaplan A.* Binary classification of multichannel-EEG records based on the ϵ -complexity of continuous vector functions // Comput. Method. Program. Biomedicin. 2017. V. 152, P. 131–139.
7. *Piryatinska A., Darkhovsky B.* Retrospective change-points detection for multidimensional time series of arbitrary nature: Model-free technology based on the ϵ -complexity theory // Entropy. 2021. V. 23. No. 12. P. 1626.
8. *Darkhovsky B.S.* Estimate of the Holder Exponent Based on the ϵ -Complexity of Continuous Functions // Mathematical Notes. 2022. V. 111. No. 3–4. P. 628–631. [пер. Дарховский Б.С. Оценка показателя Гёльдера на основе концепции ϵ -сложности непрерывных функций // Математические заметки. 2022. Т. 111. Вып. 4. С. 620–623.]
9. *Dahan A., Dubnov Y.A., Popkov A.Y. et al.* Brief Report: Classification of Autistic Traits According to Brain Activity Recoded by fNIRS Using ϵ -Complexity Coefficients // J. Autism Dev Disord. 2020. Vol. 51. Iss. 9. P. 3380–3390.
10. *Дарховский Б.С.* О сложности и размерности непрерывных конечномерных отображений // Теория вероятностей и ее применения. 2020. Т. 65. Вып. 3. С. 479–497.
11. *Колмогоров А.Н.* Комбинаторные основания теории информации и исчисления вероятностей // Успехи математических наук. 1983. Т. 38. № 4. С. 27–36.
12. *Ито К., Маккин Г.* Диффузионные процессы и их траектории. М.: Мир, 1968.
13. *Mörters P., Peres V.* Brownian Motion. Cambridge University Press, 2010.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 22.08.2022

После доработки 18.11.2022

Принята к публикации 30.11.2022

© 2023 г. Э.М. СОЛНЕЧНЫЙ, д-р физ.-мат. наук (solnechn@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С УЧЕТОМ ВНУТРЕННЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ. II

Исследуются динамические свойства реакции одномерной упругой механической системы на внешнее механическое воздействие. Вычисляются передаточные функции каналов от силового воздействия на одной из границ к перемещению сечений среды и к температуре. Устанавливается асимптотика поведения передаточной функции по каждому из этих каналов в окрестности нуля комплексной плоскости. Отдельно рассматривается случай отсутствия теплообмена системы с внешней средой.

Ключевые слова: распределенный термомеханический объект, динамические свойства, передаточные функции, асимптотика.

DOI: 10.31857/S0005231023040037, EDN: QHTUJG

1. Введение

Термомеханические системы, в которых происходят процессы механических колебаний и процессы теплопередачи, широко используются в современной технике, в связи с чем возникает необходимость математического исследования динамических свойств таких систем и отыскания методов управления ими.

Литература по изучению явления термоупругости достаточно обширна. После ранних работ [1–3] по изучению этого явления появилась [4], где исследовалась термоупругость как часть общего явления упругости. В современной литературе появились работы [5–7], посвященные изучению различных свойств термоупругих сред. В [8] развита современная теория термомеханики упругопластического деформирования. В [9] изложена постановка связанной динамической задачи термоупругости в одномерной среде.

В настоящей работе исследуются динамические свойства одномерной распределенной упругой термомеханической системы. В качестве исходной основы для составления математической модели процессов в такой системе была принята классическая работа [4], но в отличие от [10] исследуемая система считается подверженной не тепловому, а механическому (силовому) воздействию на одной из границ. Уравнения динамики системы в данной работе

приняты в виде

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \beta_{\tau} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \end{cases}$$

где $t \geq 0$, $0 \leq x \leq l$; $a, c, \beta, \beta_{\tau}$ — положительные константы (см., например, [4]).

Здесь $\varphi(x)(t)$ — перемещение сечения, находящегося на расстоянии $l - x$ от места приложения силового воздействия, $\theta(x)(t)$ — температура среды в сечении x .

Принимаются нулевые начальные условия по времени и граничные условия:

а) на функцию φ

$$(1.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0) = 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(l) = u, \end{cases}$$

где u — управляющее воздействие, имеющее физический смысл механического (силового) воздействия на систему,

б) на функцию θ

$$(1.3) \quad \begin{cases} \left(-\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \alpha \theta \right) (0) = 0, \\ \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \alpha \theta \right) (l) = 0, \end{cases}$$

где α, λ — положительные константы.

2. Вычисление векторной передаточной функции $u \rightarrow (\varphi(x), \theta(x))$

Выполнив преобразование Лапласа уравнений (1.1) и граничных условий ((1.2), (1.3)) по времени, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно пары функций $(\bar{\varphi}(x), \bar{\theta}(x))$ — изображения по Лапласу пары функций $(\varphi(x)(t), \theta(x)(t))$,

$$(2.1) \quad \begin{cases} c^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x^2}(x)(p) - p^2 \bar{\varphi}(x)(p) - \beta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}(x)(p) = 0, \\ a \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial x^2}(x)(p) - p \bar{\theta}(x)(p) - \beta_{\tau} p \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}(x)(p) = 0, \end{cases}$$

$$(2.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}(0) = 0, \\ p^2 \bar{\varphi}(l) = \bar{u}, \end{cases}$$

$$(2.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}(0) = \kappa \bar{\theta}(0), \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}(l) = -\kappa \bar{\theta}(l), \end{cases}$$

где $\kappa = \frac{\alpha}{\lambda}$.

Исследование краевой задачи (2.1)–(2.3) приводит к следующим выражениям для передаточных функций по каналам $u \rightarrow \varphi(x)$ и $u \rightarrow \theta(x)$:

Теорема 1. Передаточная функция системы по каналу $u \rightarrow \varphi(x)$ имеет вид

$$(2.4) \quad W_{u \rightarrow \varphi(x)} = \frac{a_{22}}{\Delta_A} [ac^2 D_3(x) - b_1 p D_1(x)] - \beta \frac{a_{21}}{\Delta_A} [\kappa a D_1(x) + p D_0(x)],$$

а передаточная функция по каналу $u \rightarrow \theta(x)$ имеет вид

$$(2.5) \quad \begin{aligned} W_{u \rightarrow \theta(x)} &= \frac{a_{22}}{\Delta_A} \beta_{\text{T}} p^3 D_0(x) + \\ &+ \frac{a_{21}}{\Delta_A} [-ac^2 D_3(x) - \kappa ac^2 D_2(x) + b_2 p D_1(x) + \kappa a p^2 D_0(x)]. \end{aligned}$$

Здесь обозначено: $\Delta_A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$,

$$a_{11} = p^2 (ac^2 D_3(l) - b_1 p D_1(l)),$$

$$a_{12} = \beta p^2 (\kappa a D_1(l) + p D_0(l)),$$

$$a_{21} = \beta_{\text{T}} p^3 (D_1(l) + \kappa D_0(l)),$$

$$\begin{aligned} a_{22} &= ac^2 D_4(l) + 2\kappa ac^2 D_3(l) + (\kappa^2 ac^2 - b_2 p) D_2(l) - \\ &- \kappa p (2ap + \beta \beta_{\text{T}}) D_1(l) - \kappa^2 a p^2 D_0(l), \end{aligned}$$

$$D_j(x) = \frac{1}{R} \left(\rho_1^{(j-1)/2} \sinh(x\sqrt{\rho_1}) - \rho_2^{(j-1)/2} \sinh(x\sqrt{\rho_2}) \right) \quad (j = 0; 2; 4),$$

$$D_j(x) = \frac{1}{R} \left(\rho_1^{(j-1)/2} \cosh(x\sqrt{\rho_1}) - \rho_2^{(j-1)/2} \cosh(x\sqrt{\rho_2}) \right) \quad (j = 1; 3),$$

$$\rho_{1,2} = \frac{p(ap + b_1) \pm R}{2ac^2}, \quad R = ap\sqrt{(p + \mu)^2 + y^2}, \quad \mu = \frac{\beta \beta_{\text{T}} - c^2}{a}, \quad y = 2\frac{c}{a}\sqrt{\beta \beta_{\text{T}}},$$

$$b_1 = \beta \beta_{\text{T}} + c^2, \quad b_2 = \beta \beta_{\text{T}} + ap.$$

3. Асимптотика поведения передаточных функций системы при $p \rightarrow 0$

Изучение динамических свойств исследуемой системы начнем с исследования поведения ее передаточных функций в окрестности нуля комплексной плоскости **C**.

Теорема 2. В окрестности нуля плоскости \mathbf{C} передаточная функция $W_{u \rightarrow \varphi(x)}$ может быть представлена в виде

$$(3.1) \quad W_{u \rightarrow \varphi(x)} = \frac{1}{p^2} (1 + O(p)),$$

а передаточная функция $W_{u \rightarrow \theta(x)}$ может быть представлена в виде

$$(3.2) \quad W_{u \rightarrow \theta(x)} = \frac{\beta_{\tau}}{6ac^2} p \left[x^3 - l^2 \frac{3 + \kappa l}{2 + \kappa l} \left(x + \frac{1}{\kappa} \right) + O(p) \right].$$

Здесь под $O(p)$ понимается функция $f(p)$ ($p \in \mathbf{C}$), для которой отношение $\frac{f(p)}{p}$ остается ограниченным при $p \rightarrow 0$.

Таким образом, по каналу $u \rightarrow \varphi(x)$ исследуемая система обладает двойным интегрирующим свойством, а по каналу $u \rightarrow \theta(x)$ — дифференцирующим свойством.

Замечание. Как видно из (3.2), в выражение для асимптотики передаточной функции $W_{u \rightarrow \theta(x)}$ при $p \rightarrow 0$ входит отношение $\frac{1}{\kappa} = \frac{\lambda}{\alpha}$. Поэтому случай $\kappa = 0$, т.е. случай отсутствия у исследуемой системы теплообмена с внешней средой, требует отдельного рассмотрения. Оно проводится в следующем разделе.

4. Случай $\kappa = 0$

$$(4.1) \quad W_{u \rightarrow \varphi(x)} = \frac{a_{22}}{\Delta_A} (ac^2 D_3(x) - b_1 p D_1(x)) - \beta \frac{a_{21}}{\Delta_A} p D_0(x),$$

$$(4.2) \quad W_{u \rightarrow \theta(x)} = \frac{a_{22}}{\Delta_A} \beta_{\tau} p^3 D_0(x) + \frac{a_{21}}{\Delta_A} (-ac^2 D_3(x) + b_2 p D_1(x)).$$

Функции a_{jk} ($j, k = 1, 2$) в данном случае имеют вид

$$(4.3) \quad a_{11} = p^2 (ac^2 D_3(l) - b_1 p D_1(l)), \quad a_{12} = \beta p^3 D_0(l), \quad a_{21} = \beta_{\tau} p^3 D_1(l),$$

$$(4.4) \quad a_{22} = ac^2 D_4(l) - b_2 p D_2(l).$$

Теорема 3. В случае $\kappa = 0$ передаточная функция $W_{u \rightarrow \varphi(x)}$ в окрестности нуля комплексной плоскости \mathbf{C} может быть представлена в том же виде (3.1), что и в общем случае (см. теорему 2); передаточная же функция $W_{u \rightarrow \theta(x)}$ в этой окрестности может быть представлена в виде

$$(4.5) \quad W_{u \rightarrow \theta(x)} = -\beta_{\tau} \frac{l}{2c^2} (1 + O(p)).$$

Таким образом, в случае $\kappa = 0$ передаточная функция исследуемой системы по каналу $u \rightarrow \theta(x)$ имеет при $p \rightarrow 0$ конечный отличный от нуля предел. Такое свойство можно назвать статическим.

Доказательства теорем 1–3 см. в Приложениях П.1–П.3.

5. Заключение

Проведенное в работе исследование динамических свойств термомеханического объекта управления при механическом (силовом) внешнем воздействии показывает наличие у объекта свойства двойного интегрирования по каналу воздействие \rightarrow перемещение сечений одномерной среды и (но только при наличии теплообмена с внешней средой) свойства дифференцирования по каналу воздействие \rightarrow температура.

Полученные выводы должны учитываться при проектировании системы управления термомеханическими объектами, для которых приемлемо принятое здесь математическое описание (1.1)–(1.3) их динамических свойств.

Проведенное в [10] и в данной работе исследование показывает, что учет внутренней обратной связи в объекте — от перемещения сечений к температуре — весьма осложняет задачу описания динамических свойств объекта по сравнению с исследованным ранее случаем неучета этой обратной связи (см. [11]).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Доказательство теоремы 1.

1. Выполним преобразование Лапласа уравнений (2.1) по пространственной координате x (см. [12, п. 80, формулы 6 и 7]) с учетом первого из граничных условий (2.2):

$$(П.1.1) \quad \begin{cases} (c^2q^2 - p^2) \bar{\varphi}(q) - \beta q \bar{\theta}(q) = z_1(q), \\ -\beta_T q p \bar{\varphi}(q) + (aq^2 - p) \bar{\theta}(q) = z_2(q), \end{cases}$$

где $z_1(q) = c^2 q \bar{\varphi}(0) - \beta \bar{\theta}(0)$, $z_2(q) = aq \bar{\theta}(0) + a \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}(0) - \beta_T p \bar{\varphi}(0)$.

Решение системы (П.1.1) относительно $(\bar{\varphi}(q), \bar{\theta}(q))$ с учетом выражений для $z_i(q)$ имеет вид

$$(П.1.2) \quad \bar{\varphi}(q) = \frac{ac^2q^3\bar{\varphi}(0) + B_1q + \beta p\bar{\theta}(0)}{\Delta(q)},$$

$$(П.1.3) \quad \bar{\theta}(q) = \frac{ac^2q^3\bar{\theta}(0) + ac^2q^2\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}(0) + B_2p^2 - b_2qp\bar{\theta}(0)}{\Delta(q)},$$

где

$$\Delta(q) = ac^2 (q^2 - \rho_1) (q^2 - \rho_2), \quad \rho_{1,2} = \frac{p(ap + b_1) \pm R}{2ac^2},$$

$$R = ap\sqrt{(p + \mu)^2 + y^2}, \quad \mu = \frac{\beta\beta_T - c^2}{a}, \quad y = 2\frac{c}{a}\sqrt{\beta\beta_T},$$

$$b_1 = \beta\beta_T + c^2, \quad b_2 = \beta\beta_T + ap,$$

$$B_1 = \beta a \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}(0) - b_1 p \bar{\varphi}(0), \quad B_2 = \beta_T p \bar{\varphi}(0) - a \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}(0).$$

Опираясь на соотношение

$$(П.1.4) \quad \frac{1}{\Delta(q)} = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{q^2 - \rho_1} - \frac{1}{q^2 - \rho_2} \right),$$

от (П.1.2) и (П.1.3) переходим к оригиналам по координате x (см. [12, п. 80, формула 4]):

$$(П.1.5) \quad \bar{\varphi}(x) = ac^2 D_3(x) \bar{\varphi}(0) + D_1(x) B_1 + \beta p D_0(x) \bar{\theta}(0),$$

$$(П.1.6) \quad \bar{\theta}(x) = ac^2 D_3(x) \bar{\theta}(0) + ac^2 D_2(x) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x}(0) - b_2 p D_1(x) \bar{\theta}(0) + p^2 D_0(x) B_2,$$

где

$$D_j(x) = \frac{1}{R} \left(\rho_1^{(j-1)/2} \sinh(x\sqrt{\rho_1}) - \rho_2^{(j-1)/2} \sinh(x\sqrt{\rho_2}) \right) \quad (j = 0; 2),$$

$$D_j(x) = \frac{1}{R} \left(\rho_1^{(j-1)/2} \cosh(x\sqrt{\rho_1}) - \rho_2^{(j-1)/2} \cosh(x\sqrt{\rho_2}) \right) \quad (j = 1; 3).$$

Второе из граничных условий (2.2) согласно (П.1.5) и первому из условий (2.3) принимает вид

$$(П.1.7) \quad p^2 \left[(ac^2 D_3(l) - b_1 p D_1(l)) \bar{\varphi}(0) + \beta (p D_0(l) + \kappa D_1(l)) \bar{\theta}(0) \right] = \bar{u}.$$

Второе из условий (2.3) согласно (П.1.6) принимает вид

$$(П.1.8) \quad ac^2 (D_4(l) + \kappa D_3(l)) \bar{\theta}(0) + ac^2 \kappa (D_3(l) + \kappa D_2(l)) \bar{\theta}(0) - \\ - b_2 p (D_2(l) + \kappa D_1(l)) \bar{\theta}(0) + p^2 (D_1(l) + \kappa D_0(l)) (\beta_{\text{т}} p \bar{\varphi}(0) - \kappa a \bar{\theta}(0)) = 0,$$

где

$$D_4(l) = \frac{1}{R} \left(\rho_1^{3/2} \sinh(x\sqrt{\rho_1}) - \rho_2^{3/2} \sinh(x\sqrt{\rho_2}) \right).$$

Условия (П.1.7) и (П.1.8) образуют систему уравнений относительно вектора $\begin{pmatrix} \bar{\varphi}(0) \\ \bar{\theta}(0) \end{pmatrix}$:

$$(П.1.9) \quad A \begin{pmatrix} \bar{\varphi}(0) \\ \bar{\theta}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $A = (a_{jk}; j, k = 1, 2)$, $a_{11} = p^2 (ac^2 D_3(l) - b_1 p D_1(l))$;

$$a_{12} = \beta p^2 (\kappa a D_1(l) + p D_0(l)), \quad a_{21} = \beta_{\text{т}} p^3 (D_1(l) + \kappa D_0(l));$$

$$a_{22} = ac^2 D_4(l) + 2\kappa ac^2 D_3(l) + (\kappa^2 ac^2 - b_2 p) D_2(l) - \\ - \kappa p (2ap + \beta_{\text{т}}) D_1(l) - \kappa^2 ap^2 D_0(l).$$

Решение системы (П.1.9):

$$(П.1.10) \quad \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(0) \\ \overline{\theta}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} \\ -a_{21} \end{pmatrix} \frac{\overline{u}}{\Delta_A},$$

где $\Delta_A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Подставляя (П.1.10) в (П.1.5) и (П.1.6) с учетом выражений для B_i и первого из условий (2.3) получаем окончательные выражения для $\overline{\varphi}(x)$ и $\overline{\theta}(x)$:

$$(П.1.11) \quad \overline{\varphi}(x) = \left\{ a_{22} [ac^2 D_3(x) - b_1 p D_1(x)] - \beta a_{21} [\kappa a D_1(x) + p D_0(x)] \right\} \frac{\overline{u}}{\Delta_A};$$

$$(П.1.12) \quad \overline{\theta}(x) = \left\{ a_{22} \beta_{\tau} p^3 D_0(x) + \right. \\ \left. + a_{21} [-ac^2 D_3(x) - \kappa ac^2 D_2(x) + b_2 p D_1(x) + \kappa a p^2 D_0(x)] \right\} \frac{\overline{u}}{\Delta_A}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Доказательство теоремы 2.

1. Функции R и ρ_j ($j = 1, 2$; см. пояснения к (2.4) и (2.5)) в окрестности нуля плоскости \mathbf{C} могут быть представлены в виде

$$(П.2.1) \quad R = b_1 p (1 + O(p)); \quad \rho_1 = \frac{b_1 p}{ac^2} (1 + O(p)); \quad \rho_2 = O(p^2).$$

2. Функции $D_j(x)$ ($j = 0 \div 4$) в окрестности нуля плоскости \mathbf{C} могут быть представлены в виде

$$(П.2.2) \quad D_0(x) = \frac{x^3 \rho_1 - \rho_2}{6R} + O(p^2) = \frac{x^3}{6ac^2} + O(p^2);$$

$$(П.2.3) \quad D_1(x) = \frac{x^2 \rho_1 - \rho_2}{2R} + O(p^2) = \frac{x^2}{2ac^2} + O(p^2);$$

$$(П.2.4) \quad D_2(x) = x \frac{\rho_1 - \rho_2}{R} + O(p^2) = \frac{x}{ac^2} + O(p^2);$$

$$(П.2.5) \quad D_3(x) = \frac{\rho_1 - \rho_2}{R} + O(p^2) = \frac{1}{ac^2} + O(p^2);$$

$$(П.2.6) \quad D_4(x) = x \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{R} + O(p^2) = x \frac{\rho_1 + \rho_2}{ac^2} + O(p^2) = x \frac{b_1}{a^2 c^4} p + O(p^2).$$

3. Функции a_{jk} ($j, k = 1, 2$; см. пояснения к (П.1.9)) в окрестности нуля плоскости \mathbf{C} могут быть представлены в виде

$$(П.2.7) \quad a_{11} = p^2 \left(1 - \frac{b_1 l^2}{2ac^2} p + O(p^2) \right) = p^2 (1 + O(p));$$

$$(П.2.8) \quad a_{12} = \beta p^2 \left(\frac{l^3}{6ac^2} p + \kappa \frac{l^2}{2c^2} + O(p^2) \right) = \beta \kappa \frac{l^2}{2c^2} p^2 (1 + O(p));$$

$$(П.2.9) \quad \begin{aligned} a_{21} &= \beta_{\tau} p^3 \left(\frac{l^2}{2ac^2} + \kappa \frac{l^3}{6ac^2} + O(p^2) \right) = \\ &= \beta_{\tau} p^3 \frac{l^2}{2ac^2} \left(1 + \kappa \frac{l}{3} \right) (1 + O(p^2)); \end{aligned}$$

$$(П.2.10) \quad \begin{aligned} a_{22} &= \frac{b_1 l}{ac^2} p + 2\kappa + l \left(\kappa^2 - \frac{b_2}{ac^2} p \right) - \kappa p \frac{l^2}{c^2} \left(p + \frac{\beta \beta_{\tau}}{2a} \right) - \\ &- \kappa^2 p^2 \frac{l^3}{6c^2} + O(p^2) = \kappa (2 + \kappa l) (1 + O(p)). \end{aligned}$$

4. Функция Δ_A (см. пояснения к (П.1.10)) и отношения $\frac{a_{2j}}{\Delta_A}$ ($j = 1, 2$; см. (2.4) и (2.5)) в окрестности нуля плоскости \mathbf{C} могут быть представлены в виде

$$(П.2.11) \quad \begin{aligned} \Delta_A &= p^2 \kappa (2 + \kappa l) (1 + O(p)) - p^5 \kappa \frac{\beta \beta_{\tau} l^4}{4ac^4} \left(1 + \kappa \frac{l}{3} \right) (1 + O(p)) = \\ &= p^2 \kappa (2 + \kappa l) (1 + O(p)); \end{aligned}$$

$$(П.2.12) \quad \frac{a_{21}}{\Delta_A} = p \frac{\beta_{\tau} l^2 (1 + \kappa l / 3)}{2\kappa ac^2 (2 + \kappa l)} (1 + O(p)) = p \frac{\beta_{\tau} l^2 (3 + \kappa l)}{6\kappa ac^2 (2 + \kappa l)} (1 + O(p)),$$

$$(П.2.13) \quad \frac{a_{22}}{\Delta_A} = \frac{1}{p^2} (1 + O(p)).$$

5. Передаточные функции $W_{u \rightarrow \varphi(x)}$ и $W_{u \rightarrow \theta(x)}$ в окрестности нуля плоскости \mathbf{C} могут быть представлены в виде

$$(П.2.14) \quad \begin{aligned} W_{u \rightarrow \varphi(x)} &= \frac{1}{p^2} \left(1 - p \frac{b_1}{2ac^2} x^2 \right) (1 + O(p^2)) - \\ &- p \frac{\beta \beta_{\tau} l^2 (1 + \kappa l / 3)}{2ac^2 \kappa (2 + \kappa l)} \left(\kappa \frac{x^2}{2c^2} + p \frac{x^3}{6ac^2} + O(p^2) \right) = \frac{1}{p^2} (1 + O(p)), \end{aligned}$$

$$(П.2.15) \quad \begin{aligned} W_{u \rightarrow \theta(x)} &= p \beta_{\tau} \left[\frac{x^3}{6ac^2} - \right. \\ &- \left. \frac{l^2 (3 + \kappa l)}{6ac^2 \kappa (2 + \kappa l)} \left(1 + \kappa x - p x^2 \frac{b_2}{2ac^2} - p^2 x^3 \frac{\kappa}{6c^2} \right) \right] (1 + O(p)) = \\ &= p \frac{\beta_{\tau}}{6ac^2} \left[x^3 - l^2 \frac{3 + \kappa l}{2 + \kappa l} \left(x + \frac{1}{\kappa} \right) \right] (1 + O(p)). \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3.

1. Как следует из (3.5) и (3.6), при $\kappa = 0$ функции a_{jk} ($j, k = 1, 2$) в окрестности нуля плоскости \mathbf{C} могут быть представлены в виде

$$(П.3.1) \quad a_{11} = p^2 (1 + O(p)) \quad (\text{совпадает с (П.2.7)}),$$

$$(П.3.2) \quad a_{12} = \beta p^3 \left(\frac{l^3}{6ac^2} + O(p^2) \right) = \beta p^3 \frac{l^3}{6ac^2} (1 + O(p^2)),$$

$$(П.3.3) \quad a_{21} = \beta_{\tau} p^3 \left(\frac{l^2}{2ac^2} + O(p^2) \right) = \beta_{\tau} p^3 \frac{l^2}{2ac^2} (1 + O(p^2)),$$

$$(П.3.4) \quad a_{22} = p \frac{l}{ac^2} (b_1 - b_2) + O(p^2) = \\ = p \frac{l}{ac^2} (c^2 - ap) + O(p^2) = p \frac{l}{a} (1 + O(p)).$$

2. Отсюда вытекает:

$$(П.3.5) \quad \Delta_A = p^3 \frac{l}{a} (1 + O(p)) - \beta \beta_{\tau} p^6 \frac{l^5}{12a^2c^4} (1 + O(p^2)) = p^3 \frac{l}{a} (1 + O(p)),$$

$$(П.3.6) \quad \frac{a_{21}}{\Delta_A} = \beta_{\tau} \frac{l}{2c^2} (1 + O(p)), \quad \frac{a_{22}}{\Delta_A} = \frac{1}{p^2} (1 + O(p)).$$

3. Отсюда получаем:

$$(П.3.7) \quad W_{u \rightarrow \varphi}(x) = \frac{1 + O(p)}{p^2} \left[1 + O(p^2) - b_1 p \left(\frac{x^2}{2ac^2} + O(p^2) \right) \right] - \\ - p \beta \beta_{\tau} \left(\frac{lx^3}{12ac^4} + O(p^2) \right) = \frac{1}{p^2} (1 + O(p)),$$

$$(П.3.8) \quad W_{u \rightarrow \theta}(x) = p \beta_{\tau} \frac{x^3}{6ac^2} (1 + O(p)) + \\ + \beta_{\tau} \frac{l}{2c^2} (1 + O(p)) \left[pb_2 \frac{x^2}{2ac^2} - 1 + O(p^2) \right] = -\beta_{\tau} \frac{l}{2c^2} (1 + O(p)).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. Киев: Наукова думка, 1964.
2. Lord H., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity // J. Mech. Phys. Solids. 1967. V. 15. P. 299–309.
3. Nayfeh A.H., Nemat-Nasser S. Thermoelastic waves in solids with thermal relaxation // ActaMechanica. 1971. V. 12. P. 53–69.
4. Новацкий В. Теория упругости. Перевод с польского. М.: Мир, 1975.
Novacki W. Teoria sprężystości. Warszawa. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1970.

5. *Jordan P.M., Puri P.* On the propagation of plane waves in type – I11 thermoelasticmedia // Proc. Royal Soc. Lond. A. 2004.
6. *Роговой А.А., Столбова О.С.* Эволюционная модель термоупругости при конечных деформациях // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 3. С. 184–196.
7. *Бабенков М.Б.* Анализ распространения гармонических возмущений в термоупругой среде с релаксацией теплового потока // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 2. С. 126–137.
8. *Маркин А.А., Соколова М.Ю.* Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013. 320 с.
9. *Торсукова Е.Б., Христинич Д.В.* Постановка связанной динамической задачи термоупругости для стержня // Вестник ТулГУ. Серия «Дифференциальные уравнения и прикладные задачи». 2016 г. Вып. 1.
10. *Солнечный Э.М.* Исследование динамических свойств распределенной термомеханической системы с учетом внутренней обратной связи. I // АиТ. 2020. № 4.
11. *Солнечный Э.М.* Исследование динамических свойств распределенного термомеханического объекта управления. Доклад на Одиннадцатой международной конференции MLSD. 1-3.10.2018.
Solnechnyi E.M. The Dynamic Properties Investigation for a Distributed Thermomechanical Control Plant. Published in: 2018 Eleventh International Conference “Management of large-scale system development” 1–3 Oct. 2018.
12. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного М.: Изд. Лань. 2002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Кушнером.

Поступила в редакцию 11.05.2021

После доработки 30.10.2022

Принята к публикации 30.11.2022

© 2023 г. И.Б. ФУРТАТ, д-р техн. наук (cainenash@mail.ru),
П.А. ГУЩИН, канд. техн. наук (guschin.p@mail.ru),
НГУЕН БА ХЮ (leningrat206@gmail.com)
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ВХОДНЫЕ И ВЫХОДНЫЕ СИГНАЛЫ¹

Рассмотрено развитие метода, предложенного в публикации [1], на системы с произвольным соотношением количества входных и выходных сигналов. Получено решение, гарантирующее нахождение данных сигналов в заданном разработчиком множестве. Для решения задачи предложены две последовательные замены координат. Первая замена сводит выходную переменную объекта к новой переменной, размерность которой не превосходит размерности вектора управления. Вторая замена позволяет перейти от задачи управления с ограничениями к задаче управления без ограничений. В качестве иллюстрации работоспособности метода рассмотрено решение двух задач. Первая задача — управление по состоянию линейными системами с ограничениями на сигнал управления и фазовые переменные. Вторая задача — управление по выходу линейными системами с ограничением на выходной сигнал и сигнал управления. В обеих задачах проверка устойчивости замкнутой системы формулируется в терминах разрешимости линейных матричных неравенств. Полученные результаты сопровождаются примерами моделирования, иллюстрирующими эффективность предложенного метода.

Ключевые слова: динамическая система, замена координат, устойчивость, управление.

DOI: 10.31857/S0005231023040049, EDN: QHWNHA

1. Введение

В [1, 2] приведен обзор методов управления с обеспечением выходного сигнала объекта в заданном множестве. Также в [1, 2] предложено новое решение данной задачи, которое состоит в использовании специальной замены координат, позволяющей перейти от задачи управления с ограничениями к задаче управления без ограничений.

¹ Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-79-10104-П, <https://rscf.ru/project/18-79-10104/>).

Однако и решение [1, 2], и большая часть описанной литературы в [1, 2] ограничены рассмотрением объектов, у которых:

- 1) размерность сигнала управления больше или равна размерности регулируемого сигнала;
- 2) не накладываются ограничения на сигнал управления.

Касательно первого ограничения на практике существует достаточно много задач, когда размерность сигнала управления меньше размерности регулируемого сигнала, например управление неполноприводными системами: шагающие роботы, станки с программным управлением, летательные аппараты, водные суда, некоторые маятниковые системы и т.д. Для решения таких задач предложено много методов, в частности [3–6], однако они не гарантируют заданного качества регулирования в любой момент времени, а лишь в установившемся режиме.

Относительно второго ограничения логически возникает вопрос о величине сигнала управления, необходимого для обеспечения выходного сигнала в заданном множестве в любой момент времени.

В данной работе подход [1, 2] будет развит для решения следующих задач:

- 1) управление объектами, у которых размерность сигнала управления может быть меньше размерности регулируемого сигнала;
- 2) обеспечение регулируемого и управляющего сигналов в заданном множестве в любой момент времени;
- 3) использование аппарата линейных матричных неравенств для анализа устойчивости замкнутой системы и синтеза параметров регулятора.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 ставится общая задача управления с гарантией нахождения входного и выходного сигналов в заданном множестве в любой момент времени. В разделе 3 предложены две замены координат. Первая замена сводит выходную переменную объекта к новой переменной, размерность которой не превосходит размерности вектора управления. Вторая замена позволяет перейти от задачи управления с ограничениями к задаче управления без ограничений. В разделе 4 рассмотрено применение результата из раздела 3 к задаче управления по состоянию линейными системами с учетом ограничений на сигнал управления и фазовые переменные. В разделе 5 решена задача управления по выходу линейными системами с ограничением на выходной и управляющий сигналы. Полученные результаты сопровождаются примерами моделирования, иллюстрирующими эффективность предложенного метода.

В статье используются следующие *обозначения и определения*. \mathbb{R}^n — евклидово пространство размерности n с нормой $|\cdot|$; $\mathbb{R}^{n \times m}$ — множество всех $n \times m$ вещественных матриц; $P > 0$ — положительно определенная симметричная матрица; $\lambda_{\min}(P)$ — наименьшее собственное число матрицы $P > 0$; $p = d/dt$; символ «*» обозначает симметричный блок в симметричной матрице.

Определение 1 [3, 7]. Непрерывная функция $\alpha : [0, a) \rightarrow [0; \infty)$ принадлежит классу \mathcal{K} , если она является строго возрастающей и $\alpha(0) = 0$.

2. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему вида

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= F(x, u, t), \\ y &= H(x, u, t), \end{aligned}$$

где $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ — сигнал управления, $y = \text{col}\{y_1, \dots, y_l\} \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^l$ — выходной сигнал, функции F и H определены для всех x, u и t , F кусочно-непрерывна и ограничена по t , функция H непрерывно дифференцируемая по всем аргументам и ограниченная по t . Объект управления (1) управляемый и наблюдаемый для любого $x \in \mathbb{R}^n$.

В отличие от [1] в настоящей статье не требуются ограничения вида $\dim u \geq \dim y$, а возможно произвольное соотношение между размерностями сигналов u и y . Это достигается за счет замены вида

$$(2) \quad \xi = G(y, u, t),$$

где размерность ξ не превосходит размерности управляющего сигнала, т.е. $\xi = \text{col}\{\xi_1, \dots, \xi_v\}$, $v \leq m$, G — непрерывно дифференцируемая функция по всем аргументам и ограниченная по t .

Замечание 1. На самом деле можно не ограничиваться только классом непрерывно дифференцируемых функций G , но и рассмотреть более общий класс функций. Для этого рассмотрим следующее определение и комментарии к нему.

Определение 2 [8]. *Функция $u \rightarrow G(y, u, t)$ называется дифференцируемой в точке $u \in \mathbb{R}^m$ по направлению $v \in \mathbb{R}^m$, если существует конечный предел*

$$G'_u(y, u, t; v) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{G(y, u + \alpha v, t) - G(y, u, t)}{\alpha}.$$

Если функция $u \rightarrow G(y, u, t)$ дифференцируема в точке u по любому направлению $v \in \mathbb{R}^m$, то она называется дифференцируемой по направлениям в точке u , а функция $v \rightarrow G'_u(y, u, t; v)$ называется производной функции $u \rightarrow G(y, u, t)$ по направлениям.

Пусть функция $G(y, u, t)$ локально липшицева, непрерывно дифференцируема по y и t и дифференцируема по направлениям по u . Тогда для любых абсолютно непрерывных функций $y(t)$ и $u(t)$ функция $G(y(t), u(t), t)$ также будет абсолютно непрерывной. Более того, по правилу вычисления производной по направлениям сложной функции [8] будет

$$\frac{d}{dt} G(y(t), u(t), t) = \frac{\partial G}{\partial y} \dot{y} + G'_u(y(t), u(t), t; \dot{u}(t)) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

для почти всех $t \geq 0$. Здесь $G'_u(y(t), u(t), t; \dot{u}(t))$ — производная функции $u \rightarrow G(y(t), u, t)$ в точке $u(t)$ по направлению $\dot{u}(t)$.

Таким образом, когда рассматриваемая в статье функция G не является дифференцируемой по u , но является дифференцируемой по направлениям по u , во всех выкладках величину $\frac{\partial G(y(t), u(t), t)}{\partial u} \dot{u}(t)$ можно заменить на $G'_u(y(t), u(t), t; \dot{u}(t))$.

Требуется разработать закон управления, который обеспечит выполнение условия

$$(3) \quad \underline{g}_i(t) < \xi_i(t) < \bar{g}_i(t), \quad i = 1, \dots, v$$

для всех t . Функция G и непрерывно дифференцируемые функции $\underline{g}_i(t)$ и $\bar{g}_i(t)$ выбираются так, чтобы были учтены ограничения $u \in \mathcal{U}$ и $y \in \mathcal{Y}$. Таким образом, ограничения (3) вместе с преобразованием (2) должны включать в себя ограничения на входные и выходные сигналы объекта (1). Дополнительно, выбором функций $\underline{g}_i(t)$ и $\bar{g}_i(t)$ можно задавать различную «конфигурацию» области, в которой осуществляется переходной процесс по $\xi_i(t)$.

Резюмируем: в статье требуется синтезировать закон управления, который обеспечит выполнение условия (3). С другой стороны, определение переменной ξ обуславливает поведение сигналов y и u . Так, в разделах 4 и 5 функция G будет задана в квадратичной форме, что вместе с (3) требует нахождения переменных y и u в некоторой области, проекциями на координатные плоскости которой являются кольца с переменными радиусами, зависящими от $\underline{g}_i(t)$ и $\bar{g}_i(t)$ (подробнее см. ниже). В замечаниях 5 и 7 приведены примеры других видов замен (2), что обуславливает другие формы областей, где будут находиться y и u .

3. Метод решения

Следуя [1], введем замену переменной ξ в виде

$$(4) \quad \xi(t) = \Phi(\varepsilon(t), t),$$

где $\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^v$ — непрерывно дифференцируемая функция по t , $\Phi(\varepsilon, t) = \text{col}\{\Phi_1(\varepsilon, t), \dots, \Phi_v(\varepsilon, t)\}$ удовлетворяет следующим условиям:

- (а) $\underline{g}_i(t) < \Phi_i(\varepsilon, t) < \bar{g}_i(t)$, $i = 1, \dots, v$ для любых $t \geq 0$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}^v$;
- (б) существует обратное отображение $\varepsilon = \Phi^{-1}(\xi, t)$ для любых ξ из (3) и $t \geq 0$;
- (в) функция $\Phi(\varepsilon, t)$ непрерывно дифференцируемая по ε и t , а также $\det \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right) \neq 0$ для любых $\varepsilon \in \mathbb{R}^v$ и $t \geq 0$;
- (г) $\left| \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right| \leq \gamma$, $\gamma > 0$ для любых $\varepsilon \in \mathbb{R}^v$ и $t \geq 0$. Величина γ известна, поскольку (4) определяется разработчиком.

Для синтеза закона управления потребуется знание динамики $\varepsilon(t)$. Найдем полные производные по времени от $y(t)$ и $\xi(t)$ вдоль траекторий (1), (2), (4) и приравняем полученные результаты для (2) и (4). В итоге получим

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial x} F + \frac{\partial H}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial H}{\partial t}, \\ \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} &= \frac{\partial G}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial G}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial G}{\partial t}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание условие в), выразим $\dot{\varepsilon}$ из (5) в виде

$$(6) \quad \dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[\frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} F + \left(\frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial u} \right) \dot{u} + \right. \\ \left. + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right].$$

Замечание 2. Если по условию задачи не доступно измерению состояние x , то для синтеза закона управления вместо (6) удобно использовать выражение, полученное из второго выражения в (5) в виде

$$(7) \quad \dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[\frac{\partial G}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial G}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right].$$

В следующих разделах выражения (6) и (7) будут использоваться для синтеза законов управления. Теперь сформулируем основной результат настоящего раздела.

Теорема 1. Пусть для преобразования (4) выполнены условия (а)–(г), $\underline{g}_i(0) < \xi_i(0) < \bar{g}_i(0)$, $i = 1, \dots, v$, существует стабилизирующий закон управления $u = u(t, y, \varepsilon)$ для системы (6) или (7), кусочно-непрерывный по t и локально липшицевый по y и ε , а также существует функция Ляпунова $V(t, \varepsilon)$ такая, что

$$\alpha_1(|\varepsilon|) \leq V(t, \varepsilon) \leq \alpha_2(|\varepsilon|), \\ (8) \quad \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[\frac{\partial G}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial G}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right] \leq -\alpha_3(|\varepsilon|),$$

где α_1 , α_2 и α_3 — \mathcal{K} -функции. Тогда будет выполнено условие (3).

Так как выполнены условия (8), то $\varepsilon(t)$ — предельно ограниченная функция. Тогда из условия (а) следует, что будет выполнено условие (3).

Замечание 3. Условия теоремы 1 остаются справедливыми при ослабленных предположениях о дифференцируемости функции G [9], а именно, если G локально липшицева по всем переменным, непрерывно дифференцируе-

ма по y и t , и дифференцируема по направлениям по u . В этом случае в правой части второго равенства (5) второе слагаемое заменится на $G'_u(y, u, t; v)$ (см. определение 2). Значит, равенства (5)–(7) будут выполнены только для почти всех t . В результате в (6) и (7) необходимо заменить $\frac{\partial G}{\partial u} \dot{u}$ на соответствующую производную по направлениям и рассматривать все выкладки для почти всех t . Поэтому ниже в доказательствах теорем 2 и 3 соответствующие (не-)равенства для производных выполняются для почти всех t .

В [1] предложены различные частные виды замены координат (4), не связанные друг с другом. Ниже приведем новый вид замены координат, который позволит связать преобразования из [1] и получить ряд новых видов замен.

Пример 1. Пусть $\Phi(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}$ в (4) задана в виде

$$(9) \quad \Phi(\varepsilon, t) = \frac{\bar{g}(t) - \underline{g}(t)}{2} T(\varepsilon) + \frac{\underline{g}(t) + \bar{g}(t)}{2},$$

где $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $T(\varepsilon)$ — строго монотонная функция такая, что $-1 < T(\varepsilon) < 1$ для любых ε .

Достоинство замены координат (9) по сравнению с [1] состоит в том, что она позволяет отдельно выделить функции $\bar{g}(t)$, $\underline{g}(t)$ и $T(\varepsilon)$. Функции $\bar{g}(t)$ и $\underline{g}(t)$ определяют желаемую область для регулируемой переменной и задаются разработчиком. Функция $T(\varepsilon)$ определяет замену координат. Например, $T(\varepsilon)$ может быть выбрана в виде

$$T(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1 + |\varepsilon|}, \quad T(\varepsilon) = \frac{e^\varepsilon - 1}{e^\varepsilon + 1} = \text{th}(0,5\varepsilon), \quad T(\varepsilon) = \frac{2}{\pi} \arctg(\varepsilon) \quad \text{и т.п.}$$

Ниже рассмотрим применение предложенного подхода для тех же типов моделей, что и в [1]. Обобщение полученных результатов на случай неизвестных параметров модели может быть непосредственно получено как в [2].

4. Управление по состоянию с ограничением на фазовые переменные и сигнал управления

Рассмотрим объект управления

$$(10) \quad \dot{x} = Ax + Bu + Df,$$

где $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}$ и $|f(t)| \leq \bar{f}$ для всех t , матрицы A , B и D известны и имеют соответствующие размерности. Пара (A, B) управляема. В данном случае $y = x$. Множества \mathcal{X} и \mathcal{U} заданы как

$$(11) \quad \mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P_x x \leq 1\}, \quad \mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R} : p_u |u| \leq 1\},$$

где $P_x > 0$ и $p_u > 0$ задаются разработчиком.

Для сравнения ограничений по x и u введем замены переменных $\tilde{x} = \sqrt{\lambda_{\min}(P_x)} x$ и $\tilde{u} = p_u u$, которые позволяют пропорционально преобразовать

$x^T P_x x \leq 1$ к новому эллипсоиду с наибольшей полуосью единичной длины и $p_u |u| \leq 1$ к новому отрезку длины 2. С учетом данной замены преобразуем уравнение объекта (10) и множества \mathcal{X}, \mathcal{U} к виду

$$(12) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} + \tilde{D}f, \\ \tilde{\mathcal{X}} &= \left\{ \tilde{x} \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{\lambda_{\min}\{P_x\}} \tilde{x}^T P_x \tilde{x} \leq 1 \right\}, \quad \tilde{\mathcal{U}} = \{ \tilde{u} \in \mathbb{R} : |\tilde{u}| \leq 1 \}, \end{aligned}$$

где $\tilde{B} = \frac{\sqrt{\lambda_{\min}\{P_x\}}}{p_u} B$ и $\tilde{D} = \sqrt{\lambda_{\min}\{P_x\}} D$.

Представим новый сигнал управления \tilde{u} в виде следующей суммы:

$$(13) \quad \tilde{u} = \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2,$$

где \tilde{u}_1 будет использоваться для стабилизации (12), \tilde{u}_2 — для обеспечения заданных ограничений на \tilde{x} и \tilde{u} .

С учетом неравенством Юнга ($2a^T b \leq \mu a^T a + \mu^{-1} b^T b$ для любых $a, b \in \mathbb{R}^n$ и $\mu > 0$) рассмотрим следующую оценку: $\tilde{u}^2 = \tilde{u}_1^2 + 2\tilde{u}_1 \tilde{u}_2 + \tilde{u}_2^2 \leq (1+r)\tilde{u}_1^2 + (1+r^{-1})\tilde{u}_2^2$, $r > 0$. Учитывая, что $y = x$ в (10), определим переменную ξ в (2) в виде

$$(14) \quad \xi = \frac{1}{\lambda_{\min}\{P_x\}} \tilde{x}^T P_x \tilde{x} + (1+r)\tilde{u}_1^2 + (1+r^{-1})(|\tilde{u}_2| + \delta)^2,$$

где величина $\delta > 0$ задается разработчиком и потребуется для реализации закона управления \tilde{u}_2 с учетом того, что $|\tilde{u}_2| + \delta \neq 0$. Обозначив $P_1 = \frac{1}{\lambda_{\min}\{P_x\}} P_x$, $p_2 = 1+r$ и $p_3 = 1+r^{-1}$, перепишем (14) в виде

$$(15) \quad \xi = \tilde{x}^T P_1 \tilde{x} + p_2 \tilde{u}_1^2 + p_3 (|\tilde{u}_2| + \delta)^2.$$

В силу того, что ξ — скалярная величина, представим (3) как

$$(16) \quad \underline{g}(t) < \xi(t) < \bar{g}(t).$$

Так как

$$\tilde{x}^T P_1 \tilde{x} + \tilde{u}^2 \leq \tilde{x}^T P_1 \tilde{x} + p_2 \tilde{u}_1^2 + p_3 \tilde{u}_2^2 \leq \tilde{x}^T P_1 \tilde{x} + p_2 \tilde{u}_1^2 + p_3 (|\tilde{u}_2| + \delta)^2,$$

то, выбрав $\bar{g}(t) \leq 1$, получим, что в (16) учтены ограничения (12).

Требуется синтезировать закон управления, который обеспечит выполнение (16). Тогда фазовые переменные и сигнал управления будут находиться в заданных множествах \mathcal{X} и \mathcal{U} с дополнительным выполнением условия (16).

Отметим, что метод [1] для объекта (10) позволяет решить только задачу нахождения одной компоненты вектора x в заданном множестве без ограничений на сигнал управления.

Сформулируем основной результат раздела 4.

Теорема 2. Пусть для преобразования (2) выполнены условия (а)–(г), $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} > 0$ для любых ε и t , а также $\underline{g}(0) < \xi(0) < \bar{g}(0)$. Если для заданных $\delta > 0$, $\mu > 0$, $P_1 > 0$, $p_2 > 0$, $p_3 > 0$, $\beta > 0$, $c > 0$ и $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ существуют $H > 0$, $\alpha > 0$, $\tau_i > 0$, $i = 1, \dots, 6$ такие, что при $v = \pm \bar{f}$ разрешимы следующие линейные неравенства:

$$(17) \quad \begin{bmatrix} -\alpha + 0,5\tau_1 & 0,5v\mu^{-1}\tilde{D}^T\tilde{D} & -0,5 \\ * & -\tau_2 & 0 \\ * & * & -\tau_3 \end{bmatrix} \leq 0, \\ c\tau_1 \geq \bar{f}^2\tau_2 + \gamma^2\tau_3,$$

$$(18) \quad \begin{bmatrix} \bar{A}^T H + H\bar{A} + \beta H & H\tilde{B} & H\tilde{D} \\ * & -\tau_4 & 0 \\ * & * & -\tau_5 \end{bmatrix} \leq 0, \\ H \geq \bar{P}_1, \\ K^T K \leq \tau_6 H,$$

$$\frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\lambda_{\min}\{\bar{P}_1\}}\beta \geq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3}\tau_4 + \bar{f}^2\tau_5, \\ \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\lambda_{\min}\{\bar{P}_1\}}\tau_6 \leq \frac{1}{1+r},$$

тогда закон управления

$$(19) \quad u = \frac{1}{p_u}(\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2), \\ \tilde{u}_1 = K\tilde{x}, \\ \dot{\tilde{u}}_2 = -\frac{1}{2p_3(|\tilde{u}_2| + \delta)}\text{sign}(u_2) \left[\alpha\varepsilon + 2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \bar{A}\tilde{x} + 2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{B}\tilde{u}_2 + \mu\text{sign}(\varepsilon)\tilde{x}^T \bar{P}_1^2 \tilde{x} \right]$$

обеспечит выполнение (16), где $\bar{A} = A + \tilde{B}K$ и $\bar{P}_1 = P_1 + p_2 K^T K$.

Замечание 4. Для разрешимости (18) необходимо выбирать K из условия гурвицевости матрицы \bar{A} .

Доказательство. Отметим, что в статье решения уравнений с разрывной правой частью рассматриваются в смысле Филиппова. Поэтому в доказательствах теорем 2 и 3 соответствующие (не-)равенства для производных будут выполнены для почти всех t . Принимая во внимание (13) и (19), преобразуем (12) и (15) к виду

$$(20) \quad \dot{\tilde{x}} = \bar{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u}_2 + \tilde{D}f, \\ \xi = \tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{x} + p_3(|\tilde{u}_2| + \delta)^2.$$

С учетом (20) перепишем (6) как

$$(21) \quad \dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \bar{A} \tilde{x} + 2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{B} \tilde{u}_2 + 2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{D} f + \right. \\ \left. + 2p_3(|\tilde{u}_2| + \delta) \text{sign}(\tilde{u}_2) \dot{\tilde{u}}_2 - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right].$$

Для анализа устойчивости решений (21) рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$(22) \quad V_1 = 0,5\varepsilon^2.$$

Взяв полную производную по времени от (22) вдоль решений (21), получим:

$$(23) \quad \dot{V}_1 = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \varepsilon \left[2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \bar{A} \tilde{x} + 2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{B} \tilde{u}_2 + 2\tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{D} f + \right. \\ \left. + 2p_3(|\tilde{u}_2| + \delta) \text{sign}(\tilde{u}_2) \dot{\tilde{u}}_2 - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right].$$

Воспользовавшись неравенством Юнга для

$$2\varepsilon \tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{D} f \leq \mu |\varepsilon| \tilde{x}^T \bar{P}_1^2 \tilde{x} + \mu^{-1} |\varepsilon| \tilde{D}^T \tilde{D} f^2$$

и учитывая третье выражение в (19), оценим (23) в виде

$$(24) \quad \dot{V}_1 \leq \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left(-\alpha \varepsilon^2 + \mu^{-1} |\varepsilon| \tilde{D}^T \tilde{D} f^2 - \varepsilon \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right).$$

Потребуем при $V_1 \geq c$ выполнение условия $\dot{V}_1 \leq 0$, принимая во внимание ограничения $f^2 \leq \bar{f}^2$ и $\left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right)^2 \leq \gamma^2$ (см. постановку задачи и условие (г)). Так как $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} > 0$ не влияет на знак выражения (24), то перепишем выше-названные условия как

$$(25) \quad -\alpha \varepsilon^2 + \mu^{-1} \varepsilon \text{sign}(\varepsilon) \tilde{D}^T \tilde{D} f^2 - \varepsilon \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \leq 0 \quad \forall \left(\varepsilon, f, \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right) : \\ 0,5\varepsilon^2 \geq c, \quad f^2 \leq \bar{f}^2, \quad \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right)^2 \leq \gamma^2.$$

Обозначив $z = \text{col} \left\{ \varepsilon, f, \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right\}$, перепишем (25) в матричном виде:

$$(26) \quad z^T \begin{bmatrix} -\alpha & 0,5\mu^{-1} \text{sign}(\varepsilon) f \tilde{D}^T \tilde{D} & -0,5 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} z \leq 0, \\ z^T \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} z \leq -c, \quad z^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} z \leq \bar{f}^2, \quad z^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 1 \end{bmatrix} z \leq \gamma^2.$$

Согласно S-процедуре [10–12], неравенства (26) будут выполнены, если будут выполнены следующие условия:

$$(27) \quad \begin{bmatrix} -\alpha + 0,5\tau_1 & 0,5\text{sign}(\varepsilon)\mu^{-1}\tilde{D}^T\tilde{D} & -0,5 \\ * & -\tau_2 & 0 \\ * & * & -\tau_3 \end{bmatrix} \leq 0,$$

$$c\tau_1 \geq \bar{f}^2\tau_2 + \gamma^2\tau_3.$$

Так как $\text{sign}(\varepsilon)f \in [-\bar{f}, \bar{f}]$, то имеем политопную неопределенность в (27) с двумя вершинами политопа $v = -\bar{f}$ и $v = \bar{f}$. Согласно [13, 14], если существуют решения $\alpha, \tau_i, i = 1, 2, 3$ первого ЛМН в (17) в вершинах $v = -\bar{f}$ и $v = \bar{f}$, то первое ЛМН в (27) будет иметь решение. Значит, система (21) устойчива по вход-состоянию. В силу замены координат (4) и свойства (а) переменная ξ в (20) будет ограничена. Тогда сигналы \tilde{x}, x и \tilde{u}_2 будут ограничены. Из третьего выражения (19) следует ограниченность $\dot{\tilde{u}}_2$.

Теперь получим дополнительные условия, накладывающие ограничения на \tilde{u}_1 в (19). Рассмотрим функцию Ляпунова

$$(28) \quad V_2 = \tilde{x}^T H \tilde{x}$$

и потребуем при $V_2 \geq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\lambda_{\min}\{\bar{P}_1\}}$ выполнение условий $\dot{V} \leq 0$ и $H \geq \bar{P}_1$ (последнее означает, что эллипсоид $\tilde{x}^T H \tilde{x} = \inf\{\bar{g}(t)\}$ содержится внутри эллипсоида $\tilde{x}^T \bar{P}_1 \tilde{x} = \inf\{\bar{g}(t)\}$), принимая во внимание ограничения $\tilde{u}_2^2 \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3}$ и $f^2 \leq \bar{f}^2$. То есть потребуем, чтобы закон управления \tilde{u}_1 гарантировал нахождение фазовых траекторий в меньшем множестве по сравнению с (16). Перепишем данные условия как

$$(29) \quad \begin{aligned} \dot{V}_2 = \tilde{x}^T (\bar{A}^T H + H \bar{A}) \tilde{x} + 2\tilde{x}^T H \bar{B} \tilde{u}_2 + 2\tilde{x}^T H \bar{D} f &\leq 0 \quad \forall(\tilde{x}, \tilde{u}_2, f) : \\ \tilde{x}^T H \tilde{x} \geq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\lambda_{\min}\{\bar{P}_1\}}, \quad \tilde{u}_2^2 \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3}, \quad f^2 \leq \bar{f}^2. \end{aligned}$$

Обозначив $s = \text{col}\{\tilde{x}, \tilde{u}_2, f\}$, преобразуем (29) к виду

$$(30) \quad \begin{aligned} s^T \begin{bmatrix} \bar{A}^T H + H \bar{A} & H \bar{B} & H \bar{D} \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} s &\leq 0, \\ -s^T \begin{bmatrix} H & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} s &\geq -\frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\lambda_{\min}\{\bar{P}_1\}}, \\ s^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & -1 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} s &\leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3}, \quad s^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & -1 \end{bmatrix} s &\leq \bar{f}. \end{aligned}$$

С учетом $\tilde{u}^2 \leq 1$ из (12) и $\tilde{u}^2 \leq (1+r)\tilde{u}_1^2 + (1+r^{-1})\tilde{u}_2^2$ из неравенства Юнга потребуем выполнение $(1+r)\tilde{u}_1^2 + (1+r^{-1})\tilde{u}_2^2 \leq 1$. Значит, $\tilde{u}_1^2 \leq \frac{1}{1+r}$. Используя S-процедуру [13] и второе выражение в (19), в результате неравенства (30) и $\tilde{x}^T K^T K \tilde{x} \leq \frac{1}{1+r}$ при $\tilde{x}^T H \tilde{x} \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\lambda_{\min}\{P_1\}}$ будут выполнены одновременно, если будут выполнены условия (18). Теорема 2 доказана.

Замечание 5. В статье рассмотрены ограничения по состоянию в квадратичной форме. Подобные ограничения рассматривались также в [15]. Если ограничения заданы в виде параллелепипеда, то, например как в [16, 17], можно ввести новые ограничения в форме эллипсоида, вписанного в данный параллелепипед, и далее решать задачу с ограничениями в квадратичной форме.

С другой стороны, не обязательно рассматривать переменную ξ в квадратичной форме. Так, если априори заданы ограничения в квадратичной форме (11), то можно воспользоваться также заменой в квадратичной форме (15) или в качестве альтернативы $\xi = \tilde{x}^T P_1 \tilde{x} + (|\tilde{u}| + \delta)^2$. Если же все ограничения заданы в интервальной форме на координаты вектора состояния и управление, то можно воспользоваться заменами вида $\xi = |\tilde{x}| + |\tilde{u}_1| + |\tilde{u}_2|$ или $\xi = \sum_{i=1}^n p_{1i} |\tilde{x}_i| + |\tilde{u}_1| + |\tilde{u}_2|$, $p_{1i} > 0$, $i = 1, \dots, n$ и т.п., дополнительно ослабив предположения о дифференцируемости функции G по x и u , см. замечание 3 и [9]. Очевидно, что для каждой замены будут получены другие формы закона управления и условия их работоспособности, отличные от предложенных в статье.

Пример 2. Рассмотрим неустойчивый объект (10) со следующими параметрами:

$$(31) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} -0,4 \\ 0,4 \end{bmatrix}, \quad f(t) = 0,01[\text{sign}(\sin(1,7t)) + \sin(0,3t) + \text{sat}\{d(t)\}],$$

где $\text{sat}\{\cdot\}$ — функция насыщения, $d(t)$ — белый шум с ограниченной полосой пропускания и моделируемый в Matlab Simulink с помощью блока «Band-Limited White Noise» со следующими параметрами: мощность шума 0,3 и время выборки 0,2 соответственно. Тогда $\bar{f} = 0,03$.

Пусть $P_x = 0,81 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $p_u = 1$ определены в (11).

Зададим $\delta = 0,01$ в (15), $K = [-2 \quad -4]$ и $\mu = 0,01$ в (19), $T(\varepsilon) = \frac{e^\varepsilon - 1}{e^\varepsilon + 1}$, $\bar{g} = 0,89e^{-0,1t} + 0,1$ и $\underline{g} = 0,01$ в (16), а также $r = 0,01$ в (14). Вычислим: $P_1 = I$, $p_2 = 1,01$, $p_3 = 101$ и $\gamma = \frac{3\bar{g} - \underline{g}}{2} = 1,475$. Если задать $c = 1$ и $\beta = 0,1$, то неравенства (17), (18) имеют решения, например, при $\alpha = 37,9$.

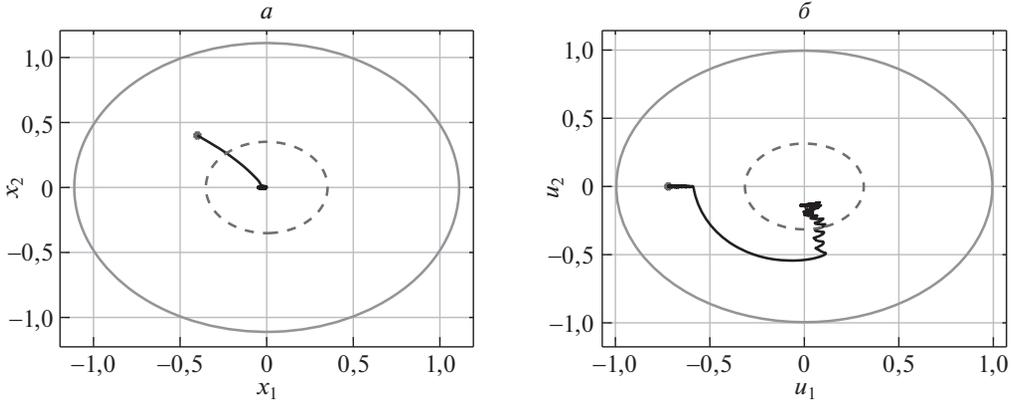


Рис. 1. Фазовые траектории в замкнутой системе по (x_1, x_2) — а и (u_1, u_2) — б.

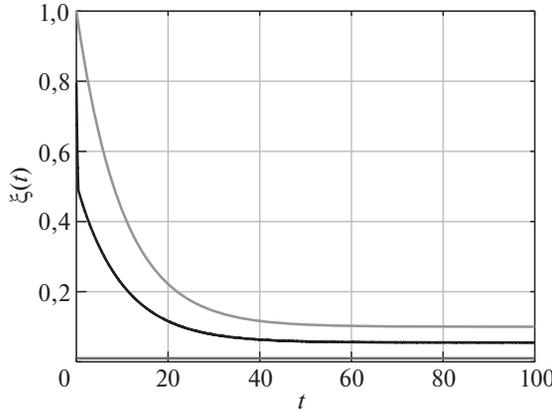


Рис. 2. Переходной процесс по $\xi(t)$ в замкнутой системе.

На рис. 1 изображены фазовые портреты по (x_1, x_2) и (u_1, u_2) , а на рис. 2 приведен переходной процесс по $\xi(t)$. На рис. 1 большие эллипсы соответствуют выражениям $x^T P_x x = \bar{g}(0)$ и $(1+r)p_u u_1^2 + (1+r^{-1})p_u u_2^2 = \bar{g}(0)$, а меньшие эллипсы — $x^T P_x x = \inf\{\bar{g}(t)\}$ и $(1+r)p_u u_1^2 + (1+r^{-1})p_u u_2^2 = \inf\{\bar{g}(t)\}$. Из рис. 1 видно, что фазовые траектории начинаются в большом эллипсе, с течением времени (примерно через 25 с после начала работы системы, см. рис. 2) достигают меньшего эллипса и остаются в нем, никогда не покидая его.

5. Управление по выходу

Рассмотрим объект управления вида

$$(32) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Df, \\ y &= Lx, \end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}$, $y \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}$ и $|f(t)| \leq \bar{f}$ для всех t . Матрицы A , B , D и L имеют соответствующие размерности. Пара (A, B) управляема и пара (L, A) наблюдаема. Объект управления (32) строго минимально-фазовый [3]. Множества \mathcal{Y} и \mathcal{U} заданы в виде

$$(33) \quad \mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R} : p_y |y| \leq 1\}, \quad \mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R} : p_u |u| \leq 1\},$$

где $p_y > 0$ и $p_u > 0$ задаются разработчиком.

Для сравнения ограничений по y и u введем замены $\tilde{y} = p_y y$ и $\tilde{u} = p_u u$, которые позволят преобразовать ограничения (33) к отрезкам одинаковой длины. Преобразуем множества \mathcal{Y} и \mathcal{U} к виду

$$(34) \quad \tilde{\mathcal{Y}} = \{\tilde{y} \in \mathbb{R} : |\tilde{y}| \leq 1\}, \quad \tilde{\mathcal{U}} = \{\tilde{u} \in \mathbb{R} : |\tilde{u}| \leq 1\}.$$

Представим \tilde{u} в виде суммы (13) и определим переменную ξ в (2) как

$$(35) \quad \xi = \tilde{y}^2 + p_2 \tilde{u}_1^2 + p_3 (|\tilde{u}_2| + \delta)^2,$$

где δ , p_2 и p_3 определены в разделе 4. Выбрав $\bar{g}(t) \leq 1$, получим, что (35) включает в себя ограничения (33). Цель управления состоит в поиске закона управления, гарантирующего выполнение условия (16) с учетом (35).

Метод [1] для объекта (32) гарантирует нахождение только выходного сигнала в заданном множестве. В отличие от [1] предложенный метод позволит обеспечить нахождение выходного и управляющего сигналов в заданном множестве.

Преобразуем (32) к виду

$$(36) \quad Q(p)\tilde{y}(t) = R(p)\tilde{u}(t) + \phi(t).$$

Здесь

$$Q(p) = \det(pI - A), \quad R(p) = \frac{p_y}{p_u} L(pI - A)^* B,$$

$(pI - A)^*$ — присоединенная матрица,

$$\phi(t) = p_y L(pI - A)^* [x(0) + Df(t) + Bu(0) + Bf(0)].$$

В дальнейшем, ради простоты выводов, например, как в [3, 18, 19] и ссылок на литературу в них, будем использовать одновременно запись в форме вход-выход (или передаточной функции) и пространства состояний.

Сформулируем основной результат раздела 5.

Теорема 3. Пусть для преобразования (2) выполнены условия (а)–(г), $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} > 0$ для любых ε и t , а также $\underline{g}(0) < \xi(0) < \bar{g}(0)$. Если для заданных $\delta > 0$, $\mu > 0$, $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $p_3 > 0$, $\beta > 0$, $c > 0$ и $k \in \mathbb{R}$ существуют $H > 0$, $\alpha > 0$, $\tau_i > 0$, $i = 1, \dots, 6$ такие, что при $v = \pm \bar{f}$ разрешимы следующие ли-

нейные неравенства:

$$(37) \quad \begin{bmatrix} -\alpha + 0,5\tau_1 & 0,5v\mu^{-1} & -0,5 \\ * & -\tau_2 & 0 \\ * & * & -\tau_3 \end{bmatrix} \leq 0, \\ c\tau_1 \geq \hat{\phi}^2\tau_2 + \gamma^2\tau_3,$$

$$(38) \quad \begin{bmatrix} \bar{A}^T H + Q\bar{A} + \beta H & \frac{1}{p_u}HB & HD \\ * & -\tau_4 & 0 \\ * & * & -\tau_5 \end{bmatrix} \leq 0, \\ H \geq p_y^2 \bar{p}_1 L^T L, \\ L^T K^T K L \leq \tau_6 H, \\ \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\bar{p}_1} \beta \geq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3} \tau_4 + \hat{\phi}^2 \tau_5, \\ \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\bar{p}_1} \tau_6 \leq \frac{1}{1+r},$$

тогда закон управления

$$(39) \quad u = \frac{1}{p_u}(\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2), \\ \tilde{u}_1 = k\tilde{y}, \\ \dot{\tilde{u}}_2 = -\frac{1}{2p_3(|\tilde{u}_2| + \delta)} \text{sign}(\tilde{u}_2) \left[\alpha\varepsilon + 2\bar{p}_1\tilde{y} \frac{pR(p)}{Q(p)} \tilde{u}_2 + \mu\bar{p}_1^2 \text{sign}(\varepsilon)\tilde{y}^2 \right]$$

обеспечит выполнение (16), где $\bar{A} = A + \frac{k}{p_u}BL$, $\bar{p}_1 = 1 + k^2p_2$.

Замечание 6. Для разрешимости (38) необходимо выбирать k из условия гурвицевости матрицы \bar{A} .

Доказательство. С учетом \tilde{u}_1 в (39) перепишем (35) и (36) в виде

$$(40) \quad \bar{Q}(p)\tilde{y}(t) = R(p)\tilde{u}_2(t) + \phi(t), \\ \xi = \bar{p}_1\tilde{y}^2 + p_3(|\tilde{u}_2| + \delta)^2.$$

Здесь $\bar{Q}(p) = Q(p) - kR(p)$. Подставив (36) в (6), получим

$$(41) \quad \dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial\varepsilon} \right)^{-1} \left[2\bar{p}_1\tilde{y} \frac{pR(p)}{Q(p)} \tilde{u}_2 + 2\bar{p}_1\tilde{y}\bar{\phi}(t) + \right. \\ \left. + 2p_3(|\tilde{u}_2| + \delta)\text{sign}(\tilde{u}_2)\dot{\tilde{u}}_2 - \frac{\partial\Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right],$$

где $\bar{\phi}(t) = \frac{p}{Q(p)}\phi(t)$ — ограниченная функция. Обозначим $\hat{\phi} = \sup\{\bar{\phi}(t)\}$.

Для анализа устойчивости (41) рассмотрим функцию Ляпунова (22). Взяв производную от (22) вдоль решений (41), получим

$$(42) \quad \dot{V}_1 = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \varepsilon \left[2\bar{p}_1 \tilde{y} \frac{pR(p)}{Q(p)} \tilde{u}_2 + 2\bar{p}_1 \tilde{y} \bar{\phi} + \right. \\ \left. + 2p_3 (|\tilde{u}_2| + \delta) \text{sign}(\tilde{u}_2) \dot{\tilde{u}}_2 - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right].$$

Воспользовавшись неравенством Юнга для $2\varepsilon \bar{p}_1 \tilde{y} \bar{\phi} \leq |\varepsilon| \mu \bar{p}_1^2 \tilde{y}^2 + \bar{\phi} + |\varepsilon| \mu^{-1} \bar{\phi}^2$ и учитывая третье выражение в (39), получим

$$(43) \quad \dot{V}_1 = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[-\alpha \varepsilon^2 + \mu^{-1} |\varepsilon| \varepsilon \bar{\phi}^2 - \varepsilon \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right].$$

Дальнейшие действия для получения условий (37) аналогичны, как в доказательстве теоремы 2.

Теперь получим дополнительные условия, накладывающие ограничения на \tilde{u}_1 в (39). Рассмотрим функцию Ляпунова

$$(44) \quad V_2 = x^T H x.$$

Перепишем (40) как

$$(45) \quad \dot{x} = \bar{A}x + \frac{1}{p_u} B \tilde{u}_2 + D\phi, \quad \tilde{y} = p_y Lx.$$

Потребуем при $V_2 \geq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\bar{p}_1}$ выполнение условий $\dot{V}_2 \leq 0$ и $H \geq p_y^2 \bar{p}_1 L^T L$ (последнее означает, что эллипсоид $x^T H x = \inf\{\bar{g}(t)\}$ содержится внутри цилиндра $x^T p_y^2 \bar{p}_1 L^T L x = \inf\{\bar{g}(t)\}$), принимая во внимание ограничения $\tilde{u}_2^2 \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3}$ и $\phi^2 \leq \hat{\phi}^2$. Перепишем вышеназванные условия в виде

$$(46) \quad \dot{V}_2 = x^T (\bar{A}^T H + H \bar{A}) x + 2x^T \frac{1}{p_u} H B \tilde{u}_2 + 2x^T H D \phi \leq 0 \quad \forall (x, \tilde{u}_2, \phi) : \\ x^T H x \geq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\bar{p}_1}, \quad \tilde{u}_2^2 \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{p_3}, \quad \phi^2 \leq \hat{\phi}^2.$$

С учетом $(1+r)\tilde{u}_1^2 \leq 1$ зададим $x^T p_y^2 L^T K^T K L x \leq \frac{1}{1+r}$ при $x^T H x \leq \frac{\inf\{\bar{g}(t)\}}{\bar{p}_1}$. Дальнейшие действия для получения условий (38) аналогичны, как в доказательстве теоремы 2. Теорема 3 доказана.

Замечание 7. В разделе 5 могут быть получены другие формы закона управления, если изначально преобразование (2) (в частности, в разделе 5 заданное в виде (35)) будет определено по-другому, например, в виде $\xi = \tilde{y}^2 + \tilde{u}^2$, $\xi = |\tilde{y}| + |\tilde{u}_1| + |\tilde{u}_2|$ и т.п. (см. замечание 5).

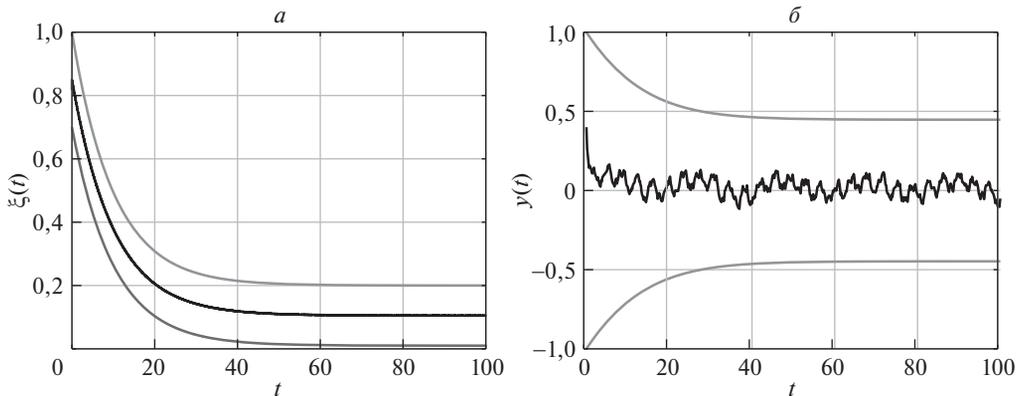


Рис. 3. Переходные процессы по $\xi(t)$ — *a* и $y(t)$ — *б* при ограничениях (16), заданных экспоненциальными функциями.

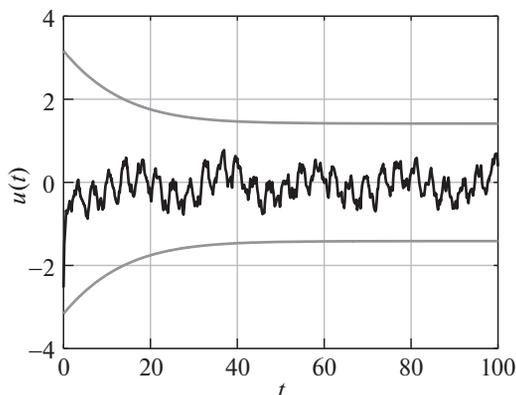


Рис. 4. Переходные процессы по $u(t)$ при ограничениях (16), заданных экспоненциальными функциями.

Пример 3. Рассмотрим неустойчивый объект (32) со следующими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L = [1 \quad 2 \quad 1], \quad x(0) = 0,1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

сигнал $f(t)$ определен в примере 2. Тогда $R(p) = (p + 1)^2$, $Q(p) = (p + 1)^3$ и $\hat{\phi} = 0,22$.

Пусть в (33) определены следующие параметры: $p_y = 1$ и $p_u = 0,3$.

Зададим $\delta = 0,01$, $k = -2$ и $\mu = 0,01$ в (39), $r = 0,01$ в (35), а также $T(\varepsilon)$ из примера 2. Если задать $\beta = 0,1$ и $c = 1$, то неравенства (37) будут разрешимы, например, при $\alpha = 374,3$.

На рис. 3, 4 изображены траектории по $\xi(t)$, $y(t)$ и $u(t)$ при $\bar{g} = 0,79e^{-0,1t} + 0,2$ и $\underline{g} = 0,69e^{-0,1t} + 0,01$ в (3), на рис. 5, 6 — при $\bar{g} = 0,45 \cos(0,5t) + 0,54$ и

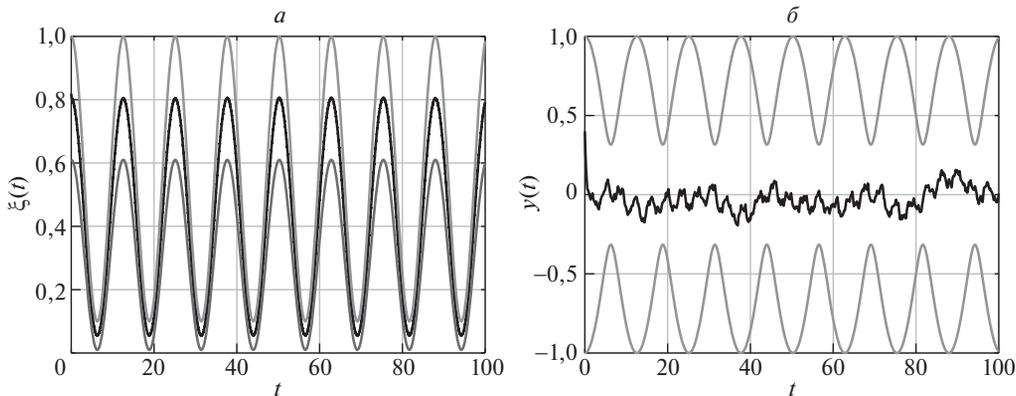


Рис. 5. Переходные процессы по $\xi(t)$ — *a* и $y(t)$ — *б* при ограничениях (16), заданных синусоидальными функциями.

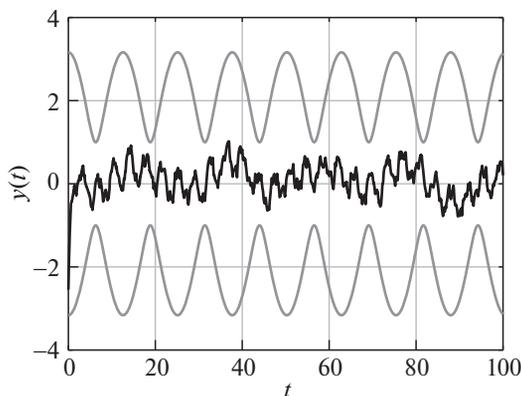


Рис. 6. Переходные процессы по $u(t)$ при ограничениях (16), заданных синусоидальными функциями.

$g = 0,3 \cos(0,5t) + 3,01$ в (3). Из рис. 3–6 видно, что сигналы ξ , y и u никогда не покидают заданных ограничений (33) и дополнительно заданных разработчиком ограничений (16), которые, например, могут быть определены экспоненциальными (см. рис. 3, 4) или синусоидальными (рис. 5, 6) функциями.

6. Заключение

В статье предложено развитие метода [1] на динамические системы с произвольным соотношением числа управлений и выходных сигналов и гарантией их нахождения в заданных множествах. Разработанный метод применяется для решения задач управления по состоянию и по выходу линейными системами с учетом ограничений на сигнал управления и выходные переменные, где размерность регулируемых переменных больше размерности сигнала управления. Также в отличие от [1] устойчивость замкнутой системы и

синтез параметров регулятора сформулированы в терминах разрешимости линейных матричных неравенств. Результаты моделирования подтвердили теоретические выводы и показали эффективность предложенного метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фуртат И.Б., Гуцин П.А.* Управление динамическими объектами с гарантией нахождения регулируемого сигнала в заданном множестве // *АиТ.* 2021. № 4. С. 121–139.
Furtat I.B., Gushchin P.A. Control of Dynamical Plants with a Guarantee for the Controlled Signal to Stay in a Given Set // *Autom. Remote Control.* 2021. V. 82. No. 4. P. 654–669.
2. *Furtat I., Gushchin P.* Nonlinear feedback control providing plant output in given set // *Int. J. Control.* 2022. V. 95. N. 6. P. 1533–1542.
<https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1861336>
3. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
4. *Spong M., Corke P., Lozano R.* Nonlinear control of the reaction wheel pendulum // *Automatica.* 2001. V. 37. P. 1845–1851.
5. *Sun W., Su S.F., Xia J., Wu Y.* Adaptive tracking control of wheeled inverted pendulums with periodic disturbances // *IEEE Trans. Cybernetics.* 2020. V. 50. No. 5. P. 1867–1876.
6. *Saleem O., Mahmood-ul-Hasan K.* Adaptive State-space Control of Under-actuated Systems Using Error-magnitude Dependent Self-tuning of Cost Weighting-factors // *Int. J. Control, Automat. Syst.* 2021. V. 19. P. 931–941.
7. *Khalil H.K.* Nonlinear Systems. 3rd edition. Pearson. 2001.
8. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.
9. *Dolgopolik M.V., Fradkov A.L.* Nonsmooth and discontinuous speed-gradient algorithms // *Nonlinear Anal. Hybrid Syst.* 2017. V. 25. P. 99–113.
10. *Yakubovich V.* S-procedure in nonlinear control theory // *Vestn. Leningr. Univ.* 1971. No. 1. P. 62–77.
11. *Polyak B.T.* Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization // *J. Optim. Theory Appl.* 1998. V. 99. P. 553–583.
12. *Гусев С.В., Ликhtarников А.Л.* Очерк истории леммы Калмана–Попова–Якубовича и S-процедуры // *АиТ.* 2006. № 11. С. 77–121.
Gusev S.V., Likhtarnikov A.L. Kalman-Popov-Yakubovich lemma and the S-procedure: A historical essay // *Autom. Remote Control.* 2006. V. 67. No. 11. P. 1768–1810.
13. *Fridman E.* A refined input delay approach to sampled-data control // *Automatica.* 2010. V. 46. P. 421–427.
14. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: Ленанд, 2014.

15. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // *АиТ.* 2007. № 3. С. 106–125.
Nazin S.A., Polyak B.T., Topunov M.V. Rejection of bounded exogenous disturbances by the method of invariant ellipsoids // *Autom. Remote Control.* 2007. V. 68. No. 3. P. 467–486.
16. *Leonessa A., Haddad W.M., Hayakawa T.* Adaptive Tracking for Nonlinear Systems with Control Constraints // *Proc. Amer. Control Conf.* 2001. P. 1292–1297.
17. *Lavretsky E., Hovakimyan N.* Positive μ -modification for Stable Adaptation in Dynamic Inversion Based Adaptive Control with Input Saturation // *Proc. Amer. Control Conf.* 2005. Portland, OR, USA. P. 3373–3378.
18. *Ioannou P.A., Sun J.* Robust Adaptive Control. PTR Prentice-Hall, 1996.
19. *Narendra K.S., Annaswamy A.M.* Stable Adaptive Systems. Dover Publications, 2012.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Е. Поляковым.

Поступила в редакцию 12.10.2021

После доработки 17.06.2022

Принята к публикации 30.11.2022

Стохастические системы

*Автор посвящает эту статью
светлой памяти своего учителя и друга
Бориса Теодоровича Поляка*

© 2023 г. М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;
Национальный исследовательский университет
“Московский физико-технический институт”)

СРАВНЕНИЕ ГАРАНТИРУЮЩЕГО И КАЛМАНОВСКОГО ФИЛЬТРОВ¹

Предлагается новый подход к задаче фильтрации при произвольных ограниченных внешних возмущениях, основанный на ее сведении к задаче оптимизации. Подход обладает невысокой вычислительной сложностью, предполагая на каждом итерационном шаге лишь решение уравнений Ляпунова. При этом его преимуществами, существенными с инженерно-практической точки зрения, являются возможность ограничения величины матрицы фильтра, а также возможность строить оптимальные матрицы фильтра по каждой из координат вектора состояния системы в отдельности.

Выписан градиентный метод для отыскания матрицы фильтра. Как показывают примеры, предлагаемая рекуррентная процедура является весьма эффективной и приводящей к вполне удовлетворительным результатам. Статья продолжает серию работ, посвященную синтезу обратной связи в задачах управления с позиций оптимизации.

Ключевые слова: линейная система, внешние возмущения, фильтрация, фильтр Калмана, наблюдатель Люенбергера, оптимизация, уравнение Ляпунова, градиентный метод, метод Ньютона, сходимость.

DOI: 10.31857/S0005231023040050, EDN: QIBUNX

1. Введение

Классическая постановка задачи фильтрации (т.е. оценки состояния динамической системы по измерениям) при случайных возмущениях допускает практически исчерпывающее решение с помощью фильтра Калмана [1]; см. подробнее монографию [2], а также [3]. Однако часто известно лишь, что все возмущения являются ограниченными, а в остальном произвольными; в этом

¹ Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21-71-30005), <https://rscf.ru/project/21-71-30005/>

случае можно строить гарантирующие (а не вероятностные) оценки состояний. В начале 1970-х гг. в работах Швеппе [4], Куржанского [5] и Черноусько [6] была развита эллипсоидальная техника фильтрации. Позже в [7, 8] рассматривалась проблема фильтрации с ограниченными неслучайными возмущениями для стационарных задач: искалась оценка состояния такая, что ее ошибка гарантированно заключена в единый эллипсоид для всех моментов времени, т.е. оценка является равномерной, а сам фильтр искался в классе линейных стационарных фильтров. В этом классе задач и оценок проблема оказалась полностью разрешимой: удалось построить оптимальный фильтр и оценку состояния. С технической точки зрения в [7, 8] был применен аппарат линейных матричных неравенств (ЛМН) [9], а исходная задача сведена к параметрической задаче полуопределенного программирования. Систематическое изложение этой техники можно найти в монографии [10].

С другой стороны, в последнее время стал очень популярным подход к задачам управления линейными системами как к задачам оптимизации, однако обоснование подобных методов появилось лишь недавно, см. [11–15]. В [16] подобный подход был впервые применен к задачам с внешними возмущениями, в [17] — к задаче синтеза обратной связи по выходу при помощи наблюдателя, а в [18] — к задаче синтеза ПИД-регуляторов.

Настоящая статья, цель которой состоит в упрощении алгоритма вычисления гарантирующего фильтра и его численном сравнении с фильтром Калмана, продолжает обе эти линии исследований. В ней предлагается оптимизационный алгоритм решения задачи фильтрации при неслучайных ограниченных внешних возмущениях. Он обладает невысокой вычислительной сложностью, предполагая на каждом итерационном шаге лишь решение уравнений Ляпунова. При этом существенным с инженерно-практической точки зрения преимуществом предлагаемого подхода по сравнению с ЛМН-подходом является возможность ограничения величины матрицы фильтра. Как показывают примеры, предлагаемая рекуррентная процедура является эффективной и приводящей к вполне удовлетворительным результатам.

При этом важно отметить, что в отличие от фильтра Калмана в рамках предлагаемого подхода оказывается возможным строить оптимальные матрицы фильтра по каждой из координат вектора состояния системы в отдельности.

Структура статьи следующая: раздел 2 содержит постановку задачи, в разделе 3 обсуждается предлагаемый подход к построению гарантирующего фильтра, в разделе 4 приводится и обосновывается алгоритм вычисления оптимальной матрицы фильтра, раздел 5 посвящен непрерывной постановке задачи, раздел 6 содержит описание и обсуждение результатов вычислений для нескольких примеров, в заключении обсуждаются возможные обобщения полученных результатов.

Всюду далее $|\cdot|$ — евклидова норма вектора, $\|\cdot\|$ — спектральная норма матрицы, $\|\cdot\|_F$ — фробениусова норма матрицы, T — символ транспо-

нирования, tr — след матрицы, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение Фробениуса для матриц, I — единичная матрица соответствующей размерности, $\lambda_i(A)$ — собственные значения матрицы A , $\sigma_i(A)$ — сингулярные числа матрицы A , а $\sigma(A) = -\max_i \text{Re}(\lambda_i(A))$ — степень устойчивости гурвицевой матрицы A , $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$ — спектральный радиус шуровской матрицы A . Все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему в дискретном времени

$$(1) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_1 u_k + D_1 w_k, \\ y_k &= Cx_k + B_2 u_k + D_2 w_k, \\ z_k &= C_1 x_k, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{\ell \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$, с состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, начальным условием x_0 , входом $u_k \in \mathbb{R}^p$, наблюдаемым выходом $y_k \in \mathbb{R}^\ell$, оцениваемым выходом $z_k \in \mathbb{R}^r$ и внешним возмущением (шумом) $w_k \in \mathbb{R}^m$, ограниченным в каждый момент времени:

$$|w_k| \leq 1 \quad \text{для всех } k = 0, 1, \dots;$$

пара (A, D_1) управляема, пара (A, C) наблюдаема.

Пусть состояние x_k системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом y_k . Для оценивания выхода z_k будем использовать фильтр, описываемый линейным разностным уравнением относительно оценки состояния \hat{x}_k :

$$(2) \quad \hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + B_1 u_k + L(y_k - C\hat{x}_k - B_2 u_k), \quad \hat{x}_0 = 0,$$

где $L \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$. Подчеркнем, что структура фильтра задается заранее — он является линейным стационарным, подлжит выбору лишь постоянная матрица L . Эта структура фильтра такая же, как и в известном наблюдателе Люенбергера [19, 20]. По сути, можно рассматривать этот фильтр как обобщение наблюдателя Люенбергера на задачи с помехами.

Задачей является минимизация ошибки оценки

$$z_k - \hat{z}_k = C_1(x_k - \hat{x}_k) = C_1 e_k,$$

где $e_k = x_k - \hat{x}_k$ — невязка, удовлетворяющая согласно (1), (2) разностному уравнению

$$(3) \quad e_{k+1} = (A - LC)e_k + (D_1 - LD_2)w_k, \quad e_0 = x_0.$$

Обратим внимание, что *допустимая* матрица фильтра L стабилизирует систему (3), обращая матрицу $A - LC$ в шуровскую. Ее существование вытекает из свойства наблюдаемости исходной системы.

Важно отметить, что здесь рассматривается случай неслучайных ограниченных помех. Для случайного, гауссовского шума вполне естественно применять калмановскую фильтрацию, однако одна из целей настоящей статьи — привлечь внимание к фильтрации с ограниченными шумами. Также на демонстрационных примерах будет рассмотрено, как работает фильтр Калмана с ограниченными помехами и наоборот — к чему приведет применение к случайным помехам рассматриваемой модели с ограниченным шумом.

Заметим также, что в настоящей статье рассматривается более общая постановка задачи, чем в [7]: в описании системы присутствует вход u_k .

Наконец, учет ограничения на внешнее возмущение вида

$$|w_k| \leq \gamma \quad \text{для всех } k = 0, 1, \dots$$

производится очевидным путем масштабирования матриц: $D_1 := \gamma D_1$, $D_2 := \gamma D_2$.

3. Гарантирующий фильтр

В настоящей статье предлагается гарантирующий подход к решению задачи фильтрации при ограниченных шумах, для которого можно явным образом выписать прямые формулы, основанные на градиентом спуске. Он основывается на концепции инвариантных эллипсоидов, см. подробнее [10, 21].

Один из основных результатов статьи представлен следующим утверждением.

Теорема 1. Пусть L^ , P^* — решение оптимизационной задачи*

$$(4) \quad \min f(L, \alpha), \quad f(L, \alpha) = \text{tr } C_1 P C_1^T + \rho \|L\|_F^2,$$

при ограничении

$$(5) \quad \frac{1}{\alpha}(A - LC)P(A - LC)^T - P + \frac{1}{1 - \alpha}(D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^T = 0$$

относительно матричных переменных $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ и скалярного параметра $0 < \alpha < 1$.

Тогда ошибка оценки $z_k - \hat{z}_k$ выхода системы (1) с нулевым начальным условием при помощи наблюдателя (2) с матрицей L^ заключена в минимальный ограничивающий эллипсоид с матрицей*

$$C_1 P^* C_1^T.$$

Переходя к обоснованию теоремы, напомним следующий результат [22].

Лемма 1. Пусть матрица A шуровская, $\rho = \max_i |\lambda_i(A)| < 1$, пара (A, D) управляема, а матрица $P(\alpha) \succ 0$, $\rho^2 < \alpha < 1$, удовлетворяет дискретному уравнению Ляпунова

$$(6) \quad \frac{1}{\alpha} A P A^T - P + \frac{1}{1 - \alpha} D D^T = 0.$$

Тогда:

1) задача об оптимальном ограничивающем эллипсоиде для выхода системы

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Dw_k, \\z_k &= Cx_k,\end{aligned}$$

с начальным условием x_0 и ограниченными внешними возмущениями $|w_k| \leq 1$ сводится к минимизации одномерной функции $f(\alpha) = \text{tr} CP(\alpha)C^T$ на интервале $\rho^2 < \alpha < 1$;

2) если α^* — точка минимума и x_0 удовлетворяет условию

$$x_0^T P^{-1}(\alpha^*) x_0 \leq 1,$$

то гарантируется оценка

$$|z_k|^2 \leq f(\alpha^*), \quad k = 0, 1, \dots$$

Итак, рассмотрим величину $C_1 e_k$ в качестве линейного выхода системы (3). Тогда если заключить невязку e_k в инвариантный эллипсоид

$$\mathcal{E} = \{e \in \mathbb{R}^n: e^T P^{-1} e \leq 1\}, \quad P \succ 0,$$

то $C_1 e_k$ будет содержаться в ограничивающем эллипсоиде

$$(7) \quad \mathcal{E}_z = \{e_z \in \mathbb{R}^r: e_z^T (C_1 P C_1^T)^{-1} e_z \leq 1\},$$

размер которого и будем минимизировать. Таким образом, оценивается асимптотическая (а при малых отклонениях и равномерная по k) точность фильтрации.

В соответствии с леммой 1 исходная задача свелась к матричной оптимизационной задаче (4)–(5). Обратим внимание, что в минимизируемую функцию $f(L, \alpha)$ помимо компоненты, определяющей размер ограничивающего эллипсоида (7) по критерию следа, введен штраф за величину матрицы фильтра (при этом коэффициент $\rho > 0$ регулирует его важность). В то же время его наличие гарантирует коэрцитивность минимизируемой функции по L . Запись $f(L, \alpha)$ подчеркивает, что при заданных L и α матрица P находится из уравнения Ляпунова (5); тем самым независимыми переменными являются L и α .

Сделаем важное

Замечание 1. Рассматриваемый гарантирующий подход позволяет строить оптимальные матрицы фильтра по каждой из координат вектора состояния системы в отдельности (этой возможности нет в фильтре Калмана). Действительно, положив в задаче из теоремы 1 в качестве матрицы C_1 транспонированный i -й координатный вектор, приходим к матрице фильтра, минимизирующей невязку $x_k^{(i)} - \hat{x}_k^{(i)}$.

4. Вычисление оптимальной матрицы фильтра

Напомним, что в [7] был предложен вариант гарантирующего подхода к решению задачи фильтрации при ограниченных шумах, который основан на технике линейных матричных неравенств и предполагает решение параметрической задачи полуопределенного программирования. В рамках рассматриваемой оптимизационной задачи (4)–(5) нет необходимости применять этот, технически сравнительно сложный, аппарат (несмотря на то, что и минимизируемая функция, и ограничение невыпуклы по совокупности переменных P , L и α). В этом разделе будет предложен регулярный итеративный подход к ее решению, в основе которого лежит применение градиентного метода по переменной L и минимизации по α по методу Ньютона. Приведем принципиальную схему алгоритма.

Алгоритм 1 для минимизации $f(L, \alpha)$:

1. Задаемся параметрами $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, $0 < \tau < 1$ и начальным допустимым приближением L_0 . Вычисляем величину $\alpha_0 = (1 + \rho^2(A - L_0C)) / 2$.

2. На j -й итерации, имея величины L_j и α_j , находим градиент $H_j = \nabla_L f(L_j, \alpha_j)$. Если $\|H_j\| \leq \varepsilon$, то L_j принимаем за приближенное решение.

3. Делаем шаг градиентного метода

$$L_{j+1} = L_j - \gamma_j H_j,$$

при этом длину шага $\gamma_j > 0$ подбираем дроблением γ до выполнения условий:

а. L_{j+1} обращает матрицу $(A - LC) / \sqrt{\alpha_j}$ в шуровскую;

б. $f(L_{j+1}) \leq f(L_j) - \tau \gamma_j \|H_j\|^2$.

4. Для полученного L_{j+1} решаем задачу минимизации $f(L_{j+1}, \alpha)$ по α по методу Ньютона:²

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f'(\alpha_j)}{f''(\alpha_j)}$$

и получаем α_{j+1} . Переходим к п. 2.

В Алгоритме 1 величины $\nabla_L f(L, \alpha)$, $f'(\alpha)$ и $f''(\alpha)$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla_L f(L, \alpha) &= 2 \left(\rho L - \frac{1}{\alpha} Y(A - LC) P C^T - \frac{1}{1 - \alpha} Y(D_1 - LD_2) D_2^T \right), \\ f'(\alpha) &= \text{tr} Y \left(\frac{1}{(1 - \alpha)^2} (D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^T - \frac{1}{\alpha^2} (A - LC) P (A - LC)^T \right), \\ f''(\alpha) &= 2 \text{tr} Y \left(\frac{1}{(1 - \alpha)^3} (D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^T + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha^3} (A - LC)(P - X)(A - LC)^T \right), \end{aligned}$$

² Реально требуется не более трех–четырёх итераций для получения решения с большой точностью, если начальная точка не слишком близка к границам интервала $(\rho^2(A - L_{j+1}C), 1)$.

где матрицы P , Y и X являются решениями дискретных уравнений Ляпунова (5),

$$(8) \quad \frac{1}{\alpha}(A - LC)^T Y (A - LC) - Y + C_1^T C_1 = 0$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha}(A - LC)X(A - LC)^T - X + \frac{1}{(1 - \alpha)^2}(D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^T - \\ - \frac{1}{\alpha^2}(A - LC)P(A - LC)^T = 0 \end{aligned}$$

соответственно.

Обоснование Алгоритма 1 с выводом соответствующих формул помещено в Приложение 1.

Важным моментом является выбор пробного шага градиентного метода. Весьма перспективным является его выбор из следующих соображений. Найдем для некоторого допустимого L решение P дискретного уравнения Ляпунова

$$(A - LC)P(A - LC)^T - P = -I.$$

Рассмотрим приращение по L :

$$L \rightarrow L - \gamma H, \quad H = \nabla_L f(L, \alpha),$$

и найдем, для каких γ матрица P останется матрицей квадратичной функции Ляпунова для $A - (L - \gamma H)C$, т.е.

$$(A - (L - \gamma H)C)P(A - (L - \gamma H)C)^T - P \prec 0$$

или по лемме Шура

$$\begin{pmatrix} P & A - (L - \gamma H)C \\ (A - (L - \gamma H)C)^T & P^{-1} \end{pmatrix} \succ 0.$$

Полученное матричное неравенство, которому можно придать вид

$$\begin{pmatrix} P & A - LC \\ (A - LC)^T & P^{-1} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & HC \\ (HC)^T & 0 \end{pmatrix} \succ 0,$$

выполняется при

$$\gamma < \lambda_{\max}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 & HC \\ (HC)^T & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P & A - LC \\ (A - LC)^T & P^{-1} \end{pmatrix} \right).$$

5. Непрерывный случай

Рассмотрим непрерывную систему

$$(9) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1u + D_1w, & x(0) &= x_0, \\ y &= Cx + B_2u + D_2w, \\ z &= C_1x, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{\ell \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$, с состоянием $x(t) \in \mathbb{R}^n$, входом $u(t) \in \mathbb{R}^p$, наблюдаемым выходом $y(t) \in \mathbb{R}^\ell$, оцениваемым выходом $z(t) \in \mathbb{R}^r$ и внешним возмущением (шумом) $w(t) \in \mathbb{R}^m$, ограниченным в каждый момент времени:

$$|w(t)| \leq 1 \quad \text{для всех } t \geq 0;$$

пара (A, D_1) управляема, пара (A, C) наблюдаема.

Для оценивания выхода z используется фильтр, описываемый линейным дифференциальным уравнением относительно оценки состояния \hat{x} :

$$(10) \quad \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1u + L(y - C\hat{x} - B_2u), \quad \hat{x}(0) = 0,$$

где $L \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$.

Как и в дискретном случае, задачей является минимизация ошибки оценки

$$z - \hat{z} = C_1(x - \hat{x}) = C_1e,$$

где $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ — невязка, удовлетворяющая согласно (9), (10) дифференциальному уравнению

$$(11) \quad \dot{e} = (A - LC)e + (D_1 - LD_2)w, \quad e(0) = x_0.$$

При этом *допустимая* матрица фильтра L стабилизирует систему (11), обращая матрицу $A - LC$ в гурвицевую. Ее существование вытекает из свойства наблюдаемости исходной системы.

Следующая лемма является непрерывным аналогом леммы 1.

Лемма 2 [9, 10]. Пусть матрица A гурвицева, $\sigma = -\max_i \operatorname{Re}(\lambda_i(A)) > 0$, пара (A, D) управляема, а матрица $P(\alpha) \succ 0$, $0 < \alpha < 2\sigma$, удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)P + P\left(A + \frac{\alpha}{2}I\right)^T + \frac{1}{\alpha}DD^T = 0.$$

Тогда:

1) задача об оптимальном ограничивающем эллипсоиде для выхода системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw, & x(0) &= x_0, \\ z &= Cx \end{aligned}$$

с ограниченными внешними возмущениями $|w(t)| \leq 1$ сводится к минимизации одномерной функции $f(\alpha) = \text{tr} CP(\alpha)C^T$ на интервале $0 < \alpha < 2\sigma$;

2) если α^* — точка минимума и $x(0)$ удовлетворяет условию

$$x^T(0)P^{-1}(\alpha^*)x(0) \leq 1,$$

то гарантируется оценка

$$|z(t)|^2 \leq f(\alpha^*), \quad 0 \leq t < \infty.$$

Рассуждая аналогично дискретному случаю и воспользовавшись леммой 2, приходим к следующему результату.

Теорема 2. Пусть L^ , P^* — решение оптимизационной задачи*

$$\min f(L, \alpha), \quad f(L, \alpha) = \text{tr} C_1 P C_1^T + \rho \|L\|_F^2,$$

при ограничении

$$(12) \quad \left(A - LC + \frac{\alpha}{2}I\right)P + P\left(A - LC + \frac{\alpha}{2}I\right)^T + \frac{1}{\alpha}(D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^T = 0$$

относительно матричных переменных $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$ и скалярного параметра $\alpha > 0$.

Тогда ошибка оценки $z - \hat{z}$ выхода системы (9) с нулевым начальным условием при помощи наблюдателя (10) с матрицей L^ заключена в минимальный ограничивающий эллипсоид с матрицей*

$$C_1 P^* C_1^T.$$

Свойства минимизируемой функции и ее производных, установленные в Приложении 2, позволяют построить метод минимизации и обосновать его сходимость.

Алгоритм 2 для минимизации $f(L, \alpha)$:

1. Задаемся параметрами $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, $0 < \tau < 1$ и начальным допустимым приближением L_0 . Вычисляем величину $\alpha_0 = \sigma(A - L_0 C)$.

2. На j -й итерации, имея величины L_j и α_j , находим градиент $H_j = \nabla_L f(L_j, \alpha_j)$. Если $\|H_j\| \leq \varepsilon$, то L_j принимаем за приближенное решение.

3. Делаем шаг градиентного метода

$$L_{j+1} = L_j - \gamma_j H_j,$$

при этом длину шага $\gamma_j > 0$ подбираем дроблением γ до выполнения условий:

а. L_{j+1} обращает матрицу $A - LC + \frac{\alpha_j}{2}I$ в гурвицевую;

б. $f(L_{j+1}) \leq f(L_j) - \tau \gamma_j \|H_j\|^2$.

4. Для полученного L_{j+1} решаем задачу минимизации $f(L_{j+1}, \alpha)$ по α и получаем α_{j+1} . Переходим к п. 2.

В Алгоритме 2 величины $\nabla_L f(L, \alpha)$, $f'(\alpha)$ и $f''(\alpha)$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\nabla_L f(L, \alpha) &= 2 \left(\rho L - Y P C^T - \frac{1}{\alpha} Y (D_1 - L D_2) D_2^T \right), \\ f'(\alpha) &= \text{tr} Y \left(P - \frac{1}{\alpha^2} (D_1 - L D_2) (D_1 - L D_2)^T \right), \\ f''(\alpha) &= 2 \text{tr} Y \left(X + \frac{1}{\alpha^3} (D_1 - L D_2) (D_1 - L D_2)^T \right),\end{aligned}$$

где матрицы P , Y и X являются решениями дискретных уравнений Ляпунова (12),

$$(13) \quad \left(A - LC + \frac{\alpha}{2} I \right)^T Y + Y \left(A - LC + \frac{\alpha}{2} I \right) + C_1^T C_1 = 0$$

и

$$(14) \quad \begin{aligned} &\left(A - LC + \frac{\alpha}{2} I \right) X + X \left(A - LC + \frac{\alpha}{2} I \right)^T + \\ &+ P - \frac{1}{\alpha^2} (D_1 - L D_2) (D_1 - L D_2)^T = 0. \end{aligned}$$

Обоснование Алгоритма 2 с выводом соответствующих формул помещено в Приложение 2.

Выбор пробного шага градиентного метода предлагается проводить из следующих соображений. Найдем для некоторого допустимого L решение P уравнения Ляпунова

$$(A - LC)P + P(A - LC)^T = -I.$$

Рассмотрим приращение по L :

$$L \rightarrow L - \gamma H, \quad H = \nabla_L f(L, \alpha),$$

и найдем, для каких γ матрица P останется матрицей квадратичной функции Ляпунова для $A - (L - \gamma H)C$, т.е.

$$(A - (L - \gamma H)C)P + P(A - (L - \gamma H)C)^T \prec 0.$$

С учетом исходного уравнения имеем

$$\gamma (HCP + P(HC)^T) \prec I,$$

откуда

$$\gamma < \lambda_{\max}^{-1} (HCP + P(HC)^T).$$

6. Примеры и обсуждение

Рассмотрим дискретную модель объекта в пространстве состояний:

$$(15) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_1 u_k + G w_k, \\ y_k &= Cx_k + B_2 u_k + v_k, \end{aligned}$$

с состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, начальным условием x_0 , входом $u_k \in \mathbb{R}^p$, наблюдаемым выходом $y_k \in \mathbb{R}^\ell$, шумом $w_k \in \mathbb{R}^m$ и ошибкой измерений $v_k \in \mathbb{R}^\ell$; здесь A , B_1 , B_2 , C и G — известные матрицы соответствующих размерностей; величины w_k и v_k предполагаются независимыми.

Применительно к системе (15) фильтр Калмана имеет следующий вид (в предположении, что величины w_k и v_k распределены нормально с нулевым математическим ожиданием и ковариационными матрицами Q и R соответственно).

Этап экстраполяции:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k} &= A\hat{x}_{k|k} + B_1 u_k, \\ P_{k+1|k} &= AP_{k|k}A^T + GQG^T. \end{aligned}$$

Этап коррекции:

$$\begin{aligned} K_k &= P_{k|k-1}C^T(CP_{k|k-1}C^T + R)^{-1}, \\ \hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + K_k(y_k - C\hat{x}_{k|k-1} - B_2 u_k), \\ P_{k|k} &= (I - K_kC)P_{k|k-1}. \end{aligned}$$

Будем рассматривать три следующие постановки задачи.

1. Модель \mathcal{M}_1 со случайными помехами: шум w_k распределен по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей Q , а погрешность измерений v_k имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей R :

$$w_k \sim N(0, Q), \quad v_k \sim N(0, R).$$

2. Модель \mathcal{M}_2 со случайными ограниченными помехами: величина w_k равномерно распределена на кубе $[-w, w]^m$, а величина v_k равномерно распределена на кубе $[-v, v]^\ell$:

$$w_k \sim U([-w, w]^m), \quad v_k \sim U([-v, v]^\ell).$$

3. Модель \mathcal{M}_3 с неслучайными ограниченными помехами: величины w_k и v_k могут принимать произвольные значения на кубах $[-w, w]^m$ и $[-v, v]^\ell$ соответственно:

$$|w_k|_\infty \leq w, \quad |v_k|_\infty \leq v.$$

В рамках этих моделей сравним работоспособность фильтра Калмана и гарантирующего подхода на следующих примерах (несмотря на то, что гарантирующие оценки не обоснованы для модели \mathcal{M}_1 , а фильтр Калмана — для модели \mathcal{M}_3).

На приводимых ниже рисунках показаны истинная траектория системы, ее наблюдение (если оно имеется) и оценки, предоставляемые калмановским (ФК) и гарантирующим (ГФ) фильтром; в последнем случае также показана трубка, в которой заведомо содержится оценка при всех допустимых помехах.

Пример 1. Рассмотрим вагонетку, которая может двигаться без трения по бесконечным рельсам [23]. В начальный момент вагонетка находится в нулевом положении и на нее воздействуют внешние возмущения. Положение вагонетки измеряется каждые Δt секунд, при этом измерения неточны. Задача состоит в отслеживании положения s и скорости $\dot{s} = v$ вагонетки.

Соответствующая система представима в формате (15) при

$$x_k = \begin{pmatrix} s \\ \dot{s} \end{pmatrix}, \quad x_0 = 0,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = B_2 = 0, \quad C = (1 \ 0), \quad G = \begin{pmatrix} ((\Delta t)^2/2) \\ \Delta t \end{pmatrix}.$$

1. В рамках модели \mathcal{M}_1 предполагается, что на k -м такте вагонетка движется с постоянным ускорением, распределенным по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением σ_x , а погрешность измерений имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением σ_y :

$$w_k \sim N(0, \sigma_x), \quad v_k \sim N(0, \sigma_y).$$

Построим фильтр Калмана, а также воспользуемся гарантирующим подходом, объединив помехи w_k и v_k в общий вектор возмущений

$$(16) \quad \tilde{w}_k = \begin{pmatrix} w_k \\ v_k \end{pmatrix}.$$

При этом матрицы D_1 и D_2 в системе (1) примут вид

$$D_1 = 3\sigma_x\sqrt{2} \begin{pmatrix} G & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = 3\sigma_y\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix},$$

что позволит варьировать величины w_k и v_k независимо друг от друга на интервалах

$$|w_k| \leq 3\sigma_x, \quad |v_k| \leq 3\sigma_y.$$

Гарантирующий подход привел к оптимальным матрицам фильтра

$$L_1^* = \begin{pmatrix} 0,2359 \\ 0,1412 \end{pmatrix}$$

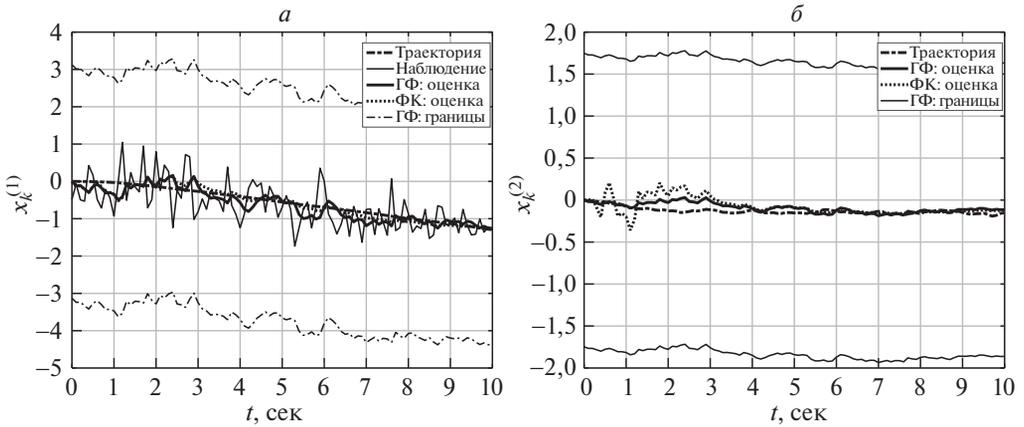


Рис. 1. Динамика координат и их оценок в примере 1 (модель \mathcal{M}_1).

для координаты $x^{(1)} = s$ и

$$L_2^* = \begin{pmatrix} 0,1122 \\ 0,0386 \end{pmatrix}$$

для координаты $x^{(2)} = \dot{s}$.

Результаты сравнения с фильтром Калмана при

$$\Delta t = 0,1, \quad \sigma_x = 0,1, \quad \sigma_y = 0,5$$

показаны на рис. 1,а и 1,б.

2. В рамках модели \mathcal{M}_2 будем предполагать, что на k -м такте вагонетка движется с постоянным ускорением, равномерно распределенным на отрезке $[-a, a]$, а погрешность измерений равномерно распределена на отрезке $[-v, v]$:

$$w_k \sim U(-a, a), \quad v_k \sim U(-v, v).$$

Построим фильтр Калмана (при $\sigma_x = a/3$, $\sigma_y = v/3$), а также воспользуемся гарантирующим подходом — для возмущения (16) и матриц

$$D_1 = a\sqrt{2} \begin{pmatrix} G & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = v\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Гарантирующий подход привел к оптимальным матрицам фильтра

$$L_1^* = \begin{pmatrix} 0,1393 \\ 0,0489 \end{pmatrix}$$

для координаты $x^{(1)} = s$ и

$$L_2^* = \begin{pmatrix} 0,0574 \\ 0,0101 \end{pmatrix}$$

для координаты $x^{(2)} = \dot{s}$.

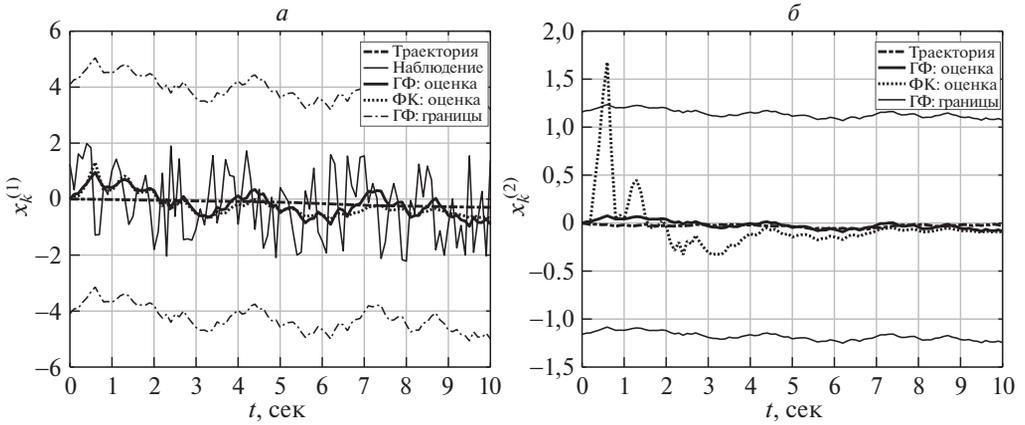


Рис. 2. Динамика координат и их оценок в примере 1 (модель \mathcal{M}_2).

Результаты сравнения с фильтром Калмана при

$$\Delta t = 0,1, \quad a = 0,1, \quad v = 2$$

показаны на рис. 2,а и 2,б.

3. В рамках модели \mathcal{M}_3 будем предполагать, что w_k и v_k принимают произвольные значения на отрезках $[-a, a]$ и $[-v, v]$ соответственно:

$$|w_k| \leq a, \quad |v_k| \leq v.$$

Применим фильтр Калмана (для $\sigma_x = a$, $\sigma_y = v$), а также воспользуемся гарантирующим подходом — для возмущения (16) и матриц

$$D_1 = a\sqrt{2} \begin{pmatrix} G & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = v\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Гарантирующий подход привел к оптимальным матрицам фильтра

$$L_1^* = \begin{pmatrix} 0,1397 \\ 0,0492 \end{pmatrix}$$

для координаты $x^{(1)} = s$ и

$$L_2^* = \begin{pmatrix} 0,0574 \\ 0,0101 \end{pmatrix}$$

для координаты $x^{(2)} = \dot{s}$.

Результаты сравнения с фильтром Калмана при

$$\Delta t = 0,1, \quad a = 0,1, \quad v = 2$$

показаны на рис. 3,а и 3,б.

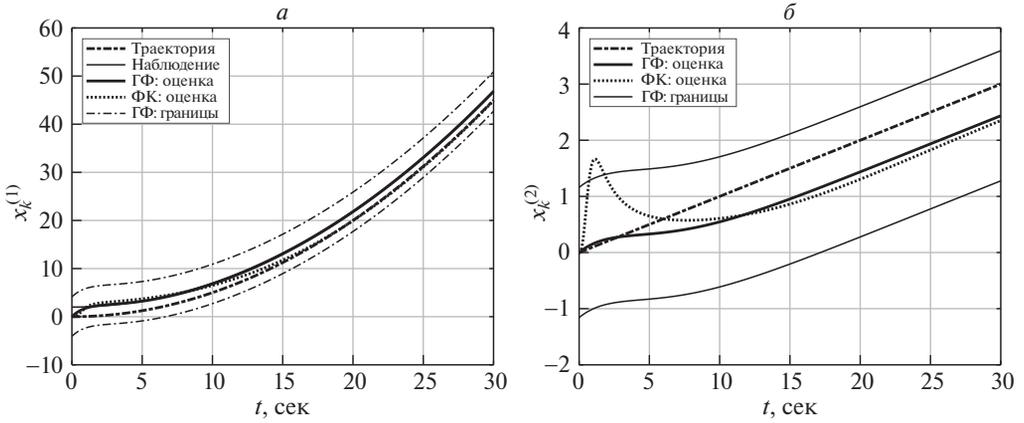


Рис. 3. Динамика координат и их оценок в примере 1 (модель \mathcal{M}_3).

Пример 2. Следующий пример [24] связан с оцениванием движения снаряда по баллистической траектории при наличии внешних возмущений и доступных наблюдению (зашумленных) координатах. Соответствующая система имеет вид (15), где

$$x = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

есть вектор состояния системы, состоящий из проекций координаты и скорости снаряда на горизонтальную и вертикальную оси, а

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-b \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g\Delta t \end{pmatrix},$$

$$B_1 = G = I, \quad B_2 = 0, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь Δt — интервал между измерениями, $0 < b \ll 1$ — коэффициент сопротивления воздуха, g — гравитационная постоянная, шум w_k распределен нормально с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $Q_k \succ 0$, а помехи измерения v_k распределены нормально с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $R_k \succ 0$. При этом

$$\Delta t = 0,1, \quad b = 10^{-4}, \quad g = 9,8, \quad Q = 0,1I, \quad R = 500I.$$

1. В рамках “стандартной” модели \mathcal{M}_1 предполагается, что

$$\begin{aligned} w_k &\sim N(0, \sigma_x I), & \sigma_x^2 &= 0,1, \\ v_k &\sim N(0, \sigma_y I), & \sigma_y^2 &= 500. \end{aligned}$$

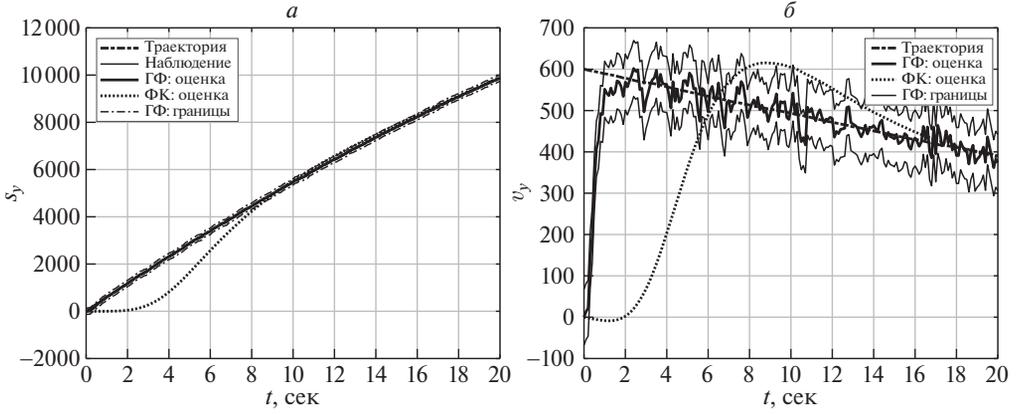


Рис. 4. Динамика координат и их оценок в примере 2 (модель M_1).

Как и в предыдущем примере, для того чтобы воспользоваться гарантирующим подходом, объединим помехи w_k и v_k в общий вектор возмущений, а матрицы D_1 и D_2 в системе (1) примут вид

$$D_1 = 3\sigma_x \sqrt{2} (G \ 0), \quad D_2 = 3\sigma_y \sqrt{2} (0 \ I),$$

что позволит варьировать величины w_k и v_k независимо друг от друга на интервалах

$$|w_k| \leq 3\sigma_x, \quad |v_k| \leq 3\sigma_y.$$

Гарантирующий подход доставил следующие оптимальные матрицы фильтра для каждой из четырех координат (здесь и далее в матрицах фильтра обнулены элементы, по абсолютной величине не превосходящие 10^{-6}):

$$L_1^* = \begin{pmatrix} 0,5946 & 0 \\ 0 & 0,6822 \\ 0,8467 & 0 \\ 0 & 1,0590 \end{pmatrix}, \quad L_2^* = \begin{pmatrix} 0,7277 & 0 \\ 0 & 0,6340 \\ 1,2376 & 0 \\ 0 & 0,9879 \end{pmatrix},$$

$$L_3^* = \begin{pmatrix} 0,0971 & 0 \\ 0 & 0,1389 \\ 0,0284 & 0 \\ 0 & 0,0456 \end{pmatrix}, \quad L_4^* = \begin{pmatrix} 0,1393 & 0 \\ 0 & 0,0975 \\ 0,0459 & 0 \\ 0 & 0,0285 \end{pmatrix}.$$

Результаты сравнения для координат s_y и v_y показаны на рис. 4,а и 4,б.

Обратим внимание, что поведение траекторий оценок на начальном участке обусловлено тем, что фактическая начальная точка

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 300 \\ 600 \end{pmatrix}$$

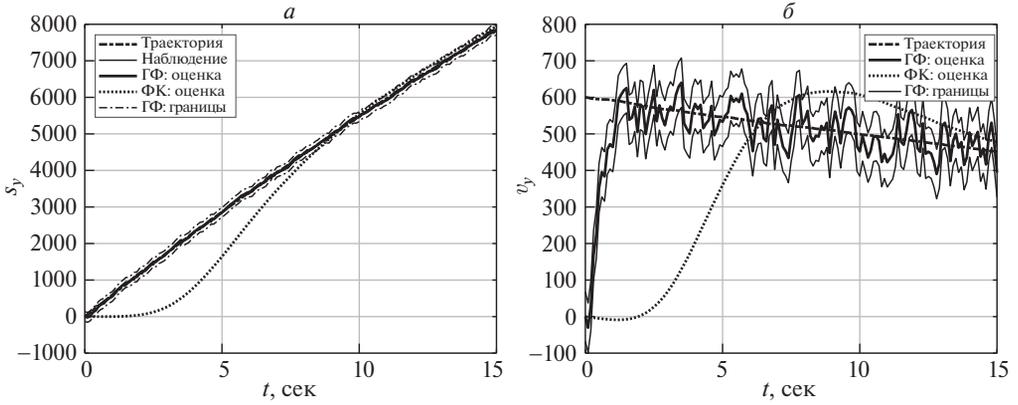


Рис. 5. Динамика координат и их оценок в примере 2 (модель \mathcal{M}_2).

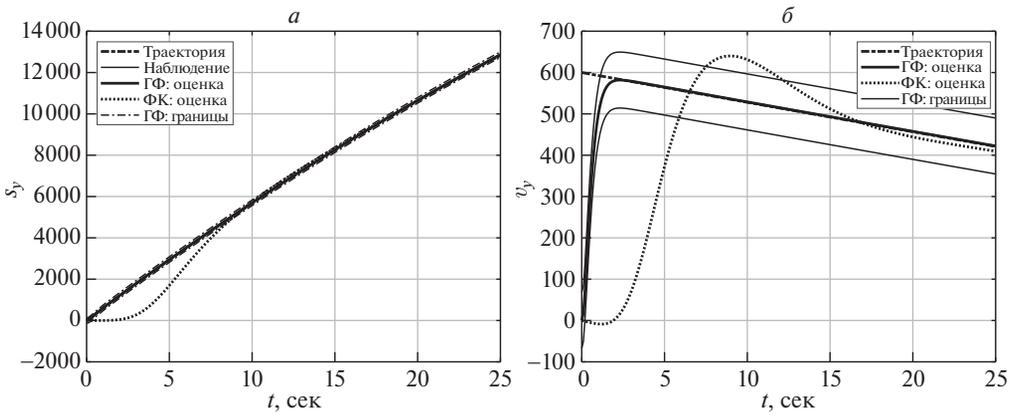


Рис. 6. Динамика координат и их оценок в примере 2 (модель \mathcal{M}_3).

оказалась вне минимального инвариантного эллипсоида для невязки. Однако в силу того, что инвариантный эллипсоид обладает свойством притягиваемости, после нескольких шагов гарантирующие оценки начинают охватывать истинную траекторию.

2. В рамках модели \mathcal{M}_2 будем предполагать, что

$$w_k \sim U(-w, w), \quad v_k \sim U(-v, v),$$

где $w = 3\sigma_x$, $v = 3\sigma_y$.

Поскольку в этом случае

$$D_1 = w\sqrt{2} \begin{pmatrix} G & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 = v\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix},$$

то гарантирующий подход приводит к тем же матрицам фильтра, что и в модели \mathcal{M}_2 . Результаты его сравнения с фильтром Калмана для координат s_y и v_y показаны на рис. 5,а и 5,б.

3. В рамках модели \mathcal{M}_3 будем предполагать, что

$$|w_k| \leq \sigma_x, \quad |v_k| \leq \sigma_y.$$

Гарантирующий подход при

$$D_1 = \sigma_x \sqrt{2} (G \ 0), \quad D_2 = \sigma_y \sqrt{2} (0 \ I)$$

привел к оптимальным матрицам фильтра

$$L_1^* = \begin{pmatrix} 0,6362 & 0 \\ 0 & 0,7256 \\ 0,9779 & 0 \\ 0 & 1,2126 \end{pmatrix}, \quad L_2^* = \begin{pmatrix} 0,6697 & 0 \\ 0 & 0,5747 \\ 1,0517 & 0 \\ 0 & 0,8206 \end{pmatrix},$$

$$L_3^* = \begin{pmatrix} 0,0971 & 0 \\ 0 & 0,1389 \\ 0,0284 & 0 \\ 0 & 0,0456 \end{pmatrix}, \quad L_4^* = \begin{pmatrix} 0,1393 & 0 \\ 0 & 0,0975 \\ 0,0459 & 0 \\ 0 & 0,0285 \end{pmatrix}.$$

Результаты его сравнения с фильтром Калмана для координат s_y и v_y показаны на рис. 6,а и 6,б.

Как видно из примеров, и фильтр Калмана, и гарантирующий фильтр, с одной стороны, не слишком сильно отличаются по своим результатам, а с другой — во всех трех моделях они вполне работоспособны. При этом, как ожидалось, для гауссовских помех фильтр Калмана дает немного (но не кардинально) лучшее поведение оценки по сравнению с гарантирующим фильтром, тогда как для неслучайных ограниченных помех преимущество остается за гарантирующим фильтром.

Отметим также, что ширина трубки, в которую гарантированно заключена соответствующая оценка, довольно сильно завышена, что хорошо видно на рисунках; это — характерное поведение методов гарантированного оценивания, направленных на противодействие “наихудшей” из возможных реализаций неопределенности.

Наконец, гарантирующий фильтр позволяет получить равномерную оценку точности фильтрации; здесь уместно обратить внимание на поведение гарантирующей и калмановской оценок на начальном участке траектории (при этом последняя также имеет явно выраженный всплеск).

7. Заключение

Предложен новый подход к задаче синтеза гарантирующего фильтра, основанный на сведении проблемы к задаче матричной оптимизации, где переменной является матрица фильтра. Далее эта задача решается градиентным методом; его сходимость теоретически обосновывается для ряда важных частных случаев.

Рассмотренные примеры демонстрируют работоспособность и эффективность предлагаемого алгоритма; проведено его сравнение с фильтром Калмана на трех различных постановках задач.

В статье рассматривалась задача построения стационарного фильтра; представляет явный интерес обобщение данного подхода и на динамическую задачу фильтрации в духе работ [25, 26] с помощью инструментария [27, 28].

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Лемма П.1.1. Пусть X и Y — решения двойственных дискретных уравнений Ляпунова с шуровской матрицей A :

$$A^T X A - X + W = 0 \quad \text{и} \quad A Y A^T - Y + V = 0.$$

Тогда $\text{tr}(XV) = \text{tr}(YW)$.

Доказательство леммы П.1.1. В самом деле, прямым вычислением имеем

$$\begin{aligned} \text{tr}(XV) &= \text{tr}(X(Y - A Y A^T)) = \text{tr}(XY) - \text{tr}(X A Y A^T) = \\ &= \text{tr}(YX) - \text{tr}(Y A^T X A) = \text{tr}(Y(X - A^T X A)) = \text{tr}(YW). \end{aligned}$$

Лемма П.1.1 доказана.

Лемма П.1.2. Для решения P дискретного уравнения Ляпунова

$$A P A^T - P + Q = 0$$

с шуровской матрицей A и $Q \succ 0$ справедливы оценки:

$$(П.1.1) \quad \lambda_{\max}(P) \geq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{1 - \rho^2}, \quad \lambda_{\min}(P) \geq \frac{\lambda_{\min}(Q)}{1 - \sigma_{\min}^2(A)},$$

где $\rho = \max_i |\lambda_i(A)|$, а $\sigma_{\min}(A)$ — наименьшее сингулярное число матрицы A .

Если же $Q = D D^T$ и пара (A, D) управляема, то

$$(П.1.2) \quad \lambda_{\max}(P) \geq \frac{\|u^* D\|^2}{1 - \rho^2} > 0,$$

где

$$u^* A = \lambda u^*, \quad |\lambda| = \rho, \quad \|u\| = 1,$$

т.е. u — левый собственный вектор матрицы A , отвечающий собственному значению λ матрицы A с наибольшим модулем. Вектор u и число λ могут быть комплексными; здесь u^* означает комплексное сопряжение и транспонирование.

Доказательство леммы П.1.2. Оценки (П.1.1) хорошо известны, см., например, [29]. Докажем справедливость оценки (П.1.2). Явное решение дискретного уравнения Ляпунова для шуровской матрицы A имеет вид

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} A^k D D^T (A^T)^k.$$

Умножая это равенство справа на u и слева на u^* и учитывая, что $u^* A^k = \lambda^k u^*$, $(A^T)^k u = (\lambda^*)^k u$, получаем, что

$$\lambda_{\max}(P) \geq u^* P u = \sum_{k=0}^{\infty} u^* A^k D D^T (A^T)^k u = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda \lambda^*)^k u^* D D^T u = \frac{\|u^* D\|^2}{1 - \rho^2},$$

причем $\|u^* D\| > 0$ в силу управляемости пары (A, D) , см., например, [10, теорема Д.1.5]. Лемма П.1.2 доказана.

Итак, начнем с оптимизации функции $f(\alpha)$ и рассмотрим оптимизационную задачу

$$\min f(\alpha), \quad f(\alpha) = \operatorname{tr} C P C^T$$

при ограничении

$$\frac{1}{\alpha} A P A^T - P + \frac{1}{1 - \alpha} D D^T = 0$$

относительно матричных переменных $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и скалярного параметра $0 < \alpha < 1$.

Здесь наложены более жесткие требования к постановке задачи, чем обычно: будем предполагать, что матрица C выхода системы — квадратная невырожденная. Это предположение можно было бы ослабить, но цель сейчас — получить наиболее простые и наглядные результаты.

Лемма П.1.3. Пусть матрица A шуровская, ρ — спектральный радиус матрицы A , $\rho^2 < \alpha < 1$, пара (A, D) управляема, а матрица C такова, что $C^T C \succ 0$. Тогда функция $f(\alpha) = \operatorname{tr} C P(\alpha) C^T$ обладает следующими свойствами:

а) функция $f(\alpha)$ определена, положительна и сильно выпукла на интервале $\rho^2 < \alpha < 1$, а ее значения стремятся к бесконечности на концах интервала, причем существует $c > 0$ такое, что

$$(П.1.3) \quad f(\alpha) \geq \frac{\alpha}{(1 - \alpha)(\alpha - \rho^2)} c, \quad \rho^2 < \alpha < 1;$$

б) производная функции $f(\alpha)$ имеет вид

$$f'(\alpha) = \operatorname{tr} Y \left(\frac{1}{(1 - \alpha)^2} D D^T - \frac{1}{\alpha^2} A P A^T \right),$$

где P и Y — решения дискретных уравнений Ляпунова

$$(П.1.4) \quad \frac{1}{\alpha}APA^T - P + \frac{1}{1-\alpha}DD^T = 0$$

и

$$(П.1.5) \quad \frac{1}{\alpha}A^TYA - Y + C^TC = 0.$$

в) вторая производная функции $f(\alpha)$ определяется формулой

$$f''(\alpha) = 2 \operatorname{tr} Y \left(\frac{1}{(1-\alpha)^3} DD^T + \frac{1}{\alpha^3} A(P-X)A^T \right),$$

где P , Y и X — решения дискретных уравнений Ляпунова (П.1.4) и (П.1.5) и

$$\frac{1}{\alpha}AXA^T - X + \frac{1}{(1-\alpha)^2}DD^T - \frac{1}{\alpha^2}APA^T = 0,$$

причем $f''(\alpha^*) > 0$ и $f''(\alpha)$ монотонно возрастает слева и справа от α^* .

Доказательство леммы П.1.3.

а. Уравнение (6) представимо в виде

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}A \right) P \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}A \right)^T - P = -\frac{1}{1-\alpha}DD^T$$

и согласно [10, лемма 1.2.6] имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрица $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}A$ шуровская: $|\lambda_i(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}A)| < 1$, т.е. при $\rho^2 < \alpha < 1$.

Оценим величину $f(\alpha) = \operatorname{tr} CP(\alpha)C^T$, используя лемму П.1.2 с очевидными заменами:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \operatorname{tr} CP(\alpha)C^T \geq \lambda_{\min}(C^TC)\lambda_{\max}(P(\alpha)) \geq \\ &\geq \frac{\|u^*D\|^2 \lambda_{\min}(C^TC)}{(1-\alpha)(1-\rho^2(A/\sqrt{\alpha}))} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)(\alpha-\rho^2)} \|u^*D\|^2 \lambda_{\min}(C^TC), \end{aligned}$$

где u имеет тот же смысл, что и в лемме П.1.2, а величина $\|u^*D\|^2$ положительна в силу предположения об управляемости пары (A, D) , а тем самым и пары $(A/\sqrt{\alpha}, D)$.

Покажем теперь, что функция $f(\alpha) = \operatorname{tr} CP(\alpha)C^T$ строго выпукла на интервале $(\rho^2, 1)$. В соответствии с [10, лемма 1.2.6] решение уравнения (П.1.4) представимо в явном виде как

$$P(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}A \right)^k \frac{1}{1-\alpha} DD^T \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}A^T \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(1-\alpha)\alpha^k}}_{g(\alpha,k)} \underbrace{A^k DD^T (A^T)^k}_{H_k}.$$

Но $H_k \succ 0$ и $g(\alpha, k) > 0$ при $0 < \alpha < 1$, поэтому на интервале $(\rho^2, 1)$ имеем

$$P(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} g(\alpha, k) H_k \succ 0$$

и

$$f(\alpha) = \text{tr } P(\alpha) C^T C > 0.$$

Прямым вычислением получаем

$$g'(\alpha, k) = \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{k}{\alpha} \right) g(\alpha, k),$$

$$g''(\alpha, k) = \left(\left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{k}{\alpha} \right)^2 + \frac{1}{(1-\alpha)^2} + \frac{k}{\alpha^2} \right) g(\alpha, k) \geq \frac{1}{(1-\alpha)^2} g(\alpha, k)$$

(здесь дифференцирование производится по α), так что

$$f''(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} g''(\alpha, k) \text{tr } C H_k C^T \geq \frac{1}{(1-\alpha)^2} f(\alpha) \geq \frac{1}{(1-\rho^2)^2} f(\alpha^*) > 0.$$

Таким образом, вторая производная функции $f(\alpha)$ положительна и стремится к бесконечности на концах интервала $(\rho^2, 1)$.

Далее, прямым вычислением четвертой производной получаем

$$g^{(IV)}(\alpha, k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{\alpha^{k+4}} + \frac{24}{(1-\alpha)^4} \geq \frac{24}{(1-\alpha)^4},$$

так что

$$f^{(IV)}(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} g^{(IV)}(\alpha, k) \text{tr } C H_k C^T \geq$$

$$\geq \frac{24}{(1-\alpha)^4} \sum_{k=0}^{\infty} \text{tr } C H_k C^T > \frac{24}{(1-\rho^2)^4} \sum_{k=0}^{\infty} \text{tr } C H_k C^T > 0,$$

т.е. вторая производная $f''(\alpha)$ сама является выпуклой и растет на границах интервала.

б. Выведем теперь формулу для производной функции $f(\alpha)$. В уравнении (П.1.4) решение P является функцией от α . Продифференцируем это уравнение; под P' будем понимать производную по α :

$$(П.1.6) \quad \frac{1}{\alpha} A P' A^T - P' + \frac{1}{(1-\alpha)^2} D D^T - \frac{1}{\alpha^2} A P A^T = 0.$$

Применяя лемму П.1.1 к двойственным уравнениям (П.1.6) и (П.1.5), получаем желаемую формулу

$$f'(\alpha) = \text{tr} CP' C^T = \text{tr} P' C^T C = \text{tr} Y \left(\frac{1}{(1-\alpha)^2} DD^T - \frac{1}{\alpha^2} APA^T \right).$$

в. Аналогично получим выражение для второй производной $f(\alpha)$. Дифференцируя уравнение (П.1.6) по α , получаем

$$\frac{1}{\alpha} AP'' A^T - P'' + \frac{2}{(1-\alpha)^3} DD^T + \frac{2}{\alpha^3} APA^T - \frac{2}{\alpha^3} AP' A^T = 0.$$

Вновь применяя лемму П.1.1 к этому уравнению и уравнению (П.1.5) (и имея в виду, что $X = P'$), получаем

$$f''(\alpha) = \text{tr} CP'' C^T = \text{tr} P'' C^T C = 2 \text{tr} Y \left(\frac{1}{(1-\alpha)^3} DD^T + \frac{1}{\alpha^3} A(P-X)A^T \right).$$

Лемма П.1.3 доказана.

Заметим, что для вычисления функции $f(\alpha)$ и двух ее производных достаточно решить три дискретных уравнения Ляпунова.

Указанные свойства функции позволяют применить метод Ньютона для ее минимизации. Задаемся начальным приближением $\rho^2(A) < \alpha_0 < 1$, например $\alpha_0 = (1 + \rho^2(A)) / 2$, и применяем итерационный процесс

$$(П.1.7) \quad \alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f'(\alpha_j)}{f''(\alpha_j)}.$$

Следующая теорема гарантирует глобальную сходимость алгоритма; ее справедливость устанавливается аналогично сходному результату в [16].

Теорема П.1.1 [16]. В методе (П.1.7) справедливы оценки

$$|\alpha_j - \alpha^*| \leq \frac{f''(\alpha_0)}{2j f''(\alpha^*)} |\alpha_0 - \alpha^*|, \quad |\alpha_{j+1} - \alpha^*| \leq c |\alpha_j - \alpha^*|^2,$$

где $c > 0$ — некоторая константа (она может быть выписана явно).

Первая оценка гарантирует глобальную сходимость метода (быстрее, чем геометрическая прогрессия с коэффициентом $1/2$), а вторая — квадратичную сходимость в окрестности решения. Реально требуется не более трех — четырех итераций для получения решения с большой точностью (если только начальная точка не слишком близка к границам интервала).

Вернемся к оптимизационной задаче (4)–(5) и займемся минимизацией функции

$$f(L) = \min_{\alpha} f(L, \alpha),$$

предварительно исследовав ее свойства.

Лемма П.1.4. Функция $f(L)$ определена и положительна на множестве \mathcal{S} допустимых матриц фильтра.

Действительно, если матрица $A - LC$ шуровская, то $\rho(A - LC) < 1$ и для $\rho^2(A - LC) < \alpha < 1$ существует решение $P \succ 0$ дискретного уравнения Ляпунова (5). Тем самым определена строго положительная функция $f(L, \alpha)$, при этом $f(L) > 0$ в силу (П.1.3). Как и в непрерывном случае, множество ее определения \mathcal{S} может быть невыпуклым и несвязным, а его границы — негладкими.

Лемма П.1.5. На множестве \mathcal{S} функция $f(L)$ коэрцитивна (т.е. стремится к бесконечности на границе области), причем справедливы следующие оценки:

$$(П.1.8) \quad f(L) \geq \frac{1}{1 - \rho^2(A - LC)} \frac{\lambda_{\min}(C_1 C_1^T)}{1 - \sigma_{\min}^2(A - LC)} \|D_1 - LD_2\|_F^2, \\ f(L) \geq \rho \|L\|^2.$$

Доказательство леммы П.1.5. Рассмотрим последовательность допустимых матриц $\{L_j\} \subseteq \mathcal{S}$ такую, что $L_j \rightarrow L \in \partial\mathcal{S}$, т.е. $\rho(A - LC) = 1$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $N = N(\varepsilon)$ такое, что неравенство

$$|\rho(A - L_j C) - \rho(A - LC)| = 1 - \rho(A - L_j C) < \varepsilon$$

справедливо для всех $j \geq N(\varepsilon)$.

Пусть P_j — решение уравнения (5), ассоциированного с матрицей фильтра L_j :

$$\frac{1}{\alpha_j}(A - L_j C)P_j(A - L_j C)^T - P_j + \frac{1}{1 - \alpha_j}(D_1 - L_j D_2)(D_1 - L_j D_2)^T = 0,$$

а Y_j — решение двойственного к нему дискретного уравнения Ляпунова

$$\frac{1}{\alpha_j}(A - L_j C)^T Y_j (A - L_j C) - Y_j + C_1 C_1^T = 0.$$

Тогда с учетом леммы П.1.2 имеем:

$$f(L_j) = \text{tr}(C_1 P_j C_1^T) + \rho \|L_j\|_F^2 \geq \text{tr}(P_j C_1 C_1^T) = \\ = \text{tr}\left(Y_j \frac{1}{1 - \alpha_j}(D_1 - L_j D_2)(D_1 - L_j D_2)^T\right) \geq \\ \geq \frac{1}{1 - \alpha_j} \lambda_{\min}(Y_j) \|D_1 - L_j D_2\|_F^2 \geq \frac{1}{1 - \alpha_j} \frac{\lambda_{\min}(C_1 C_1^T)}{1 - \sigma_{\min}^2(A - L_j C)} \|D_1 - L_j D_2\|_F^2 \geq \\ \geq \frac{1}{1 - \rho^2(A - L_j C)} \frac{\lambda_{\min}(C_1 C_1^T)}{1 - \sigma_{\min}^2(A - L_j C)} \|D_1 - L_j D_2\|_F^2 \geq \\ \geq \frac{1}{\varepsilon} \frac{\lambda_{\min}(C_1 C_1^T)}{1 - \sigma_{\min}^2(A - L_j C)} \|D_1 - L_j D_2\|_F^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty,$$

поскольку $\rho^2(A - L_j C) < \alpha_j < 1$.

С другой стороны,

$$f(L_j) = \text{tr}(C_1 P_j C_1^T) + \rho \|L_j\|_F^2 \geq \rho \|L_j\|_F^2 \geq \rho \|L_j\|^2 \xrightarrow{\|L_j\| \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Лемма П.1.5 доказана.

Введем в рассмотрение множество уровня

$$\mathcal{S}_0 = \{L \in \mathcal{S} : f(L) \leq f(L_0)\}.$$

Из леммы П.1.5 вытекает очевидное

Следствие П.1.1. Для любых $L_0 \in \mathcal{S}$ множество \mathcal{S}_0 ограничено.

С другой стороны, у функции $f(L)$ на множестве \mathcal{S}_0 существует точка минимума (как у непрерывной — в силу свойств решения дискретного уравнения Ляпунова — функции на компактном множестве), но множество \mathcal{S}_0 не имеет общих точек с границей \mathcal{S} в силу (П.1.8). Далее будет показано, что $f(L)$ дифференцируема на \mathcal{S}_0 . Следовательно, справедливо

Следствие П.1.2. Существует точка минимума L_* на множестве \mathcal{S} , и в ней градиент функции $f(L)$ обращается в нуль.

Перейдем к свойствам градиента функции $f(L, \alpha)$.

Лемма П.1.6. Функция $f(L, \alpha)$ определена на множестве стабилизирующих L и для $\rho^2(A - LC) < \alpha < 1$. На этом допустимом множестве она дифференцируема, причем градиент дается выражениями

$$(П.1.9) \quad \nabla_{\alpha} f(L, \alpha) = \text{tr} Y \left(\frac{1}{(1 - \alpha)^2} (D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^T - \frac{1}{\alpha^2} (A - LC)P(A - LC)^T \right),$$

$$(П.1.10) \quad \nabla_L f(L, \alpha) = 2 \left(\rho L - \frac{1}{\alpha} Y(A - LC)PC^T - \frac{1}{1 - \alpha} Y(D_1 - LD_2)D_2^T \right),$$

где матрицы P и Y являются решениями дискретных уравнений Ляпунова (5) и (8).

Минимум $f(L, \alpha)$ достигается во внутренней точке допустимого множества и определяется условиями

$$\nabla_L f(L, \alpha) = 0, \quad \nabla_{\alpha} f(L, \alpha) = 0.$$

При этом $f(L, \alpha)$ как функция от α строго выпукла на $\rho^2(A - LC) < \alpha < 1$ и достигает минимума во внутренней точке этого интервала.

Доказательство леммы П.1.6. Имеем задачу:

$$\min f(L, \alpha), \quad f(L, \alpha) = \text{tr} C_1 P C_1^T + \rho \|L\|_F^2$$

при ограничении в виде дискретного уравнения Ляпунова (5) относительно матрицы P инвариантного эллипсоида.

Следуя лемме П.1.3, дифференцирование по α производится в соответствии с соотношениями (П.1.9), (5) и (8). Для дифференцирования по L дадим ему приращение ΔL и обозначим соответствующее приращение P через ΔP ; в результате (5) примет вид

$$\frac{1}{\alpha} (A - (L + \Delta L)C) (P + \Delta P) (A - (L + \Delta L)C)^T - (P + \Delta P) + \\ + \frac{1}{1 - \alpha} (D_1 - (L + \Delta L)D_2) (D_1 - (L + \Delta L)D_2)^T = 0.$$

Оставляя обозначение ΔP для главной части приращения, получаем

$$\frac{1}{\alpha} ((A - LC)P(A - LC)^T - \Delta LCP(A - LC)^T - (A - LC)P(\Delta LC)^T + \\ + (A - LC)\Delta P(A - LC)^T) - (P + \Delta P) + \\ + \frac{1}{1 - \alpha} ((D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^T - \Delta LD_2(D_1 - LD_2)^T - \\ - (D_1 - LD_2)(\Delta LD_2)^T) = 0.$$

После вычитания уравнения (12) из этого уравнения, имеем:

$$(П.1.11) \quad \frac{1}{\alpha} (A - LC)\Delta P(A - LC)^T - \\ - \Delta P - \frac{1}{\alpha} (\Delta LCP(A - LC)^T + (A - LC)P(\Delta LC)^T) - \\ - \frac{1}{1 - \alpha} (\Delta LD_2(D_1 - LD_2)^T + (D_1 - LD_2)(\Delta LD_2)^T) = 0.$$

Вычислим приращение функционала $f(L)$, линеаризуя соответствующие величины:

$$\Delta f(L) = \text{tr } C_1 \Delta P C_1^T + \rho \text{tr } L^T \Delta L + \rho \text{tr } (\Delta L)^T L = \text{tr } \Delta P C_1^T C_1 + 2\rho \text{tr } L^T \Delta L.$$

По лемме П.2.1 из двойственных уравнений (П.1.11) и (8) имеем

$$\Delta f(L) = -2 \text{tr } Y \left(\frac{1}{\alpha} \Delta LCP(A - LC)^T + \right. \\ \left. + \frac{1}{1 - \alpha} \Delta LD_2(D_1 - LD_2)^T \right) + 2\rho \text{tr } L^T \Delta L = \\ = 2 \text{tr} \left(\rho L^T \Delta L - \frac{1}{\alpha} CP(A - LC)^T Y - \frac{1}{1 - \alpha} D_2(D_1 - LD_2)^T Y \right) \Delta L = \\ = \left\langle 2 \left(\rho L - \frac{1}{\alpha} Y(A - LC)PC^T - \frac{1}{1 - \alpha} Y(D_1 - LD_2)D_2^T \right), \Delta L \right\rangle.$$

Таким образом, приходим к соотношению (П.1.10). Лемма П.1.6 доказана.

Градиент функции $f(L)$ не является липшицевым на множестве \mathcal{S} , однако можно показать, что он обладает этим свойством на его подмножестве \mathcal{S}_0 (аналогично тому, как это было сделано в [16]).

Установленные свойства минимизируемой функции и ее производных обосновывают метод минимизации, реализованный в виде Алгоритма 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Лемма П.2.1 [16]. Пусть X и Y — решения двойственных уравнений Ляпунова с гурвицевой матрицей A :

$$A^T X + X A + W = 0 \quad \text{и} \quad A Y + Y A^T + V = 0.$$

Тогда $\text{tr}(XV) = \text{tr}(YW)$.

Свойства функции $f(\alpha)$, установленные в [16], полностью переносятся на рассматриваемый случай. В частности, функция $f(\alpha)$ определена, положительна и сильно выпукла на интервале $0 < \alpha < 2\sigma(A - LC)$, а ее значения стремятся к бесконечности на концах интервала, причем существует $c > 0$ такое, что

$$(П.2.1) \quad f(\alpha) \geq \frac{c}{\alpha(2\sigma - \alpha)}, \quad 0 < \alpha < 2\sigma(A - LC).$$

Минимизацию функции $f(\alpha)$ можно эффективно осуществлять при помощи метода Ньютона. Зададимся начальным приближением $0 < \alpha_0 < 2\sigma(A - LC)$, например $\alpha_0 = \sigma(A - LC)$, и применим итерационный процесс

$$\alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f'(\alpha_j)}{f''(\alpha_j)},$$

где согласно [16]

$$(П.2.2) \quad f'(\alpha) = \text{tr} Y \left(P - \frac{1}{\alpha^2} (D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^T \right),$$

$$f''(\alpha) = 2 \text{tr} Y \left(X + \frac{1}{\alpha^3} (D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^T \right),$$

а P , Y и X — решения уравнений Ляпунова (12), (13) и (14). При этом теорема П.1.1 сохраняет свою силу.

Следующая лемма является непрерывным аналогом леммы П.1.4.

Лемма П.2.2. Функция $f(L)$ определена и положительна на множестве \mathcal{S} допустимых матриц фильтра.

Действительно, если матрица $A - LC$ гурвицева, то $\sigma(A - LC) > 0$ и для $0 < \alpha < 2\sigma(A - LC)$ существует решение $P \succ 0$ уравнения Ляпунова (12). Тем самым определена строго положительная функция $f(L, \alpha)$, при этом $f(L) > 0$ в силу (П.2.1). Множество ее определения \mathcal{S} может быть невыпуклым и несвязным, причем его границы могут быть негладкими, см. [16].

Лемма П.2.3. На множестве \mathcal{S} допустимых матриц функция $f(L)$ коэрцитивна (т.е. стремится к бесконечности на границе области), причем справедливы следующие оценки:

$$(П.2.3) \quad f(L) \geq \frac{\lambda_{\min}(C_1 C_1^T) \|D_1 - L D_2\|_F^2}{4\sigma(A - LC) (\|A - LC\| + \sigma(A - LC))},$$

$$f(L) \geq \rho \|L\|^2.$$

Доказательство леммы П.2.3. Рассмотрим последовательность допустимых матриц $\{L_j\} \subseteq \mathcal{S}$ такую, что $L_j \rightarrow L \in \partial\mathcal{S}$, т.е. $\sigma(A - LC) = 0$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $N = N(\varepsilon)$ такое, что неравенство

$$|\sigma(A - L_j C) - \sigma(A - LC)| = \sigma(A - L_j C) < \varepsilon$$

справедливо для всех $j \geq N(\varepsilon)$.

Пусть P_j — решение уравнения (12), ассоциированного с матрицей фильтра L_j :

$$\begin{aligned} & (A - L_j C + \frac{\alpha_j}{2} I) P_j + P_j (A - L_j C + \frac{\alpha_j}{2} I)^T + \\ & + \frac{1}{\alpha_j} (D_1 - L_j D_2)(D_1 - L_j D_2)^T = 0, \end{aligned}$$

а Y_j — решение двойственного к нему уравнения Ляпунова

$$(A - L_j C + \frac{\alpha_j}{2} I)^T Y_j + Y_j (A - L_j C + \frac{\alpha_j}{2} I) + C_1 C_1^T = 0.$$

Тогда с учетом [16, лемма П.3] имеем:

$$\begin{aligned} f(L_j) &= \text{tr}(C_1 P_j C_1^T) + \rho \|L_j\|_F^2 \geq \\ &\geq \text{tr}(P_j C_1 C_1^T) = \text{tr}\left(Y_j \frac{1}{\alpha_j} (D_1 - L_j D_2)(D_1 - L_j D_2)^T\right) \geq \\ &\geq \frac{1}{\alpha_j} \lambda_{\min}(Y_j) \|D_1 - L_j D_2\|_F^2 \geq \frac{1}{\alpha_j} \frac{\lambda_{\min}(C_1 C_1^T)}{2\|A - L_j C + \frac{\alpha_j}{2} I\|} \|D_1 - L_j D_2\|_F^2 \geq \\ &\geq \frac{1}{4\sigma(A - L_j C) \|A - L_j C + \frac{\alpha_j}{2} I\|} \lambda_{\min}(C_1 C_1^T) \|D_1 - L_j D_2\|_F^2 \geq \\ &\geq \frac{\lambda_{\min}(C_1 C_1^T)}{4\varepsilon(\|A - L_j C\| + \varepsilon)} \|D_1 - L_j D_2\|_F^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty, \end{aligned}$$

поскольку $0 < \alpha_j < 2\sigma(A - L_j C)$ и

$$\|A - L_j C + \frac{\alpha_j}{2} I\| \leq \|A - L_j C\| + \frac{\alpha_j}{2}.$$

С другой стороны,

$$f(L_j) = \text{tr}(C_1 P_j C_1^T) + \rho \|L_j\|_F^2 \geq \rho \|L_j\|_F^2 \geq \rho \|L_j\|^2 \xrightarrow{\|L_j\| \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Лемма П.2.3 доказана.

Введем в рассмотрение множество уровня

$$\mathcal{S}_0 = \{L \in \mathcal{S} : f(L) \leq f(L_0)\}.$$

Из леммы П.2.3 вытекает очевидное

Следствие П.2.3. Для любых $L_0 \in \mathcal{S}$ множество \mathcal{S}_0 ограничено.

С другой стороны, у функции $f(L)$ на множестве \mathcal{S}_0 существует точка минимума (как у непрерывной — в силу свойств решения уравнения Ляпунова — функции на компактном множестве), но множество \mathcal{S}_0 не имеет общих точек с границей \mathcal{S} в силу (П.2.3). Далее будет показано, что $f(L)$ дифференцируема на \mathcal{S}_0 . Следовательно, справедливо

Следствие П.2.4. Существует точка минимума L_* на множестве \mathcal{S} , и в ней градиент функции $f(L)$ обращается в нуль.

Перейдем к свойствам градиента функции $f(L, \alpha)$.

Лемма П.2.4. Функция $f(L, \alpha)$ определена на множестве допустимых L и для $0 < \alpha < 2\sigma(A - LC)$. На этом допустимом множестве она дифференцируема, причем градиент дается выражениями

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha f(L, \alpha) &= \text{tr} Y \left(P - \frac{1}{\alpha^2} (D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^T \right), \\ \nabla_L f(L, \alpha) &= 2 \left(\rho L - Y P C^T - \frac{1}{\alpha} Y (D_1 - LD_2) D_2^T \right), \end{aligned} \quad (\text{П.2.4})$$

где матрицы P и Y являются решениями уравнений Ляпунова (12) и (13).

Минимум $f(L, \alpha)$ достигается во внутренней точке допустимого множества и определяется условиями

$$\nabla_L f(L, \alpha) = 0, \quad \nabla_\alpha f(L, \alpha) = 0.$$

При этом $f(L, \alpha)$ как функция от α строго выпукла на $0 < \alpha < 2\sigma(A - LC)$ и достигает минимума во внутренней точке этого интервала.

Доказательство леммы П.2.4. Имеем задачу:

$$\min f(L, \alpha), \quad f(L, \alpha) = \text{tr} C_1 P C_1^T + \rho \|L\|_F^2$$

при ограничении в виде уравнения Ляпунова (12) относительно матрицы P инвариантного эллипсоида.

Дифференцирование по α производится в соответствии с соотношениями (П.2.2), (12) и (13). Для дифференцирования по L дадим ему приращение

ΔL и обозначим соответствующее приращение P через ΔP ; в результате (12) примет вид

$$\begin{aligned} & \left(A - (L + \Delta L)C + \frac{\alpha}{2}I \right) (P + \Delta P) + (P + \Delta P) \left(A - (L + \Delta L)C + \frac{\alpha}{2}I \right)^T + \\ & + \frac{1}{\alpha} (D_1 - (L + \Delta L)D_2) (D_1 - (L + \Delta L)D_2)^T = 0. \end{aligned}$$

Оставляя обозначение ΔP для главной части приращения, получаем

$$\begin{aligned} & \left(A - (L + \Delta L)C + \frac{\alpha}{2}I \right) P + P \left(A - (L + \Delta L)C + \frac{\alpha}{2}I \right)^T + \\ & + \left(A - LC + \frac{\alpha}{2}I \right) \Delta P + \Delta P \left(A - LC + \frac{\alpha}{2}I \right)^T + \\ & + \frac{1}{\alpha} \left((D_1 - LD_2)(D_1 - LD_2)^T - \Delta LD_2(D_1 - LD_2)^T - \right. \\ & \left. - (D_1 - LD_2)(\Delta LD_2)^T \right) = 0. \end{aligned}$$

После вычитания уравнения (12) из этого уравнения, имеем:

$$\begin{aligned} \text{(П.2.5)} \quad & \left(A - LC + \frac{\alpha}{2}I \right) \Delta P + \Delta P \left(A - LC + \frac{\alpha}{2}I \right)^T - \\ & - \Delta LCP - P(\Delta LC)^T - \frac{1}{\alpha} (\Delta LD_2(D_1 - LD_2)^T + (D_1 - LD_2)(\Delta LD_2)^T) = 0. \end{aligned}$$

Вычислим приращение функционала $f(L)$, линеаризуя соответствующие величины:

$$\Delta f(L) = \text{tr } C_1 \Delta P C_1^T + \rho \text{tr } L^T \Delta L + \rho \text{tr } (\Delta L)^T L = \text{tr } \Delta P C_1^T C_1 + 2\rho \text{tr } L^T \Delta L.$$

По лемме П.2.1 из двойственных уравнений (П.2.5) и (13) имеем

$$\begin{aligned} \Delta f(L) &= -\text{tr } 2Y \left(\Delta LCP + \frac{1}{\alpha} \Delta LD_2(D_1 - LD_2)^T \right) + 2\rho \text{tr } L^T \Delta L = \\ &= 2 \text{tr} \left(\rho L^T \Delta L - CPY \Delta L - \frac{1}{\alpha} D_2(D_1 - LD_2)^T Y \Delta L \right) = \\ &= \left\langle 2 \left(\rho L - YPC^T - \frac{1}{\alpha} Y(D_1 - LD_2)D_2^T \right), \Delta L \right\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к соотношению (П.2.4). Лемма П.2.4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kalman R.E.* A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems // J. Basic Engineer. 1960. V. 82. I. 1. P. 35-45.
2. *Kailath T., Sayed A.H., Hassibi B.* Linear Estimation. N.J.: Prentice Hall, 2000.

3. *Матасов А.И.* Основы теории фильтра Калмана. М.: Изд-во МГУ, 2021.
4. *Schwerpe F.C.* Uncertain Dynamic Systems. N.J.: Prentice Hall, 1973.
5. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
6. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988.
7. *Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Фильтрация при неслучайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // Докл. РАН. 2008. Т. 418. № 6. С. 749–753.
Polyak B.T., Topunov M.V. Filtering under Nonrandom Disturbances: The Method of Invariant Ellipsoids // Dokl. Math. 2008. V. 77. No. 1. P. 158–162.
8. *Хлебников М.В., Поляк Б.Т.* Фильтрация при произвольных ограниченных внешних возмущениях: техника линейных матричных неравенств // 13-я Мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2020). Матер. XXXII Конференции памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н.Н. Острякова. Санкт-Петербург, 6–8 октября 2020 г. СПб.: Концерн “ЦНИИ “Электроприбор”, 2020. С. 291–294.
9. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
10. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
11. *Fazel M., Ge R., Kakade S., Mesbahi M.* Global Convergence of Policy Gradient Methods for the Linear Quadratic Regulator // Proc. 35th Int. Conf. Machine Learning. Stockholm, Sweden, July 10–15, 2018. V. 80. P. 1467–1476.
12. *Mohammadi H., Zare A., Soltanolkotabi M., Jovanović M.R.* Global Exponential Convergence of Gradient Methods Over the Nonconvex Landscape of the Linear Quadratic Regulator // Proc. 2019 IEEE 58th Conf. Decision Control. Nice, France, December 11–13, 2019. P. 7474–7479.
13. *Zhang K., Hu B., Başar T.* Policy Optimization for \mathcal{H}_2 Linear Control with \mathcal{H}_∞ Robustness Guarantee: Implicit Regularization and Global Convergence // Proc. 2nd Conference on Learning for Dynamics and Control (2nd L4DC). Zürich, Switzerland, June 11–12, 2020. P. 179–190.
14. *Bu J., Mesbahi A., Fazel M., Mesbahi M.* LQR through the Lens of First Order Methods: Discrete-Time Case // arXiv:1907.08921, 2019.
15. *Fatkhullin I., Polyak B.* Optimizing Static Linear Feedback: Gradient Method // SIAM J. Control Optim. 2021. V. 59. No. 5. P. 3887–3911.
16. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Синтез статического регулятора для подавления внешних возмущений как задача оптимизации // АиТ. 2021. № 9. С. 86–115.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Static Controller Synthesis for Peak-to-Peak Gain Minimization as an Optimization Problem // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 9. P. 1530–1553.
17. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Синтез обратной связи по выходу при помощи наблюдателя как задача оптимизации // АиТ. 2022. № 3. С. 7–32.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. Observer-Aided Output Feedback Synthesis as an Optimization Problem // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 3. P. 303–324.

18. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В.* Новые критерии настройки ПИД-регуляторов // *АиТ.* 2022. № 11. С. 62–82.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V. New Criteria for Tuning PID Controllers // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 11. P. 1724–1741.
19. *Luenberger D.G.* Observing the State of a Linear System // *IEEE Transactions on Military Electronics.* 1964. V. 8. P. 74–80.
20. *Luenberger D.G.* An Introduction to Observers // *IEEE Trans. Autom. Control.* 1971. V. 35. P. 596–602.
21. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербakov П.С.* Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью // *АиТ.* 2021. № 1. С. 3–54.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Linear Matrix Inequalities in Control Systems with Uncertainty // *Autom. Remote Control.* 2021. V. 82. No. 1. P. 1–40.
22. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // *АиТ.* 2007. № 3. С. 106–125.
Nazin S.A., Polyak B.T., Topunov M.V. Rejection of Bounded Exogenous Disturbances by the Method of Invariant Ellipsoids // *Autom. Remote Control.* 2007. V. 68. No. 3. P. 467–486.
23. URL en.wikipedia.org/wiki/Kalman_filter
24. *Humpherys J., Redd P., West J.* A Fresh Look at the Kalman Filter // *SIAM Rev.* 2012. V. 54. Iss. 4. P. 801–823.
25. *Tang W., Zhang Q., Wang Z., Shen Y.* Ellipsoid Bundle and its Application to Set-Membership Estimation // *IFAC-PapersOnLine.* 2020. V. 53. I. 2. P. 13688–13693.
26. *Tang W., Zhang Q., Wang Z., Shen Y.* Set-Membership Filtering with Incomplete Observations // *Inform. Sci.* 2020. V. 517. P. 37–51.
27. *Polyak B.T., Nazin S.A., Durieu C., Walter E.* Ellipsoidal Parameter or State Estimation under Model Uncertainty // *Automatica.* 2004. V. 40. I. 7. P. 1171–1179.
28. *Durieu C., Walter E., Polyak B.* Multi-Input Multi-Output Ellipsoidal State Bounding // *J. Optim. Theory Appl.* 2001. V. 111. No. 2. P. 273–303.
29. *Kwon W.H., Moon Y.S., Ahn S.C.* Bounds in Algebraic Riccati and Lyapunov Equations: A Survey and Some New Results // *Int. J. Control.* 1996. V. 64. P. 377–389.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 23.09.2022

После доработки 21.12.2022

Принята к публикации 29.12.2022

Управление в технических системах

© 2023 г. Ю.Г. БУЛЫЧЕВ, д-р техн. наук (profbulychev@yandex.ru),
Е.Н. ЧЕПЕЛЬ (evgeny_c@bk.ru),
(АО «ВНИИ «Градиент», Ростов-на-Дону)

ОПТИМИЗАЦИЯ КЛАСТЕРНО-ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ПОСТРОЕНИЯ МНОГОПОЗИЦИОННОЙ ПЕЛЕНГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ УСЛОВИЙ АПРИОРНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Рассмотрена возможность построения многопозиционной пеленгационной системы для случая априорной неопределенности, основанная на применении принципов размножения единичных отметок местоположения излучающей цели (принцип мультиструктурности) и их последующего разбиения на классы (принцип кластеризации). Приводятся критерии и алгоритмы обнаружения результирующего кластера и построения устойчивой к аномальным ошибкам измерений оптимальной оценки местоположения цели с учетом временных затрат на их компьютерную реализацию. Даны практические рекомендации и результаты сравнительного анализа различных алгоритмов.

Ключевые слова: излучающая цель, многопозиционная пеленгационная система, местоположение цели, пеленги, кластер, селекция, принцип мультиструктурности, принцип кластеризации, критерии оптимальности.

DOI: 10.31857/S0005231023040062, EDN: QIDV5Z

1. Введение

В [1, 2] развивается кластерно-вариационный метод (КВМ) решения задачи триангуляции (являющейся альтернативным по отношению к известным методам пассивной локации, например [3–20]), позволяющий при некотором ограничении на число недостоверных азимутальных и угломестных измерений формировать устойчивые оценки местоположения цели в условиях существенной априорной неопределенности (таких как отсутствие достоверных знаний о законах распределения ошибок измерений, пропуски в измерениях, наличие инструментальных и методических ошибок, «деградация» структуры системы и др.). В таких условиях, которые зачастую возникают на практике, результаты пеленгования могут допускать наличие неизвестных аномальных ошибок измерений (АОИ). Эти ошибки могут иметь самую различную природу происхождения (детерминированные неизвестные или случайные) и

связанную с этим неопределенность в их формализованном описании. Зачастую отсутствуют даже минимально необходимые сведения для эффективного применения известных адаптивных методов обработки измерений, гарантирующих состоятельность формируемых оценок (см., например, [21–23]). Кроме того, эти методы не учитывают специфику построения и функционирования многопозиционной пеленгационной системы, в частности геометрический фактор, обусловленный размещением в пространстве пеленгаторов и цели. Для большого класса таких систем важна не только некоторая усредненная оценка эффективности, а гарантированная для конкретной выборки измерений (т.е. «здесь и сейчас») оценка местоположения цели. При этом единственным учитываемым фактором зачастую является предположение о максимально возможном количестве недостоверных азимутальных и угломестных измерений, при котором еще возможно получение надежной оценки с учетом заданного числа пеленгаторов.

В [1, 2] для борьбы с АОИ используются принцип мультиструктурности (состоит в размножении единичных триангуляционных отметок на основе всех возможных наборов измерений, обеспечивающих построение правильной отметки без учета ошибок пеленгования) и принцип кластеризации (состоит в разбиении всех сформированных отметок на классы с учетом выбранного критерия оптимальности). В [1] изложен сам принцип мультиструктурного формирования семейства единичных отметок, но отсутствует эффективное правило их объединения с целью формирования результирующей оценки местоположения цели. Этот недостаток в определенной степени устранен в [2], где предложен алгоритм отбора результирующего кластера, который позволяет обнаружить недостоверные измерения, а также формировать устойчивую к АОИ результирующую оценку параметров движения цели. Речь идет о построении многопозиционной пеленгационной системы, которая является альтернативой классическим системам, создаваемым в рамках традиционных статистических методов (максимума апостериорной плотности вероятности, максимального правдоподобия, наименьших квадратов и минимума различных невязок [3–13]), которые хорошо себя зарекомендовали для случая корректных измерений (при отсутствии АОИ).

Однако в [2] вводится серьезное ограничение: априорно должно быть задано число кластеров разбиения единичных отметок. Кроме того, в [2] не учитывается возможность выбора оптимального результирующего кластера и оптимальной результирующей оценки местоположения цели. Не исследованы также возможности декомпозиции КВМ и вопросы оперативности формирования результирующей оценки.

В предлагаемой работе дается дальнейшее развитие КВМ [2] в плане его оптимизации, включающей введение более совершенных критериев оптимальности и предположений относительно параметров используемых кластеров. Демонстрируется возможность выбора наиболее эффективного (в плане точности) алгоритма обработки пеленгов в аномальных условиях измерений с учетом его возможной декомпозиции (двухэтапный подход) и временных

затрат на получение результирующей оценки местоположения цели каждым алгоритмом данного семейства.

2. Постановка задачи

С целью компактного описания предлагаемого метода в основном будет рассматриваться случай одной цели, что позволит опустить громоздкие обозначения и выкладки. Обобщение метода на случай неизвестного числа многих целей рассматривается в разделе 6.

В декартовой системе координат XYZ рассматривается многопозиционная пеленгационная система (далее просто система), состоящая из множества пеленгаторов $(\Pi_m, m = \overline{1, M})$, при этом положение каждого Π_m задается вектором $\mathbf{p}_m = [\rho_{xm}, \rho_{ym}, \rho_{zm}]^T$. Истинное положение цели характеризуется вектором $\mathbf{\lambda}_{\text{ист}} = [x_{\text{ист}}, y_{\text{ист}}, z_{\text{ист}}]^T$, при этом накладывается ограничение $\mathbf{\lambda}_{\text{ист}} \in \mathbf{\Lambda} = \Lambda_x \times \Lambda_y \times \Lambda_z$, для произвольной (модельной) точки системы XYZ используется вектор $\mathbf{\lambda} = [x, y, z]^T$.

Пеленгаторам системы можно поставить в соответствие векторы $\mathbf{Y}_\alpha = [\tilde{\alpha}_m, m = \overline{1, M}]^T$ и $\mathbf{Y}_\beta = [\tilde{\beta}_m, m = \overline{1, M}]^T$ первичных измерений азимута $\tilde{\alpha}_m = \alpha_m + \Delta\alpha_m$ и угла места $\tilde{\beta}_m = \beta_m + \Delta\beta_m$ соответственно, где $\Delta\alpha_m$ и $\Delta\beta_m$ — ошибки измерений с неизвестным законом распределения.

Обозначим через ς_α число азимутальных измерений, не содержащих АОИ, а через ς_β — угломестных. Полагаем, что

$$(1) \quad \gamma_\alpha < \varsigma_\alpha \leq M, \quad \gamma_\beta < \varsigma_\beta \leq M,$$

где γ_α и γ_β — натуральные числа, устанавливающие максимально допустимое число недостоверных измерений по азимуту и углу места соответственно, при этом выбор γ_α и γ_β (наряду с числом M) должен учитывать возможность формирования необходимого количества наборов (о них говорилось во введении), обеспечивающих эффективное применение указанных ранее принципов мультиструктурности и кластеризации.

Полагаем, что k -й и l -й наборы не должны совпадать для всех $k, l \in \{1, \dots, \overline{N}\}$, $k \neq l$, где \overline{N} соответствует минимально необходимому числу $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_\alpha + \gamma_\beta$ азимутальных и угломестных измерений, достаточных для построения набора. Будем также полагать, что число измерений, не содержащих АОИ, должно быть не менее $D_{\alpha\beta} = D_{\alpha s} + D_{\beta s}$, $s = \overline{1, S}$, $D_{\alpha s}, D_{\beta s} \in \{1, \dots, M\}$, где $D_{\alpha s}, D_{\beta s}$ — составляющие для s -го варианта представления числа $D_{\alpha\beta}$, обеспечивающего построение набора (S — общее число таких вариантов). Понятно, что для построения набора необходимо, чтобы $D_{\alpha s} \geq \gamma_\alpha$ и $D_{\beta s} \geq \gamma_\beta$. Общее количество возможных наборов для пары чисел $(\gamma_\alpha, \gamma_\beta)$ равно

$$(2) \quad \overline{N} = \left(\sum_{n=\gamma_\alpha}^M C_M^n \right) \left(\sum_{n=\gamma_\beta}^M C_M^n \right),$$

соответственно количество наборов, образованных измерениями, не содержащими АОИ (для s -го варианта)

$$(3) \quad \overline{\overline{N}}_s = \left(\sum_{n=\gamma_\alpha}^{D_{\alpha s}} C_{D_{\alpha s}}^n \right) \left(\sum_{n=\gamma_\beta}^{D_{\beta s}} C_{D_{\beta s}}^n \right),$$

а их минимальное количество (для всех вариантов)

$$(4) \quad \overline{\overline{N}}_{\min} = \min_s \overline{\overline{N}}_s.$$

В (2) и (3) в круглых скобках под знаком суммы фигурируют соответствующие числа сочетаний.

По результатам измерений для всех наборов строятся триангуляционные отметки и вычисляются вторичные пеленги $\alpha_{m[k]} = \alpha_m + \Delta\alpha_{m[k]}$ и $\beta_{m[k]} = \beta_m + \Delta\beta_{m[k]}$, при этом полагается, что для наборов, не содержащих измерений с АОИ, выполняются условия:

$$(5) \quad \begin{aligned} |\Delta\alpha_{m[k]}| &= |\alpha_{m[k]} - \tilde{\alpha}_m| < \varepsilon_{\alpha m}, \\ |\Delta\beta_{m[k]}| &= |\beta_{m[k]} - \tilde{\beta}_m| < \varepsilon_{\beta m}, \end{aligned} \quad m = \overline{1, M},$$

где $\varepsilon_{\alpha m} > 0$ и $\varepsilon_{\beta m} > 0$ — заданные пороговые значения.

Для проведения кластеризации (селекции) отметок проверяется количество выполненных условий (отдельно по азимуту и углу места): если для k -го набора это количество не соответствует ограничениям (5) или отметка не принадлежит области \mathbf{L} , то рассматриваемый набор отсеивается. Оставшимся после селекции вторичным наборам (их количество $N \leq \overline{N}$) отвечают отметки $\lambda_{[n]}$, где $n = \overline{1, N}$, $N \leq \overline{N}$. Сформированное множество $\mathbf{X} = \{\lambda_{[1]}, \dots, \lambda_{[N]}\}$ разбивается на кластеры K_q , $q = \overline{1, Q}$ (для кластеризации применяется иерархический агломеративный алгоритм с евклидовой нормой по аналогии с [24–28]). Согласно данному алгоритму отметки $\lambda_{[1]}, \dots, \lambda_{[N]}$ последовательно (по шагам) объединяются в группы: сначала самые близкие, а затем все более отдаленные друг от друга. На первом шаге каждая отметка рассматривается как отдельный кластер.

Алгоритм кластеризации устанавливает отображение $f: \mathbf{X} \rightarrow \{K_q, q = \overline{1, Q}\}$, $K_q = \{\lambda \in \mathbf{X} | f(\lambda) = q\}$, причем $\mathbf{X} = \bigcup K_q$ (где \bigcup — символ объединения кластеров по индексу $q = \overline{1, Q}$), $K_k \cap K_r = \emptyset$, $k, r \in \{1, \dots, Q\}$, $k \neq r$ и $K_q \neq \emptyset \forall q = \overline{1, Q}$.

Для решения задачи обнаружения наилучшего кластера и построения соответствующей ему оптимальной результирующей оценки (единая задача

обнаружения-оценивания) используем следующую решающую функцию:

$$(6) \quad F(\boldsymbol{\lambda}, q) = \sum_{m=1}^M \left[\left(\frac{\alpha_m(\boldsymbol{\lambda}) - \tilde{\alpha}_m}{2\pi} \right)^2 W_{\alpha_m}(q) + \left(\frac{\beta_m(\boldsymbol{\lambda}) - \tilde{\beta}_m}{2\pi} \right)^2 W_{\beta_m}(q) \right],$$

где $\alpha_m(\boldsymbol{\lambda})$ и $\beta_m(\boldsymbol{\lambda})$ — модельные пеленги, $W_{\alpha_m}(q)$ и $W_{\beta_m}(q)$ — безразмерные нормированные весовые коэффициенты.

В (6) число 2π использовано для нормировки и для получения безразмерной функции $F(\boldsymbol{\lambda}, q)$, а частные весовые коэффициенты задаются так

$$(7) \quad \begin{aligned} W_{\alpha_m}(q) &= L_q^{-1} \sum_{l=1}^{L_q} \varphi \left(\frac{|\alpha_{mql} - \tilde{\alpha}_m|^2}{\varepsilon_{\alpha_m}^2} \right), \\ W_{\beta_m}(q) &= L_q^{-1} \sum_{l=1}^{L_q} \varphi \left(\frac{|\beta_{mql} - \tilde{\beta}_m|^2}{\varepsilon_{\beta_m}^2} \right), \end{aligned}$$

где L_q — количество отметок в кластере K_q , α_{mql} и β_{mql} — вторичные пеленги отметки $\boldsymbol{\lambda}_{ql}$ кластера K_q , $l \in \{1, \dots, L_q\}$, $\varphi(p) = 1 - p$ для $p \leq 1$, $\varphi(p) = 0$ для $p > 1$. Очевидно, что $0 \leq W_{\alpha_m}(q) \leq 1$ и $0 \leq W_{\beta_m}(q) \leq 1$.

Формула (7) позволяет учесть количество отметок (L_q), пороги допустимых погрешностей вторичного пеленгования ($\varepsilon_{\alpha_m}, \varepsilon_{\beta_m}$) и наличие АОИ (введением индикаторной функции $\varphi(p)$). Коэффициенты $W_{\alpha_m}(q)$ и $W_{\beta_m}(q)$ показывают удельный вклад пеленгов $\tilde{\alpha}_m$ и $\tilde{\beta}_m$ в образование всех отметок кластера K_q . Их можно назвать коэффициентами соответствия пеленгов $\tilde{\alpha}_m$ и $\tilde{\beta}_m$ отметкам кластера K_q . Чем больше значение коэффициента, тем больше доверия первичному пеленгу, с которым связан этот коэффициент. В классическом триангуляционном оценивании такую роль выполняют коэффициенты, обратно пропорциональные квадрату дисперсий ошибок $\Delta\alpha_m$ и $\Delta\beta_m$.

Критерий оптимального обнаружения-оценивания сводится к следующему:

$$(8) \quad \boldsymbol{\lambda}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\lambda}} F(\boldsymbol{\lambda}, q^*),$$

$$(9) \quad q^* = \arg \max_q W(q) = \arg \max_q \left\{ M^{-1} \sum_{m=1}^M [W_{\alpha_m}(q) + W_{\beta_m}(q)] \right\},$$

где $W(q)$ — интегральный безразмерный нормированный весовой коэффициент, $0 \leq W(q) \leq 1$.

Требуется с учетом (1)–(9): построить алгоритм решения задачи триангуляции в оптимальной постановке; рассмотреть квазиоптимальный экономичный в вычислительном плане двухэтапный КВМ (сначала по азимуту, а затем по углу места); на основе анализа известных алгоритмов кластеризации

обосновать эффективный алгоритм объединения частных триангуляционных отметок в цепочечные кластеры; провести численный сравнительный анализ алгоритмов A_1 (для известного КВМ), A_2 и A_3 (соответственно для разрабатываемых оптимального и двухэтапного квазиоптимального) по точности и оперативности; дать численный сравнительный анализ с методом максимального правдоподобия (для обычного и расширенного вариантов).

3. Оптимальный алгоритм решения задачи триангуляции

Для вычисления модельных пеленгов будем использовать известные формулы связи декартовых и прямоугольных декартовых координат:

$$(10) \quad \begin{cases} \alpha_m(\boldsymbol{\lambda}) = \arccos \left\{ (x - \rho_{xm}) [(x - \rho_{xm})^2 + (y - \rho_{ym})^2]^{-1/2} \right\}, \\ \beta_m(\boldsymbol{\lambda}) = \arcsin \left\{ (z - \rho_{zm}) [(x - \rho_{xm})^2 + (y - \rho_{ym})^2 + (z - \rho_{zm})^2]^{-1/2} \right\}. \end{cases}$$

Минимизация решающей функции $F(\boldsymbol{\lambda}, q)$ по векторному аргументу $\boldsymbol{\lambda}$ приводит к уравнению

$$(11) \quad \left[\frac{\partial F(\boldsymbol{\lambda}, q)}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right]^T = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{0} = [0, 0, 0]^T$.

Раскрывая в (11) частные производные, получим систему скалярных уравнений

$$(12) \quad \begin{cases} \sum_{m=1}^M \left[\left(\frac{\alpha_m(\boldsymbol{\lambda}) - \tilde{\alpha}_m}{2\pi} \right) W_{\alpha m q} \frac{\partial \alpha_m(\boldsymbol{\lambda})}{\partial x} + \left(\frac{\beta_m(\boldsymbol{\lambda}) - \tilde{\beta}_m}{2\pi} \right) W_{\beta m q} \frac{\partial \beta_m(\boldsymbol{\lambda})}{\partial x} \right] = 0, \\ \sum_{m=1}^M \left[\left(\frac{\alpha_m(\boldsymbol{\lambda}) - \tilde{\alpha}_m}{2\pi} \right) W_{\alpha m q} \frac{\partial \alpha_m(\boldsymbol{\lambda})}{\partial y} + \left(\frac{\beta_m(\boldsymbol{\lambda}) - \tilde{\beta}_m}{2\pi} \right) W_{\beta m q} \frac{\partial \beta_m(\boldsymbol{\lambda})}{\partial y} \right] = 0, \\ \sum_{m=1}^M \left[\left(\frac{\alpha_m(\boldsymbol{\lambda}) - \tilde{\alpha}_m}{2\pi} \right) W_{\alpha m q} \frac{\partial \alpha_m(\boldsymbol{\lambda})}{\partial z} + \left(\frac{\beta_m(\boldsymbol{\lambda}) - \tilde{\beta}_m}{2\pi} \right) W_{\beta m q} \frac{\partial \beta_m(\boldsymbol{\lambda})}{\partial z} \right] = 0, \end{cases}$$

где частные производные раскрываются с учетом (10).

Системе (12) соответствуют частные оценки $\boldsymbol{\lambda}^*(q)$, $q = \overline{1, Q}$. В качестве результирующей $\boldsymbol{\lambda}^* \in \{\boldsymbol{\lambda}^*(1), \dots, \boldsymbol{\lambda}^*(Q)\}$ выбирается та частная оценка $\boldsymbol{\lambda}^*(q^*)$ (где $q^* \in \{1, \dots, Q\}$), которая согласно (9) удовлетворяет критерию

$$(13) \quad W(q^*) > W(q), \quad q \neq q^*.$$

Выбором значений параметров, фигурирующих в условиях (1)–(5), всегда можно обеспечить единственность и точность решения задачи триангуляции

с учетом (10)–(13). Так, с увеличением значений параметров M , ς_α и ς_β всегда обеспечивается надежное обнаружение результирующего кластера K_{q^*} , содержащего наибольшее число отметок, образованных достоверными структурами. В свою очередь, выбор параметров $\varepsilon_{\alpha m}$ и $\varepsilon_{\beta m}$ влияет на точность триангуляционного оценивания.

Если ограничиться одним кластером, снять ограничения (5), а весовым коэффициентам $W_{\alpha m}(q)$ и $W_{\beta m}(q)$ поставить в соответствие обратные величины дисперсий ошибок пеленгования (распределенных по нормальному закону), то приведенное решение (10)–(13) будет соответствовать известной максимально правдоподобной триангуляционной оценке для случая отсутствия АОИ (см., например, [5, 10, 11, 13]).

Сам алгоритм решения задачи триангуляции в кластерной оптимальной постановке сводится к следующему:

1. Проводится кластеризация триангуляционных отметок путем построения кластеров K_q , $q = \overline{1, Q}$ (рекомендации по кластеризации даны в четвертом разделе).
2. Для каждого кластера K_q подсчитываются количество входящих в него отметок (L_q), частные и интегральный весовые коэффициенты ($W_{\alpha m}(q)$, $W_{\beta m}(q)$ и $W(q)$).
3. С использованием критерия (13) решаем задачу обнаружения, т.е. находим номер q^* результирующего кластера K_{q^*} .
4. Для кластера K_{q^*} решаем систему уравнений (12), выбирая в качестве начального условия декартовы координаты центра этого кластера. В итоге с учетом (13) получаем результирующую (оптимальную) оценку местоположения цели $\lambda^* = \lambda^*(q^*) = [x(q^*), y(q^*), z(q^*)]^T$.

Замечание. Если воспользоваться известным приближенным подходом к построению максимально правдоподобной триангуляционной оценки (см., например, [13]), основанном на аппроксимации невязок $\alpha_m(\lambda) - \tilde{\alpha}_m$ и $\beta_m(\lambda) - \tilde{\beta}_m$ с использованием приближенных данных о дальности до цели (в данном случае это дальность до центра кластера), то вместо (12) можно получить соответствующую линейную систему алгебраических уравнений. В этом случае отпадает необходимость выбора начального условия, что характерно для нелинейной системы уравнений (12).

В классической статистической постановке задача триангуляции решается на базе всех измерений (независимо от того, хорошие они или плохие), подлежащих совместной оптимальной обработке с учетом заранее назначаемых априорных весов. Алгоритм A_2 также оперирует со всеми измерениями, но с учетом апостериорных весов ($W_{\alpha m}(q)$, $W_{\beta m}(q)$ и $W(q)$), которые формируются непосредственно по результатам пеленгования с использованием семейства наборов. Возможно также комбинированное результирующее оценивание, предполагающее одновременный учет априорных и апостериорных весов.

Реализация предлагаемого алгоритма A_2 (с учетом подготовки исходных данных) связана со следующими вычислительными затратами $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$, где Γ_1 — затраты на построение семейства отметок, Γ_2 — затраты на кластеризацию отметок и выбор результирующего кластера, Γ_3 — затраты на построение результирующей оценки. При решении задачи триангуляции в линейном (приближенном варианте) основные затраты Γ_1 связаны с решением набора (объемом \overline{N}) систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с квадратной матрицей размером 3×3 . При этом организуется параллельный процесс получения искомым решений, что наиболее важно для обеспечения режима реального времени при обработке измерений в многопозиционной пеленгационной системе. Затраты Γ_2 в основном связаны с простейшими операциями по нахождению набора (объемом $N(N-1)/2$) евклидовых расстояний между отметками (прошедшими селекцию) и их сортировкой в различные кластеры, Γ_3 — с решением набора (объемом L_q) СЛАУ с квадратной матрицей размером 3×3 . Реализация указанных операций в специализированных вычислительных средах не представляет особых сложностей и позволяет обеспечить режим реального времени. Сравнительные результаты реализации КВМ в универсальной компьютерной среде отражены в разделе 7.

4. Рекомендации по кластеризации отметок

В случае алгоритма A_1 обнаружение недостоверных измерений и построение результирующей оценки связаны с ядром кластера (это его наиболее плотная часть плюс отметки близких соседних кластеров), что эффективно при наличии только сферических кластеров. При работе с кластерами цепочечной формы точность оценивания на основе алгоритма A_1 существенно ухудшается. Сказанное подтверждается реальным примером, результаты которого отражены на рис. 1 и 2. Здесь показаны варианты группирования отметок для цели, наблюдаемой под углом в 45 градусов, отсчитываемым от горизонтальной оси плоской системы координат. Эти рисунки соответствуют результатам эксперимента для плоского случая и системы, состоящей из пяти азимутальных пеленгаторов, равномерно расположенных на окружности с радиусом 10 км и центром в начале координат (рис. 1 соответствует дальности до цели приблизительно 20 км относительно центра окружности, а рис. 2 — 50 км), измерения пеленгов сопровождались только допустимыми случайными ошибками (без АОИ), сплошным линиям соответствуют направления пеленгатор-цель, точкам — отметки, прошедшие селекцию. Масштабы рис. 1 и 2 различны, если на рис. 1 цена деления по оси абсцисс и оси ординат одинаковая и составляет 50 м, то на рис. 2 — по оси абсцисс 200 м, а по оси ординат 50 м.

В известном КВМ введение ядер было призвано минимизировать погрешности триангуляционного оценивания при неудачном выборе значения Q . Пусть Q на единицу больше реального количества кластеров (например,

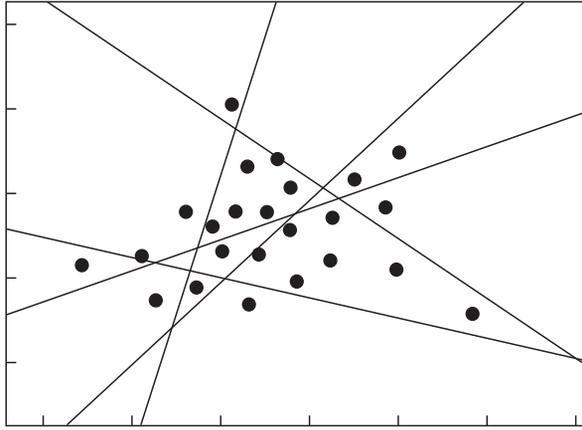


Рис. 1. Образование сферического кластера.

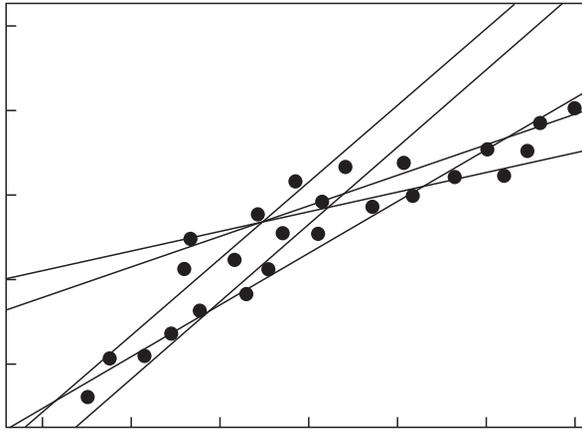


Рис. 2. Образование цепочечного кластера.

из-за ошибки оператора системы), то какой-то из них будет искусственно разбит на два кластера. Если приоритетный кластер, отвечающий истинному положению цели, подвергнуть такому разбиению, то это может привести к значительному росту погрешности оценивания. На рис. 3 представлен такой случай, где черным точкам отвечают отметки, отнесенные к первому кластеру (цель находится в этом кластере), серым точкам — ко второму кластеру, значками \square и \times обозначены центры кластеров и истинная отметка цели соответственно, эллипсом показана некоторая окрестность центра первого кластера (отметки первого и второго кластеров, попавшие в указанную окрестность, составляют ядро первого кластера), затененным квадратом отмечен центр ядра первого кластера. За счет допущенной ошибки (разбиение исходного цепочечного кластера на два более мелких кластера) возможны следующие негативные последствия: ошибка в выборе приоритетного кластера и, как следствие, значительная смещенность результирующей оценки;

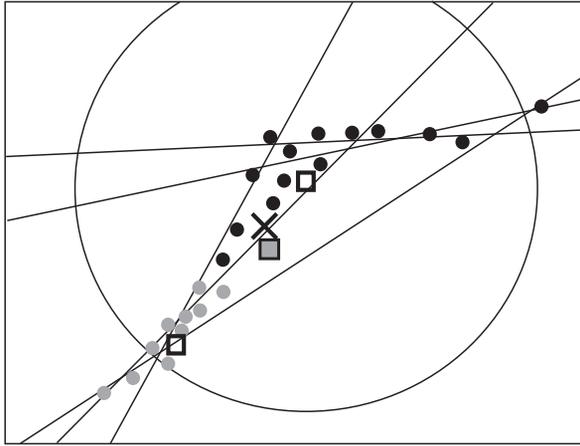


Рис. 3. Образование ядра кластера.

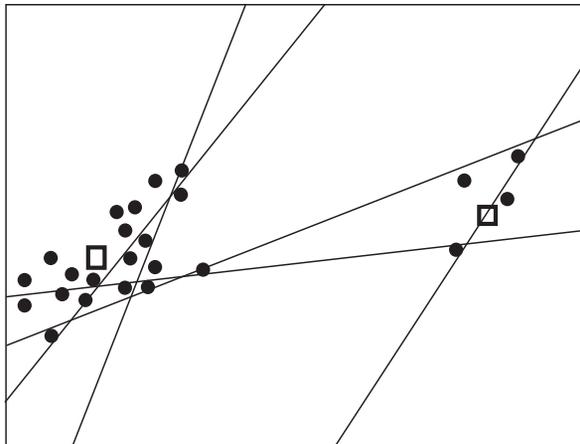


Рис. 4. Расположение частных триангуляционных отметок для плоского случая.

при обработке полностью игнорируются отметки конкурирующего (второго) кластера; резкое снижение количества полезных отметок из исходного цепочечного кластера, которые могли бы участвовать в обработке. Несколько улучшить ситуацию позволяет введение ядер (одно из них, соответствующее первому кластеру, представлено на рис. 3 в виде эллипса). Видим, что ядро первого кластера «активно» захватывает отметки как первого, так и второго кластеров, что повышает количество отметок, участвующих в обработке, а следовательно, уменьшает смещенность результирующей оценки. Но и в этом случае часть полезных отметок исходного цепочечного кластера выпадает из результирующего оценивания. В пространственном случае, когда работаем с гораздо большим количеством структур, эта проблема становится наиболее выраженной.

На рис. 4 приведено расположение отметок для плоского случая с допустимыми случайными ошибками в каналах четырех азимутальных пеленгаторов (Π_1, \dots, Π_4) и аномальной ошибкой (в 11 градусов) в канале пятого пеленгатора (Π_5). На рис. 4 знаком \square отмечены центры кластеров K_1 (слева) и K_2 (справа) (третий кластер K_3 находится на значительном удалении и на рисунке не представлен). Для плоского случая и системы из пяти пеленгаторов имеем $\bar{N} = 26$ и $N = 25$ (т.е. двадцать пять из двадцати шести отметок прошли селекцию, при этом двадцать отметок попали в K_1 , четыре отметки — в K_2 и одна отметка — в K_3).

Следует также отметить, что на практике построение ядра требует задания некоторой окрестности центра кластера. Сложность выбора такой окрестности вызвана тем, что с ростом расстояния до цели и (или) ее появления в триангуляционно-некорректных направлениях растут и размеры кластеров. Это также вынуждает модифицировать известный КВМ и использовать новый подход к выбору количества кластеров разбиения триангуляционных отметок.

Для фиксированного k отметки разбиваются на $Q_k = Q_0 + k$ кластеров (где $Q_0 \geq 2$, $k \in \{0, 1, \dots\}$). Разбиение отметок на кластеры должно заканчиваться на шаге $k = k^*$, когда

$$(14) \quad k^* = \arg \max_k S(k), \quad k \in \{0, 1, \dots\},$$

где $S_k = S(k)$ — решающая выпуклая функция, зависящая от параметров кластеров и имеющая точку максимума. Значению $k = k^*$ соответствует оптимальное количество кластеров разбиения $Q_{k^*} = Q^*$.

Анализ существующей кластерной теории показал, что для работы с цепочечными кластерами применительно к алгоритму A_2 наиболее подходит процедура автоматического беспорогового расчета количества (Q) кластеров K_q с использованием коэффициента «силуэта» [28]:

$$(15) \quad S(k) = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^{Q_k} \sum_{l=1}^{L_q} s(q, l), \quad k \in \{0, 1, \dots\},$$

где $s(q, l) = 1 - a(q, l)/b(q, l)$ при $a(q, l) < b(q, l)$; $s(q, l) = 0$ при $a(q, l) = b(q, l)$; $s(q, l) = b(q, l)/a(q, l) - 1$ при $a(q, l) > b(q, l)$; $a(q, l)$ — среднее расстояние от l -го элемента (λ_{ql}) кластера K_q до других элементов этого же кластера; $b(q, l)$ — среднее расстояние от l -го элемента (λ_{ql}) кластера K_q до элементов ($\lambda_{r1}, \dots, \lambda_{rL_r}$) «соседнего» кластера K_r .

Для расчетов используются формулы

$$(16) \quad a(q, l) = \frac{1}{L_q - 1} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^{L_q} |\lambda_{ql} - \lambda_{qm}|,$$

$$b(q, l) = \min_{r \neq q} \frac{1}{L_r} \sum_{m=1}^{L_r} |\lambda_{ql} - \lambda_{rm}|.$$

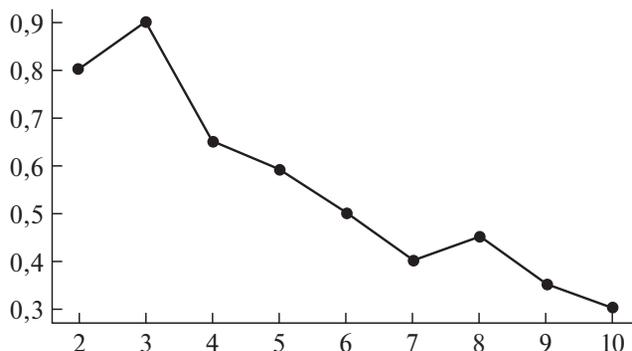


Рис. 5. Зависимость коэффициента «силуэта» от количества кластеров.

Алгоритм (14)–(16) разбиения семейства триангуляционных отметок на кластеры реализуется автономно (без участия оператора), достаточно прост для компьютерной реализации и не требует больших вычислительных затрат. Результаты применения кластерных алгоритмов на основе коэффициента «силуэта» показывают их высокую эффективность и хорошие асимптотические свойства в различных областях.

Напомним, что в алгоритме A_1 определение числа кластеров зависит от порогового значения, в выборе которого имеется неопределенность, что требует участия опытного оператора в решении задачи кластерного разбиения отметок. Это связано с тем, что используемая в алгоритме A_1 решающая функция является монотонно убывающей (с ростом $k \in \{0, 1, \dots\}$) и не имеет точки максимума.

Для примера, рассмотренного в предыдущем разделе, значение коэффициента «силуэта» для параметра $Q_k \in \{2, 3, \dots, 10\}$ представлено на рис. 5. Можно видеть, что при выборе начального условия $Q_0 = 2$ максимум достигается при $k = k^* = 1$, в итоге получаем $Q_{k^*} = Q^* = 3$. Таким образом, оптимальным будет разбиение всех отметок на три кластера, что согласуется с данными, представленными на рис. 4 (т.е. реальное количество кластеров равно расчетному значению).

5. Двухэтапный квазиоптимальный алгоритм

Применение двухэтапного подхода к реализации КВМ предполагает повышение оперативности оценивания. Для этого рассмотрим основные положения алгоритма A_3 , который является квазиоптимальным по отношению к алгоритму A_2 .

Первый вариант реализации алгоритма A_3 основан на том, что есть возможность реализации алгоритма, рассмотренного в разделе 2, сначала только на азимутальных измерениях и наборах (первый этап), что позволяет сформировать семейство плоскостных отметок и кластеров, а затем определить оценки x^* и y^* двух истинных координат цели ($x_{ист}$ и $y_{ист}$). Точке (x^*, y^*) в

трехмерном пространстве соответствует своя линия положения цели. Объединяя эту линию и конусы положения (соответствуют углам места) всех пеленгаторов для различных наборов формируем новые наборы, пространственные отметки и кластеры, на базе которых (на основе алгоритма, рассмотренного в разделе 2) строим недостающую оценку z^* истинной координаты $z_{\text{ист}}$ (второй этап).

Второй вариант реализации алгоритма A_3 основан на том, что на первом этапе (на основе алгоритма, рассмотренного в разделе 2 применительно только к азимутальным измерениям и наборам) с использованием коэффициентов соответствия $W_{\alpha m}(q^*)$ находятся недостоверные азимутальные измерения, которые исключаются из дальнейшей обработки (первый этап). Далее на оставшихся приоритетных азимутальных и всех угломестных измерениях реализуется алгоритм из раздела 2 (этап 2). В этом случае возрастает количество исследуемых наборов (по сравнению с *первым вариантом*), что обеспечивает повышение качества триангуляционного оценивания в условиях неопределенности.

Очевидно, что двухэтапный квазиоптимальный КВМ для двух рассмотренных вариантов не исчерпывает потенциальных возможностей оптимального КВМ в условиях неопределенности, но является более экономичным с вычислительной точки зрения. Это связано, в первую очередь, с существенным сокращением исследуемых наборов, частных триангуляционных отметок и кластеров.

6. Обобщение на случай многих целей

Распространение развиваемого КВМ на этот случай зависит от назначения, принципов построения и организации информационно-измерительного процесса в конкретной системе. Можно выделить два основных варианта реализации КВМ для многоцелевого случая.

Вариант 1. Когда разбиение пеленгов на классы по признаку принадлежности к данной цели выделено в отдельный этап (задача отождествления пеленгов). Такая усеченная постановка задачи весьма распространена на практике при соответствующей декомпозиции информационно-измерительного процесса. В этом случае применение КВМ сводится к рассмотренному ранее алгоритму применительно к каждому классу. Для этого формируются векторы измерений $\mathbf{Y}_j = [\mathbf{Y}_{j\alpha}^T, \mathbf{Y}_{j\beta}^T]^T$, где j — номер цели (класса), $j = \overline{1, J}$, $\mathbf{Y}_{j\alpha} = [\tilde{\alpha}_{mj}, m = \overline{1, M}]^T$ и $\mathbf{Y}_{j\beta} = [\tilde{\beta}_{mj}, m = \overline{1, M}]^T$. Для j -го класса (по аналогии с разделом 2) формируются элементы K_{jq} , L_{jq} , $W_{j\alpha m}(q)$, $W_{j\beta m}(q)$, $W_j(q)$, q_j^* и на их основе результирующие оценки $\lambda_j^* = \lambda_j^*(q_j^*) = [x(q_j^*), y(q_j^*), z(q_j^*)]^T$, которые с учетом критериев (8) и (9) обеспечивают решение единой задачи триангуляционного оценивания координат многих целей. Вариант 1 наиболее эффективный с вычислительной точки зрения,

позволяющий организовать J параллельных каналов обработки измерений, однако он не исчерпывает всех потенциальных возможностей совместной обработки доступных пеленгационных измерений.

Примечание 1. Если в ходе решения задачи отождествления допущено перепутывание пеленгов, то ложный пеленг можно рассматривать как пеленг, содержащий АОИ. Развитый КВМ позволяет эффективно бороться с такими ошибками независимо от их природы.

Примечание 2. Возможно привлечение для решения этой задачи различных радиотехнических параметров (например, несущая частота, период следования импульсов, их длительность, вид внутриимпульсной модуляции и т.д.), которыми «нагружены» пеленги. Такие параметры хранятся в соответствующих формулярах, которые широко используются в радиотехнической разведке для решения задачи идентификации целей.

Вариант 2. В этом случае КВМ применяется сразу ко всем измерительным наборам $\mathbf{Y}_\alpha = [\tilde{\alpha}_{mj}, m = \overline{1, M}, j = \overline{1, J}]$ и $\mathbf{Y}_\beta = [\tilde{\beta}_{mj}, m = \overline{1, M}, j = \overline{1, J}]$ с образованием кластеров $K_q, q = \overline{1, Q}$. Первоначально требуется определить номера $q_j^* \in \{1, \dots, Q\}$ приоритетных кластеров $K_{q_j^*}$, что достигается введением критерия $W(q_j^*) \geq \gamma$, где γ — заданный порог распознавания цели, $\gamma > 0$. Далее для каждого приоритетного кластера строятся результирующие оценки $\boldsymbol{\lambda}_j^* = \boldsymbol{\lambda}_j^*(q_j^*) = [x(q_j^*), y(q_j^*), z(q_j^*)]^T, j = \overline{1, J}$.

Вариант 2 является достаточно затратным с вычислительной точки зрения, так как приводит к большому числу кластеров (Q). Достоинство варианта состоит в том, что задача триангуляционного оценивания координат многих целей реализует потенциальные возможности КВМ в условиях неопределенности.

7. Сравнительный анализ

Рассмотрим систему, пеленгаторы которой расположены на окружности с координатами $\boldsymbol{\xi}_m = [x_m, y_m, z_m]^T = [10^4 \cos(2\pi m/M), 10^4 \sin(2\pi m/M), 0]$, $M = 5, m = \overline{1, 4}$. Для вектора $\boldsymbol{\lambda}$ регистрировалось 180 отметок, также расположенных по окружности:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_k &= [x_k, y_k, z_k]^T = \\ &= [5 \cdot 10^4 \cos(2\pi k/K), 5 \cdot 10^4 \sin(2\pi k/K), 3 \cdot 10^3]^T, \quad k = \overline{1, 180}. \end{aligned}$$

Здесь и далее координаты цели и пеленгаторов задаются в метрах, азимут, угол места и ошибки пеленгования — в радианах. Для каждого фиксированного k принималось, что в достоверных измерительных каналах флуктуационные ошибки измерений распределены по нормальному закону с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционной матрицей $\mathbf{K}_m = \text{diag} [\sigma_{\alpha m}^2, \sigma_{\beta m}^2] = \text{diag} [\sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2]$, где $\sigma_\alpha = \pi/360$ и $\sigma_\beta = \pi/360$, при этом

ошибки формировались с помощью датчика случайных чисел (ошибки разных пеленгаторов независимы). Номера недостоверных измерений (не более чем половина всех азимутальных и не более чем половина всех угломестных измерений), содержащих АОИ, выбирались случайным образом. Результирующая ошибка измерений (это сумма АОИ и допустимой случайной ошибки) для азимута соответствовала интервалу $(3\sigma_\alpha, \pi/6)$, а для угла места — $(3\sigma_\beta, \pi/6)$. Процедура оценивания проводилась для каждого фиксированного k с последующим усреднением по ста экспериментам. В алгоритме A_1 принято $Q = 7$, а в алгоритмах A_2 и A_3 в качестве начального условия принято $Q_0 = 2$. Для сравниваемых алгоритмов A_1 , A_2 и A_3 использовались две числовые характеристики: $S(A_i)$ — интегральная характеристика точности (выражается в метрах), $T(A_i)$ — характеристика вычислительной оперативности (выражается в секундах). При этом для k -го положения цели и алгоритма A_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) имеем

$$S(A_i) = \sum_{k=1}^{180} S_k(A_i) = (2\pi/180) \sum_{k=1}^{180} \Delta_k(A_i),$$

где $\Delta_k(A_i) = \|\bar{\lambda}_k^*(A_i) - \lambda_k\|_2$ — частная невязка, $\lambda_{kp}^*(A_i)$ и $\bar{\lambda}_k^*(A_i) = \sum_{p=1}^{100} \lambda_{kp}^*(A_i)/100$ — соответственно единичная (для p -го эксперимента) и усредненная (для 100 экспериментов) оценки вектора λ_k .

Для сравнительного анализа алгоритмов A_i (где $i \in \{1, 2, 3\}$) далее используются относительная интегральная характеристика

$$\delta S(A_i) = 100S(A_i)S^{-1}(A_1) [\%]$$

и относительная вычислительная оперативность

$$\delta T(A_i) = 100T(A_i)T^{-1}(A_2) [\%],$$

принимая во внимание, что алгоритм A_1 менее точный, а A_2 требует больше временных затрат, чем другие алгоритмы. Результаты моделирования представлены в таблице сравнения алгоритмов.

Таблица

Алгоритмы (A_i)	A_1	A_2	A_3
$\delta S(A_i)$, %	100	50	67
$\delta T(A_i)$, %	90	100	15

Видим, что в аномальных условиях функционирования системы модифицированный алгоритм A_2 с адаптивным выбором числа кластеров (на базе коэффициента «силуэта»), оптимальным выбором результирующего кластера (на базе усовершенствованного критерия) и весовой обработкой данных (с использованием коэффициентов соответствия) существенно лучше

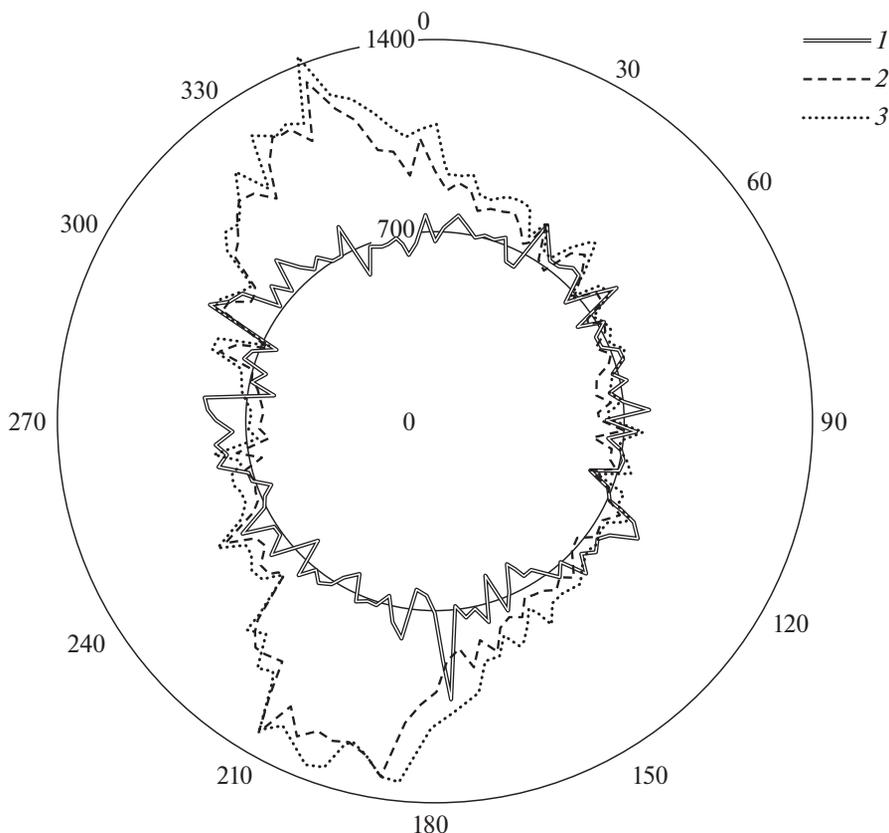


Рис. 6. Сравнение с алгоритмами на основе метода максимального правдоподобия.

(в плане точности) по сравнению с алгоритмами A_1 и A_3 . В плане оперативности он самый трудозатратный, однако нужно отметить, что временные затраты на реализацию процедур (6)–(8) не превышают 10%. Также видим, что алгоритм A_3 уступает по точности алгоритму A_2 , зато требует существенно меньших временных затрат.

Так же проводилось сравнение КВМ с методом максимального правдоподобия (ММП) и расширенным ММП (РММП — для случая, когда АОИ входят в вектор оцениваемых параметров). Принималось, что измерения с АОИ фиксированы — это 5-й азимут и 3-й угол места. Для метода ММП полностью исключались из обработки показания 5-го и 3-го пеленгаторов, а для РММП полагалось, что номера измерений с аномальными ошибками известны, а неизвестны лишь значения соответствующих ошибок.

Результирующая ошибка сравниваемых методов (в метрах) представлена на рис. 6. Здесь приняты обозначения: 1 — для КВМ, 2 — для ММП, 3 — для РММП. Из рисунка видно, что только КВМ обеспечивает надежное оценивание для всех направлений визирования цели.

8. Заключение

Предложенный модифицированный КВМ позволяет на базе алгоритмов A_2 и A_3 строить устойчивую к влиянию АОИ результирующую оценку местоположения цели в условиях структурной неопределенности. Эти алгоритмы как самостоятельно, так и в совокупности с традиционными подходами (например, методом максимального правдоподобия) могут быть эффективно использованы при совершенствовании существующих и разработке перспективных систем нового поколения. В случае ограниченности вычислительных ресурсов и/или при большом количестве пеленгаторов двухэтапный подход (на основе алгоритма A_3) позволяет существенно повысить оперативность триангуляционного оценивания.

Очевидно, что существенный интерес для теории и практики многопозиционных пеленгационных систем различного типа представляют следующие направления совершенствования КВМ: рассмотрение систем с одноканальными и двухканальными пеленгаторами различного типа; модернизация полученных алгоритмов на случай несинхронных и разноточных измерений; построение алгоритма фильтрации с учетом цепочечного характера кластеров, который будет наиболее выражен при рассмотрении движущейся цели. Работы в этих направлениях уже ведутся и будут представлены заинтересованным специалистам в недалеком будущем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бульчев Ю.Г., Головской В.А. Обработка измерений угломерных систем в условиях априорной неопределенности в регуляризированной постановке // РЭ. 2010. Т. 55. № 1. С. 71–77.
2. Бульчев Ю.Г., Чепель Е.Н. Мультиструктурный метод триангуляционного оценивания параметров движения излучающей цели в условиях априорной неопределенности // ТиСУ. 2019. № 6. С. 26–42.
3. Сайбель А.Г. Основы теории точности радиотехнических методов местоопределения. М.: Оборонгиз, 1958.
4. Кулес И.С., Старик М.Е. Основы радиопеленгации. М.: Сов. Радио, 1964.
5. Теоретические основы радиолокации / Под ред. Я.Д. Ширмана. М.: Сов. радио, 1970.
6. Butterfly P.I. Position Finding with Empirical Prior Knowledge // IEEE Trans. 1972. V. AES-8. No. 3. P. 142–146.
7. Nunn W.R. Position Finding with Prior Knowledge of Covariance Parameters // IEEE Trans. 1979. V. AES-15. No. 3. P. 204–208.
8. Wax M. Position Location from Sensors with Position Uncertainty // IEEE Trans. 1983. V. AES-19. No. 5. P. 658–662.
9. Кондратьев В.С., Котов А.Ф., Марков Л.Н. Многопозиционные радиотехнические системы. М.: Радио и связь, 1986.
10. Черняк В.С. Многопозиционная радиолокация. М.: Радио и связь, 1993.

11. *Lin X., Kirubarajan T., Bar-Shalom Y., Maskell S.* Comparison of EKF, Pseudomeasurement and Particl Filters for a Bearing-only Target Tracking Problem // Proc. SPIE-Int. Soc. Optic. placecountry-regionEng. 2002. V. 4728. P. 240–250.
12. *Бульчев Ю.Г., Бульчев В.Ю., Ивакина С.С., Насенков И.Г.* Пассивная локация группы движущихся целей одним стационарным пеленгатором с учетом априорной информации // *АиТ.* 2017. № 1. С. 152–166.
Bulychev Y.G., Bulychev V.Y., Ivakina S.S., Nasenkov I.G. Passiv of Location of moving Targets with prior Information // *Autom. Remote Control.* 2017. V. 78. No. 1. P. 125–137.
13. *Бульчев Ю.Г., Бульчев В.Ю., Ивакина С.С. и др.* Обоснование методов оптимального оценивания параметров движения цели в триангуляционной измерительной системе // *ТиСУ.* 2015. № 4. С. 94–110.
14. *Gustafsson F.* Particle filters for positioning, navigation and tracking // *IEEE Transactions on Signal Processing.* 2002. V. 50. No. 2. P. 425–437.
<https://doi.org/10.1109/78.978396>
15. *Bar-Shalom Y., Rong Li X., Kirubarajan T.* Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory, Algorithms and Software. New York: John Wiley & Sons. 2004. <https://doi.org/10.1002/0471221279>
16. *Valente de Oliveira J., Pedrycz W.* Advances in Fuzzy Clustering and Its Applications. New York: John Wiley & Sons. 2007. <https://doi.org/10.1002/9780470061190>
17. *Zekavat S., Buehrer R.* Handbook of Position Location: Theory Practice and Advances. Second ed. Hoboken. New Jersey: Wiley-IEEE Press 2019.
<https://doi.org/10.1002/9781119434610>
18. *Zhao J., Renzhou G., Xudong D.* A new measurement association mapping strategy for DOA tracking // *Digital Signal Processing.* 2021. V. 118. P. 103–228. ISSN 1051-2004. <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2021.103228>
(<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1051200421002670>)
19. *Peng L., Wenhui W., Junda Q., Congzhe Y., Zhenqiu S.* Robust Generalized Labeled Multi-Bernoulli Filter and Smoother for Multiple Target Tracking using Variational Bayesian // *KSII Transactions on Internet and Information Systems.* 2022. V. 16. No. 3. P. 908–928. <https://doi.org/10.3837/tiis.2022.03.009>
20. *Wang X., Wang A., Wang D., Xiong Y., Liang B., Qi Y.* A modified Sage-Husa adaptive Kalman filter for state estimation of electric vehicle servo control system // *Energy Reports.* 2022. V. 8. No. 5. P. 20–27. ISSN 2352-4847.
<https://doi.org/10.1016/j.egyr.2022.02.105>
(<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352484722003523>)
21. *Уидроу Б., Стирнз С.* Адаптивная обработка сигналов. М.: Радио и связь, 1989.
22. *Граничнин О.Н., Поляк Б.Т.* Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. М.: Наука, 2003.
23. *Мансур М.Э., Степанов О.А.* Алгоритмы комплексной обработки в задаче коррекции показаний навигационных систем при наличии нелинейных измерений // *Изв. Тульского ГУ. Технические науки.* 2016. № 6. С. 89–102.
24. *Мандель И.Д.* Кластерный анализ. М.: Финансы и статистика, 1988.
25. *Уиллиамс У.Т., Ланс Д.Н.* Методы иерархической классификации / Под ред. М.Б. Малюгова. М.: Наука, 1986.
26. *Lance G.N., Willams W.T.* A general theory of classification sorting strategies. 1. Hierarchical systems // *Comput J.* 1967. V. 9. No. 4. P. 373–380.

27. *Граничинин О.Н., Шлымов Д.С., Аврос Р., Волкович З.* Рандомизированный алгоритм нахождения количества кластеров // *АиТ.* 2011. № 4. С. 86–98.
28. *Паклин Н.Б., Орешков В.И.* Кластерные силуэты / Системный анализ в проектировании и управлении: Сб. тр. XX Междунар. научно-практ. конф.; Санкт-Петербург, 29 июня–1июля, СПб., 2016. С. 314–321.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.А. Степановым.

Поступила в редакцию 19.11.2020

После доработки 13.09.2022

Принята к публикации 26.10.2022

Управление в технических системах

© 2023 г. С.М. КОВАЛЁВ, д-р техн. наук (ksm@rfniias.ru),
А.В. СУХАНОВ, канд. техн. наук (a.suhanov@rfniias.ru),
И.А. ОЛЬГЕЙЗЕР, канд. техн. наук (iohan@rfniias.ru)
(Ростовский филиал АО «НИИАС»;
Ростовский государственный университет путей сообщения),
К.И. КОРНИЕНКО, канд. техн. наук (k.kornienko@vniias.ru)
(Ростовский филиал АО «НИИАС»;
Петербургский государственный университет
путей сообщения Императора Александра I)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КРИТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ПРЕДИКТИВНОЙ АНАЛИТИКИ

В статье предлагается предиктивный подход к оценке особых классов опасных состояний в развитии технологических процессов с целью принятия упреждающих решений. В основе разрабатываемого подхода лежит гибридная модель, основанная на объединении доказательного классификатора, нечеткой логики и вероятностной схемы комбинирования свидетельств Демпстера–Шафера. В статье представлено формальное описание предиктора критических состояний технологического процесса. Полученный подход универсален и применим при автоматизации любых сложных технических систем. В качестве примера в данной статье было рассмотрено применение разработанного подхода для решения задачи оценки безопасности технологического процесса расформирования составов на сортировочной горке. Представленный пример показывает высокую эффективность и практическую полезность разработанного подхода.

Ключевые слова: сложная технологическая ситуация, предиктивная аналитика, сортировочная горка, нечеткая логика, доказательный классификатор.

DOI: 10.31857/S0005231023040074, EDN: QIGFPH

1. Введение

Оценка состояния сложных технических систем (СТС) не теряет актуальности уже многие годы [1, 2]. Рост степени сложности СТС требует развития известных и разработки новых методов обеспечения надежности СТС [3]. Так как сложные системы характеризуются нелинейностью, большим объемом элементов, стохастичностью, слабой структурированностью формализации и др. [4], их работу невозможно смоделировать жесткими алгоритмами,

широко применяемыми для выявления закономерностей в доступных наблюдениях реализациях случайного процесса, сопровождающего анализируемую систему, с целью мониторинга и управления [1]. Наиболее сложной является задача прогнозирования целевых (имеющих интерес в конкретной области) ситуаций, нежели изменений контролируемых параметров. Целевыми могут быть ситуации достижения некоторого эффекта, профита или обратные им — опасные (нештатные, критические) ситуации.

В настоящей статье рассматривается задача оценки появления целевых критических ситуаций, среди которых сбои, отказы и крушения СТС. Решение этой задачи является первоочередным при выполнении возрастающих с каждым годом требований безопасности, предъявляемых при автоматизации СТС [5], так как благодаря своевременному обнаружению критических ситуаций создается возможность сохранения работоспособного состояния СТС и устранения причин их появления.

Для решения поставленной задачи предлагается новый подход к идентификации критических состояний технологических процессов (ТП), сопровождающих поведение СТС. Подход основан на гибридной модели, объединяющей вероятностную модель доказательного классификатора и лингвистическую модель в виде нечетких продукционных правил.

В последующих главах описана формальная постановка задачи идентификации критических состояний технологических процессов, представлено описание разработанного подхода и рассмотрен конкретный пример приложения предлагаемых решений для обеспечения безопасности движения вагонов на сортировочной железнодорожной станции.

2. Постановка задачи

Основная задача предиктивного анализа ТП — получение знаний о состояниях ТП и его поведении в виде описаний, согласованных со знаниями специалистов-экспертов. В настоящей статье речь пойдет о разработке нового класса предиктивных моделей, предназначенных для анализа ТП, с целью их использования для прогнозирования критических состояний или штатных технологических ситуаций, возникающих в процессе развития ТП.

Под *нештатной технологической ситуацией* (НТС) понимается ситуация, связанная с появлением сбоев или существенных отклонений в развитии ТП и требующая принятия корректирующих решений по нормализации ТП. В основу разрабатываемого предиктивного подхода к анализу ТП положена идея обнаружения в контролируемом процессе особых типов событий-предвестников НТС, представленных соответствующими описаниями в модели ТП.

В качестве модели ТП выступает многомерный временной ряд (МВР):

$$S = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_T)$$

характеризующий изменение ключевых параметров ТП, представленных множеством векторно-числовых значений $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^L$ ($t = 1, \dots, T$) на временном отрезке $[1, T]$. Временной ряд значений $\{x_{it} \in R | t = 1, \dots, T\}$ для i -го параметра в МВР образуют i -е измерение или i -ю компоненту МВР.

События-предвестники НТС образуют особый класс предикторных событий в развитии ТП.

На содержательном, неформальном уровне задача заключается в разработке подхода к обнаружению во временном ряду числовых данных, описывающих поведение технологического процесса, предикторных событий-паттернов, являющихся предвестниками нештатных технологических ситуаций в контролируемом процессе.

Уточним условия задачи. Прежде всего отметим, что существует достаточно большое число эмпирически подтвержденных фактов существования предикторных событий в областях экологического мониторинга, адаптивного управления, диагностирования состояний технологических и производственных процессов и др. [1, 6–8]. Анализ особенностей поведения МВР в преддверии НТС показал, что описание предикторных событий и их связь с НТС имеет слабо формализованный характер и может быть представлена экспертами в виде лингвистических описаний [7]. В частности, установлено, что в преддверии бифуркаций в нелинейных динамических системах наблюдается возникновение особого характера параметрических колебаний эволюционирующей модели, что является ключевым признаком ее перехода в новое, в том числе и критическое состояние, к которым относится НТС [8]. В рассматриваемой авторами предметной области железнодорожных перевозок специалистами также выявлены факты существования причинной связи между НТС и предикторными событиями, которые могут быть также представлены экспертами в виде нечетко-лингвистических описаний [7]. Другая особенность идентификации предикторных событий — необходимость использования эволюционирующих адаптивных моделей для порождения моделирующего МВР, поскольку адаптация модели в ходе развития ТП позволяет выявлять особенности ее поведения в преддверии НТС.

Таким образом, с учетом сказанного можно сформулировать ряд ограничений, накладываемых на разрабатываемую предикторную модель. Во-первых, нечеткость описания предикторных событий и нечетко-определенный характер их связи с НТС обуславливают необходимость использования класса нечетко-логических моделей, способных оперировать нечеткими и лингвистическими описаниями при обработке МВР. Во-вторых, нечеткая модель должна быть адаптируемой к поступающим на ее вход данным с целью порождения динамики моделируемого ТП и выявления предикторных паттернов. И, в-третьих, предикторная модель должна включать стохастический компонент для получения вероятностных оценок обнаружения предикторных событий. Исходя из сказанного, решаемая задача сводится к:

Разработке гибридной логико-лингвистической модели, включающей нечетко-логический и вероятностный компонент, способной для заданного класса ТП, представленных в виде МВР S , и класса НТС, представленных в виде лингвистических описаний или целевых значений признаков $x_t \in \mathbb{R}^L$, идентифицировать в S предикторные события с известной степенью вероятности.

В приведенной формулировке ряд моментов нуждаются в дальнейшем уточнении, которые будут даны в последующих разделах.

3. Общий подход к предиктивному анализу технологического процесса

В основу разрабатываемого предиктивного подхода к анализу ТП положена идея обнаружения в контролируемом процессе особых типов предикторных событий, предшествующих появлению НТС и представленных соответствующими описаниями в модели ТП. В качестве модели ТП выступает многомерный временной ряд, характеризующий изменение ключевых параметров ТП во времени.

При разработке предиктивной модели авторы исходят из базового предположения о наличии прямой зависимости между вероятностями появления НТС и оценками сложности технологических ситуаций, обуславливающих данные состояния. Такое предположение основано на мнении экспертов-технологов о том, что в более сложной ситуации сложнее выбрать эффективное решение, а значит, возрастает вероятность принятия неэффективных или даже ошибочных решений, приводящих впоследствии к существенным нарушениям в развитии технологического процесса и НТС.

Зависимость критических состояний ТП от сложности ТС позволяет подойти к оценке и прогнозированию состояний контролируемого процесса через оценивание сложности соответствующих ТС. Для реализации такого подхода необходимо располагать способом оценки сложности ТС на основе анализа особенностей их представления в МВР.

Поскольку понятие “сложность”, как одно из свойств анализируемого объекта, является слабоформализуемым, для его представления авторы используют гибридную модель, объединяющую доказательный классификатор, предназначенный для получения вероятностных оценок гипотез состояния, и системы нечетких правил, предназначенных для оценки параметров вероятностных уравнений в доказательных классификаторах на основе анализа лингвистических значений признаков в описании ТС. Такую модель можно именовать классификационной логико-лингвистической моделью (КЛМ).

Основу КЛМ составляют доказательный классификатор [9], базирующийся на объединении модели лог-регрессии [10] и общей схемы комбинирования свидетельств Демпстера–Шафера [11].

4. Модель доказательного классификатора

В основе доказательного классификатора лежит классификационная модель на базе логистической регрессии (лог-модель). Лог-модель предназначена для решения задач классификации I -мерных векторов-признаков $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_I)$ по K классам $Q = \{q_1, \dots, q_K\}$ на основе анализа уравнений линейной регрессии (лог-регрессионных уравнений) $w_k = \alpha_k \mathbf{x} + \beta_k$, сопоставленных классам $q_k \in Q$ и переменным \mathbf{x} . Для случая двух классов $Q = \{q_1, q_2\}$ имеет место бинарная модель логистической регрессии. Вероятности гипотез классовой принадлежности на основе лог-модели определяются через аффинные функции от \mathbf{x} с использованием выражения:

$$P_k(\mathbf{x}) = \frac{\exp(\alpha_k^T \mathbf{x} + \beta_k)}{\sum_{l=1}^K \exp(\alpha_l^T \mathbf{x} + \beta_l)}.$$

Классификатор на основе лог-модели является адаптивной моделью, параметры которой определяются на основе обучения с использованием экспериментальных данных. Для заданного обучающего множества примеров $\{(\mathbf{x}_t, q_t)\}_{t=1}^n$ параметры α_k и β_k оцениваются путем максимизации критерия условного логарифмического правдоподобия:

$$(1) \quad \sum_{t=1}^n \sum_{k=1}^K \left[\delta_{q(\mathbf{x}_t)}^k \ln P_k(\mathbf{x}_t) + \left(1 - \delta_{q(\mathbf{x}_t)}^k\right) \ln (1 - P_k(\mathbf{x}_t)) \right],$$

где $q(\mathbf{x}_t)$ — номер класса принадлежности для \mathbf{x}_t ; $\delta_{q(\mathbf{x}_t)}^k$ — символ Кронекера.

Модель доказательного классификатора основана на объединении выше рассмотренной классической лог-модели и методологии комбинирования свидетельств Демпстера–Шафера (DS-правила/схемы). В данной модели предполагается, что входящие в вектор \mathbf{x} числовые признаки $x_i \in \mathbf{x}$ выступают в качестве независимых свидетельств в пользу той или иной гипотезы классовой принадлежности $q_k \in Q$. Поэтому, в отличие от классической лог-модели, в доказательном классификаторе уравнение линейной регрессии $w_{ik} = \beta_{ik} x_i + \beta_{0k}$ формируется отдельно для каждой переменной-признака $x_i \in \mathbf{x}$ и класса $q_k \in Q$, и характеризует условную вероятность $P(q_k | x_i)$ (частную вероятность) принадлежности вектора \mathbf{x} классу q_k при данном значении признака x_i . Частные вероятности вычисляются для каждой переменной x_i и класса q_k следующим образом:

$$(2) \quad P(q_k | x_i) = \frac{1}{1 + \exp(-(\alpha_{ki} x_i + \beta_k))}.$$

Вычисленные на основании (1) вероятности интерпретируются в доказательном классификаторе в качестве вероятностных масс $m_i^k(x_i)$ гипотез классовой принадлежности, которые объединяются на основе DS-правила

R_{DS} комбинирования свидетельств $R_{DS} : \bigcup_{i=1}^I m_k^i(x_i) \rightarrow m_k^{\cup}(\mathbf{x})$. В результате получаются итоговые (безусловные) вероятностные массы $m_k^{\cup}(\mathbf{x})$ гипотез классовой принадлежности, интерпретируемые в качестве вероятностей классов $P(q_k|\mathbf{x})$. Детально модель доказательного классификатора описана в [10].

Недостатками классической модели доказательного классификатора являются ограниченность ее применения для распознавания классов в пространстве взаимозависимых признаков и невозможность описывать сложные, вычурные области в признаковом пространстве.

Например, в одной из моделей управления вагонным замедлителем зависимость между сложностью ТС и скоростью отцепа V_n описывается линейной регрессией, а именно, при увеличении скорости V_i сложность ТС возрастает. Однако на характер этой зависимости влияет не только скорость V_n данного n -го отцепа, но также и величина V_{n-1} скорости следующего за ним отцепа, которая может изменить эту зависимость на противоположную. А именно, при малом значении V_n сложность ТС также начнет возрастать, но уже с уменьшением V_n из-за возможности нагона n -го отцепа следующим за ним $(n - 1)$ -м отцепом.

Для снятия данных ограничений ниже рассматривается гибридная модель логико-лингвистического классификатора (КЛМ), свободная от указанных недостатков.

5. Классификационная логико-лингвистическая модель

Главным компонентом гибридной КЛМ является новый тип нечеткой модели Такаги-Сугено (TS-модель), включающей продукционные правила вида:

$$R_{ik}^j : IF \left(x_1 = \mu_1^j \right) AND \dots AND IF \left(x_I = \mu_I^j \right) THEN w_{ik}^j = \alpha_{ik}^j x_i + \beta_{ik}^j,$$

где $j \in [1, J]$ — номер правила; $i \in [1, I]$ — номер переменной; $k \in [1, K]$ — номер класса; μ_i^j — функция принадлежности (ФП) нечеткого термина для i -й переменной в j -м правиле; α_{ik}^j и β_{ik}^j — параметры уравнения лог-регрессии.

Формализованным представлением нечеткого правила является выражение:

$$(3) \quad R_{ik}^j : \bigwedge_{i=1}^I \mu_i^j(x_i) \Rightarrow w_{ik}^j = \alpha_{ik}^j x_i + \beta_{ik}^j.$$

Степень ассоциации входного вектора \mathbf{x} с нечетким правилом определяется через T-норму [12], которая обычно представляется продукционным оператором:

$$(4) \quad \tau^j(\mathbf{x}) = T_{p=1}^I \mu_{pk}^j(x_p) = \mu_{1k}^j(x_1) \times \dots \times \mu_{Ik}^j(x_I).$$

В контексте решаемой задачи левые и правые части нечетких правил TS-модели имеют следующую интерпретацию. Антецеденты нечетких правил $A_j = \bigwedge_{i=1}^I \mu_i^j$ являются лингвистическими описаниями технологических ситуаций. Консеквенты нечетких правил представляют собой линейные зависимости w_{ik}^j , имеющие смысл лог-регрессионных уравнений w_{ik}^j , устанавливающих связь между вероятностными оценками классовой принадлежности $P(q_k|x_i)$ и значениями параметра $x_i \in \mathbf{x}$.

Таким образом, в базе знаний КЛМ каждое j -е нечеткое правило имеет отношение к некоторому j -му сценарию технологической ситуации и характеризует связь между ее классовой принадлежностью (вероятностью принадлежности тому или иному классу) и изменением i -го параметра в данной технологической ситуации. При этом описание технологической ситуации представлено в антецеденте нечеткого правила R_j в виде конъюнкции ФП нечетких термов. Активация нечеткого правила R_j осуществляется путем подстановки в антецедент A_j конкретных значений параметров $x_p^* \in \mathbf{x}^*$ ($p = 1, \dots, I$), характеризующих j -ю ТС. В результате вычисляется степень истинности антецедента $\tau^j(\mathbf{x}) = T_{p=1}^I \mu_{pk}^j(x_p^*)$, которая в рамках КЛМ имеет смысл степени соответствия вектора \mathbf{x}^* j -й ситуации. База знаний КЛМ образует множество $\{R_j\}$ нечетких правил, поэтому каждый входной вектор \mathbf{x}^* активирует не одно, а одновременно группу нечетких правил $\{R'_j\} \subseteq \{R_j\}$ с однотипными антецедентами. Путем объединения этих правил на основе нечеткого вывода Такаги–Сугено формируется единая лог-регрессионная зависимость w_{ik}^{\cup} , обобщающая свойства всех частных лог-регрессий $w_{ik}^{j'}$, являющихся антецедентами нечетких правил группы $\{R'_j\}$. На основе обобщенной лог-регрессии w_{ik}^{\cup} для каждого конкретного значения параметра $x_i^* \in \mathbf{x}$ вычисляется условная вероятность классовой принадлежности $P(q_k|x_i^*)$ при данном значении параметра x_i^* .

Формула нечеткого вывода для обобщенной лог-регрессионной зависимости w_{ik}^{\cup} на основе подмножества нечетких правил $\{R'_j\}$ имеет вид:

$$(5) \quad w_{ik}^{\cup} = \frac{\sum_j^{|R'_j|} \tau^j(\mathbf{x}) \cdot w_{ik}^{j'}}{\sum_j^{|R'_j|} \tau^j(\mathbf{x})},$$

где $\tau^j(\mathbf{x})$ — степень активации нечеткого правила $R_j \in \{R'_j\}$, вычисляемая на основании (4); $|R'_j|$ — количество нечетких правил в группе $\{R'_j\}$; $w_{ik}^{j'}$ — частная лог-регрессия в консеквенте нечеткого правила $R_j \in \{R'_j\}$.

Таким образом, принципиальной особенностью предложенного варианта нечеткой модели Сугено становится включение в нее двух компонент, независимо поддерживающих стохастический и нечетко-логический концепты. Нечетко-логический концепт поддерживается антецедентами нечетких пра-

вил, которые на лингвистическом уровне описывают сценарии технологических ситуаций, представленные экспертами-технологами, а стохастический концепт поддерживается консеквентами нечетких правил, представляющими лог-регрессионные зависимости, на основе которых вычисляются вероятностные оценки гипотез классовой принадлежности. При поступлении на вход модели вектора параметров технологической ситуации $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_I)$ на основе нечеткого вывода формируется обобщенная лог-регрессия w_{ik}^U , являющаяся некой синергетической комбинацией технологически ориентированных частных лог-регрессий w_{ik}^j . Формулы (3)–(5) являются базовыми для вычисления условных вероятностей классовой принадлежности $P(q_k|x_i)$. Принципиально, что полученные оценки вероятностей являются независимыми, поскольку “порождаются” отличающимися antecedentes нечетких правил. Это обуславливает возможность корректного применения схемы комбинирования независимых свидетельств Демпстера–Шафера для объединения частных вероятностей $P(q_k|x_i)$ в единую оценку вероятности $P(q_k|\mathbf{x})$ гипотезы классовой принадлежности.

6. Пример представления данных на основе КЛМ

Простейшим примером выше описанной модели является следующая КЛМ, предназначенная для представления на числовой оси X “разорванной” области одного из двух подлежащих распознаванию классов q_1, q_2 с использованием единственного уравнения лог-регрессии $w = \alpha x + \beta$:

- IF $x > 0$ AND x is Big THEN $w = \alpha x + \beta$ (Вероятность q_1 возрастает с увеличением X)
- IF $x > 0$ AND x is Small THEN $w = -(\alpha x + \beta)$ (Вероятность q_1 убывает с увеличением X)
- IF $x < 0$ AND $|x|$ is Big THEN $w = -(\alpha x + \beta)$ (Вероятность q_1 возрастает с увеличением модуля X)
- IF $x < 0$ AND $|x|$ is Small THEN $w = \alpha x + \beta$ (Вероятность q_1 убывает с увеличением модуля X)

Формальным представлением КЛМ является следующая система нечетких правил:

$$\left(\frac{\operatorname{sgn}(x) + 1}{2}\right) \&\mu_{Big}(x) \rightarrow w = \alpha x + \beta$$

$$\left(\frac{\operatorname{sgn}(x) + 1}{2}\right) \&\mu_{Sm}(x) \rightarrow w = -(\alpha x + \beta)$$

$$\left(\frac{-\operatorname{sgn}(x) + 1}{2}\right) \&\mu_{Bigmod}(x) \rightarrow w = (\alpha x + \beta)$$

$$\left(\frac{-\operatorname{sgn}(x) + 1}{2}\right) \&\mu_{SMmod}(x) \rightarrow w = -(\alpha x + \beta)$$

ФП для лингвистических термов определяются через параметры лог-регрессионного уравнения $w = ax + b$ следующим образом:

$$\mu_{Big}(x) = \frac{2}{1 + \exp(-w)} - 1, \quad x \in [0, +\infty)$$

$$\mu_{Sm}(x) = 2 - \frac{2}{1 + \exp(-w)}, \quad x \in [0, +\infty)$$

$$\mu_{Bigmod}(x) = \frac{2}{1 + \exp(w)} - 1, \quad x \in (-\infty, 0]$$

$$\mu_{Smmod}(x) = 2 - \frac{2}{1 + \exp(w)}, \quad x \in (-\infty, 0]$$

Ниже на рисунках представлены результаты классификации областей в одномерном пространстве X с использованием КЛМ.

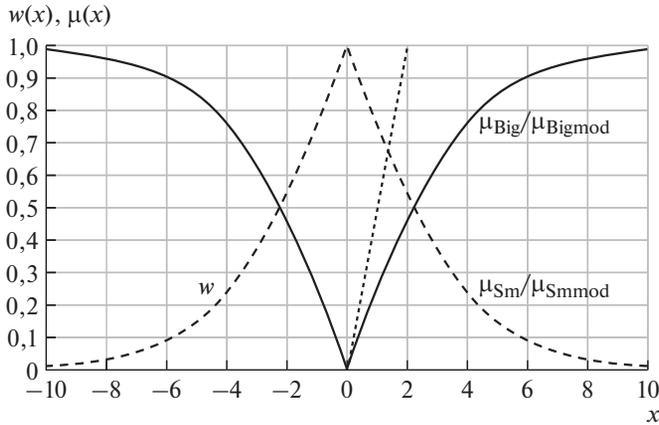


Рис. 1. Графики функции принадлежности и логистическая регрессия в лог-модели.

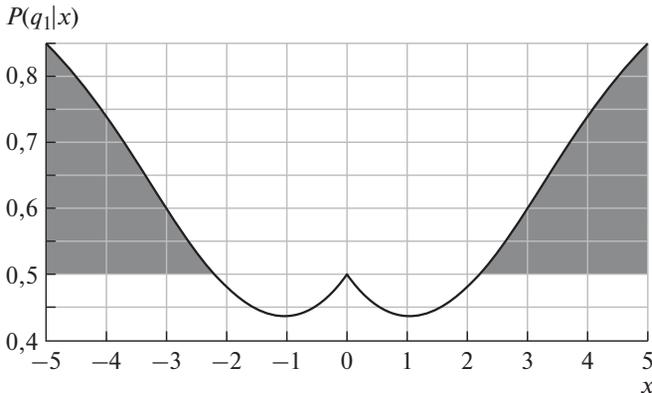


Рис. 2. Представление «разорванной» области для класса q_1 (закрашена) на основе КЛМ.

7. Вычислительный эксперимент

Разработанный подход к анализу предикторов сложных технологических процессов универсален. При этом для обеспечения возможности его функционирования на реальных данных и внедрения в действующие системы автоматизации необходима экспертная группа людей, обладающая опытом работы в технологическом процессе [13, 14]. В связи с тем, что авторы данной статьи более 20 лет работают в сфере автоматизации управления железнодорожным транспортом и обладают возможностью создания такой экспертной группы, то в статье будет рассмотрен предложенный подход применительно к обеспечению безопасности движения вагонов на сортировочных горках.

Целью стратегии развития железных дорог Российской Федерации и других стран является увеличение доли железнодорожного транспорта в общей структуре грузооборота. Один из способов решения данной задачи — совершенствование планирования и эксплуатации сортировочных станций [15, 16]. Наиболее важным и сложным узлом сортировочной станции является сортировочная горка, где производится сортировка (расформирование) пришедших на станцию грузовых поездов методом свободного скатывания. В процессе сортировки производится надвиг состава на горку, расцепка необходимых групп вагонов (отцепов) и скатывание их с горки под действием силы тяжести на заданный путь посредством стрелочных переводов (рис. 3).

Для обеспечения безопасности движения подвижного состава при свободном скатывании необходимы постоянный контроль и регулировка скорости свободного скатывания групп вагонов (отцепов). Стоит отметить, что регулировка скорости движения отцепа возможна только на специальных участках, называемых тормозными позициями [5].

Опасной (или нештатной) ситуацией принято считать объединение (соударение) вагонов на спускной части. При этом соударение может произойти по различным причинам — непереод стрелки (например, одновременное нахождение более одного отцепа ведет к запрету перевода стрелки, что в свою очередь приводит к соударению), превышение усилия торможения в вагонном

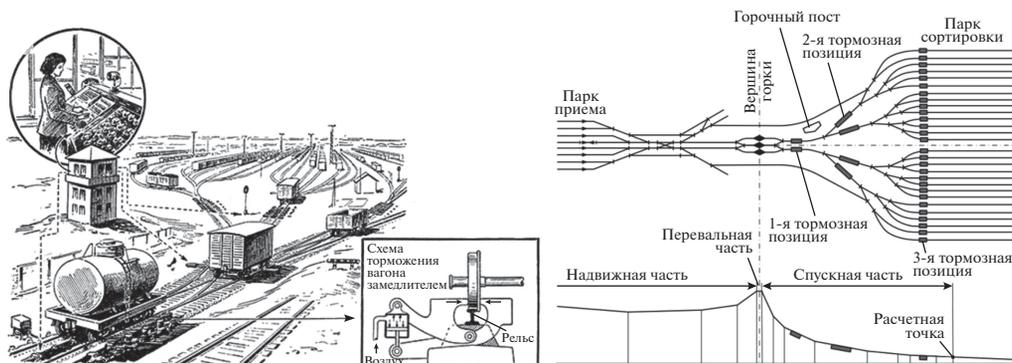


Рис. 3. Иллюстрация работы сортировочной горки.

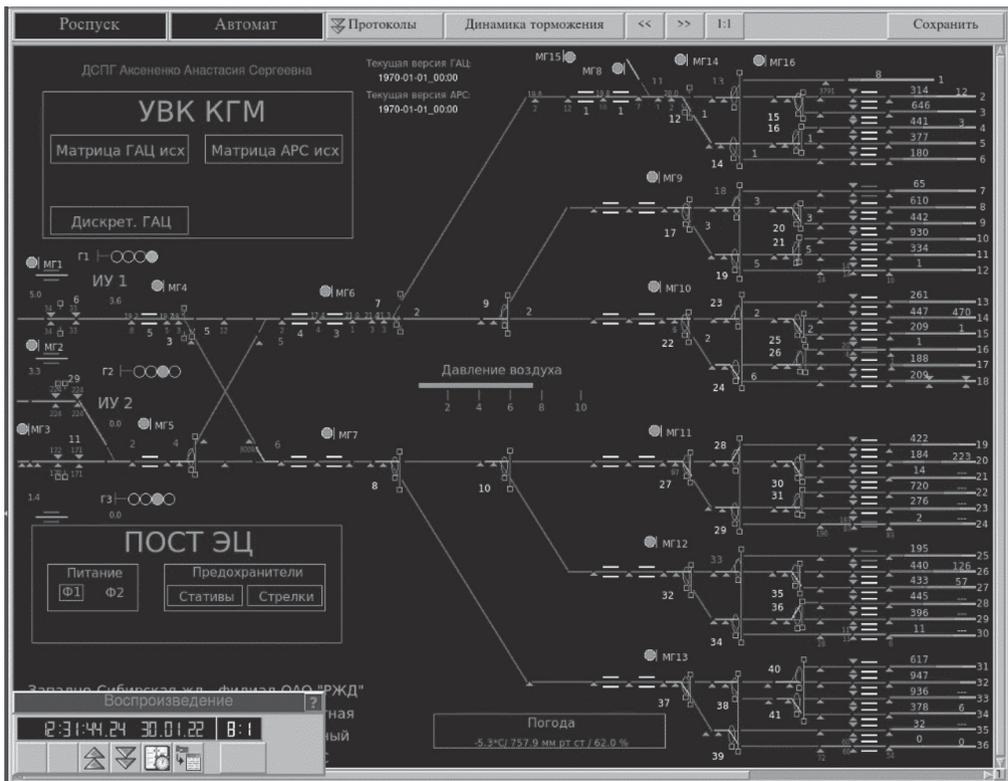


Рис. 5. Пример объединения нескольких отцепов на спускной части сортировочной горки.

- Расстояние до точки разделения маршрутов отцепов (m) (согласно [21], объединение вагонов в кривых недопустимо, поэтому, даже если два отцепа идут на один путь, отцепы должны объединяться только в сортировочном парке).

На этапе обучения КЛМ использовалась база данных из 5000 технологических ситуаций, размеченных экспертами по двум классам сложности. Обучающие данные собраны с 20 сортировочных горок, оборудованных комплексной системой автоматизаций сортировочных процессов (КСАУ СП) [22, 23].

Для оценки точности разработанной модели использовалась тестовая выборка, содержащая 100 технологических ситуаций, переданных в АО «НИИАС» от ОАО «РЖД» с целью экспертного анализа. Во всех рассматриваемых случаях имело место ручное вмешательство оператора в ход роспуска.

Результат ручного вмешательства, показанный на экране автоматизированного рабочего места электромеханика, приведен на рис. 4.

Серая кривая — допустимая скорость движения отцепа, белая — текущая скорость отцепа. Слева от синей вертикальной линии управление производилось автоматической системой. После чего в процесс движения вмешался оператор, из-за чего скорость движения отцепа значительно упала.

Пример нештатной ситуации представлен на рис. 5. В данном примере отцепы 2, 3, 4, 5 и 6 объединились на измерительном участке горки и были ошибочно направлены на один маршрут. Анализ описанной нештатной ситуации показал, что при роспуске вагонов машинист локомотива не придерживался рекомендованной скорости надвига вагонов на сортировочную горку.

Для каждого из 100 случаев были построены матрицы состояний:

$$(6) \quad X = \{\mathbf{x}_t\}.$$

Для каждого i -го параметра $x_{it} \in \mathbf{x}_t$ вероятность появления сложной ситуации оценивалась по формулам (2), (5), а для каждого состояния \mathbf{x}_t — путем DS-объединения в базисе Заде:

$$P(q|\mathbf{x}_t) = \min_i P(q|x_i).$$

После чего производился процесс нормализации вероятностных показателей путем приведения их к интервалу $[0, 1]$. Технологическая ситуация считалась опасной, если в матрице (6) найдется элемент \mathbf{x}_t со значением $P(q|\mathbf{x}_t)$, превышающим 0,8.

В результате эксперимента было выявлено 21 сложных ТС. Реально среди них к классу сложных было отнесено 19 ситуаций. В 11 случаях наблюдались соударения с превышением допустимой скорости (5 км/ч). В 7 случаях определился отказ напольного оборудования. В одном случае выявлено перетормаживание отцепы с последующим боем вагона. Оставшиеся 2 случая помечены как ложно идентифицированные алгоритмом. Тем не менее такие ситуации были помечены как пограничные работниками службы автоматики и телемеханики ОАО «РЖД».

При экспертном анализе ситуаций, идентифицированных КЛМ как «несложные», было выявлено 3 нагона и 1 случай неперевода стрелки, т.е. 4 ложноотрицательных ситуации.

Оценка точности проводилась с учетом вычисления матрицы ошибок:

$$accuracy = \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN},$$

где TP, TN, FP, FN — истинно-положительные, истинно-отрицательные, ложноположительные, ложноотрицательные объекты (ситуации) соответственно.

В случае КЛМ для вышеописанных ситуаций TP = 19, TN = 96, FP = 2, FN = 4 $accuracy = 0,95$, что свидетельствует о высоком уровне эффективности предложенного подхода.

8. Выводы

В статье представлен новый предиктивный подход к анализу состояний и прогнозированию поведения сложных технологических процессов на основе технологии предиктивной аналитики. Предлагаемый подход базируется

на идеи обнаружения в контролируемом процессе предикторных событий, предшествующих появлению особых классов нештатных состояний технологических процессов. Установлена зависимость предикторных состояний технологического процесса от сложности обуславливающих их технологических ситуаций, что позволило подойти к прогнозированию состояний контролируемого процесса через оценивание сложности соответствующих технологических ситуаций.

Для реализации предиктивного подхода авторами предложена гибридная логико-лингвистическая модель классификатора на основе объединения логистической регрессии, вероятностной схемы комбинирования свидетельств Демпстера–Шафера и нечеткой модели Сугено. Включение в гибридный классификатор нечеткой модели для оценки характера ТС повышает выразительность гибридного классификатора и существенно расширяет его возможности по выявлению и дифференциации различных классов сложности ТС. В частности, логико-лингвистический классификатор позволяет на основе анализа характера сложившейся технологической ситуации выявлять различные оттенки сложности ТС путем коррекции параметров логистической регрессии.

Проведенные эксперименты на реальных данных показали эффективность разработанной предиктивной модели логико-лингвистического классификатора для оценки состояний и прогнозирования поведения технологических процессов, протекающих на сортировочных горках. Общность предложенного предиктивного подхода и универсальность разработанной модели классификатора позволяют использовать их для решения широкого круга задач, возникающих на транспорте и других промышленных производствах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Букреев В.Г., Колесникова С.И., Янковская А.Е. Выявление закономерностей во временных рядах в задачах распознавания состояний динамических объектов. Томск. Изд-во ТПУ, 2010.
2. Цветков В.Я. Сложные технические системы // Образовательные ресурсы и технологии. 2017. № 3 (20). С. 86–92.
3. Вычужанин В.В., Вычужанин А.В. Информационная когнитивная имитационная модель сложной технической системы // Информационные системы и технологии ИСТ-2020. 2020. С. 677–683.
4. Буравцев А.В., Цветков В.Я. Сложные организационно вычислительные системы // Перспективы науки и образования. 2018. № 4 (34). С. 293–300.
5. Шабельников А.Н., Ольгейзер И.А. Методы повышения безопасности в КСАУ СП // Автоматика, связь, информатика. 2017. № 3. С. 8–10.
6. Gurov Y. V., Khatlamadzhiyan A. E., Khilkov D. V., Shapovalova Y. Adaptive Fuzzy Systems for Predictive Diagnostics of Railway Facilities // Lecture Notes in Networks and Systems. 2022. Vol. 330 LNNS. P. 170–179. https://doi.org/10.1007/978-3-030-87178-9_17

7. *Суханов А.В., Ковалев С.М., Акперов И.Г., Ольгейзер И.А.* Выявление предвестников бифуркаций динамической системы на основе анализа структуры ее нечеткой модели // Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте ИММВ-2022: Сборник научных трудов XI Международной научно-практической конференции. В 2-х томах, Коломна, 16–19 мая 2022 года. Том 1. – Коломна: Общероссийская общественная организация «Российская ассоциация искусственного интеллекта», 2022. С. 137–144.
8. *Gorrini V., Salome T., Bersini H.* Self-structuring fuzzy systems for function approximation // Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Fuzzy Systems. IEEE, 1995. Т. 2. С. 919–926.
9. *Quost B., Masson M.-H., Denœux T.* Classifier fusion in the Dempster-Shafer framework using optimized t-norm based combination rules // Int. J. Approxim. Reason. 2011. No. 52(3). С. 353–374.
10. *Denœux T.* Logistic regression revisited: belief function analysis // International Conference on Belief Functions. Springer, Cham, 2018. С. 57–64.
11. *Dempster A.P.* Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping // Annals of Mathematical Statistics. 1967. No. 38. С. 325–339.
12. *Yager R.R.* Measures of entropy and fuzziness related to aggregation operators // Inform. Sci. 1995. V. 82. No. 3–4. С. 147–166.
13. *Афанасьева Т.В.* Грануляция многомерных временных рядов в задаче дескриптивного анализа состояния и поведения сложных объектов // АИТ. 2022. № 6. С. 72–83. <https://doi.org/10.31857/S000523102206006X>
14. *Трофимов В.Б.* О подходе к интеллектуальному управлению сложными технологическими процессами на примере черной металлургии // АИТ. 2020. № 10. С. 137–148. <https://doi.org/10.31857/S0005231020100050>
15. *Казанцева Л.С., Югрин О.П.* Нормирование сроков доставки грузов и технология перевозочного процесса // Бюллетень транспортной информации. 2015. № 6(240). С. 29–33.
16. *Покровская О.Д.* Логистические транспортные системы России в условиях новых санкций // Бюллетень результатов научных исследований. 2022. № 1. С. 80–94. <https://doi.org/10.20295/2223-9987-2022-1-80-94>
17. *Муха Ю.А., Тишков Л.Б., Шейкин В.П.* Пособие по применению правил и норм проектирования сортировочных устройств. М.: Транспорт, 1994. 220 с.
18. Правила и нормы проектирования сортировочных устройств на железных дорогах колеи 1520 мм: утв. МПС РФ 10.10.2003. М.: Техинформ, 2003. 168 с.
19. *Бессоненко С.А.* Теория расчета сортировочных горок для различных климатических зон: специальность 05.22.08 “Управление процессами перевозок” // Дисс. ... д-ра техн. наук. М., 2010. 419 с.
20. *Olgeyzer I.A., Sukhanov A.V., Shabelnikov A.N., Ignatieva O.V.* Fuzzy Approach to Car Retarding Adaptation on Hump Yards // Lecture Notes in Networks and Systems. 2022. Vol. 330 LNNS. P. 161–169. https://doi.org/10.1007/978-3-030-87178-9_16
21. Правила технической эксплуатации железных дорог Российской Федерации, утвержденные Приказом Минтранса России от 23 июля 2022 г. № 250.

22. № 95623 U1 Российская Федерация, МПК В61L 17/00. Комплексная система автоматизации управления сортировочным процессом (КСАУ СП): № 2010109685/22: заявл. 15.03.2010: опубл. 10.07.2010 / А.И. Даньшин, Ю.Ф. Золотарев, В.Р. Одикадзе [и др.].
23. *Андронов Д.В.* Опыт эксплуатации КСАУ СП // Автоматика, связь, информатика. 2013. № 11. С. 16–18.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.Ф. Караваем.

Поступила в редакцию 27.04.2022

После доработки 08.08.2022

Принята к публикации 30.11.2022

Управление в социально-экономических системах

© 2023 г. В.Н. ГРИДИН, д-р техн. наук (info@ditc.ras.ru)
(ФГБУН Центр информационных технологий в проектировании РАН,
Одинцово, Московская обл.),
А.Ю. ГОЛУБИН, канд. физ.-мат. наук (agolubin@hse.ru)
(Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Москва;
ФГБУН Центр информационных технологий в проектировании РАН,
Одинцово, Московская обл.)

ПОСТРОЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПОРТФЕЛЕЙ С ВЕРОЯТНОСТЬЮ ПАДЕНИЯ ФИНАЛЬНОГО КАПИТАЛА ИНВЕСТОРА НИЖЕ УСТАНОВЛЕННОГО УРОВНЯ В КАЧЕСТВЕ МЕРЫ РИСКА¹

Найдено конструктивное описание набора всех эффективных инвестиционных портфелей в задаче, где мера риска (shortfall probability (Sp)), введенная в работе для анализа задач портфельной теории, понимается как вероятность падения капитала инвестора ниже установленного уровня. В рамках предположения о нормальности суммарной доходности показано: набор всех эффективных портфелей для задачи с критериями «среднее значение- Sp » есть подмножество множества эффективных портфелей в задаче «среднее значение-дисперсия»; соотношение с эффективным множеством в задаче «среднее значение-Value-at-Risk (VaR)» имеет более сложный характер, зависящий от исходных параметров модели. Тем не менее доказано, что эффективное множество для задачи с критериями «среднее значение- Sp » есть подмножество эффективного множества в задаче «среднее значение- VaR » для достаточно высоких значений уровня доверия. Помимо нормального распределения, рассмотрены эллиптические распределения.

Ключевые слова: выбор эффективного портфеля, мера риска, вероятностное ограничение, управление рисками.

DOI: 10.31857/S0005231023040086, **EDN:** QILIGV

1. Введение

После новаторской работы Markowitz [1], где дисперсия рассматривалась как мера риска инвестиций, еще одна мера риска, Value at Risk (VaR), стала популярным развитием этого подхода. VaR определяет максимальную сумму,

¹ Работа выполнена в рамках Госзадания FFSM-2019-0001.

которую стоимость портфеля может потерять в течение определенного периода времени с данной вероятностью в результате изменения рыночных цен или ставок доходности. Концепция VaR привлекательна, поскольку она согласуется с парадигмой средних отклонений и дисперсий (см., например, [2, 3]), и, с другой стороны, регулирующие органы, такие как Комиссия по ценным бумагам и биржам, требуют, чтобы регистраторы предоставили количественную информацию о рыночном риске, а VaR является одной из альтернатив раскрытия информации. Тем не менее VaR по-прежнему критикуют (см., например, [4, 5]) в отношении неспособности различать «большие» и «низкие» потери, лежащие за данным порогом. В [6] для преодоления этого недостатка предлагается класс «deviation» мер риска и устанавливается взаимосвязь между ним и согласованными (coherent) мерами риска [7]. В частности, доказано, что эти классы мер не совпадают, хотя существует пересечение. В [8] предлагается рассмотреть вместо мер риска VaR и Expectation of Shortfall (ES) — ожидаемый дефицит капитала — их степень, что, по мнению автора, позволит лучше изучить влияние введенных мер риска на рациональное поведение инвесторов.

Вероятность падения капитала ниже установленного уровня (Sp), или в других терминах failure probability, используется в инженерных приложениях в качестве меры риска, см., например, [9, 10]. В [11] отмечается, что failure probability имеет недостатки: отсутствие выпуклости и дифференцируемости в качестве функции параметров проектирования при решении задач инженерной оптимизации. Тем не менее будет показано, что в рамках проблемы определения эффективных портфелей на рассматриваемом рынке активов Sp имеет обобщенное свойство выпуклости и гладкую зависимость от весов в портфеле инвестиций.

Большинство подходов к расчету VaR предполагают совместное нормальное/лог-нормальное распределение базовых рыночных параметров ([12, 13]). На этой основе в [14] была исследована динамическая задача оптимизации портфелей при пошаговых VaR ограничениях. Квантильные ограничения были использованы для анализа стохастических моделей в книге [15]. В данной работе используется нормальная модель для распределения доходности и, кроме того, эллиптические распределения для моделирования распределения доходности с «тяжелым хвостом».

Представленная работа отличается от предыдущих результатов в нескольких отношениях. Во-первых, указываются некоторые интересные (по мнению авторов) свойства меры риска Sp , такие как обобщенное свойство выпуклости, инвариантность по масштабу, и исследуется, как эти свойства связаны с известными мерами риска: дисперсией доходности и VaR. Во-вторых, авторы аналитически характеризуют множество эффективных портфелей в задаче «среднее значение- Sp » (mean- Sp), используя параметризацию по среднему значению доходности, и сравнивают его с множествами эффективных портфелей в задачах с критериями: mean-variance и mean-VaR.

Остальная часть статьи организована следующим образом. В разделе 2 анализируется проблема нахождения всех эффективных портфелей в задаче mean-Sp на рынке при отсутствии безрискового актива, и сравнивается этот результат с множествами эффективных портфелей для задач mean-variance и mean-VaR. В разделе 3 изучается случай эллиптических распределений вместо многомерного нормального распределения доходностей рисков активов. В разделе 4 дано заключение.

2. Эффективные инвестиционные портфели на рынке с рисковыми активами

Рассмотрим рынок, где отсутствует безрисковый актив (см., например, [12, 16]). Стохастический вектор доходностей на одном этапе инвестиций обозначим как $R = (R_1, \dots, R_n)$, а через $a \in R^n$ обозначим инвестиционный портфель. Типичным бюджетным ограничением является $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. В данных условиях это означает самофинансирование инвестора и его/ее возможность «коротких продаж», т.е. заимствование одних активов по текущим ценам с целью вложить деньги в другие. Предположим, что доходности имеют нормальное распределение с вектором средних значений $m = (m_1, \dots, m_n)$ и матрицей ковариации C .

Далее используем следующие естественные предположения:

- векторы m и $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in R^n$ являются линейно независимыми, т.е. средние доходности не равны одному и тому же значению,
- матрица ковариации C является положительно определенной.

В конце этапа инвестиций общая доходность портфеля является случайной переменной

$$X_a = \sum_{i=1}^n a_i R_i.$$

Целевая функция, которую инвестор желает максимизировать, — это средняя общая доходность

$$\mu(a) \stackrel{\text{def}}{=} EX_a = \sum_{i=1}^n a_i m_i,$$

где $m_i = ER_i$. Другая целевая функция, которая должна быть им минимизирована, — это вероятность Sp:

$$\text{Sp}[\alpha, X_a] \stackrel{\text{def}}{=} P\{X_a \leq \alpha\},$$

где α является установленной инвестором верхней границей для суммарной (общей) доходности портфеля. Заметим, что естественное предположение в рассматриваемой модели — это неравенство $\alpha < \min_{i=1, \dots, n} m_i$.

Введенная мера риска Sp не является когерентной (coherent) мерой риска в соответствии с [7], так как она не удовлетворяет свойству однородности, $\text{Sp}[\alpha, \rho X] \neq \rho \text{Sp}[\alpha, X]$. Тем не менее она обладает свойством инвариантности относительно денежной единицы, т.е. если капитал X конвертируется в другую валюту γX с коэффициентом $\gamma > 0$, то вероятность $\text{Sp}[\gamma\alpha, \gamma X] = P\{\gamma X \leq \gamma\alpha\} = \text{Sp}[\alpha, X]$ не меняется.

Теперь определим одну из наиболее часто используемых мер риска в современной портфельной теории (см., например, [15–17]), а затем сравним ее с мерой риска Sp , определенной выше.

Определение 1. Value at Risk (VaR) — это значение доходности v , такое что $-v$ является квантилем функции распределения $F(x) = P\{X \leq x\}$ порядка $1 - \beta$ с предписанным уровнем доверия $\beta \in (0, 5, 1)$. Грубо говоря, $\text{VaR}[\beta, X]$ является корнем уравнения $F(-v) = 1 - \beta$.

Замечание 1. Некоторые исследователи [4, 7] указали на недостатки VaR как меры риска. А именно, VaR не является когерентной мерой риска (см. определение, например, в [7]), поскольку она не удовлетворяет свойству субаддитивности, за исключением случая нормального распределения X . Кроме того, VaR не обеспечивает оценку размера потерь, выходящих за пределы пороговой суммы, указанной в этой мере. Sp противоположна VaR в том смысле, что мера риска Sp указывает на значение вероятности падения капитала инвестора, но не на размер максимальных потерь при данном уровне доверия. Это делает Sp альтернативой VaR в решении проблемы поиска эффективных портфелей.

Теперь обратимся к нормальной модели распределения общей доходности. Как показано, например, в [16], $\text{VaR}[\beta, X_a] = x_\beta^N \sigma(a) - \mu(a)$, где x_β^N — квантиль порядка β стандартного нормального распределения и дисперсия $\text{Var} X_a = \sigma^2(a) = aCa'$, a' — транспонированный вектор-строка a . В этом случае мера риска $\text{VaR}[\beta, X]$ является не только когерентной, но и выпуклой: $\text{VaR}[\beta, \rho X_1 + (1 - \rho)X_2] \leq \rho \text{VaR}[\beta, X_1] + (1 - \rho)\text{VaR}[\beta, X_2]$. Рассмотрим Sp меру

$$\text{Sp}[\alpha, X_a] = \Phi\left(\frac{\alpha - \mu(a)}{\sigma(a)}\right),$$

где $\Phi(x)$ является функцией распределения стандартной нормальной величины. Можно видеть, что аргумент $\Phi(\cdot)$ совпадает с точностью до знака с отношением Шарпа $(\sum_1^n m_i a_i - \alpha) / \sqrt{aCa'}$, где α играет роль доходности “виртуального” безрискового актива. В этой связи покажем (см. предложение 1 ниже), что Sp имеет «обобщенное» свойство выпуклости на определенном множестве рисков.

Определение 2. Функция $f(x)$ на выпуклом множестве D называется сильно квазивыпуклой [18], если для любых $x_1, x_2 \in D$ таких, что $x_1 \neq x_2$, неравенство $f(\rho x_1 + (1 - \rho)x_2) < \max\{f(x_1), f(x_2)\}$ выполняется для любого $\rho \in (0, 1)$.

Например, функция $-\phi(x)$, где $\phi(x)$ обозначает плотность стандартного нормального распределения, сильно квазивыпукла на $(-\infty, \infty)$, но не является выпуклой; функция $\max\{-\phi(x), -1/(2\sqrt{\pi})\}$ не является ни сильно квазивыпуклой, ни выпуклой.

Определим множество нормально распределенных случайных величин $D_\alpha = \{X : EX > \alpha\}$, в котором соотношение $X_1 \neq X_2$ понимается как $P\{X_1 \neq X_2\} > 0$.

Предложение 1. $\text{Sp}[\alpha, X]$ сильно квазивыпукла на D_α .

Доказательство. Пусть риски X_1 и X_2 принадлежат D_α , $X_1 \neq X_2$. Обозначим $\mu_\rho = \rho EX_1 + (1 - \rho) EX_2$ и $\sigma_\rho^2 = \text{Var}(\rho X_1 + (1 - \rho) X_2)$. Вычислим производную

$$\frac{d}{d\rho} \Phi((\alpha - \mu_\rho)/\sigma_\rho) = \frac{\phi((\alpha - \mu_\rho)/\sigma_\rho)}{\sigma_\rho^3} \left[(EX_2 - EX_1) \sigma^2 \rho - (\alpha - \mu_\rho) (\rho \text{Var} X_1 - (1 - \rho) \text{Var} X_2 + (1 - 2\rho) \text{cov}(X_1, X_2)) \right],$$

где функция в квадратных скобках является возрастающей, поскольку ее производная $(\mu_\rho - \alpha) \text{Var}(X_1 - X_2)$ больше нуля. Возможны следующие случаи: во-первых, $\text{Sp}[\alpha, \rho X_1 + (1 - \rho) X_2]$ либо уменьшается, либо увеличивается на всей своей области определения $(0, 1)$. Тогда, очевидно, что определение 2 выполнено для $\text{Sp}[\alpha, X]$. Во-вторых, функция в квадратных скобках изменяет знак от минуса к плюсу в некоторой точке $\rho_0 \in (0, 1)$. В этом случае $\text{Sp}[\alpha, \rho X_1 + (1 - \rho) X_2]$ уменьшается на интервале, лежащем слева от ρ_0 , и увеличивается на интервале справа от ρ_0 . По определению 2 $\text{Sp}[\alpha, X]$ сильно квазивыпукла по X .

Замечание 2. Сравним предпочтения инвестора, индуцированные VaR, Sp и дисперсией портфеля. Так как $\text{VaR}[\beta, X_a] = x_\beta^N \sigma(a) - \mu(a)$, то неравенство $\text{VaR}(\beta, X_{a^1}) > \text{VaR}(\beta, X_{a^2})$ эквивалентно

$$(1) \quad x_\beta^N \sigma(a^1) - \mu(a^1) > x_\beta^N \sigma(a^2) - \mu(a^2).$$

Для введенной меры риска $\text{Sp}[\alpha, X_a] = \Phi((\alpha - \mu(a))/\sigma(a))$ соответствующее неравенство, $\Phi((\alpha - \mu(a^1))/\sigma(a^1)) > \Phi((\alpha - \mu(a^2))/\sigma(a^2))$, эквивалентно

$$(2) \quad (\alpha - \mu(a^1)) \sigma(a^2) > (\alpha - \mu(a^2)) \sigma(a^1).$$

Можно видеть, что соотношение (2) отличается от (1). Это означает, что предпочтения инвестора в отношении VaR отличаются от предпочтений Sp. Отметим, что предпочтения инвестора для другой меры риска, дисперсии портфеля $V[X_a] = \sigma^2(a)$ (см., например, [17]),

$$(3) \quad \sigma^2(a^1) > \sigma^2(a^2),$$

также отличаются от (2).

Вернемся к двухкритериальной задаче оптимизации, т.е. максимизации среднего значения портфеля и минимизации меры риска Sp . В рамках нормальной модели эта задача имеет вид

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu(a) \equiv \sum_{i=1}^n a_i m_i \rightarrow \max, \\ \text{Sp}[\alpha, X_a] \equiv \Phi \left(\frac{\alpha - \mu(a)}{\sigma(a)} \right) \rightarrow \min, \\ a \in A = \left\{ a \in R^n : \sum_{i=1}^n a_i = 1 \right\}. \end{array} \right.$$

Определение 3. Портфель a^0 называется эффективным (Парето-оптимальным) портфелем в (4), если не существует портфеля a^1 такого, что $\mu(a^1) \geq \mu(a^0)$, $\text{Sp}[\alpha, X_{a^1}] \leq \text{Sp}[\alpha, X_{a^0}]$ и, по крайней мере, одно неравенство является строгим.

Теперь исследуем проблему нахождения множества A^{Sp} всех эффективных портфелей в (4), т.е. в задаче «среднее- Sp ». Следующая теорема содержит описание A^{Sp} как семейства портфелей, параметризованного с помощью M — параметра, имеющего смысл фиксированной величины среднего значения портфеля, $M = \mu(a)$. Далее нам понадобятся некоторые обозначения: $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ — скалярное произведение двух векторов-строк x и y , $\langle x, y \rangle_C = \langle x, y C^{-1} \rangle$, $\|x\|_C^2 = \langle x, x C^{-1} \rangle$, и $\Delta = \|\mathbf{1}\|_C^2 \|m\|_C^2 - \langle \mathbf{1}, m \rangle_C^2$.

Теорема 1. Множество A^{Sp} не пусто тогда и только тогда, когда

$$(5) \quad \alpha < \frac{\langle \mathbf{1}, m \rangle_C}{\|\mathbf{1}\|_C^2}.$$

Если (5) выполнено, то

$$(6) \quad A^{\text{Sp}} = \left\{ a(M) = \frac{1}{\Delta} [\mathbf{1} \|m\|_C^2 - m \langle \mathbf{1}, m \rangle_C + M (m \|\mathbf{1}\|_C^2 - \mathbf{1} \langle \mathbf{1}, m \rangle_C)] C^{-1} \right\},$$

где M пробегает полубесконечный интервал

$$(7) \quad M \in [M^{\text{Sp}}, \infty), \quad M^{\text{Sp}} = \frac{\|m\|_C^2 - \alpha \langle \mathbf{1}, m \rangle_C}{\langle \mathbf{1}, m \rangle_C - \alpha \|\mathbf{1}\|_C^2}.$$

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Ниже будет приведено сравнение этой теоремы с известными описаниями множеств A^V и A^{VaR} эффективных портфелей соответственно в задачах с критериями: среднее-дисперсия и среднее-VaR. Следующие два утверждения являются лишь вариациями результатов в [16, 19], где выражения для эффективных портфелей параметризованы средним значением $M = \mu(a)$.

Утверждение 3. Множество A^V не пусто. Оно определяется формулой (6), где M пробегает полубесконечный интервал

$$(8) \quad M \in [M^V, \infty), \quad \text{где } M^V = \frac{\langle 1, m \rangle_C}{\|1\|_C^2}.$$

Утверждение 4. Множество A^{VaR} не пусто тогда и только тогда, когда

$$(9) \quad \beta > \Phi \left(\sqrt{D / \|1\|_C^2} \right), \quad \text{где } D = \|m\|_C^2 \|1\|_C^2 - \langle 1, m \rangle_C^2 > 0.$$

Если (9) выполнено, A^{VaR} определяется (6), с параметром M , пробегающим полубесконечный интервал

$$(10) \quad M \in [M^{\text{VaR}}, \infty),$$

$$M^{\text{VaR}} = \frac{\langle 1, m \rangle_C}{\|1\|_C^2} + \sqrt{\frac{D}{\|1\|_C^2} \left(\frac{(x_\beta^N)^2}{\|1\|_C^2 (x_\beta^N)^2 - D} - \frac{1}{\|1\|_C^2} \right)}.$$

Тот факт, что в задачах с критериями: среднее-Sp, среднее-дисперсия и среднее-VaR эффективные портфели определяются одной и той же формулой (6), имеет следующее объяснение. Если портфель a^* эффективен в смысле любой из трех двухкритериальных задач выше, то a^* необходимо решает задачу

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min \sigma^2(a), \\ \mu(a) = M, \\ a \in A = \left\{ a \in R^n : \sum_{i=1}^n a_i = 1 \right\}, \end{array} \right.$$

где $M = \mu(a^*)$. Необходимость очевидно вытекает из определений

$$\text{VaR}[\beta, X_a] = x_\beta^N \sigma(a) - \mu(a) \quad \text{и} \quad V[X_a] = \sigma^2(a).$$

В случае же $\text{Sp}[\alpha, X_a] = \Phi \left(\frac{\alpha - \mu(a)}{\sigma(a)} \right)$, имеем $M = \mu(a) \geq M^{\text{Sp}} > \alpha$, поскольку

$$(12) \quad \frac{\langle 1, m \rangle_C}{\|1\|_C^2} < \frac{\|m\|_C^2 - \alpha \langle 1, m \rangle_C}{\langle 1, m \rangle_C - \alpha \|1\|_C^2}.$$

Действительно, знаменатель $\langle 1, m \rangle_C - \alpha \|1\|_C^2 > 0$ в силу (5). По неравенству Коши-Буняковского $\|m\|_C^2 \|1\|_C^2 - \alpha \langle 1, m \rangle_C \|1\|_C^2 > \langle 1, m \rangle_C^2 - \alpha \langle 1, m \rangle_C \|1\|_C^2$. Таким образом, эффективный портфель в задаче среднее-Sp должен минимизировать $\sigma(a)$ при ограничениях $\mu(a) = M$, $\sum_{i=1}^n a_i = 1$. Задача (11) была исследована, например, в [16], и ее решение приведено в (6).

Предложение 2. Множество A^{Sp} эффективных портфелей в задаче среднее-Sp является подмножеством эффективных портфелей в задаче среднее-дисперсия, т.е. $A^{\text{Sp}} \subset A^V$.

Доказательство. Сравнивая выражения для левых границ в (7) и (8), имеем

$$\frac{\|m\|_C^2 - \alpha \langle 1, m \rangle_C}{\langle 1, m \rangle_C - \alpha \|1\|_C^2} > \frac{\langle 1, m \rangle_C}{\|1\|_C^2}$$

(см. (12)). Таким образом, $M^{\text{Sp}} > M^V$ и, следовательно, $A^{\text{Sp}} \subset A^V$.

Замечание 3. Как известно [16], $A^{\text{VaR}} \subset A^V$. Соотношение между множествами A^{Sp} и A^{VaR} не является столь простым, поскольку выполнение неравенства для левых границ в (7) и (10), т.е. $M^{\text{Sp}} > (<) M^{\text{VaR}}$, зависит от конкретных значений α и β . Тем не менее из [16, стр. 1169] следует, что множество эффективных портфелей задачи среднее-VaR сходится к эффективному множеству задачи среднее-дисперсия, когда $\beta \rightarrow 1 - 0$, т.е. левая граница M^{VaR} в (10) сходится к левой границе в (8), $M^V = \langle 1, m \rangle_C / \|1\|_C^2$. Таким образом, $A^{\text{Sp}} \subset A^{\text{VaR}}$ для достаточно большого уровня доверия $\beta < 1$. Заметим также, что

$$M^{\text{Sp}} = \frac{\|m\|_C^2 - \alpha \langle 1, m \rangle_C}{\langle 1, m \rangle_C - \alpha \|1\|_C^2} \rightarrow M^V = \frac{\langle 1, m \rangle_C}{\|1\|_C^2} \text{ при } \alpha \rightarrow -\infty.$$

Следовательно, в этом предельном случае эффективные множества A^{Sp} и A^V совпадают.

Определим эффективную границу в задаче среднее-Sp как множество $\{(\mu(a), \text{Sp}[a, X_a]), a \in A^{\text{Sp}}\} \subset R^2$ на плоскости (μ, Sp) . В отличие от принятого во многих статьях обозначения [16, 17] здесь μ соответствует оси абсцисс, а Sp — оси ординат. Причина — более наглядное представление эффективной границы.

Следующее предложение показывает, что функция $\text{Sp}(M) = \Phi\left(\frac{\alpha - M}{\sigma(a(M))}\right)$, соответствующая эффективной границе в задаче среднее-Sp на интервале (7), имеет более сложный вид, чем выпуклые функции [16, 17] $V(M) = \sigma^2(a(M))$ и $\text{VaR}(M) = x_\beta^N \sigma(a(M)) - M$ в задачах соответственно среднее-дисперсия и среднее-VAR (см. рис. 1–3 ниже).

Предложение 3. Пусть (5) выполнено. Тогда функция $\text{Sp}(M)$ сильно квазивыпукла на $(-\infty, \infty)$.

Доказательство. Отметим, что

$$\sigma^2(a(M)) = \frac{M^2 \|1\|_C^2 - 2M \langle 1, m \rangle_C + \|m\|_C^2}{\Delta^2},$$

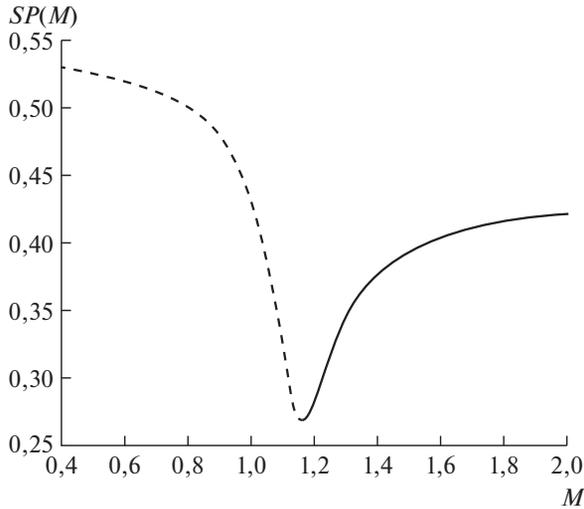


Рис. 1. Эффективная граница для задачи среднее-Sp — сплошная линия. Функция $\text{Sp}(M)$, заданная на интервале $[1,1588; \infty)$, отражает зависимость меры риска Sp от среднего значения доходности портфеля M при выборе эффективного портфеля для каждого M .

и вычислим производную

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dM} \Phi((\alpha - M)/\sigma(a(M))) = \\ & = \frac{\phi((\alpha - M)/\sigma(a(M)))}{\Delta^2 \sigma^3(a(M))} [-\Delta^2 \sigma^2(a(M)) - (\alpha - M) (M \|1\|_C^2 - \langle 1, m \rangle_C)]. \end{aligned}$$

Функция в квадратных скобках равная (см. определения $a(M)$ и Δ^2 выше) $\psi(M) \stackrel{\text{def}}{=} M(\langle 1, m \rangle_C - \alpha \|1\|_C^2) - \|m\|_C^2 + \alpha \langle 1, m \rangle_C$ является возрастающей функцией, так как $\langle 1, m \rangle_C - \alpha \|1\|_C^2 > 0$ в силу (5). Таким образом, производная $\text{Sp}(M)$ представлена как произведение $\gamma(M)\psi(M)$ с $\gamma(M) > 0$ и возрастающей функцией $\psi(M)$, которая меняет знак с минуса на плюс в точке $M^{\text{Sp}} = (\|m\|_C^2 - \alpha \langle 1, m \rangle_C) / (\langle 1, m \rangle_C - \alpha \|1\|_C^2)$. Тогда $\text{Sp}(M)$ убывает до точки $M = M^{\text{Sp}}$ и увеличивается на интервале вправо от M^{Sp} . По введенному выше определению 2 функция $\text{Sp}(M)$ сильно квазивыпукла.

Проиллюстрируем предложение 3 на численном примере, который является модельным и не претендует на практическую значимость. Пусть количество активов $n = 2$, вектором средних доходностей будет $m = (1,1; 1,2)$, и матрица ковариации доходностей

$$C = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, пусть уровень доверия $\beta = 0,9$ и значение верхней границы для доходности $\alpha = 0,8$.

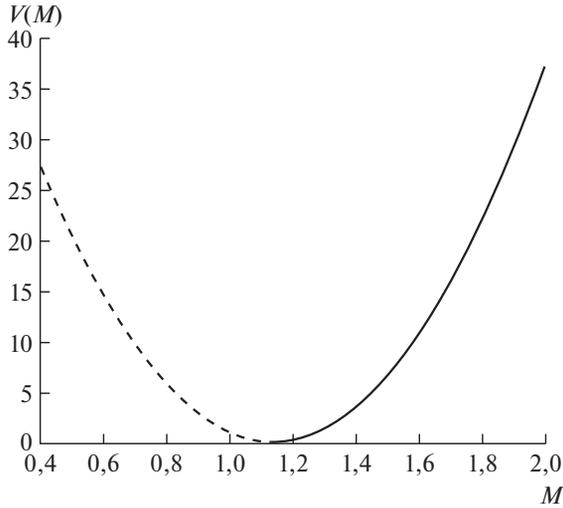


Рис. 2. Эффективная граница для задачи среднее-дисперсия — сплошная линия, $V(M)$ задана на интервале $[1,14; \infty)$.

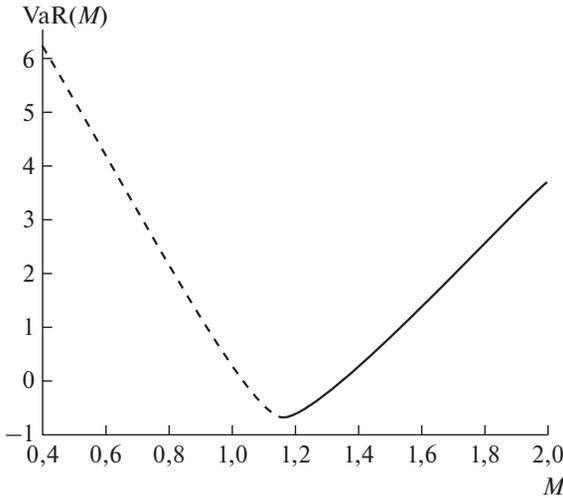


Рис. 3. Эффективная граница для задачи среднее-VaR — сплошная линия, $VaR(M)$ задана на интервале $[1,1489; \infty)$.

Эффективные множества портфелей A^{Sp} , A^V и A^{VaR} не пусты, поскольку (см. (5), (9)) $\alpha = 0,8 < \langle 1, m \rangle_C / \|1\|_C^2 = 1,1400$ и $\beta = 0,9 > \Phi \left(\sqrt{D / \|1\|_C^2} \right) = 0,5562$. Левые границы интервалов (7), (8) и (10) соответственно равны $M^{Sp} = 1,1588$, $M^V = 1,1400$ и $M^{VaR} = 1,1489$. Как можно видеть на рис. 1, функция $Sr(M)$ является сильно квазивыпуклой, но не выпуклой, в отличие от выпуклых функций $V(M)$ и $VaR(M)$, графики которых изображены на рис. 2-3.

3. Случай эллиптических распределений доходностей

В [13, 20] показано, что предположение о нормальности является достаточно адекватным для распределения доходности портфеля $X_a = \sum_{i=1}^n a_i R_i$, но для того, чтобы смоделировать распределение доходности с «тяжелым» хвостом [17], распространим полученные результаты на так называемые многомерные эллиптические распределения. Привлекательным свойством этого класса распределений является то, что любая линейная функция от эллиптически распределенных случайных величин имеет распределение того же вида. Рассмотрим произвольное эллиптическое распределение $F(x) = P(X \leq x)$ (нормальное распределение, распределение Лапласа, Бесселя, Exponential Power, Stable Laws [21]) со средним μ и дисперсией $\sigma^2 < \infty$. Так же, как в [17] определим $F_0(x) = F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ — эллиптическое распределение с нулевым средним и единичной дисперсией. Тогда $\text{Sp}[\alpha, X_a] = F_0((\alpha - \mu(a))/\sigma(a))$ и $\text{VaR}[\beta, X_a] = z_\beta \sigma(a) - \mu(a)$, где z_β есть β -квантиль $F_0(x)$. Таким образом, теория, разработанная в разделе 2, остается в силе, за исключением того, что вместо квантиля x_β^N используется z_β и стандартное эллиптическое распределение $F_0(x)$ вместо стандартного нормального распределения $\Phi(x)$.

Например, распределение Лапласа [21] имеет два параметра: μ и $\lambda > 0$. Среднее и дисперсия равны соответственно μ и $2\lambda^2$. Обозначим через y_β квантиль распределения Лапласа с параметрами $\mu = 0$ и $\lambda = 1$. Поскольку это распределение имеет нулевое среднее и дисперсию 2, получаем $z_\beta = y_\beta/\sqrt{2}$.

4. Выводы

В статье исследуется проблема построения множества всех эффективных портфелей в двухкритериальной задаче с максимизируемой средней доходностью портфеля и минимизируемой мерой риска Sp (short-fall probability), где Sp — вероятность того, что доходность портфеля упадет ниже установленного уровня. С использованием параметризации по среднему значению доходности найдена конструктивная характеристика набора эффективных портфелей в задаче среднее- Sp и показано, что данный набор — всегда подмножество набора эффективных портфелей в задаче среднее-дисперсия, а также подмножество набора эффективных портфелей для задачи среднее-VaR, когда уровень доверия достаточно велик. Для случая эллиптических распределений доходностей показано, что основные результаты, полученные в рамках нормальной модели, остаются в силе с небольшими изменениями, касающимися квантилей распределений доходности портфеля. Дальнейшие исследования по этой тематике могут включать в себя: изучение рынка с безрисковым активом и введенной мерой риска Sp ; сравнение эффективных портфелей в задачах среднее- Sp и среднее-CVaR, где Conditional Value at Risk (CVaR) [22] — модификация VaR — является когерентной мерой риска; исследование модели, в которой присутствует фоновый (background) риск [17], коррелирующий с доходностями активов.

Доказательство теоремы 1. Поскольку $\Phi(x)$ является возрастающей функцией, необходимым условием эффективности фиксированного портфеля $a^* \in A^{\text{Sp}}$ является то, что он оптимален в задаче

$$(П.1) \quad \begin{cases} \min(\alpha - \mu(a))/\sigma(a), \\ \mu(a) = M, \\ a \in A = \left\{ a \in R^n : \sum_{i=1}^n a_i = 1 \right\}, \end{cases}$$

где $M = \mu(a^*)$.

Предположим сначала, что $\alpha \geq M$. Если $\alpha = M$, то a^* не является эффективным, так как любой портфель $a^1 : \mu(a^1) > M$ доминирует над a^* в том смысле, что $(\alpha - \mu(a^1))/\sigma(a^1) < (\alpha - \mu(a^*))/\sigma(a^*) = 0$ и $\mu(a^1) > \mu(a^*)$. Если $\alpha > M$, то задача (П.1) сводится к максимизации $\sigma(a)$. Легко построить последовательность портфелей $\{a^m\}$ таких, что $\mu(a^m) = M$ и $\sigma(a^m) \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда для достаточно больших m имеем $\sigma(a^m) > \sigma(a^*)$ и, следовательно, a^m доминирует над a^* . Таким образом, показано, что условие $\alpha < M$ необходимо для эффективности a^* . При этом условии задача (П.1) сводится к следующей:

$$(П.2) \quad \min \sigma^2(a), \quad \text{при ограничениях } \mu(a) = M, \quad \sum_{i=1}^n a_i = 1.$$

Задача (П.2) уже решена стандартным методом с использованием множителей Лагранжа (см., например, [14, 17]). Показано, что (П.2) имеет единственную оптимальную точку

$$(П.3) \quad a^* (= a(M)) = \frac{1}{\Delta} \left[1 \|m\|_C^2 - m \langle 1, m \rangle_C + M(m \|1\|_C^2 - 1 \langle 1, m \rangle_C) \right] C^{-1}.$$

Исследуем интервалы монотонности функции $\text{Sp}[\alpha, X_{a(M)}] = \Phi\left(\frac{\alpha - M}{\sigma(a(M))}\right)$. Принимая во внимание, что

$$\sigma^2(a(M)) = \langle a(M), a(M) \rangle_C = \frac{M^2 \|1\|_C^2 - 2M \langle 1, m \rangle_C + \|m\|_C^2}{\Delta^2},$$

найдем производную

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dM} \Phi\left(\frac{\alpha - M}{\sigma(a(M))}\right) = \\ & = \frac{\phi((\alpha - M)/\sigma(a(M)))}{\Delta^2 \sigma^3(a(M))} \left[-\Delta^2 \sigma^2(a(M)) - (\alpha - M) (M \|1\|_C^2 - \langle 1, m \rangle_C) \right], \end{aligned}$$

где $\phi(x) > 0$ обозначает плотность стандартного нормального распределения. Рассмотрим функцию в квадратных скобках

$$(П.4) \quad r(M) = M (\langle 1, m \rangle_C - \alpha \|1\|_C^2) - \|m\|_C^2 + \alpha \langle 1, m \rangle_C.$$

1) Пусть $\alpha \geq \alpha_0 = \langle 1, m \rangle_C / \|1\|_C^2$. Если $\alpha > \alpha_0$, то $r(M) < r(\alpha) = -\alpha^2 \|1\|_C^2 - \|m\|_C^2 + 2\alpha \langle 1, m \rangle_C$, поскольку $M > \alpha > 0$. Согласно неравенству Коши–Буняковского имеем $r(\alpha) < -(\alpha \|1\|_C - \|m\|_C)^2 \leq 0$. Если $\alpha = \alpha_0$, то $r(M) \equiv -\|m\|_C^2 + \alpha_0 \langle 1, m \rangle_C < 0$.

2) Пусть $\alpha < \alpha_0$. Из (П.4) следует, что $r(M) > 0$ ($= 0$), если и только если

$$(П.5) \quad M > (=) M^{\text{Sp}} = \frac{\|m\|_C^2 - \alpha \langle 1, m \rangle_C}{\langle 1, m \rangle_C - \alpha \|1\|_C^2},$$

т.е. функция $\text{Sp}[\alpha, X_{a(M)}]$ возрастает только на интервале $[M^{\text{Sp}}, \infty)$. Подводя итог, имеем: i) условие $\alpha < \langle 1, m \rangle_C / \|1\|_C^2$ необходимо и достаточно для существования эффективного портфеля в задаче среднее-Sp, ii) набор эффективных портфелей в задаче среднее-Sp определяется как $A^{\text{Sp}} = \{a(M), M \in [M^{\text{Sp}}, \infty)\}$, выражения для $a(M)$ и M^{Sp} приведены в (П.3) и (П.5) соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Markowitz H.* Portfolio Selection // J. Finance. 1952. V. 7. P. 77–91.
2. *Gaiivoronski A., d Pflug G.* Value at Risk in Portfolio Optimization: Properties and Computational Approach // J. Risk. 2004. V. 7. No. 2. P. 1–31.
3. *Shiba N., Xu C., Wang J.* Multistage Portfolio Optimization with VaR as Risk Measure // Int. J. Innovat. Comput., Inform. Control. 2007. V. 3. No. 3. P. 709–724.
4. *Rockafellar R.T., Uryasev S.* Conditional value-at-risk for general loss distributions // J. Bank. Finance. 2002. V. 26. P. 1443–1471.
5. *Szego G.* Measure of Risk // Eur. Oper. Res. 2005. V. 163. P. 5–19.
6. *Rockafellar R.T., Uryasev S., Zabarankin M.* Generalized Deviations in Risk Analysis // Finance Stochast. 2006. V. 10. No. 1. P. 51–74.
7. *Artzner P., Delbaen F., Eber J.M., Heath D.* Coherent measures of risk // Math. Finance. 1999. No. 9. P. 203–228.
8. *Минасян В.Б.* Новые меры риска искажения высших моментов распределения потерь. Взаимосвязь с мерами катастрофических рисков // Управление финансовыми рисками. 2021. Т. 68. № 4. С. 302–323.
9. *Gardoni P., Murphy C.* Gauging the societal impacts of natural disasters using a capabilities-based approach // Disasters: Disaster Studies, Policy, Management. 2010. V. 34. No. 3. P. 619–636.
10. *Gardoni P., Murphy C.* Design, risk and capabilities. In Human Capabilities, Technology, and Design, J. van den Hoven and I. Oosterlaken (Eds.). N.Y.: Springer, 2012. P. 173–188.

11. *Rockafellar R.T., Royset J.O.* Risk Measures in Engineering Design under Uncertainty // International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering (ICASP). N.Y., USA, 2015. P. 1–9.
12. *Pinar M.C.* Static and Dynamic VaR Constrained Portfolios with Application to Delegated Portfolio Management // Optimization. 2013. V. 62. No. 11. P. 1419–1432.
13. *Duffie D., Pan J.* An Overview of Value at Risk // Derivat. 1997. V. 4. P. 7–49.
14. *Golubin A.Y.* Optimal Investment Policy in a Multi-stage Problem with Bankruptcy and Stage-by-stage Probability Constraints // Optimization. 2021. <https://doi.org/10.1080/02331934.2021.1892674>
15. *Кибзун А.И., Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
16. *Alexander G.J., Baptista A.M.* Economic Implications of Using a Mean-VaR Model for Portfolio Selection: A Comparison with Mean-variance Analysis // J. Econom. Dynam. Control. 2002. V. 26. P. 1159–1193.
17. *Guo X., Chan R.H., Wong W.K., Zhu L.* Mean-variance, Mean-VaR, and Mean-CVaR Models for Portfolio Selection with Background Risk // Risk Manag. 2019. V. 21. P. 73–98.
18. *Bazara M.S., Shetty C.M.* Nonlinear Programming: Theory and Algorithms, New York: Wiley, 1979.
19. *Merton R.C.* An analytic derivation of the efficient portfolio frontier // J. Finan. Quantit. Anal. 1972. No. 7. P. 1851–1872.
20. *Hull J.C., White A.* Value-at-risk when daily changes in market variables are not normally distributed // J. Derivat. 1998. No. 5. P. 9–19.
21. *Landsman Z., Valdez E.A.* Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions // North Amer. Actuarial J. 2003. V. 7. No. 4. P. 55–71.
22. *Alexander G.J., Baptista A.M.* A comparison of VaR and CVaR constraints on portfolio selection with the mean-variance model // Management Sci. 2004. V. 50. P. 1261–1273.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 21.04.2022

После доработки 05.07.2022

Принята к публикации 28.07.2022

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2023 г. А.Н. ИГНАТОВ, канд. физ.-мат. наук
(alexei.ignatov1@gmail.com)
(Московский авиационный институт)

ОБ ОБЩЕЙ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ФОРМИРОВАНИЯ РАСПИСАНИЯ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК И СПОСОБАХ ЕЕ РЕШЕНИЯ¹

Формулируется новая математическая модель движения по транспортной сети, представляемой неориентированным мультиграфом. Движение между вершинами мультиграфа предполагается возможным в заранее определенные промежутки времени. Предлагается критерий оптимальности расписания грузоперевозок, содержащий в себе помимо временных характеристик перевозок их стоимость, также используется количество недоставленных грузов. Задача поиска оптимального расписания формулируется в виде задачи смешанного целочисленного линейного программирования. Предлагаются различные варианты алгоритма поиска приближенного решения в поставленной задаче. Рассматриваются наглядные примеры.

Ключевые слова: транспортная сеть, мультиграф, грузоперевозки, расписание, смешанное целочисленное линейное программирование.

DOI: 10.31857/S0005231023040098, EDN: QILJNB

1. Введение

Задачи по поиску оптимального маршрута и времени движения по транспортной сети с учетом различных ограничений на пропускную способность, время транспортировок и их стоимость давно привлекают внимание исследователей. В таких задачах нередко для моделирования транспортной сети используют (не)ориентированный (мульти)граф. Исследования, посвященные поиску оптимального расписания движения грузов между вершинами графа, можно поделить на две категории по признаку фиксированности времени транспортировок.

В классических постановках задачи маршрутизации транспорта (vehicle routing problem) [1, 2] и задачи поиска маршрута по местам продажи товаров

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-07-00046 А).

(traveling purchaser problem) [3] движение между вершинами графа может быть осуществлено в любое время. В англоязычной литературе, посвященной железнодорожной тематике, время движения между вершинами транспортной сети часто не задано. Это время определяется при построении расписания [4–9]. В [4, 5] рассматривается однопутная железная дорога. В [6, 7] рассматривается задача построения расписания для железнодорожных сетей общего вида при фиксированном наборе маршрутов для поездов. Также как и в [6, 7], в [8] рассматривалась железнодорожная сеть общего вида, однако предлагалась несколько более сложная методика формирования расписания, предполагающая итерационную процедуру, в которой последовательно модифицировались набор маршрутов для поездов и время их движения по железнодорожной сети. В [9] задача поиска маршрута движения поездов и времени их движения по железнодорожной сети решалась одновременно. Время в [9] полагалось дискретным, что может приводить к очень большой размерности поставленной задачи.

По сути, в задачах с нефиксированным временем движения из вершины в вершину предлагается мгновенная готовность некоего транспортного средства перевезти груз/покупателя из одной вершины в другую. Однако в реальной жизни такое не всегда возможно. Так, например, регулярные железнодорожные и авиаперевозки осуществляются по расписанию, а иррегулярные могут быть просто недоступны. А ввиду пробок на автомобильных дорогах, возникающих, например, утром и вечером, длительность поездки между вершинами неодинакова. Иными словами, пропускная способность ребер/дуг графа транспортной сети зависит от времени. В этой связи в настоящей статье рассматривается постановка задачи, в которой движение между вершинами мультиграфа возможно только в заранее определенные промежутки времени.

Среди публикаций, посвященных формированию расписания перевозок, когда движение между вершинами осуществляется согласно некоторому заранее заданному расписанию, выделим [10–16]. В [10] была рассмотрена задача одновременного формирования расписания и маршрутов движения вагонов, составов по железнодорожной сети общего вида. Отметим, что в [10] также предлагались постановки с нефиксированным временем движения между вершинами. Время в [10], как и в [9], полагалось дискретным. В [11] среди прочего исследовалась задача о перемещении вагонов, которые перевозятся поездами с фиксированным временем отправления, между двумя железнодорожными станциями. В [12, 13] рассматривалась задача о минимизации парка локомотивов, требуемых для перевозки железнодорожных составов. В [14] исследовалась задача назначения «технологического окна» — промежутка времени, в которое некоторые участки железнодорожного полотна закрываются для проведения ремонтных работ. В [14] одновременно строилось расписание движения поездов, маршрут их следования по железнодорожной сети и промежутки времени для ремонтных работ. В связи с большой размерностью задачи, сформулированной в [14], поиск ее решения осуществлялся долго. По-

этому в [15] была усовершенствована модель движения по мультиграфу железнодорожной сети из [14]. В [16] на основе модели движения из [15] задача назначения «технологического окна» была сформулирована в новой постановке. Были предложены алгоритмы поиска приближенного решения в этой задаче.

Следует подчеркнуть, что в постановках из [11–16] возникает проблема, связанная с конечностью промежутка времени, на которое строится расписание (далее — горизонт планирования). Внутри этого промежутка времени надо успеть развезти все грузы. Однако это не всегда бывает возможно как по причине недостатка в рамках горизонта планирования возможностей для транспортировки (иными словами, некому перевозить), так и по причине того, что потребность перевозки возникает к концу горизонта планирования (иными словами, не хватает времени). Таким образом, решение задачи поиска оптимального расписания может не существовать, так как останутся недоставленные грузы. При этом необходимость в доставке грузов не исчезает. Такая проблема поднималась в [10], где предлагалось расширить горизонт планирования, либо отказаться от ограничения на прибытия всех грузов в рамках горизонта планирования. Первый подход приводит к росту размерности оптимизационной задачи, а второй подход может привести к тому, что груз будет доставлен на станцию, с которой практически невозможно добраться в станцию назначения. Следовательно, актуальна разработка математической модели движения по графу транспортной сети, которая бы учитывала возможность и после окончания горизонта планирования находиться грузу в движении, если ожидаемое время в пути будет допустимым. Такая модель и формулируется в настоящей статье. Как и в [9, 10], математическая модель движения по транспортной сети в настоящей статье допускает любой вид графа, время движения и маршрут движения ищутся одновременно, при этом фиксация маршрута движения груза не обязательна.

Помимо новой математической модели движения по мультиграфу транспортной сети, в статье предлагается критерий оптимальности, в котором учитываются различные аспекты перевозок: стоимость, время перевозок, количество недоставленных грузов. Задача поиска оптимального расписания формулируется в виде задачи смешанного целочисленного линейного программирования. Предлагается и обсуждается алгоритм поиска приближенного решения в поставленной задаче. На наглядных примерах проводится сравнение различных вариантов предложенного алгоритма.

2. Основные обозначения и предположения

Рассмотрим транспортную систему, представляемую неориентированным мультиграфом $G = \langle V, E \rangle$, где V — множество вершин (городов, железнодорожных станций, заводов, аэропортов, морских портов) и E — множество граней (шоссе, железнодорожных путей, воздушных трасс, морских путей), соединяющих эти вершины. Пусть $|V| = M \geq 2$. Перенумеровав вершины мульт-

тиграфа G от 1 до M , составим множество индексов $V' = \{1, 2, \dots, M\}$. Каждый элемент этого множества единственным образом определяет вершину мультиграфа G .

Будем отсчитывать время в минутах относительно некоторого момента отсчета. Под горизонтом планирования будем понимать промежуток времени $[0, T_{\text{макс.}})$, на который строится расписание. Если план перевозок строится на день (1440 мин), то $T_{\text{макс.}} = 1440$.

Пусть имеется I грузов (посылок, контейнеров, поездов), для каждого из которых заданы:

- индекс вершины отправления $v_i^{\text{отпр.}} \in V'$;
- индекс вершины прибытия (назначения) $v_i^{\text{приб.}} \in V'$;
- время готовности к отправлению $t_i^{\text{отпр.}} \in [0, T_{\text{макс.}})$;
- максимальное время d_i , в течение которого грузу позволяет находиться в пункте отправления с момента готовности;
- время груза в пути T_i , т.е. максимальное время, в течение которого грузу позволяет находиться в транспортной системе (исключая время в вершине отправления), вычисляемое в минутах;
- масса груза $w_i \in \mathbb{R}_+$.

Груз предполагается неделимым в том смысле, что его нельзя отправить по частям.

Движение между вершинами может выполняться только в определенные промежутки времени. Пусть доступно ровно K перемещений/транспортных перевозок (самолетами, морскими судами, поездами, грузовиками) между вершинами. Каждая транспортировка представима в виде семиэлементного вектора-строки $z_k \stackrel{\text{def}}{=} (v_k^{\text{нач.}}, v_k^{\text{кон.}}, n_k, t_k^{\text{нач.}}, t_k^{\text{кон.}}, W_k, C_k)$, где $v_k^{\text{нач.}} \in V'$ — индекс вершины начала движения, $v_k^{\text{кон.}} \in V'$ — индекс вершины конца движения, причем $v_k^{\text{нач.}}$ и $v_k^{\text{кон.}}$ — индексы смежных вершин в графе G , n_k — номер пути, соединяющего вершины с индексами $v_k^{\text{нач.}}$ и $v_k^{\text{кон.}}$, $t_k^{\text{нач.}} \in [0, T_{\text{макс.}})$ — время начала движения, $t_k^{\text{кон.}}$ — время конца движения, W_k — максимальная перевозимая масса при транспортировке, C_k — стоимость транспортировки единицы массы, $k = \overline{1, K}$. Обозначим через \mathcal{Z} множество всех векторов z_k , $k = \overline{1, K}$. Перенумеруем элементы множества \mathcal{Z} от 1 до K . Таким образом, число от 1 до K однозначно определяет параметры транспортировки.

При выполнении перевозок склады, в которых хранятся грузы, могут быть заполнены. Кроме того, с грузом могут производиться некоторые операции, например, переупаковка. В этой связи введем минимально и максимально возможную длительность стоянки в вершине с индексом $v_k^{\text{кон.}}$ после выполнения транспортировки с номером k груза с номером i : $t_{i,k}^{\text{ст. мин.}}$ и $t_{i,k}^{\text{ст. макс.}}$, $i = \overline{1, I}$, $k = \overline{1, K}$. Очевидно, $\forall i = \overline{1, I}$, $k = \overline{1, K}$ $0 \leq t_{i,k}^{\text{ст. мин.}} \leq t_{i,k}^{\text{ст. макс.}}$.

Для некоторых грузов может быть допустимо прибытие в вершину назначения и по окончании горизонта планирования. Однако во время движения необходимо учитывать ограничение на время нахождения в транспортной системе. С этой целью необходимо задать величину τ_{m_1, m_2} — ожидаемое время

(начиная с момента готовности к отправлению) перевозки груза из вершины с индексом m_1 в вершину с индексом m_2 , $m_1, m_2 = \overline{1, M}$. Очевидно, что $\tau_{m_1, m_1} = 0$, $m_1 = \overline{1, M}$. Если доступны исторические наблюдения по перевозке из вершины с индексом m_1 в вершину с индексом m_2 , то в качестве τ_{m_1, m_2} можно выбрать реализацию выборочного среднего по имеющимся наблюдениям, $m_1, m_2 = \overline{1, M}$. Если эти данные отсутствуют, то указанную величину можно оценить экспертным путем. Также введем величину η_{m_1, m_2} — ожидаемое время с момента готовности до отправления груза из вершины с индексом m_1 в вершину с индексом m_2 , которая вычисляется по аналогичному принципу, что и τ_{m_1, m_2} , $m_1, m_2 = \overline{1, M}$.

3. Математическая модель движения по транспортной сети

Сформулируем математическую модель движения введенных выше I грузов по транспортной сети, задаваемой мультиграфом G , на основе множества транспортировок \mathcal{Z} . Под маршрутом груза с номером i будем понимать набор номеров транспортировок, последовательно используемых этим грузом, $i = \overline{1, I}$. Как следствие, по маршруту можно определить набор вершин, последовательно пересекаемых этим грузом. Ограничим максимальное число транспортировок в маршруте в рамках горизонта планирования некоторым заранее заданным числом J . Под j -м этапом маршрута груза с номером i будем понимать движение этого груза, когда используется j -я по порядку использования транспортировка, $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, J + 1}$. Будем называть вершину промежуточной для i -го груза, если она не является для него ни вершиной отправления, ни вершиной назначения, $i = \overline{1, I}$.

Введем вспомогательные переменные $\delta_{i, j, k}$, характеризующие использование грузом с номером i транспортировки с номером k на j -м этапе, $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, J + 1}$, $k = \overline{1, K}$. Переменная $\delta_{i, j, k}$ равна нулю, если транспортировка с номером k не используется i -м грузом на j -м этапе, и 1 — в противоположном случае.

Теперь сформулируем множество допустимых стратегий.

По определению переменных $\delta_{i, j, k}$ имеем

$$(1) \quad \delta_{i, j, k} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J + 1}, \quad k = \overline{1, K}.$$

Используем ограничения из [15, 16], которые задают движение исключительно по смежным вершинам графа G

$$(2) \quad \sum_{k=1}^K \delta_{i, j, k} v_k^{\text{кон.}} \leq \sum_{k=1}^K \delta_{i, j+1, k} v_k^{\text{нач.}} + \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i, j+1, k}\right) M^3, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J-1},$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^K \delta_{i, j, k} v_k^{\text{кон.}} \geq \sum_{k=1}^K \delta_{i, j+1, k} v_k^{\text{нач.}} - \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i, j+1, k}\right) M, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J-1}.$$

Согласно [15] если для некоторого $\tilde{i} \in \{1, \dots, I\}$ и некоторого $\tilde{j} \in \{1, \dots, J\}$ справедливо

$$\sum_{k=1}^K \delta_{\tilde{i}, \tilde{j}, k} = 0, \quad \text{то} \quad \sum_{k=1}^K \delta_{\tilde{i}, \tilde{j}+1, k} = 0, \quad j = \overline{\tilde{j}, J}.$$

Если же

$$\sum_{k=1}^K \delta_{\tilde{i}, \tilde{j}, k} = 1, \quad \text{то} \quad \sum_{k=1}^K \delta_{\tilde{i}, \tilde{j}+1, k} = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^K \delta_{\tilde{i}, \tilde{j}+1, k} = 1.$$

Поскольку этапов для движения может быть не более J , введем ограничение

$$(4) \quad \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K \delta_{i, J+1, k} = 0.$$

Так как груз неделим, то на любом этапе (в том числе первом) можно использовать максимум одну транспортировку

$$(5) \quad \sum_{k=1}^K \delta_{i, 1, k} \leq 1, \quad i = \overline{1, I}.$$

Если перевозка груза начинается, то она должна быть осуществлена из соответствующей вершины отправления

$$(6) \quad \sum_{k=1}^K \delta_{i, 1, k} v_k^{\text{нач.}} = v_i^{\text{отпр.}} \sum_{k=1}^K \delta_{i, 1, k}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Груз может быть не отправлен, если время готовности к отправлению в сумме с максимальным количеством времени пребывания в вершине отправления выходят за пределы горизонта планирования. В противном случае нужно отправить груз не позднее максимального количества времени в вершине отправления с момента готовности. Поэтому наложим ограничения

$$(7) \quad \sum_{k=1}^K \delta_{i, 1, k} t_k^{\text{нач.}} + \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i, 1, k}\right) T_{\text{макс.}} \leq t_i^{\text{отпр.}} + d_i, \quad i = \overline{1, I}.$$

Для того чтобы отправить груз не ранее момента готовности, введем ограничение

$$(8) \quad t_i^{\text{отпр.}} \leq \sum_{k=1}^K \delta_{i, 1, k} t_k^{\text{нач.}} + \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i, 1, k}\right) T_{\text{макс.}}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Запретим грузу выходить из вершины и входить в вершину более чем один раз

$$(9) \quad \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k: v_k^{\text{нач.}}=m, 1 \leq k \leq K} \delta_{i,j,k} \leq 1, \quad i = \overline{1, I}, \quad m = \overline{1, M},$$

$$(10) \quad \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k: v_k^{\text{кон.}}=m, 1 \leq k \leq K} \delta_{i,j,k} \leq 1, \quad i = \overline{1, I}, \quad m = \overline{1, M}.$$

Отправление в промежуточных вершинах маршрута не должно происходить раньше прибытия в эти вершины. Поэтому с учетом ограничений на минимальное и максимальное время стоянки, имеем

$$(11) \quad \sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} (t_k^{\text{кон.}} + t_{i,k}^{\text{ст. мин.}}) \leq \\ \leq \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k} t_k^{\text{нач.}} + \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k} \right) \underline{T}, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J-1},$$

где

$$(12) \quad \underline{T} = \max_{i \in \{1, \dots, I\}, k \in \{1, \dots, K\}} t_k^{\text{кон.}} + t_{i,k}^{\text{ст. мин.}}, \\ \sum_{k: 1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} \neq v_i^{\text{приб.}}} \delta_{i,j,k} (t_k^{\text{кон.}} + t_{i,k}^{\text{ст. макс.}}) \geq \\ \geq \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k} t_k^{\text{нач.}}, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J-1}.$$

Ограничения (11) идентичны ограничениям из [15, 16], однако произведена замена $2T_{\text{макс.}}$ на \underline{T} . Данная замена требуется в связи с тем, что в рассматриваемой модели перевозок для некоторого $k \in \{1, \dots, K\}$ может оказаться $t_k^{\text{кон.}} > T_{\text{макс.}}$. Ограничения (12) аналогичны использованным в [15, 16] с учетом того, что контроль времени стоянки требуется только в промежуточных вершинах маршрута.

В [15, 16] не учитывался тот факт, что отправление не обязано прибыть в пункт назначения в рамках горизонта планирования. Поэтому, если предполагается, что груз будет стоять в некоторой промежуточной вершине в момент окончания горизонта планирования, необходимо гарантировать допустимость такой стоянки

$$(13) \quad \sum_{k: 1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} \neq v_i^{\text{приб.}}} \delta_{i,j,k} (t_k^{\text{кон.}} + t_{i,k}^{\text{ст. макс.}} - T_{\text{макс.}}) + \\ + T_{\text{макс.}} \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k} \geq 0, \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}.$$

Также необходимо запретить дальнейшее движение груза после прибытия в пункт назначения. С этой целью введем ограничения

$$(14) \quad \sum_{k:1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} = v_i^{\text{приб.}}} \delta_{i,j,k} \leq 2 \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k} \right), \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}.$$

Введем величину $\hat{T}_{i,j}$ — количество времени, проводимого грузом с номером i в j -й (по порядку следования) промежуточной вершине своего маршрута в рамках горизонта планирования

$$(15) \quad \hat{T}_{i,j} = \sum_{k=1}^K \delta_{i,j+1,k} (t_k^{\text{нач.}} - T_{\text{макс.}}) + \\ + \sum_{k: v_k^{\text{кон.}} \neq v_i^{\text{приб.}}, t_k^{\text{кон.}} < T_{\text{макс.}}, 1 \leq k \leq K} \delta_{i,j,k} (T_{\text{макс.}} - t_k^{\text{кон.}}), \quad i = \overline{1, I}, \quad j = \overline{1, J}.$$

Для удобства формулирования математической модели также положим $\hat{T}_{i,j+1} = 0$.

Введем новые переменные \mathcal{F}_i , характеризующие ожидаемое количество времени, требуемого до прибытия в пункт назначения грузу с номером i , после окончания горизонта планирования

$$(16) \quad \mathcal{F}_i \stackrel{\text{def}}{=} \tau_{v_i^{\text{отпр.}}, v_i^{\text{приб.}}} + \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} \left(\tau_{v_k^{\text{кон.}}, v_i^{\text{приб.}}} - \tau_{v_k^{\text{нач.}}, v_i^{\text{приб.}}} \right) + \\ + \sum_{j=1}^J \sum_{k: t_k^{\text{кон.}} \geq T_{\text{макс.}}, 1 \leq k \leq K} \delta_{i,j,k} (t_k^{\text{кон.}} - T_{\text{макс.}}), \quad i = \overline{1, I}.$$

Движение грузов должно осуществляться с учетом ожидаемого времени до прибытия в пункт назначения. Например, продолжительное пребывание в промежуточных вершинах в маршруте должно быть возможно, когда подобная стратегия не приведет к тому, что время пребывания груза в транспортной системе будет превышено. В этой связи введем ограничения

$$(17) \quad \mathcal{F}_i + \sum_{j=1}^J \sum_{k: t_k^{\text{кон.}} < T_{\text{макс.}}, v_k^{\text{кон.}} = v_i^{\text{приб.}}, 1 \leq k \leq K} \delta_{i,j,k} (t_k^{\text{кон.}} - T_{\text{макс.}}) + \\ + \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} (T_{\text{макс.}} - t_k^{\text{нач.}}) \leq T_i + \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} \right) \eta_{v_i^{\text{отпр.}}, v_i^{\text{приб.}}}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Если требуется жесткое задание набора вершин, пересекаемых грузом, можно добавить соответствующие ограничения из [15].

Теперь введем переменные ω_i , характеризующие, прибыл ли груз с номером i в пункт назначения в рамках горизонта планирования: 0 — прибыл, 1 — не прибыл

$$(18) \quad \omega_i = 1 - \sum_{j=1}^J \sum_{k: t_k^{\text{кон.}} < T_{\text{макс.}}, v_k^{\text{кон.}} = v_i^{\text{приб.}}, 1 \leq k \leq K} \delta_{i,j,k}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Прокомментируем введенные ограничения. Рассмотрим груз с номером $i^* \in \{1, \dots, I\}$.

Рассмотрим (13)–(15). Для этого вначале отметим, что возможны несколько случаев (выберем $j^* \in \{1, \dots, J\}$):

- 1) при движении груза с номером i^* этап с номером j^* не задействован;
- 2) при движении груза с номером i^* этап с номером j^* задействован, груз не прибыл в пункт назначения, этап с номером $j^* + 1$ не задействован;
- 3) при движении груза с номером i^* этап с номером j^* задействован, груз не прибыл в пункт назначения, этап с номером $j^* + 1$ задействован;
- 4) при движении груза с номером i^* этап с номером j^* задействован, по окончании этапа груз прибыл в рамках горизонта планирования или прибудет после окончания горизонта планирования в пункт назначения.

В случае 1) $\sum_{k=1}^K \delta_{i^*, j^*, k} = 0$. В виду ограничений (1)

$$\sum_{k: 1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} \neq v_{i^*}^{\text{приб.}}} \delta_{i^*, j^*, k} = \sum_{k: 1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} = v_{i^*}^{\text{приб.}}} \delta_{i^*, j^*, k} = 0,$$

а из-за ограничений (2), (3) $\sum_{k=1}^K \delta_{i^*, j^*+1, k} = 0$. Поэтому (13), (14) выполняются.

Величина \hat{T}_{i^*, j^*} окажется равной нулю.

В случае 2)

$$\sum_{k: 1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} \neq v_{i^*}^{\text{приб.}}} \delta_{i^*, j^*, k} = 1, \quad \sum_{k: 1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} = v_{i^*}^{\text{приб.}}} \delta_{i^*, j^*, k} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^K \delta_{i^*, j^*+1, k} = 0.$$

Ограничение (14) выполняется, так как его левая часть окажется равной нулю, а правая — двум. Если груз, не прибыв в пункт назначения, находится в момент окончания горизонта планирования в движении, то ограничение (13)

выполнится автоматически. Это связано с тем, что время окончания транспортировки будет не меньше T_{\max} . При этом величина \hat{T}_{i^*,j^*} окажется равной нулю, что логично, так как остановка, если таковая будет, в j^* -й промежуточной по порядку следования вершине произойдет уже после горизонта планирования. Если же груз, не прибыв в пункт назначения, стоит в момент окончания горизонта планирования, то ограничение (13) будет гарантировать допустимость стоянки по крайней мере до конца горизонта планирования. Переменная \hat{T}_{i^*,j^*} будет равна времени стоянки в j^* -й промежуточной по порядку следования вершине в рамках горизонта планирования.

В случае 3)

$$\sum_{k:1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} \neq v_{i^*}^{\text{приб.}}} \delta_{i^*,j^*,k} = 1, \quad \sum_{k:1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} = v_{i^*}^{\text{приб.}}} \delta_{i^*,j^*,k} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^K \delta_{i^*,j^*+1,k} = 1.$$

Ограничение (14) выполняется, так как его левая и правая часть окажется равной нулю. Ограничение (13) выполнится по определению, так как для всех $i = \overline{1, I}$, $k = \overline{1, K}$ по условию $t_k^{\text{кон.}} + t_{i,k}^{\text{ст. макс.}} \geq 0$. Величина \hat{T}_{i^*,j^*} окажется равной разности между временем отправления и временем прибытия в j^* -ю промежуточную по порядку следования вершину.

В случае 4)

$$\sum_{k:1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} \neq v_{i^*}^{\text{приб.}}} \delta_{i^*,j^*,k} = 0, \quad \sum_{k:1 \leq k \leq K, v_k^{\text{кон.}} = v_{i^*}^{\text{приб.}}} \delta_{i^*,j^*,k} = 1.$$

Ввиду ограничений (2), (3) $\sum_{k=1}^K \delta_{i^*,j^*+1,k}$ может быть равна либо нулю, либо единице. Ограничения (13) выполняются в любом из указанных вариантов.

Если $\sum_{k=1}^K \delta_{i^*,j^*+1,k}$ равна нулю, то ограничение (14) выполняется. Величина \hat{T}_{i^*,j^*} будет равна нулю, что соответствует смыслу введенной переменной, так как у груза будет только $j^* - 1$ промежуточных вершин. Если же $\sum_{k=1}^K \delta_{i^*,j^*+1,k}$ равна единице, то ограничение (14) не выполняется. Значит, такой вариант недопустим. Это соответствует здравому смыслу, так как в случае прибытия в пункт назначения, не имеет смысла перевозить груз дальше.

Теперь обсудим (16)–(18). Если груз с номером i^* не отправляется из пункта отправления, то $\sum_{k=1}^K \delta_{i^*,1,k} = 0$. Как следствие, из ограничений (2),

$$(3) \sum_{k=1}^K \delta_{i^*,j,k} = 0, \quad j = \overline{2, J}. \text{ Значит, } \mathcal{F}_{i^*} \text{ будет равна ожидаемому времени в}$$

пути из вершины отправления в вершину назначения. Если будет использовано ровно $\bar{j} \in \{1, \dots, J\}$ транспортировок, то суммирование первой и второй компоненты \mathcal{F}_{i^*} даст $\tau_{v_{k^*}^{\text{кон.}}, v_{i^*}^{\text{приб.}}}$, где k^* — номер \bar{j} -й по порядку использования транспортировки груза с номером i^* . Иными словами, получится ожидаемое количество времени, которое требуется грузу для прибытия в вершину с индексом $v_{i^*}^{\text{приб.}}$ из вершины с индексом $v_{k^*}^{\text{кон.}}$. Если груз по окончании горизонта планирования находится в движении, то третья компонента \mathcal{F}_{i^*} окажется ненулевой и будет характеризовать время, которое потребуется грузу до прибытия в вершину с индексом $v_{k^*}^{\text{кон.}}$ после окончания горизонта планирования.

Если груз не отправлен в рамках горизонта планирования, то вторая и третья компоненты левой части неравенства (17) равны нулю. В этом случае требуется, чтобы ожидаемое время прибытия из вершины отправления в вершину назначения было не больше допустимого времени нахождения на графе суммарно с ожидаемым временем от момента готовности до момента отправления. Если груз отправлен и доставлен в рамках горизонта планирования, то $\mathcal{F}_{i^*} = 0$, а суммирование второй и третьей компоненты левой части неравенства даст время между окончанием движения груза и началом движения груза. Если груз отправлен, но не доставлен в рамках горизонта планирования, то вторая компонента неравенства (17) равна нулю, а \mathcal{F}_{i^*} будет складываться суммарно с количеством времени, которое груз уже находится на сети после отправления из вершины отправления.

Если на каком-то этапе груз с номером i^* прибыл в вершину назначения, причем этап был закончен до окончания горизонта планирования, тогда $\omega_i^* = 1$. В противном случае окажется $\omega_i^* = 0$.

Необходимость не превысить максимально допустимый вес при транспортировке с номером k приводит к ограничениям

$$(19) \quad \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J+1} \delta_{i,j,k} w_i \leq W_k, \quad k = \overline{1, K}.$$

Отметим, что ограничения (1)–(19) могут оказаться несовместными, а значит, множество допустимых стратегий, задаваемое этими ограничениями, пусто. Такой случай может возникнуть, например, когда транспортировки между вершинами слишком медленные. Для того чтобы гарантировать совместность ограничений (1)–(19), можно потребовать выполнение условий

$$(20) \quad t_i^{\text{отпр.}} + d_i \geq T_{\text{макс.}}, \quad \tau_{v_i^{\text{отпр.}}, v_i^{\text{приб.}}} \leq T_i + \eta_{v_i^{\text{отпр.}}, v_i^{\text{приб.}}}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Если эти условия выполнены, то каждый груз имеет возможность остаться в вершине отправления в рамках горизонта планирования. Однако даже если условия (20) нарушаются, это не означает, что ограничения (1)–(19) обязательно несовместны.

4. Критерий для формирования плана грузоперевозок

Сформулируем критерий для поиска оптимального расписания

$$\begin{aligned}
 & c_1 \underbrace{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} (\min\{t_k^{\text{кон.}}, T_{\text{макс.}}\} - t_k^{\text{нач.}})}_{\text{суммарное время в движении в рамках горизонта планирования}} + c_2 \underbrace{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J+1} \hat{T}_{i,j}}_{\text{суммарное время стоянки в промежуточных вершинах}} + \\
 & + c_3 \underbrace{\sum_{i=1}^I \left(\sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} t_k^{\text{нач.}} + \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} \right) T_{\text{макс.}} - t_i^{\text{отпр.}} \right)}_{\text{суммарное время стоянки в вершинах отправления с момента готовности к отправлению}} + \\
 & + c_4 \underbrace{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} w_i C_k}_{\text{суммарная стоимость транспортировок}} + c_5 \underbrace{\sum_{i=1}^I \mathcal{F}_i}_{\text{суммарное ожидаемое время до доставки}} + c_6 \underbrace{\sum_{i=1}^I \omega_i}_{\text{суммарное количество недоставленных грузов в рамках горизонта планирования}} \rightarrow \\
 & \rightarrow \min_{\delta_{i,j,k}, \hat{T}_{i,j} \geq 0, \hat{T}_{i,J+1} = 0, \mathcal{F}_i \geq 0, \omega_i \in \{0,1\}, i=\overline{1,I}, j=\overline{1,J+1}, k=\overline{1,K}},
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

при ограничениях (1)–(19), где $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ — некоторые неотрицательные числа. Отметим, что, с одной стороны, требование неотрицательности переменных $\mathcal{F}_i, \hat{T}_{i,j}$ избыточно, так как эти переменные неотрицательны по определению, $i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}$. Более того, ввиду ограничений (16), (17) сами эти переменные избыточны — их можно заменить на другие участвующие в оптимизации переменные, причем при замене получится задача целочисленного линейного программирования. Однако, с другой стороны, непосредственное наличие этих переменных и ограничение на их неотрицательность позволяет в некоторых задачах ускорить поиск оптимального решения. И, кроме того, использование этих переменных позволяет сделать запись критериальной функции лаконичнее и понятнее.

Под r -й компонентой критерия будем понимать множитель числа c_r в (21), $r = \overline{1, 6}$.

При различных значениях чисел $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ получается целый спектр различных прикладных задач. При $c_1 = \dots = c_5 = 0, c_6 = 1$ имеем задачу по минимизации количества недоставленных в рамках горизонта планирования грузов, или, иными словами, задачу о максимизации количества перевезенных грузов. При $c_1 = c_2 = c_3 = c_5 = c_6 = 0, c_4 = 1$ получаем задачу по минимизации стоимости перевозок. При $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_6 = 0, c_5 = 1$

имеем задачу по минимизации суммарного ожидаемого времени до прибытия грузов в соответствующие пункты назначения. При $c_1 = c_2 = c_3 = c_5 = 1$, $c_4 = c_6 = 0$ получаем задачу по минимизации суммарного прошедшего и ожидаемого оставшегося времени в пути. При $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, $c_4 = c_5 = c_6 = 0$ имеем задачу по минимизации суммарного количества времени на стоянках и в движении в рамках горизонта планирования. Возможно использование и других комбинаций чисел c_1, \dots, c_6 [15]. Следует отметить, что не все компоненты критерия имеют одинаковую размерность и порядок значений: первая, вторая, третья, пятая компоненты измеряются в минутах, четвертая — в единицах стоимости, шестая — в штуках. Для учета разной природы компонент критерия можно, например, дополнительно вводить ограничения на их значения. Например, количество перевезенных грузов должно быть не меньше 10. Некоторые ограничения возникают из логики конкретной задачи. К примеру, бюджетное ограничение — суммарная стоимость перевозок не должна превышать имеющийся бюджет перевозок. Его можно ввести дополнительно.

Следует отметить, что представленная математическая модель движения прежде всего предназначена для задачи перевозки тех или иных грузов (посылок, контейнеров) различными транспортными средствами (самолетами, поездами и др.). А именно представленная модель позволяет «привязать» тот или иной груз к тому или иному транспортному средству и назначить время перевозки грузу. При этом представленную модель можно использовать и для формирования расписания движения самих транспортных средств. Так, например, при помощи предложенной модели можно формировать расписание движения грузовых поездов: в терминологии настоящей статьи грузом станет грузовой поезд, транспортным средством — локомотив, а понятие транспортировка будет синонимично «поднитке». Масса поезда будет полагаться единице, как и максимальный вес при той или иной транспортировке. При этом предложенную модель можно использовать и для других отраслей транспорта, добавляя при необходимости те или иные ограничения из конкретной предметной области. Отсюда резюмируем, что предложенная математическая модель движения по графу и критерий формируют универсальную постановку задачи грузоперевозок.

5. Алгоритм для нахождения начального/приближенного решения

Ввиду возможной высокой размерности задачи (21) при ограничениях (1)–(19) предложим следующий алгоритм для нахождения начального/приближенного решения поставленной задачи. Алгоритм основывается на последовательном решении задачи (21) с ограничением (1)–(19) для некоторого набора грузов.

1. Множество номеров грузов расщепляется на S непересекающихся подмножеств \mathcal{I}_s , т.е. $\{i \in \mathbb{N} : i \leq I\} = \bigcup_{s=1}^S \mathcal{I}_s$, причем $\forall s_1 \in \overline{1, S}, s_2 \in \overline{1, S} : s_1 \neq s_2$
 $\mathcal{I}_{s_1} \cap \mathcal{I}_{s_2} = \emptyset$.

2. Инициализируется параметр $s = 1$.

3. Решается задача

$$\begin{aligned}
 & c_1 \sum_{i \in \mathcal{I}_s} \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} (\min\{t_k^{\text{коп.}}, T_{\text{макс.}}\} - t_k^{\text{нач.}}) + c_2 \sum_{i \in \mathcal{I}_s} \sum_{j=1}^{J+1} \hat{T}_{i,j} + \\
 & + c_3 \sum_{i \in \mathcal{I}_s} \left(\sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} t_k^{\text{нач.}} + \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k} \right) T_{\text{макс.}} - t_i^{\text{отпр.}} \right) + \\
 & + c_4 \sum_{i \in \mathcal{I}_s} \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k=1}^K \delta_{i,j,k} w_i C_k + c_5 \sum_{i \in \mathcal{I}_s} \mathcal{F}_i + \\
 & + c_6 \sum_{i \in \mathcal{I}_s} \omega_i \rightarrow \min_{\delta_{i,j,k}, \hat{T}_{i,j} \geq 0, \hat{T}_{i,J+1} = 0, \mathcal{F}_i \geq 0, \omega_i \in \{0,1\}, i \in \mathcal{I}_s, j = \overline{1, J+1}, k = \overline{1, K}}
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

при ограничениях (1)–(18) и ограничениях

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_s} \sum_{j=1}^{J+1} \delta_{i,j,k} w_i \leq W_k - \sum_{\substack{s=1 \\ i \in \bigcup_{p=1}^{s-1} \mathcal{I}_p}} \sum_{j=1}^{J+1} \tilde{\delta}_{i,j,k} w_i, \quad k = \overline{1, K}.$$

Если решение этой задачи существует, то задаются величины $\tilde{\delta}_{i,j,k}$ равные единице, если груз с номером i на этапе с номером j использует транспортную с номером k , и нулю иначе, $i \in \mathcal{I}_s$, $j = \overline{1, J+1}$, $k = \overline{1, K}$. Происходит переход к шагу 4. Если решение задачи (22) при ограничениях (1)–(18), (23) не существует, то процедура поиска приближенного решения завершена неуспешно.

4. Если $s < S$, то s увеличивается на единицу и происходит переход к шагу 3. Если $s = S$, то процедура поиска приближенного решения завершена успешно.

Если $S = 1$, то предложенный алгоритм позволит найти точное решение, поскольку в этом случае решается непосредственно задача (21) при ограничениях (1)–(19). Если $S > 1$, то гарантировать оптимальность в задаче (21) при ограничениях (1)–(19) полученного при помощи алгоритма решения нельзя. В некоторых случаях может оказаться, что решение непосредственно задачи (21) при ограничениях (1)–(19) находится быстрее, чем приближенное решение при помощи алгоритма. Однако, как будет показано в дальнейшем в примере, использование алгоритма в ряде случаев позволяет быстро найти допустимое решение в задаче (21) при ограничениях (1)–(19) с приемлемым значением критерия (порядка 5–10% увеличения значения критерия относительно критерия на оптимальном решении).

В примере также будет продемонстрирован случай, когда представленный выше алгоритм завершается неуспешно, т.е. допустимое решение в задаче (21)

при ограничениях (1)–(19) при работе алгоритма не было найдено. В общем случае неуспешное завершение алгоритма может быть вызвано как исходной несовместностью ограничений (1)–(19), так и спецификой построения приближенного решения, когда расписание ищется итерационно для групп грузов. Для гарантированно успешного завершения алгоритма можно потребовать выполнения условий (20). Другим способом получения решения по отправке хотя бы какого-то количества грузов является использование другого алгоритма, отличающегося от представленного выше тем, что на шаге 3 при отсутствии решения алгоритм не прекращает свою работу. Опишем два способа построения такого алгоритма. В первом способе при отсутствии решения на шаге 3 происходит вычеркивание грузов, которым не удалось построить расписание, из списка перевозок, т.е. происходит отказ в перевозке для данных грузов. Подобный подход использовался, например, в [4, 7]. Вторым способом является использование величин T_i , d_i в задаче (22) при ограничениях (1)–(18), (23) не в качестве фиксированных, а в качестве переменных оптимизации, $i \in \mathcal{I}_s$. В этом случае получится как минимум одно решение — остаться в вершине отправления в рамках горизонта планирования. Отметим, что предложенные модификации, вообще говоря, требуют изменения начальных данных, поэтому в дальнейшем в примере они не используются.

Аналогично [15, 16] предложим несколько вариантов предложенного алгоритма. *Алгоритмом по направлению* (алгоритмом 1) будем называть такой алгоритм, в котором на 1-м шаге дробление происходит по принципу нахождения во множествах \mathcal{I}_s номеров грузов, у которых одинаковые вершины отправления, а также одинаковые вершины назначения, $s = \overline{1, S}$. Чем меньше элементов во множестве, тем меньше номер этого множества. *Алгоритмом по наименьшему/наибольшему времени* (алгоритмом 2.1/алгоритмом 2.2) будем называть такой алгоритм, при котором на 1-м шаге дробление происходит по возрастанию/убыванию времени готовности грузов к отправлению. А именно множество \mathcal{I}_1 будет состоять из номера груза с самым ранним/поздним временем готовности к отправлению, \mathcal{I}_2 — со вторым/предпоследним и так далее.

6. Пример

Рассмотрим задачу формирования грузовых перевозок на участке железнодорожной сети из [15, 16]. Ввиду большого количества исходных данных для лаконичности изложения приведем лишь значения параметров из настоящей постановки задачи, которые не использовались при построении модели движения по графу в [15, 16]: $C_k = 2$, $W_k = 1$, $w_i = 1$, $i = \overline{1, 62}$, $k = \overline{1, 1249}$. Значения величин τ_{m_1, m_2} зададим как минимальное время в пути до вершины с индексом m_2 при отправлении из вершины m_1 через 360 мин от начала отсчета (по сути в 6 утра), $m_1, m_2 = \overline{1, 42}$. Если допустимых транспортировок не оказывается, то τ_{m_1, m_2} полагаем равной 4000, $m_1, m_2 = \overline{1, 42}$. Для простоты будем предполагать, что $\eta_{m_1, m_2} = 0$, $m_1, m_2 = \overline{1, 42}$. В [15, 16] вводились

только первые 3 компоненты критерия, поэтому для сравнимости результатов в настоящей постановке задачи и [15, 16] положим $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, $c_4 = c_5 = c_6 = 0$. При таком задании чисел c_1, \dots, c_6 критериальная функция в (21) и в [15, 16] совпадают. Отметим, что хотя формально величины W_k , w_i , $i = \overline{1, 62}$, $k = \overline{1, 1249}$ в [15, 16] не использовались, при приведенных выше значениях этих величин ограничения на максимальный вес (19) идентичны ограничениям на максимальное количество поездов, использующих одну «поднитку», из [15, 16]. А при заданных значениях чисел c_1, \dots, c_6 величины C_k никак в оптимизации не участвуют, $k = \overline{1, 1249}$. Таким образом, главным отличием настоящей постановки задачи от постановки в [15, 16] является то, что прибытие в пункты назначения в [15, 16] должно случиться обязательно в рамках горизонта планирования, в то время как в настоящей постановке это может и не произойти. Условия (20) нарушаются.

По итогам численного эксперимента оказалось, что алгоритмы 1 и 2.1 завершились успешно, алгоритм 2.2 — нет. Оптимальное значение критериальной функции в (21) на решении, полученном при помощи алгоритма 1/алгоритма 2.1, составило 26 951/27 790. Значение критерия в [16] на решениях по алгоритмам 1 и 2 из этой же работы, которые аналогичны алгоритмам 1 и 2.1 соответственно — 26 951 и 27 755. Решение и по алгоритму 1, и по алгоритму 2.1 таково, что все поезда прибывают в соответствующие пункты назначения в рамках горизонта планирования, хотя, повторимся, это и не было обязательным требованием. Маршруты для поездов по алгоритмам из настоящей статьи и по их аналогам из [16] совпали частично. Некоторое ухудшение значения критерия в (21) на решении по алгоритму 2.1 относительно значения критерия в [16] на решении по алгоритму 2 вызвано тем, что в настоящей постановке задачи в каждой вершине, в которой находится груз, производится контроль времени до прибытия в вершину назначения. Однако более важной причиной является то, что потенциально в задаче (22) при ограничениях (1)–(18), (23) оптимум не единственный. При этом от выбора конкретного решения на s -м шаге зависит движение грузов, для которых расписание будет находиться далее — на $s + 1$, $s + 2$, \dots , S шагах любого варианта алгоритма. Таким образом, следует проводить дополнительную оптимизацию среди оптимальных решений в задаче (22) при ограничениях (1)–(18), (23). Однако формализация критерия такой оптимизации нетривиальна и представляет отдельный научный интерес.

Заметим, что если рассмотреть даже не все грузы, а их часть, например, первые 15 грузов (т.е. грузы с номерами 1, 2, \dots , 15) из списка перевозок, то оптимальное решение в задаче (21) при ограничениях (1)–(19) за 2 ч счета не находится. В этой связи для данного примера сделать вывод о точности полученного приближенного решения, к сожалению, невозможно.

Время поиска решения по алгоритму 1/алгоритму 2.1 составило 45,5/9,5 мин. Следует отметить деградацию времени поиска решения по алгоритму 1 в сравнении с [15, 16]. Это вызвано тем, что в рамках поставленной задачи появились дополнительные возможности: не отправляться из пункта

назначения, не прибыть в пункт назначения по окончании горизонта планирования. При этом для алгоритма 2.1 расход времени увеличился несущественно.

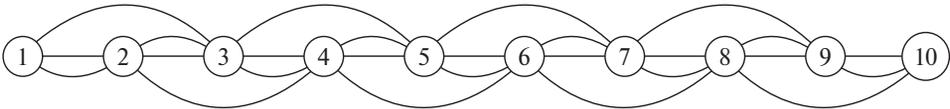
Проанализируем теперь время работы алгоритма 2.1 в зависимости от количества грузов, планируемых к перевозке. Выберем 5, 10, 15, ..., 55, 60 первых грузов из списка перевозок и вычислим для каждого случая время работы алгоритма 2.1 в минутах.

Таблица 1. Время работы алгоритма 2.1 в минутах

Количество грузов к перевозке	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Время работы алгоритма	0,71	1,51	2,65	3,13	4,16	4,8	6,97	6,73	7,28	8	8,5	9,1

Как следует из представленных результатов, увеличение количества грузов не обязательно ведет к увеличению времени счета. Этот факт вызван тем, что добавление каждого нового груза к списку перевозок запускает цепную реакцию и приводит к полному пересчету расписания ввиду того, что согласно алгоритму 2.1 расписание в первую очередь ищется для груза с минимальным временем готовности к отправлению, а не для груза с минимальным номером. Исходный же список перевозок не является отсортированным по возрастанию времени готовности к отправлению. При этом добавление каждых 5 новых грузов для расчета, как правило, приводит к увеличению времени работы алгоритма на 0,5–1,5 мин.

Рассмотрим другой пример, который является модельным. Пусть транспортная сеть имеет следующий вид



Мультиграф G транспортной сети.

Нумерация путей на рисунке опущена. Если две смежные вершины соединены двумя ребрами, т.е. двумя путями, то ребро, представляемое прямой линией, имеет номер 1, в ином случае — 2.

Положим $T_{\text{макс.}} = 1440$ мин. Выбран некоторый момент отсчета. Начиная с момента отсчета:

- каждые 60 мин в вершине с индексом 1 появляется по 10 грузов одинакового веса в 1 единицу, эти грузы требуется перевезти в вершину с индексом 10;
- каждые 60 мин из вершины с индексом m в вершину с индексом $m + 1$ по пути номер 2 отправляется некоторое транспортное средство, которое может перевезти не более 5 единиц веса, стоимость транспортировки

составляет 3 условные единицы за единицу веса, время транспортировки — 120 мин, $m = \overline{1,9}$.

- каждые 60 мин из вершины с индексом m в вершину с индексом $m + 1$ по пути номер 1 отправляется некоторое транспортное средство, которое может перевезти не более 5 единиц веса, стоимость транспортировки составляет 9 условных единиц за единицу веса, время транспортировки — 60 мин, $m = \overline{1,9}$.
- каждые 60 мин из вершины с индексом m в вершину с индексом $m + 2$ отправляется некоторое транспортное средство, которое может перевезти не более 5 единиц веса, стоимость транспортировки составляет 81 условных единиц за единицу веса, время транспортировки — 60 мин, $m = \overline{1,8}$.

Именно такой выбор стоимостей транспортировок был вызван тем, что более быстрая транспортировка по одному и тому же направлению должна стоить дороже. Максимальное время каждого груза в пути с момента начала движения — 1 сут.

Положим $\tau_{m_1, m_2} = 60|m_2 - m_1|$, $m_1 = \overline{1,10}$, $m_2 = \overline{1,10}$. Такой выбор вызван тем, что время в пути между смежными вершинами мультиграфа G может составлять 60 мин, $m_1, m_2 = \overline{1,10}$. Предположим, что $\eta_{m_1, m_2} = 0$, $m_1, m_2 = \overline{1,10}$.

Учитывая вышесказанное, получается $I = 240$, $K = 624$. Положим $d_i = 180$, $t_{i,k}^{\text{ст. мин.}} = 0$ и $t_{i,k}^{\text{ст. макс.}} = 120$, $i = \overline{1, I}$, $k = \overline{1, K}$. Поскольку максимальное количество транспортировок, которые нужны при перемещении из вершины с индексом 1 в вершину с индексом 10, равно девяти, то положим $J = 9$. Условия (20) не выполняются.

Проиллюстрируем работу алгоритмов 1, 2.1 и 2.2 при различных значениях чисел $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$. Предварительно отметим, что алгоритм 1 продуцирует точное решение, так как в исследуемой задаче у всех грузов совпадают вершины отправления, а также вершины назначения.

Жирным шрифтом в табл. 2 выделены значения критериальной функции в (21) на том или ином решении.

Как следует из табл. 2, иногда поиск точного решения занимает примерно столько же времени, сколько и поиск приближенного. Но в некоторых случаях ($c_1 = c_2 = c_3 = c_5 = c_6 = 0$, $c_4 = 1$; $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_6 = 0$, $c_5 = 1$; $c_1 = \dots = c_5 = 0$, $c_6 = 1$) приближенное решение находится в разы быстрее. При этом для любого из рассмотренных вариантов чисел $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ поиск приближенного решения стабильно занимает 6–7 мин. Как правило, алгоритм 2.2 точнее алгоритма 2.1. Погрешность наилучшего из приближенных решений составляет порядка 5–10% относительно точного. При задаче минимизации стоимости перевозок велико время перевозок, так как дешевые перевозки длительны по времени. И, напротив, в задаче максимизации числа доставленных грузов растет стоимость перевозок. Задача по минимизации ожидаемого оставшегося времени до прибытия в пункты назначения ожидае-

Таблица 2. Результаты численного эксперимента

Решение	Параметры критерия						Компоненты критерия						Время поиска решения, мин
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	1	2	3	4	5	6	
Точное							61 440	2460	2100	65 151	22 140	50	6,75
Алгоритм 2.1	1	1	1	0	0	0	64 200	6000	6600	54 510	29 700	60	7
Алгоритм 2.2							63 900	1800	6000	57 990	27 300	55	6,5
Точное							66 000	0	0	73 260	10 800	50	6,85
Алгоритм 2.1	1	1	1	0	1	0	71 100	4800	2100	63 645	15 300	65	7
Алгоритм 2.2							71 400	0	0	67 365	11 700	55	6,5
Точное							82 740	62 760	33 060	3615	83 160	235	183,5
Алгоритм 2.1	0	0	0	1	0	0	76 200	66 300	37 500	3855	84 600	240	6,5
Алгоритм 2.2							116 700	34 500	9300	5955	60 000	190	7
Точное							86 940	15 180	1620	60 165	10 800	55	73,15
Алгоритм 2.1	0	0	0	0	1	0	87 600	42 600	12 600	47 355	23 700	130	6
Алгоритм 2.2							81 300	17 100	0	60 105	11 700	60	6,5
Точное							80 460	13 860	5700	49 209	25 140	50	250,3
Алгоритм 2.1	0	0	0	0	0	1	73 500	41 700	30 000	31 200	52 500	125	5,65
Алгоритм 2.2							73 800	18 000	6300	49 815	27 900	55	6,25

мо приводит к тому, что большинство грузов (для решений по алгоритмам 1 и 2.2) прибывает в вершины назначения в рамках горизонта планирования.

Отдельно следует отметить, что время работы алгоритмов существенно зависит не только от размера матрицы ограничений, но и от ее содержимого. Так, например, иногда некоторый набор ограничений может быть вычеркнут из матрицы ограничений в силу их избыточности. В таком случае размерность задачи снизится. Однако ввиду большого количества входных данных априорно высказать предположение о количестве таких исключений и (не)большом времени счета алгоритмов представляется затруднительным.

Все численные эксперименты проводились при помощи математического пакета ILOG CPLEX 12.5.1 на персональном компьютере (Intel Core i5 4690, 3.5 GHz, 8 GB DDR3 RAM).

7. Заключение

В настоящей работе была сформулирована задача формирования расписания в общей постановке. С этой целью была предложена новая математическая модель движения по мультиграфу транспортной сети, задающаяся в виде системы линейных ограничений. Был предложен универсальный критерий оптимизации, позволяющий при различных значениях параметров получать важные прикладные задачи, например, задачу минимизации стоимости перевозок или же задачу максимизации количества доставленных в рамках

горизонта планирования грузов. В работе были предложены алгоритмы для поиска приближенного решения в поставленной задаче. Основной идеей этих алгоритмов является декомпозиция задачи путем поиска расписания последовательно для некоторых групп грузов. Использование такой декомпозиции не всегда приводит к точному или хотя бы допустимому решению. Однако благодаря декомпозиции в ряде задач с порядка 1–1,5 млн бинарных переменных оказалось возможным за относительно небольшое время находить допустимое решение с точностью в некоторых случаях 5–10%. Отличительной чертой предложенной модели движения по мультиграфу транспортной сети является то, что допускается прибытие грузов и после горизонта планирования, если прогнозируется, что доставка будет выполнена вовремя. Данное обстоятельство открывает путь к еще одной декомпозиции — по дроблению горизонта планирования. А именно горизонт планирования можно расщепить на несколько частей и искать расписание движения грузов последовательно на каждой части горизонта планирования. Такая декомпозиция должна позволить формирование расписания для еще большего количества грузов/транспортных единиц при фиксированном времени счета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mor A., Speranza M.G.* Vehicle routing problems over time: a survey // *Quart. J. Oper. Res.* 2020. V. 18. No. 2. P. 129–149.
2. *Vidal T., Crainic T.G., et. al.* A unified solution framework for multi-attribute vehicle routing problems // *Eur. J. Oper. Res.* 2014. V. 234. No. 3. P. 658–673.
3. *Boctor F.F., Laporte G., Renaud J.* Heuristics for the traveling purchaser problem // *Comput. Oper. Res.* 2003. V. 30. No. 4. P. 491–504.
4. *Cacchiani V., Caprara A., Toth P.* A column generation approach to train timetabling on a corridor // *4OR.* 2008. V. 6. No. 2. P. 125–142.
5. *Gao Yu., Kroon L., et. al.* Three-stage optimization method for the problem of scheduling additional trains on a high-speed rail corridor // *Omega.* 2018. V. 80. P. 175–191.
6. *Mu S., Dessouky M.* Scheduling freight trains traveling on complex networks // *Transport. Res. Part B: Methodologic.* 2011. V. 45. No. 7. P. 1103–1123.
7. *Forsgren M., Aronsson M., Gestrelus S.* Maintaining tracks and traffic flow at the same time // *J. Rail Transport Planning Management.* 2013. V. 3. No. 3. P. 111–123.
8. *Sama M., D’Ariano A., et. al.* A variable neighbourhood search for fast train scheduling and routing during disturbed railway traffic situations // *Comput. Oper. Res.* 2017. V. 78. P. 480–499.
9. *Meng L., Zhou X.* Simultaneous train rerouting and rescheduling on an N-track network: A model reformulation with network-based cumulative flow variables // *Transport. Res. Part B: Methodologic.* 2014. V. 67. P. 208–234.
10. *Lazarev A.A., Musatova E.G.* The problem of trains formation and scheduling: Integer statements // *Autom. Remote Control.* 2013. V. 74. No. 12. P. 2064–2068.
11. *Архипов Д.И., Лазарев А.А.* Минимизация максимального взвешенного временного смещения доставки заказов между двумя железнодорожными станциями // *АиТ.* 2016. № 12. С. 3–25.

Arkhipov D.I., Lazarev A.A. Minimizing the maximal weighted lateness of delivering orders between two railroad stations // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 12. P. 2091–2109.

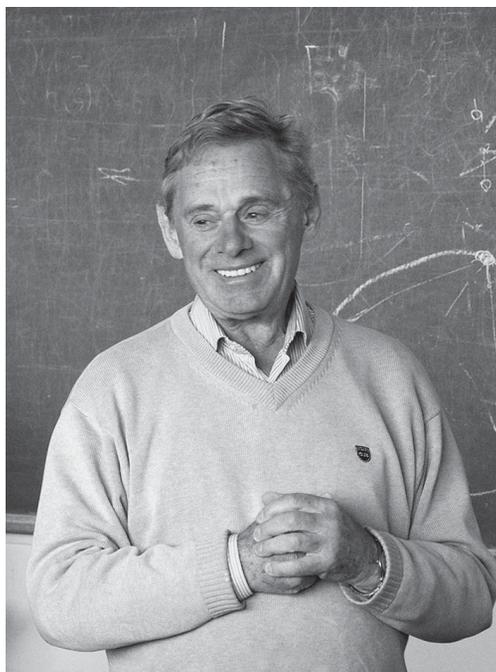
12. *Буянов М.В., Иванов С.В. и др.* Развитие математической модели управления грузоперевозками на участке железнодорожной сети с учетом случайных факторов // Информатика и ее применения. 2017. Т. 11. № 4. С. 85–93.
13. *Буянов М.В., Наумов А.В.* Оптимизация функционирования подвижного состава при организации грузовых перевозок на участке железнодорожной сети // АиТ. 2018. № 9. С. 143–158.
Buyanov M.V., Naumov A.V. Optimizing the Operation of Rolling Stock in Organizing Cargo Transportation at a Railway Network Segment // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 9. P. 1661–1672.
14. *Гайнанов Д.Н., Игнатов А.Н. и др.* О задаче назначения “технологического окна” на участках железнодорожной сети // АиТ. 2020. № 6. С. 3–16.
Gainanov D.N., Ignatov A.N., et al. On track procession assignment problem at the railway network sections // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 6. P. 967–977.
15. *Ignatov A.N.* On the scheduling problem of cargo transportation on a railway network segment and algorithms for its solution // Bull. South Ural State Univer. Ser. Mat. Model. Progr. 2021. V. 14. No. 3. P. 61–76.
16. *Босов А.В., Игнатов А.Н., Наумов А.В.* Алгоритмы приближенного решения задачи назначения «технологического окна» на участках железнодорожной сети // Информатика и ее применения. 2021. Т. 15. № 4. С. 3–11.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 29.03.2022

После доработки 25.11.2022

Принята к публикации 30.11.2022



**Борис Теодорович Поляк
(1935–2023)**

DOI: 10.31857/S0005231023040104, **EDN:** QINFVT

3 февраля 2023 г. после тяжелой болезни на 88-м году ушел из жизни доктор технических наук Борис Теодорович Поляк — прекрасный человек, выдающийся ученый, теплый друг многим из нас, мудрый наставник, воспитавший целые поколения ученых.

Борис Теодорович родился 4 мая 1935 г. в Москве, где и прожил всю свою жизнь. В 1958 г. он окончил Московский институт стали, а в 1963 г. — аспирантуру механико-математического факультета МГУ. В том же году защитил кандидатскую диссертацию, посвященную изучению методов типа градиентного спуска в абстрактных функциональных пространствах, далее работал в Вычислительном центре МГУ, а с 1971 г. и до последних дней — в Институте проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН в лаборатории № 7 адаптивных и робастных систем им. Я.З. Цыпкина, которую он возглавлял в 1997–2013 гг. В 1978 г. защитил докторскую диссертацию, в которой исследовал вопросы стохастической аппроксимации.

Борис Теодорович — автор пяти монографий (среди которых знаменитая книга «Введение в оптимизацию»), ему принадлежат около 500 статей в журналах и трудах российских и международных конференций; он удостоен премий имени А.А. Андропова (1994) и имени Б.Н. Петрова (2016) Российской академии наук.

Сложно переоценить вклад Бориса Теодоровича Поляка в развитие численных методов оптимизации, теории управления, стохастической оптимизации. На его статьях и книгах воспитано не одно поколение специалистов как в СССР и России, так и за рубежом. Вот лишь некоторые результаты, которые навсегда внесли имя Бориса Теодоровича в историю: частотный критерий робастной устойчивости Цыпкина–Поляка, шаг Поляка в градиентном спуске для задач негладкой оптимизации, метод проекций для поиска общей точки множеств, метод тяжелого шарика (ставший предтечей всех современных ускоренных/моментных методов выпуклой оптимизации), метод сопряженных градиентов Поляка, условие градиентного доминирования Поляка–Лоясевича (одна из самых востребованных сейчас релаксаций понятия сильной выпуклости), оптимальные алгоритмы стохастического агрегирования Поляка–Цыпкина, метод стохастической аппроксимации с усреднением Поляка–Рупшперта–Юдицкого... Этот список можно продолжать еще очень и очень долго.

Научные заслуги и достижения Б.Т. Поляка признаны и международной общественностью: он был почетным членом ИФАК (2006), работал в университетах США, Франции, Италии, Израиля, Мексики, Тайваня, Финляндии и других стран; он обладатель Золотой медали Европейской ассоциации по исследованию операций EURO (2012), лауреат премии Хачияна Общества оптимизации INFORMS (2021).

Борис Теодорович был не только выдающимся ученым, он был прекрасным организатором и руководителем: подготовил более 25 кандидатов и докторов наук, четверть века руководил Общесмоковским постоянным научным семинаром «Теория автоматического управления и оптимизации», по его инициативе и непосредственном активном участии в течение десяти лет проводились ежегодные Всероссийские традиционные молодежные летние школы «Управление, информация и оптимизация». В течение долгих лет он был заместителем главного редактора журнала «Автоматика и телемеханика», и его вклад в благополучие и успешное развитие журнала неоценим.

Борис Теодорович вел очень активный образ жизни и буквально до последних дней участвовал в различных научных мероприятиях, неизменно излучая позитив. Он никогда не стремился к славе, наградам, премиям, вел скромный, но очень достойный образ жизни, был добрым, но при этом принципиальным человеком.

Борис Теодорович обладал самыми замечательными человеческими качествами: широтой души, отзывчивостью, чувством юмора, оптимизмом, общительностью, он всегда был рад поделиться с коллегами научными идеями,

дать добрый совет. Все, кому посчастливилось быть с ним знакомыми, могут сказать о нем только хорошее.

Светлые воспоминания о ярчайшей личности Бориса Теодоровича останутся с нами навсегда, и они будут придавать нам оптимизма, который исповедовал Борис Теодорович всю свою замечательную жизнь.

*Зав. лабораторией № 7 Адаптивных и робастных систем им. Я.З. Цыпкина
Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
доктор физ.-мат. наук Хлебников М.В.,
доктор физ.-мат. наук Назин А.В.,
доктор физ.-мат. наук Щербakov П.С.*

СОДЕРЖАНИЕ

Нелинейные системы

- Александров В.А., Зыбин Е.Ю., Косьянчук В.В., Сельвесюк Н.И., Стефанюк Е.А., Тремба А.А., Хлебников М.В.** Оптимизация высотно-скоростного профиля крейсерского полета воздушного судна в реальной атмосфере 3
- Дубнов Ю.А., Попков А.Ю., Дарховский Б.С.** Экспериментальный анализ алгоритма оценивания гёльдеровой экспоненты на базе концепции ϵ -сложности непрерывных функций 19
- Солнечный Э.М.** Исследование динамических свойств распределенной термомеханической системы с учетом внутренней обратной связи. II 35
- Фуртат И.Б., Гущин П.А., Нгуен Ба Хю.** Управление динамическими системами при ограничениях на входные и выходные сигналы 45

Стохастические системы

- Хлебников М.В.** Сравнение гарантирующего и калмановского фильтров 64

Управление в технических системах

- Булычев Ю.Г., Чепель Е.Н.** Оптимизация кластерно-вариационного метода построения многопозиционной пеленгационной системы для условий априорной неопределенности 96
- Ковалёв С.М., Суханов А.В., Ольгейзер И.А., Корниенко К.И.** Идентификация критических состояний технологических процессов на основе методов предиктивной аналитики 115

Управление в социально-экономических системах

- Гридин В.Н., Голубин А.Ю.** Построение эффективных инвестиционных портфелей с вероятностью падения финального капитала инвестора ниже установленного уровня в качестве меры риска 131

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

- Игнатов А.Н.** Об общей постановке задачи формирования расписания грузоперевозок и способах ее решения 145
- Некролог 166

C O N T E N T S

Nonlinear Systems

- Alexandrov V.A., Zybin E.Yu., Kosyanchuk V.V., Selvesyuk N.I., Stefanyuk E.A., Tremba A.A., Khlebnikov M.V.** Optimization of the Aircraft Cruise Altitude and Speed Profile in the Real Atmosphere 3
- Dubnov Yu.A., Popkov A.Yu., Darkhovsky B.S.** Experimental Analysis of the Holder Exponent Evaluation Echnology Based on Concept of ϵ -Complexity of Continuous Functions 19
- Solnechnyi E.M.** Studying the Dynamic Properties of a Distributed Thermo-mechanical Controlled Plant with Intrinsic Feedback. II. 35
- Furtat I.B., Gushchin P.A., Ba Huy Nguen.** Control of Dynamic Systems under Restrictions on Input and Output Signals 45

Stochastic Systems

- Khlebnikov M.V.** A Comparison of the Guaranteeing and Kalman Filters 64

Control in Technical Systems

- Bulychev Yu.G., Chepel E.N.** Optimization of Cluster Variation Method for Building Multi-Position Direction Finding System under Conditions of Prior Uncertainty 96
- Kovalev S.M., Sukhanov A.V., Olgeyzer I.A., Kornienko K.I.** Identification of Critical States of Technological Processes Based on Predictive Analysis Methods 115

Control in Social Economic Systems

- Gridin V.N., Golubin A.Y.** Design of Efficient Investment Portfolios with a Shortfall Probability as a Measure of Risk 131

Optimization, System Analysis, and Operations Research

- Ignatov A.N.** On the General Formulation of the Scheduling of Cargo Transportation and Ways to Solve It 145
- Obituary 166