

ISSN 0005-2310

А Т АВТОМАТИКА И ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МЕХАНИКА



3

2023

3

2023



Российская Академия Наук

А АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

3

МАРТ

Москва

2023

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Поляк Б.Т., Попков Ю.С.,
Рутковский В.Ю., Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескерев Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М.,
Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф.,
Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П.,
Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,
Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М.,
Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А.,
Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталеv М.М., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ООО «Объединённая редакция»

© 2023 г. А.А. ГАЛЯЕВ, чл.-корр. РАН (galaev@ipu.ru),
А.И. МЕДВЕДЕВ (medvedev.ai18@physics.msu.ru),
И.А. НАСОНОВ (nasonov.ia18@physics.msu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

НЕЙРОСЕТЕВОЙ АЛГОРИТМ ПЕРЕХВАТА МАШИНОЙ ДУБИНСА ЦЕЛЕЙ, ДВИЖУЩИХСЯ ПО ИЗВЕСТНЫМ ТРАЕКТОРИЯМ¹

Задача перехвата движущейся по прямолинейной или круговой траектории цели машиной Дубинса сформулирована как задача оптимального управления по критерию быстродействия с произвольным направлением скорости машины при перехвате. Для решения данной задачи и синтеза траекторий перехвата использовались нейросетевые методы обучения без учителя на основе алгоритма Deep Deterministic Policy Gradient. Проведен анализ полученных законов управления и траекторий перехвата по сравнению с аналитическими решениями задачи перехвата, проведено моделирование для параметров движения цели, которые нейросеть не видела при обучении. Проведены модельные эксперименты по проверке устойчивости решения. Показана эффективность применения нейросетевых методов синтеза траекторий перехвата для заданных классов движений цели.

Ключевые слова: задача перехвата, машина Дубинса, алгоритм DDPG, нейросетевой синтез траекторий.

DOI: 10.31857/S0005231023030017, **EDN:** ZYOFFZ

1. Введение

Задачи перехвата подвижных целей, движущихся по известным траекториям, вызывают интерес исследователей с середины 50-х годов прошлого века [1]. Одной из базовых моделей для описания динамики перехватываемого объекта является модель машины Дубинса.

Первые работы по нахождению линии с ограниченной кривизной и минимальной длины, соединяющей две заданные точки, принадлежат А.А. Маркову. Первая его задача в [2] была посвящена поиску кривой, соединяющей две точки на плоскости с минимальной длиной и ограниченной кривизной

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Молодежной научной школы ИПУ РАН «Методы оптимизации и планирования движения управляемых объектов». Работа Галаяева А.А. и Насонова И.А. была частично поддержана Российским научным фондом (проект № 23-19-00134).

с фиксированным направлением выхода из первой точки. Такая задача нашла применение в решении проблем прокладки железных дорог. В 1957 г. Л. Дубинс опубликовал похожую работу [3] о нахождении линии кратчайшей длины с ограниченным радиусом кривизны, соединяющей две точки на плоскости с заданным направлением выхода из первой точки и заданным направлением входа во вторую. Результаты оказались полезными при исследовании объектов с ограниченным радиусом разворота и постоянной по величине скоростью передвижения.

В [4] рассмотрена неигровая задача наискорейшего перехвата подвижной цели машиной Дубинса. Предполагалось, что цель движется по произвольной и заранее известной непрерывной траектории. Для нахождения решения были найдены алгебраический критерий оптимальности перехвата по геодезической линии и оптимальное значение критерия времени перехвата.

В ранних исследованиях [5] установлены достаточные условия того, что оптимальной траекторией являются кривые «дуга–прямая». Эти условия накладывают ограничения на отношение минимального радиуса кривизны траектории машины и расстояния между целью и машиной в начальный момент времени. В [6] синтезировано управление для перехвата цели по геодезической линии, проведенной из начала движения машины в точку перехвата, причем полагается, что цель движется по прямой с постоянной скоростью.

Практические применения задач перехвата машиной Дубинса довольно обширны: построение оптимальных траекторий беспилотных летательных аппаратов, выполняющих наблюдение за несколькими наземными целями [7], разработка алгоритмов, решающих задачу коммивояжера [8], построение траекторий обхода при движении с препятствиями [9]. Также модель машины Дубинса используется в дифференциальной игре преследование-уклонение. Такая игра предполагает наличие двух агентов: преследователь должен поймать цель, а убегающий должен уклониться от преследователя. Аналитическое решение задачи нахождения оптимального времени перехвата и синтеза оптимальной траектории для такой игры было получено в [4]. Проблема синтеза траекторий перехвата для объектов, движущихся по круговой траектории, рассматривалась в [10].

Решение задач перехвата машиной Дубинса также можно получить с помощью вычислительных машин. В последнее время для подобных задач активно применяются нейросетевые методы обучения с подкреплением, которые представляют технологию машинного обучения без моделей и применяются в случаях, когда данных для тренировки нейронной сети мало или их нет вообще. В отличие от обучения с учителем [11], которому необходимо наличие набора размеченных данных, обучение с подкреплением основано на взаимодействии агента со средой [12]. Такой метод наиболее эффективен для поиска решения задачи преследования-уклонения.

Метод Actor-Critic используется во многих соответствующих исследованиях. Например, в [13] Actor-Critic использовался с Convolutional Neural Network

(CNN) и Long Short-Term Memory (LSTM) в качестве кодировщика состояния для гоночных игр. В [14] использовали нечеткий детерминированный алгоритм градиента политики для получения конкретного физического смысла при обучении политике в игре преследования-уклонения. В [15] впервые был представлен метод Deep Deterministic Policy Gradient (DDPG) для взаимодействия с непрерывным пространством действий. Именно этот алгоритм будет использоваться в данной работе для нейросетевого синтеза траектории перехвата машины Дубинса цели, движущейся с постоянной скоростью по прямой и круговой траекториям. Благодаря DDPG удалось впервые получить субоптимальную траекторию, основанную на нейросетевом решении.

Актуальность работы обусловлена как востребованностью на практике алгоритмов перехвата одной и множества движущихся целей, так и возможностью получения некоторых новых теоретических результатов, связанных с синтезом траекторий перехвата. Отдельный интерес представляет так называемая задача коммивояжера с подвижными целями — Moving Target Traveling Salesman Problem (MTTSP) [16]. В данном случае точки, которые требуется обойти, движутся с заданной скоростью. Примером такого сценария является перехват нескольких уклоняющихся (или атакующих) целей, что весьма актуально для приложений двойного назначения. Очевидно, что поиск наилучшего маршрута для перехвата нескольких подвижных целей является особенно сложной задачей ввиду постоянного изменения положения целей, что значительно увеличивает вычислительные затраты на поиск оптимальных решений. Известно, что для решения MTTSP в литературе был предложен эвристический подход.

Авторы предлагают синтез траектории перехвата, основанный на нейросетевом решении, поскольку аналитические результаты и оптимальные траектории для групп целей практически отсутствуют или неизвестны. Этот метод авторы планируют масштабировать на подобные задачи.

Структура работы включает в себя 6 разделов. В разделе 2 предлагается математическая постановка задачи, адаптированная к дальнейшему применению. Раздел 3 посвящен описанию алгоритма DDPG, также готового к применению в данной постановке. В разделе 4 описывается структура нейронной сети, а раздел 5 содержит результаты моделирования. В заключении представлено направление дальнейших исследований.

2. Постановка задачи нейросетевого перехвата

На плоскости рассматривается задача наискорейшего δ -перехвата машиной Дубинса (преследователь) подвижного объекта (цель), движущегося по двум заданным траекториям с постоянной скоростью. Как и в [4], динамика для преследователя была выбрана в виде

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}_P = \cos \varphi, \\ \dot{y}_P = \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} = u, \quad |u(t)| \leq 1. \end{cases}$$

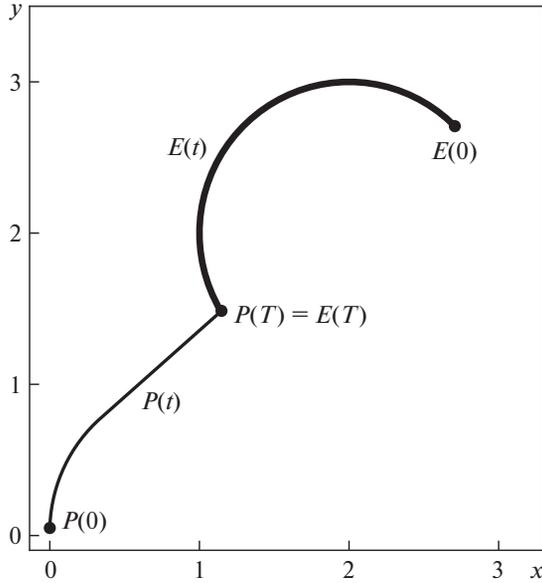


Рис. 1. Взаимное расположение объектов.

Здесь $x_P(t)$ и $y_P(t)$ — координаты машины Дубинса на декартовой плоскости, $\varphi(t)$ — угол между направлением скорости преследователя и осью абсцисс, а $u(t)$ — управление, зависящее от времени, что показано на рис. 1. Координаты и угол машины обозначим через вектор-функцию $P(t) = (x_P(t), y_P(t), \varphi(t))$.

Начальные условия системы (1) фиксированы:

$$(2) \quad x_P(0) = 0, \quad y_P(0) = 0, \quad \varphi(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Непрерывная вектор-функция $E(t) = (x_E(t), y_E(t))$ определяет траекторию цели на декартовой плоскости.

Терминальное условие δ -перехвата для нейросетевого решения имеет следующий вид:

$$(3) \quad (x_P(T) - x_E(T))^2 + (y_P(T) - y_E(T))^2 \leq \delta^2,$$

где $T \in \mathbb{R}_0^+$ — время движения из начальной точки в точку перехвата, а δ — заданный радиус перехвата — максимально допустимое расстояние между преследователем и целью, при котором перехват можно считать совершенным. Данный параметр вводится для определенности понятия перехвата именно для нейросетевого решения.

Поставим задачу перехвата цели за минимальное время как задачу оптимального управления в классе кусочно-постоянных функций:

$$(4) \quad J[u] \stackrel{def}{=} \int_0^T dt \rightarrow \min_u.$$

Приступим к описанию динамики цели. По условию задачи цель движется с постоянной скоростью прямолинейно или по окружности. Тогда параметризованные уравнения координат будут иметь следующий вид:

$$(5) \quad \begin{cases} x_E(t) = R \cos(\omega t + \phi) + x_0, \\ y_E(t) = R \sin(\omega t + \phi) + y_0; \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} x_E(t) = v_x t + x_0, \\ y_E(t) = v_y t + y_0, \end{cases}$$

где x_0 и y_0 являются начальными условиями координат цели и выбираются произвольно.

Для учета взаимного расположения преследователя и цели введем формулу для нахождения угла между осью абсцисс и прямой, соединяющей координатные точки цели и преследователя. Пусть (x_P, y_P) и (x_E, y_E) — координаты преследователя и цели соответственно в некоторый момент времени t . Тогда искомая величина угла находится по формуле

$$\psi = \arctan \left(\frac{y_E - y_P}{x_E - x_P} \right).$$

Также введем формулу для расчета расстояния L между агентами:

$$L = \sqrt{(x_P - x_E)^2 + (y_P - y_E)^2}.$$

Далее, для упрощения исследования задачи совершим переход в новые координаты. Для этого необходимо уметь сравнивать текущее состояние агентов $S = (x_P, y_P, \varphi, x_E, y_E)$ и состояние, предсказанное нейронной сетью $S' = (x'_P, y'_P, \varphi', x'_E, y'_E)$.

Получим значения для функций углов ψ и ψ' от состояний S и S' соответственно, а также рассчитаем расстояние L' , когда агенты находятся в состоянии S' . Введем угол между направлением скорости преследователя и линией, соединяющей координатные точки агентов:

$$\Theta = \varphi' - \psi'.$$

Введем скорость поворота как частное разности $\psi' - \psi$ и промежутка времени Δt , за которое произошел переход от состояния S в состояние S' :

$$\omega = \frac{\psi' - \psi}{\Delta t}.$$

Совокупность (L', ω, Θ) и есть искомые координаты, в которых будем строить нейросетевое решение. В начальный момент времени, когда результат

нейросети еще не получен, координаты $(L'(0), \omega(0), \Theta(0))$ рассчитываются следующим образом:

$$(7) \quad \begin{cases} L'(0) = L(S), \\ \omega(0) = 0, \\ \Theta(0) = \varphi(0) - \psi(0), \end{cases}$$

где $\psi(0) = \arctan\left(\frac{y_E(0) - y_P(0)}{x_E(0) - x_P(0)}\right)$.

3. Алгоритм Deep Deterministic Policy Gradient

DDPG — это Actor-Critic алгоритм, основанный на градиенте детерминированной политики. Алгоритм DPG (Deterministic Policy Gradient) состоит из параметризованной функции Actor $\mu(s | \theta^\mu)$, которая задает управление в текущий момент времени путем детерминированного сопоставления состояний с конкретным действием. Функция Critic $Q(s, a)$ обновляется с помощью уравнения Беллмана так же, как и при Q -обучении. Actor обновляется путем применения цепного правила к ожидаемому вознаграждению от начального распределения J по отношению к параметрам Actor:

$$(8) \quad \begin{aligned} \nabla \theta^\mu J &\approx \mathbb{E}_{s_t \sim \rho^\beta} \left[\nabla_a Q(s, a | \theta^Q) \Big|_{s=s_t, a=\mu(s_t | \theta^\mu)} \right] \\ &= \mathbb{E}_{s_t \sim \rho^\beta} \left[\nabla_{\theta^\mu} Q(s, a | \theta^Q) \Big|_{s=s_t, a=\mu(s_t)} \nabla_{\theta^\mu} \mu(s | \theta^\mu) \Big|_{s=s_t} \right]. \end{aligned}$$

DDPG сочетает в себе достоинства своих предшественников, что делает его более устойчивым и эффективным в обучении. Так как разные траектории могут очень сильно отличаться друг от друга, DDPG использует идею DQN [17], называемую буфером воспроизведения. Буфер воспроизведения — это буфер конечного размера, в который сохраняются данные о среде в каждый момент времени. Он необходим для достижения равномерного распределения выборки переходов и дискретного контроля обучения нейронных сетей. Actor и Critic обновляются путем равномерной выборки mini-batch из буфера воспроизведения. Еще одним дополнением к DDPG стала концепция обновлений программных целей вместо прямого копирования весов в целевую сеть. Обновляемая сеть $Q(s, a | \theta^Q)$ также используется для расчета целевого значения, поэтому обновление Q подвержено расхождению. Это возможно, если сделать копию сетей Actor и Critic, $Q'(s, a | \theta^{Q'})$ и $\mu'(s, a | \theta^{\mu'})$. Веса этих сетей следующие: $\theta' \leftarrow \tau \theta + (1 - \tau) \theta'$ с $\tau \ll 1$. Проблема исследования решается путем добавления шума, полученного от шумового процесса N , в управление актора. В данном исследовании выбран процесс Орнштейна–Уленбека [18].

Общая структура DDPG показана на рис. 2. Поскольку в задаче требуется, чтобы управления были заключены в числовом интервале, то необходимо ввести ограничения. Для этого в программе была использована функция $\text{clip}()$, которая ограничивает область значений действий в диапазоне $[-1; 1]$.

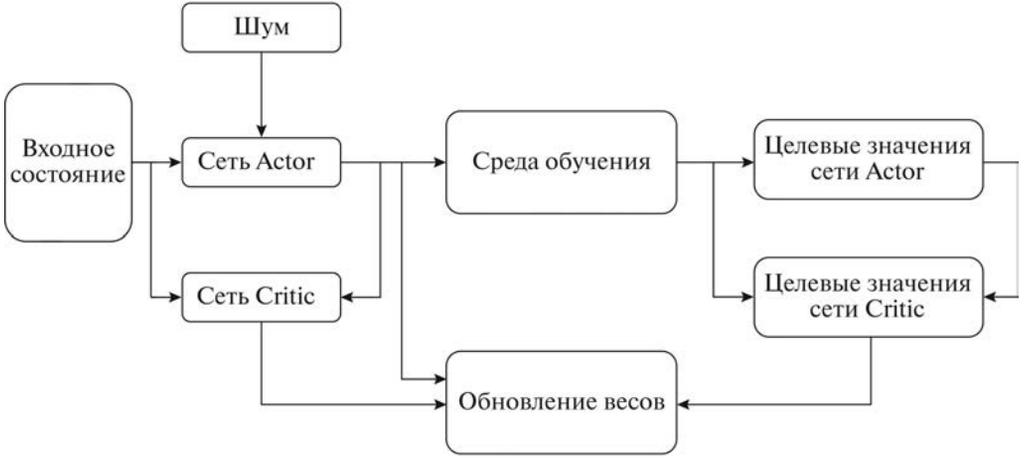


Рис. 2. Общая структура алгоритма Deep Deterministic Policy Gradient.

Алгоритм 1.

Входные данные: коэффициент дисконтирования γ , количество эпизодов M , количество шагов обучения T в каждом эпизоде, batch size N , коэффициенты обучения нейронных сетей Actor и Critic r_a и r_c соответственно.

1. Произвольная инициализация сетей Actor $\mu(s|\theta^\mu)$ и Critic $Q(s, a|\theta^Q)$
2. Инициализация целевых сетей Q' и μ' весовыми параметрами $\theta^Q = \theta^{Q'}$ и $\theta^\mu = \theta^{\mu'}$
3. Инициализация буфера R
4. for episode = 1 to M do
5. Инициализация случайного действия $a_t = \mu(s_t|\theta^\mu) + \eta_t$ в соответствии с текущим управлением и исследовательским шумом
6. Получение начального состояния среды s_1
7. for $t = 1$ to T do
8. Выполнение действия a_t , приобретение награды r_t и получение нового состояния среды s_{t+1}
9. Сохранение перехода (s_t, a_t, r_t, s_{t+1}) в буфере R
10. Случайная выборка N переходов (s_i, a_i, r_i, s_{i+1}) из R
11. Получение $y_i = r_i + \gamma Q'(s_{i+1}, \mu'(s_{i+1}|\theta^{\mu'})|\theta^{Q'})$
12. Обновление весов сети Critic путем минимизирования функции потерь

$$\hat{L} = \frac{1}{N} \sum_i (y_i - Q(s_i, a_i|\theta^Q))^2$$

13. Обновление политики Actor с помощью градиента эффективной политики:

$$\nabla_{\theta^\mu} J \approx \frac{1}{N} \sum_i \nabla_a Q(s, a|\theta^Q)|_{s=s_i, a=\mu(s_i)} \nabla_{\theta^\mu} \mu(s|\theta^\mu)|_{s_i}$$

14. Обновление целевых сетей

$$\theta^{Q'} = \tau\theta^Q + (1 - \tau)\theta^Q, \quad \theta^{\mu'} = \tau\theta^\mu + (1 - \tau)\theta^\mu$$

15. endfor

16. endfor

Выходные данные: Управление $u = \mu(s|\theta^\mu)$

В табл. 1 показаны различия между сетями Actor, Critic и их целевыми сетями. В ней приведены входные и выходные значения, а также формулы, по которым производится расчет этих величин.

Подробное описание работы метода DDPG приведено в алгоритме 1.

Таблица 1. Различия между сетями Actor, Critic и их целевыми сетями

Сеть	Формула	Входные данные	Выходные данные
Critic целевая	$Q'(s_{t+1}, \mu'(s_{t+1} \theta^{\mu'}) \theta^{Q'})$	следующее состояние среды; выходные данные целевой сети Actor	значение Q' , которое используется для вычисления y_i
Critic	$Q(s_t, a \theta^Q)$	текущее состояние среды; текущее действие	значение Q , которое необходимо для расчета ошибки и обновления сети Actor
Actor целевая	$\mu'(s_{t+1} \theta^{\mu'})$	следующее состояние среды	действие μ' , используемое как входное значение целевой сети Critic
Actor	$\mu(s_t \theta^\mu)$	текущее состояние среды	действие μ , которое используется для обновления сети Actor

4. Нейронная сеть

4.1. Структура сети

Для реализации алгоритма Deep Deterministic Policy Gradient были написаны две нейросети для каждого метода: Critic и Actor. Их архитектуры изображены на рис. 3 и 4.

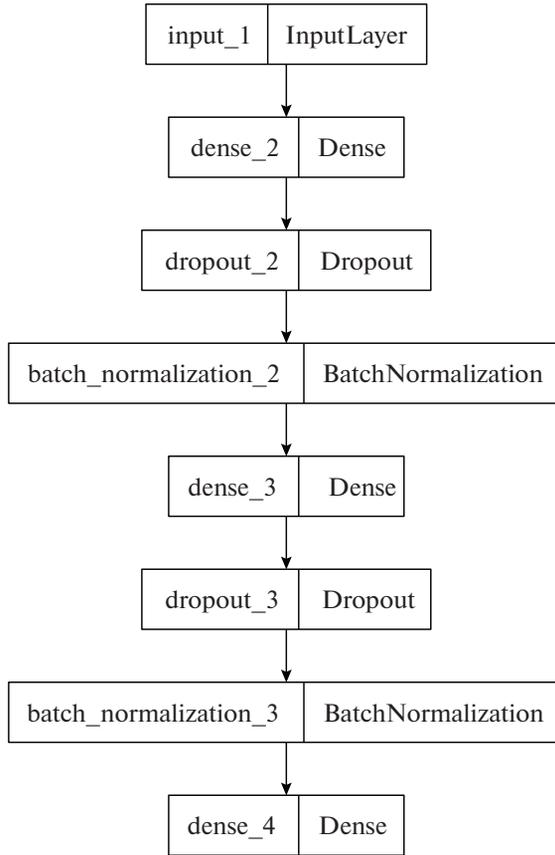


Рис. 3. Архитектура нейросети Actor.

Сеть Actor имеет четыре полносвязных скрытых слоя с 256 нейронами, с функцией активации *SELU*. Так как возможные действия находятся в интервале $[-1, 1]$, то функцию активации для выходного слоя удобно взять как *tanh*. Сеть Critic имеет пять полносвязных скрытых слоев с 16, 32, 32 и два слоя с 512 нейронами, с функцией активации *SELU*.

Сети Critic и Actor составлены из полносвязных слоев *Dense*, для выходных значений которых применяется операция нормализации и метод *Dropout* [19], который эффективен в борьбе с проблемой переобучения нейросетей. Для вычисления выхода сети Actor из последнего слоя выбрана функция активации гиперболический тангенс.

Сеть Critic имеет сложную структуру, поскольку она принимает два входных значения: состояние среды и действия преследователя. Далее происходит соединение слоев с помощью метода *Concatenate* и значения проходят через полносвязные слои сети до выхода, который является слоем единичной размерности.

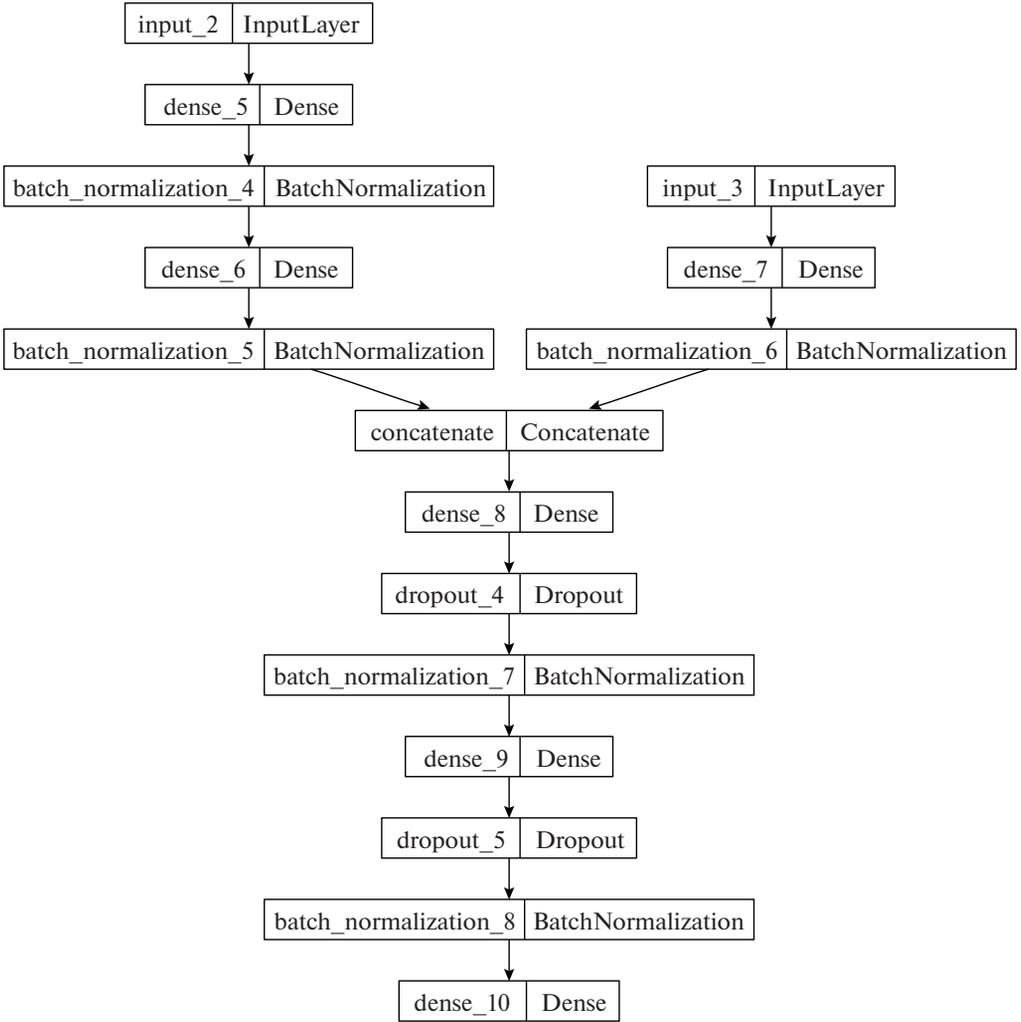


Рис. 4. Архитектура нейросети Critic.

4.2. Гиперпараметры

В качестве функции активации в скрытых слоях нейросетей Critic и Actor была выбрана функция *SELU* [20], которая задается следующим уравнением:

$$SELU(x) = \lambda \begin{cases} x, & x > 0 \\ \alpha e^x - \alpha, & x \leq 0, \end{cases}$$

где $\lambda \approx 1,0507$, а $\alpha \approx 1,6732$.

График функции *SELU* приведен на рис. 5.

Функция *SELU* обладает свойством самонормализации входных данных при использовании метода инициализации *LeCun*, который инициализирует параметры сети как нормальное распределение. Поэтому выходные значения этой функции имеют нулевое среднее и единичное стандартное отклонение.

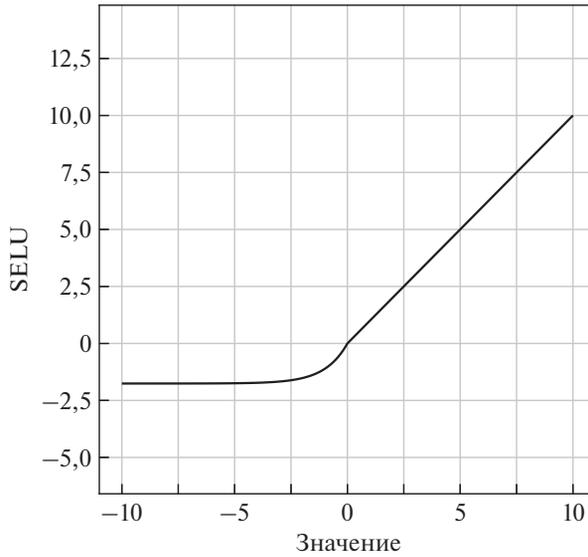


Рис. 5. График функции активации *SELU*.

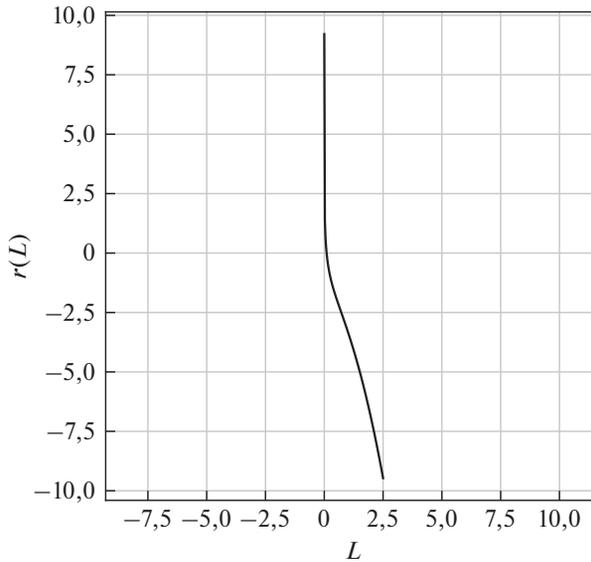


Рис. 6. График зависимости вознаграждения от расстояния между агентами.

В виде функции вознаграждения преследователя было выбрано следующее выражение, зависящее только от расстояния L между агентами:

$$(9) \quad r(L) = -\lg(10L) - L^2.$$

График этой функции приведен на рис. 6. На нем можно видеть, что значение r быстро растет при уменьшении L , а когда расстояние принимает нулевое значение, то агент получает максимальную награду.

Таблица 2. Значения параметров нейронной сети

Параметр	Значение	Описание
γ	0,98	Коэффициент дисконтирования, используемый в уравнении Беллмана
τ	0,01	Коэффициент мягкого обновления целевых сетей
Размер mini-batch	64	Количество выборок для обновления весов
Объем буфера R	10 000	Количество данных, из которых выбираются примеры для обновления
Размер эпизода	1000	Количество эпизодов, используемых для обучения
Размер шага	400	Количество шагов обучения в каждом эпизоде
Интервал времени	0,1	Время каждого шага обучения
Коэффициент обучения сети Actor	5e-5	Коэффициент обучения, используемый для обновления сети Actor
Коэффициент обучения сети Critic	1e-4	Коэффициент обучения, используемый для обновления сети Critic

Значения гиперпараметров нейронных сетей приведены в табл. 2. Параметры γ , τ , размер эпизода и интервал времени были подобраны в результате анализа в соответствии с [14]. Однако значения размера mini-batch, объема буфера R , размера шага и коэффициентов обучения сетей Actor-Critic были подобраны эмпирическим путем — сеть синтезировала траектории перехвата движения цели, а затем проводился их анализ на предмет соответствия физической задаче. Например, если график среднего вознаграждения не увеличивался в течение 100–200 эпизодов обучения, а значения функций ошибок нейросетей Actor-Critic не убывали за тот же период, то значения коэффициентов обучения сетей уменьшались, а размер mini-batch увеличивался.

5. Результаты моделирования

5.1. Процесс обучения нейросети

Моделирование было произведено при помощи языка Python и фреймворка TensorFlow. Начальные параметры движения цели и преследователя во время обучения нейросети приведены в табл. 3.

Начальные координаты движения цели выбираются случайным образом с помощью функции `numpy.random.uniform()` в диапазоне $(-3; 3)$, чтобы сеть тренировалась на разных примерах и эффективно работала после процесса обучения. Скорости цели всегда имели константное значение на всем процессе обучения $v_x = 0,5$ и $v_y = 0,5$.

Тренировка нейросети проводилась на процессе с характеристиками, указанными в табл. 4. В силу сложности нейросетевой модели процесс обучения длился около четырех часов.

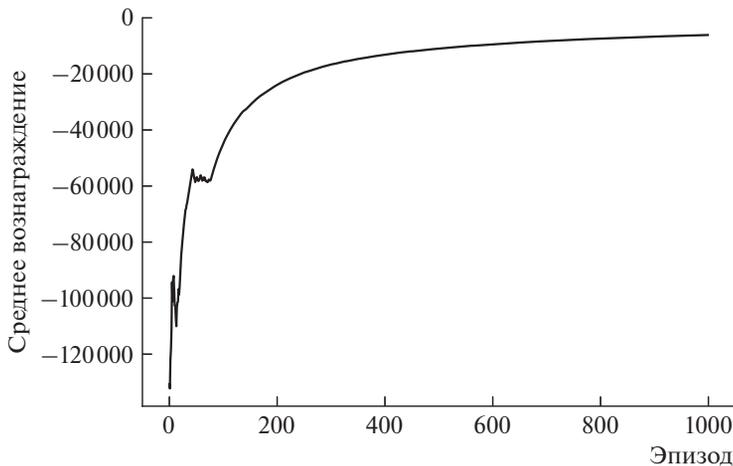


Рис. 7. Зависимость среднего вознаграждения от номера эпизода.

На рис. 7 показан график среднего вознаграждения за весь период обучения. Во время тренировки модели наблюдается резкое возрастание значения награды агента в первые 100–150 эпизодов. Данному процессу соответствует заполнение буфера воспроизведения R . Далее примеры для тренировки

Таблица 3. Начальные параметры движения цели и преследователя во время обучения сети

Параметр	Значение
Начальная координата движения цели $x_E(0)$	Произвольное значение в промежутке $(-3; 3)$
Начальная координата движения цели $y_E(0)$	Произвольное значение в промежутке $(-3; 3)$
Начальные координаты движения преследователя $(x_P(0); y_P(0))$	$(0; 0)$
Начальная ориентация преследователя $\varphi(0)$	$\frac{\pi}{2}$
Постоянная скорость преследователя v	1
Радиус перехвата δ	0,2

Таблица 4. Характеристики оборудования, где проходило обучение сети

Параметр	Значение
Процессор	Intel(R) Core(TM) i7-8565U
Литография	14 нм
Количество ядер	4
Количество потоков	8
Базовая тактовая частота процессора	1,80 ГГц
Кэш-память	8 Мб
Оперативная память компьютера	16 Гб

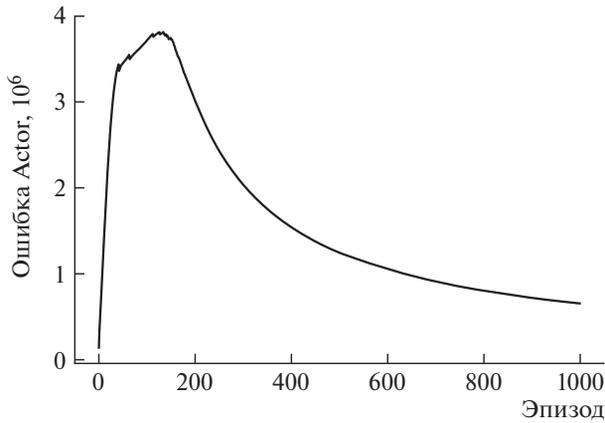


Рис. 8. Зависимость значения функции ошибки от эпизода сети Actor.

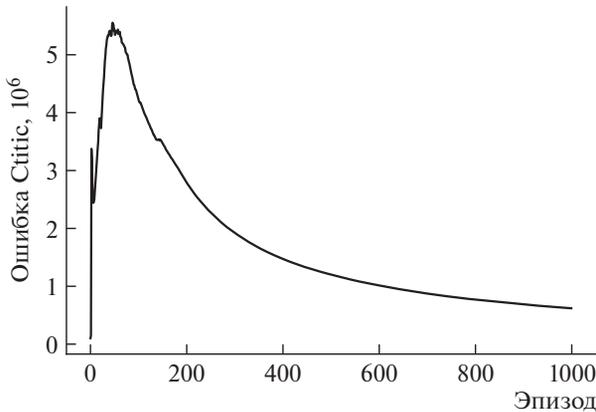


Рис. 9. Зависимость значения функции ошибки от эпизода сети Critic.

случайным образом берутся из R , происходит процесс обучения сети и полученный кортеж состояний заменяет старый образец данных в R . На этом этапе происходит медленный рост среднего вознаграждения, см. рис. 7.

Также были получены графики зависимостей функции ошибки нейронных сетей Actor и Critic. Они приведены на рис. 8 и 9 соответственно.

На графиках видно плавное уменьшение значения функции потерь с увеличением эпизодов обучения, что свидетельствует о правильном выборе коэффициентов обучения.

5.2. Результат обучения

На рис. 10 изображены траектории, полученные с помощью нейросети и аналитического решения. Начальные параметры цели и преследователя в этом случае имели значения, указанные в табл. 5.

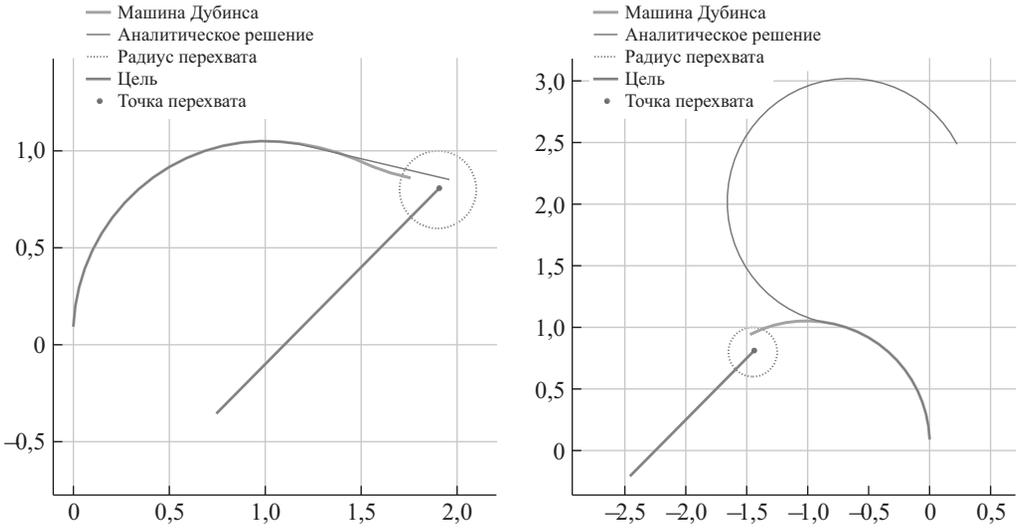


Рис. 10. Сравнение траекторий перехвата прямолинейно движущейся цели при разных начальных параметрах.

По траекториям, изображенным на рис. 10, можно видеть, что сеть смогла построить более эффективную траекторию. В этом случае оптимальное время перехвата, полученное с помощью аналитического решения, равняется $T_{opt} \approx 5,42$ с. А время, за которое сеть смогла перехватить цель, $T_{nn} \approx 2,1$ с. Такой результат объясняется наличием радиуса перехвата $\delta = 0,2$.

На рис. 11 справа можно увидеть сравнение графиков нейросетевого управления с аналитическим. Как видно, управления значительно отличаются на конечном участке траектории вследствие того, что нейросеть подстраивает терминальные условия перехвата. Оптимальный синтез в задаче с нефиксированным углом перехвата состоит из участков “Дуга–прямая” либо “Дуга–дуга” [4], а в задаче с фиксированным углом перехвата — в общем случае из участка “Дуга–прямая–дуга” [21]. Именно последний вариант и синтезирует нейросеть. При этом, как видно из рис. 10, есть участок траектории, где нейросеть выбирает не оптимальное, но близкое к оптимальному значение радиуса разворота. Второй причиной отличия является то, что нейросеть

Таблица 5. Начальные параметры движения цели и преследователя

Параметр	Значение	Значение
Начальные координаты движения цели	$(0,8; -0,4)$	$(-2,5; -0,25)$
Постоянная скорость цели v_x	0,5	0,5
Постоянная скорость цели v_y	0,5	0,5
Начальные координаты движения преследователя	$(0; 0)$	$(0; 0)$
Начальная ориентация преследователя $\varphi(0)$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
Постоянная скорость преследователя v	1	1
Радиус перехвата δ	0,2	0,2

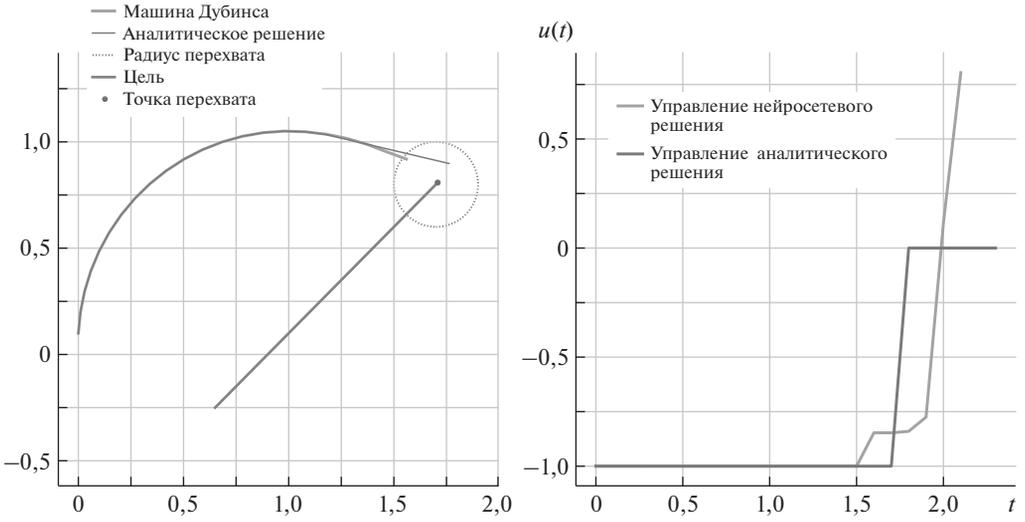


Рис. 11. Сравнение функций управления от времени.

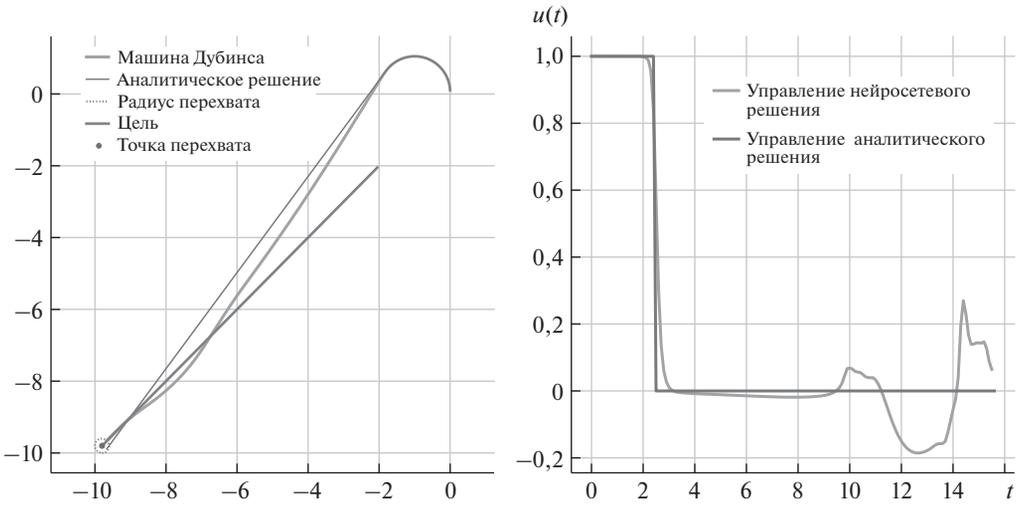


Рис. 12. Сравнение функций управления от времени.

оптимизирует локальную функцию вознаграждения, отличную от функционала быстройдействия, который использовался при постановке задачи.

На рис. 12 изображены траектории перехвата цели и зависимость функции управления от времени. На правом графике можно наблюдать, что функция нейросетевого управления имеет значения, близкие к оптимальному, на участке, где аналитическое решение дает нулевое управление. К тому же отклонения нейросетевого управления не превышают значение радиуса перехвата δ . Времена перехвата в этом случае практически идентичны: $T_{opt} \approx T_{nn} \approx 21$ с.

5.3. Анализ на чувствительность

Проанализируем, насколько нейросетевое решение зависит от входных параметров, так как в теории нейросеть должна хорошо обобщать полученное решение на состояния и параметры, которые еще “не видела” при обучении.

Для перехвата цели, движущейся по окружности, обучим нейросеть только на цели с единичным радиусом и единичной угловой скоростью и проверим, может ли она успешно ловить цель с другими параметрами. Как видно на рис. 13, сеть успешно справляется с задачей, на левом рисунке угловая

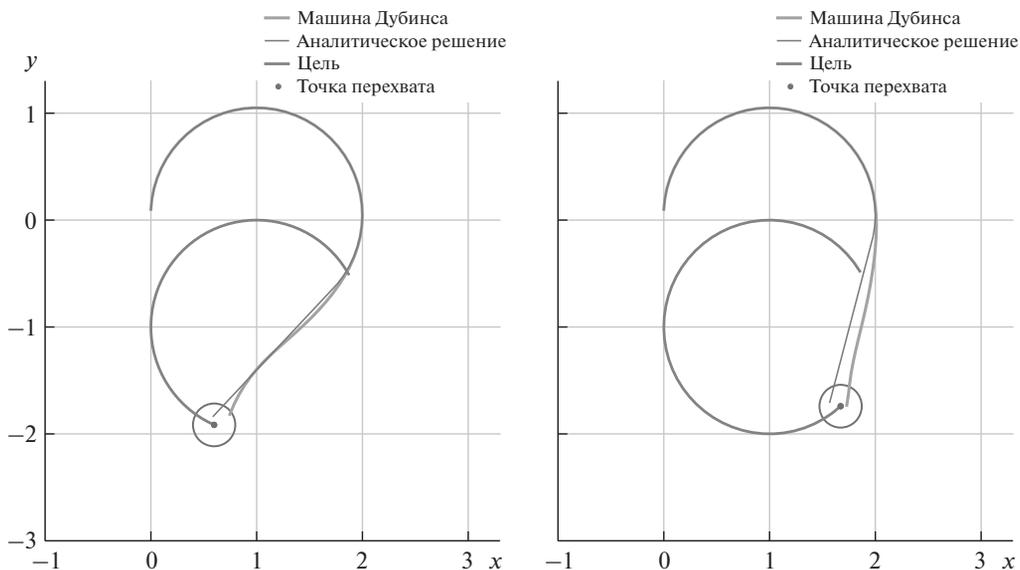


Рис. 13. Сравнение траекторий кругового перехвата при разных начальных параметрах.

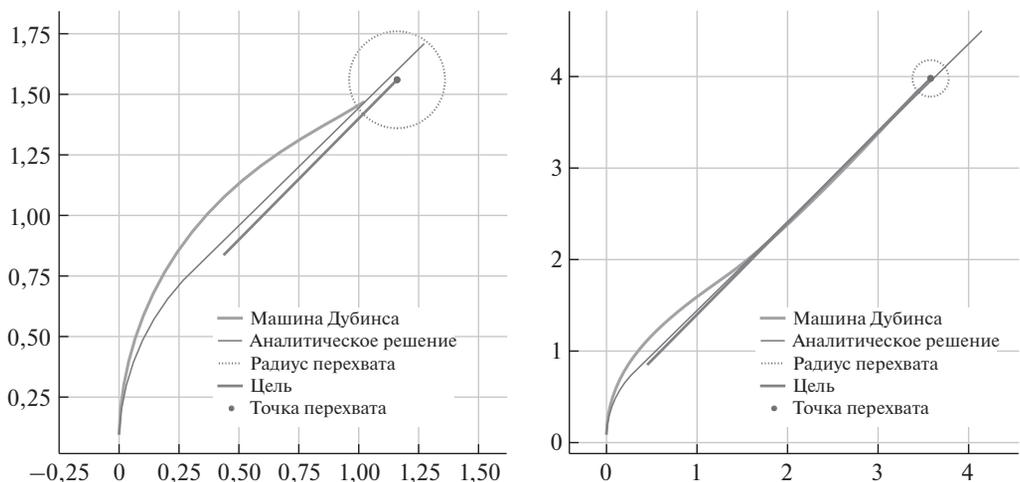


Рис. 14. Сравнение траекторий перехвата цели при разных начальных параметрах.

скорость у цели равна 0,7 от угловой скорости, используемой при обучении, на правом рисунке изображен перехват обычной цели. Были проведены эксперименты для значений угловой скорости от 0,7 до 1,3, в которых нейросеть успешно перехватывала цель.

В случае перехвата прямолинейно движущейся цели нейросеть обучалась при значениях скорости цели $v_x = v_y = 0,5$. На рис. 14 изображены результаты тестирования сети со скоростями, различающимися на 20% — на левом рисунке цель имеет скорость $v_x = v_y = 0,4$, а на правом $v_x = v_y = 0,6$.

Из полученных результатов следует, что сеть хорошо обобщает решение. Это может быть полезно для прикладных задач, так как в них параметры зачастую известны с некоторой погрешностью.

6. Заключение

В работе были предложены два основанных на DDPG нейросетевых алгоритма синтеза траекторий перехвата машиной Дубинса целей, движущихся по прямолинейной и круговым траекториям. Особенности предложенных алгоритмов является их способность работать с пространством непрерывных действий, гарантированность обучения и работы с различными относительными начальными положениями целей и машины Дубинса. Показано, что сеть успешно обобщает решение и в некоторых ситуациях предлагает лучшее по быстродействию решение задачи перехвата.

Несомненные преимущества предложенных алгоритмов могут быть использованы, а сами алгоритмы доработаны для получения барьерной поверхности в дифференциальной игре двух автомобилей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Isaacs R.* Differential games. New York: John Wiley and sons, 1965.
Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
2. *Markov A.A.* A few examples of solving special problems on the largest and smallest values. / The communications of the Kharkov mathematical society. 1889. Ser. 2. V. 1. P. 250–276.
3. *Dubins L.E.* On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents // Amer. J. Math. 1957. No. 79. P. 497–516.
4. *Галляев А.А., Бузиков М.Э.* Перехват подвижной цели машиной Дубинса за кратчайшее время // АИТ. 2021. № 5. С. 3–19.
Galyaev A.A., Buzikov M.E. Time-Optimal Interception of a Moving Target by a Dubins Car // Autom Remote Control. 2021. V. 82. P. 745–758.
5. *Glizer V.Y., Shinar J.* On the structure of a class of time-optimal trajectories // Optim. Control Appl. Method. 1993. V. 14. No. 4. P. 271–279.
6. *Бердышев Ю.И.* О задачах последовательного обхода одним нелинейным объектом двух точек // Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11. № 1. С. 43–52.

7. *Xing Z.* Algorithm for Path Planning of Curvature-constrained UAVs Performing Surveillance of Multiple Ground Targets // Chin. J. Aeronaut. 2014. V. 27. No. 3. P. 622–633.
8. *Ny J.L., Feron E., Frazzoli E.* On the Dubins Traveling Salesman Problem // IEEE Transactions on Automatic Control. 2014. V. 57. P. 265–270.
9. *Yang D., Li D., Sun H.* 2D Dubins Path in Environments with Obstacle // Math. Problem. Engineer. 2013. V. 2013. P. 1–6.
10. *Manyam S.G. et al.* Optimal dubins paths to intercept a moving target on a circle // Proceedings of the American Control Conference. 2019. V. 2019-July. P. 828–834.
11. *Caruana R., Niculescu-Mizil A.* An empirical comparison of supervised learning algorithms // ICML Proceedings of the 23rd international conference on Machine learning. June 2006. P. 161–168.
12. *Arulkumaran K., Deisenroth M.P., Brundage M., Bharath A.A.* Deep Reinforcement Learning: A Brief Survey // IEEE Signal Processing Magazine. 2017. V. 34. No. 6. P. 26–38.
13. *Perot E., Jaritz M., Toromanoff M., de Charette R.* End-to-End Driving in a Realistic Racing Game with Deep Reinforcement Learning // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops. 2017. P. 474–475.
14. *Al-Talabi A.A., Schwartz H.M.* Kalman fuzzy actor-critic learning automaton algorithm for the pursuit-evasion differential game // IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE). 2016. P. 1015–1022.
15. *Hartmann G., Shiller Z., Azaria A.* Deep Reinforcement Learning for Time Optimal Velocity Control using Prior Knowledge // IEEE 31st International Conference on Tools with Artificial Intelligence. 2019. P. 186–193.
16. *Helvig C.S., Gabriel Robins, Alex Zelikovskiy* The moving-target traveling salesman problem // J. Algorithm. 2003. V. 49. No. 1. 2003. P. 153–174.
17. *Mnih V., Kavukcuoglu K., Silver D. et al.* Human-level control through deep reinforcement learning // Nature. 2015. V. 518. P. 529–533.
18. *Uhlenbeck G.E., Ornstein L.S.* On the theory of the brownian motion // Physic. Rev. 1930. V. 36. P. 823–841.
19. *Hinton G.E., Srivastava N., Krizhevsky A. et al.* Improving neural networks by preventing co-adaptation of feature detectors. arXiv. 2012.
20. *Klambauer G., Unterthiner T., Mayr A. et al.* Self-normalizing neural networks // Advances in Neural Information Processing Systems. 2017. P. 972–981.
21. *Buzikov M.E., Galyaev A.A.* Minimum-time lateral interception of a moving target by a Dubins car // Automatica. 2022. V. 135. 109968.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.П. Кузнецовым.

Поступила в редакцию 28.07.2022

После доработки 17.11.2022

Принята к публикации 30.11.2022

© 2023 г. И.С. ГРИГОРЬЕВ, канд. физ.-мат. наук (iliagri@yandex.ru)
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова),
А.И. ПРОСКУРЯКОВ (ap_91@mail.ru)
(филиал Московского государственного университета
им. М.В. Ломоносова в г. Баку)

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕЛЕТА КА СО СБРОСОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ТОПЛИВНОГО БАКА И РАЗГОННОГО БЛОКА В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

Рассматривается идея сокращения замусоренности околоземного пространства за счет сброса отработавших частей космического аппарата на орбитах, касающихся условной границы атмосферы Земли. Решается задача оптимизации траектории перелета космического аппарата с опорной круговой орбиты искусственного спутника Земли на целевую эллиптическую орбиту в модифицированной импульсной постановке. Для улучшения сходимости метода Ньютона используется прием, заключающийся во введении серии вспомогательных систем координат в каждой точке приложения импульсного воздействия. Производные в условиях трансверсальности вычисляются при помощи специально разработанной технологии численно-аналитического дифференцирования.

Ключевые слова: космический аппарат, космический мусор, дополнительный топливный бак, разгонный блок, сброс в атмосферу, импульсная постановка, краевая задача, принцип Лагранжа.

DOI: 10.31857/S0005231023030029, EDN: ZYOYBI

1. Введение

С начала космической эры в околоземном пространстве скопилось значительное количество космического мусора (КМ) — объектов искусственного происхождения и их фрагментов, которые уже неисправны, не функционируют и не могут служить никаким полезным целям, но являются опасным фактором воздействия на функционирующие космические аппараты (КА). Причем с каждым годом количество объектов КМ непрерывно растет. Эти объекты можно разделить на несколько больших групп: полезная нагрузка, ступени ракет, разгонные блоки, баки. Наибольшее скопление космического мусора наблюдается на низких околоземных орбитах и в зоне геостационарной орбиты (ГСО) [1]. Столкновение крупногабаритных объектов КМ друг с другом и взрывы остатков топлива в баках могут стать причиной значительного увеличения мелких объектов КМ. Описанные процессы могут привести к цепной реакции — так называемому эффекту Кесслера [2].

Большое число работ посвящено составлению каталогов нефункционирующих космических аппаратов и мониторингу состояния околоземного пространства [3–7].

В [3] проводится анализ сложившейся техногенной обстановки в околоземном пространстве на основе имеющегося каталога космических объектов, приводится перечень основных мер, направленных на сокращение КМ, дается описание автоматизированной системы для предупреждения об опасных ситуациях в околоземном космическом пространстве.

В [4] рассматриваются организационно-методические и технологические проблемы построения системы информационного мониторинга, направленной на сокращение замусоренности околоземного пространства, описываются базы данных, на основе которых строится система.

В [5] дается описание математического и программного обеспечения, предназначенного для исследования совокупностей объектов искусственного происхождения. Предлагаемое программно-математическое обеспечение позволяет прогнозировать вероятность столкновения объектов КМ с функционирующими КА и моделировать процесс образования КМ в результате взрывов и столкновений.

В [6] предлагается алгоритм, ускоряющий время построения орбиты некаталогизированного объекта КМ.

В [7] описываются три поколения оптико-электронных комплексов, предназначенных для мониторинга околоземного пространства.

Разработка мер по очистке и предотвращению или уменьшению образования КМ актуальна [8]. Пути решения проблемы КМ можно разделить на две большие группы: профилактика и уборка. В настоящее время разрабатываются различные проекты по очистке околоземного пространства: захват фрагмента космического мусора с помощью сети [9–11], захват с помощью гарпуна [12–15], использование лазерной установки [16–20]. В [21, 22] рассматривается идея облета крупногабаритного КМ с последующим переводом его на орбиту захоронения. Однако экономически приемлемых проектов пока не существует.

В принятых международных документах в качестве одной из мер по предотвращению образования КМ указывается увод с рабочих орбит космических средств после окончания их активного функционирования [23, 24]. В [25–30] рассматривается задача перевода закончившего работу КА на орбиту захоронения с заданным сроком существования. Идеи увода отработавших КА и их частей в плотные слои атмосферы рассматриваются в [27–33].

В [25] рассматривается задача перелета завершившего работу КА на орбиту захоронения с заданным сроком существования. Проведенные исследования позволяют для конкретного КА выбрать тип орбиты захоронения (круговая или эллиптическая) и момент перевода КА на эту орбиту.

В [26] рассматривается возможность выполнения требований «Руководящих принципов организации работ по снижению техногенного засорения кос-

мического пространства». В качестве одного из наиболее простых и эффективных способов предотвращения замусоренности средневысотных орбит отмечается минимизация эксцентриситета спутников после окончания их активного функционирования. На основе статистических данных делается вывод о том, что почти половина спутников с 1999 по 2011 г. была уведена на орбиту захоронения, соответствующую требованиям, указанным в документах Межагентского координационного комитета по предупреждению образования космического мусора.

В [27] рассматривается увод КА «Гонец-М» после завершения его активного функционирования на орбиту захоронения и в плотные слои атмосферы, проводятся оценки характеристической скорости, которая потребуется для осуществления маневра, и времени существования рассматриваемого КА на орбите захоронения.

Одним из вопросов, рассматриваемым в [28], является описание различных способов предотвращения замусоренности околоземного пространства: сокращение продуктов выхлопа твердотопливных двигателей, пассивация КА и ракета-носителей (РН), уменьшение осколкообразования вследствие столкновений, перевод КА и РН на орбиты захоронения, принудительный ввод в атмосферу КА и РН и сокращение длительности существования космических объектов и т.д. Для осуществления ввода КА в атмосферу предлагается использовать специальные реактивные двигатели или основные двигатели. На низких орбитах для усиления торможения в атмосфере предлагается возможность использования изменения геометрии поверхности для увеличения ее площади (например, надувные баллоны).

В [29] рассматривается задача увода в атмосферу и на орбиты захоронения на примере нескольких спутников. Строятся зависимости относительной массы топлива от различных параметров.

В [30] отмечается, что принудительный ввод КА в атмосферу с применением замедляющих полет приемов является одним из перспективных способов, однако для реализации такого типа маневров необходима модификация традиционных проектов КА и РН.

В [31], помимо различных методов удаления объектов КМ, приводится идея сокращения замусоренности околоземного пространства за счет увода вышедших из строя спутников в верхние слои атмосферы Земли при помощи установленного на них солнечного паруса.

В [32] предлагается уводить сверхмалые КА, являющиеся частью распределенного КА, в плотные слои атмосферы.

В [33] в качестве одного из методов по сокращению замусоренности околоземного пространства рассматривается использование невыработанных остатков топлива для совершения маневра, изменяющего высоту перигея орбиты, для оперативного и контролируемого увода отделившихся частей КА в плотные слои атмосферы. Ставится задача оптимизации. На основе ана-

лиза парка существующих космических средств выведения делается вывод о возможности применения данного метода.

В [34] рассматривается задача выбора орбит, на которые могут переводиться крупноразмерные космические объекты после окончания их активного функционирования, проводится анализ зависимости времени баллистического существования космических объектов от высот орбит увода. Из представленных результатов можно сделать вывод, что при уменьшении минимальной высоты орбиты время существования космического объекта на этой орбите стремится к нулю. В работе предполагалось, что объект прекращает баллистическое существование по достижении им высоты над поверхностью Земли, меньшей 80 км.

Рассматриваемая в статье задача оптимизации перелета КА со сбросом отработавших ступеней в атмосферу является оригинальной, у других авторов оптимизационных работ такой темы нет.

В работе рассматривается идея сокращения замусоренности околоземного пространства за счет сброса на этапе выведения отработавших частей КА на орбитах, касающихся условной границы атмосферы. Найденное в [35] в апсидальной импульсной постановке решение с исключительно малыми накладными расходами, оказавшееся также решением в задаче без априорного предположения апсидальности [36, 37], позволяет надеяться на успех применения методики «лестницы задач» — последовательной формализации и решения серии задач с постепенным уточнением и усложнением постановки, с использованием полученных решений более простых задач для решения следующих по сложности в качестве начального приближения непосредственно или на основе метода продолжения решения по параметру. Использование хорошего начального приближения и хорошей вычислительной схемы метода стрельбы позволяет построить одну из возможных экстремалей в задаче. Попытки построить произвольную экстремаль без предварительного анализа траектории заканчиваются неудачно — не удается построить экстремаль.

В работе решается задача оптимизации траектории выведения КА с опорной круговой орбиты искусственного спутника Земли заданного радиуса и наклона на целевую эллиптическую орбиту. Перелет рассматривается в центральном ньютоновском гравитационном поле, т.е. Земля считается точечным притягивающим центром, никакие другие гравитационные влияния не учитываются. Исследование проводится в импульсной постановке. Как и ранее, предполагается, что сумма импульсов довыведения с целевой на геостационарную орбиту ограничена заданной величиной. Учет характеристической скорости маневров довыведения осуществляется по упрощенной схеме апсидальной импульсной постановки.

Рассматривается траектория перелета КА для случая ограничения характеристической скорости маневров довыведения величиной 1,5 км/с. Как показало проведенное ранее исследование, при характеристической скорости

маневров довыведения меньше 1,47... км/с структура траектории будет иной и накладные расходы оказываются значительными.

В отличие от модели КА, состоящего из двух ступеней и спутника [36, 37], в настоящей работе предполагается, что КА состоит из разгонного блока (РБ), дополнительного топливного бака (ДТБ) и спутника. При этом первая серия маневров выведения КА осуществляется за счет топлива из ДТБ. По окончании этой серии маневров КА должен оказаться на орбите «сброса» — орбите, касающейся условной границы атмосферы (с высотой перигея 100 км). Далее следует участок пассивного полета продолжительностью 120 с, на котором осуществляется сброс ДТБ. По окончании участка сброса ДТБ остается на орбите сброса, а КА импульсным воздействием переводится на «безопасную» орбиту с высотой перигея 200 км. Это и последующие импульсные воздействия осуществляются за счет топлива из основного бака РБ. Наконец, после второй серии маневров КА оказывается на целевой орбите — одной из множества эллиптических орбит, таких что характеристическая скорость довыведения спутника на ГСО ограничена заданной величиной. На этой орбите осуществляется отстыковка спутника от РБ. Сброс РБ, как и в предыдущих работах, происходит с апогея целевой орбиты за счет топлива основного бака.

В предыдущих исследованиях [35–37] при помощи параметрического анализа показано, что на построенной на основе принципа Лагранжа экстремали достигается локальный минимум.

Задача оптимизации формализуется, и на основе соответствующего принципа Лагранжа [38] ее решение сводится к решению многоточечной краевой задачи. Краевая задача принципа Лагранжа импульсной постановки решается численно методом стрельбы. Громоздкие производные в условиях трансверсальности вычисляются при помощи специально разработанной технологии численно-аналитического дифференцирования¹.

2. Формализация задачи

Перелет рассматривается в центральном ньютоновском гравитационном поле в вакууме в прямоугольной декартовой системе координат, связанной с центром Земли. Ось z этой системы перпендикулярна плоскости экватора и направлена с юга на север, ось x лежит в плоскости экватора и направлена по линии узлов начальной круговой орбиты от нисходящего узла к восходящему, ось y дополняет систему координат до правой. Система дифференциальных уравнений пассивного движения центра масс КА имеет следующий вид:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_x(t), & \dot{y}(t) &= v_y(t), & \dot{z}(t) &= v_z(t), \\ \dot{v}_x(t) &= -\frac{\mu x(t)}{r^3(t)}, & \dot{v}_y(t) &= -\frac{\mu y(t)}{r^3(t)}, & \dot{v}_z(t) &= -\frac{\mu z(t)}{r^3(t)}, \end{aligned}$$

¹ Проект численно-аналитического дифференцирования представлен по ссылке: http://mech.math.msu.su/~iliagri/ext_value.htm

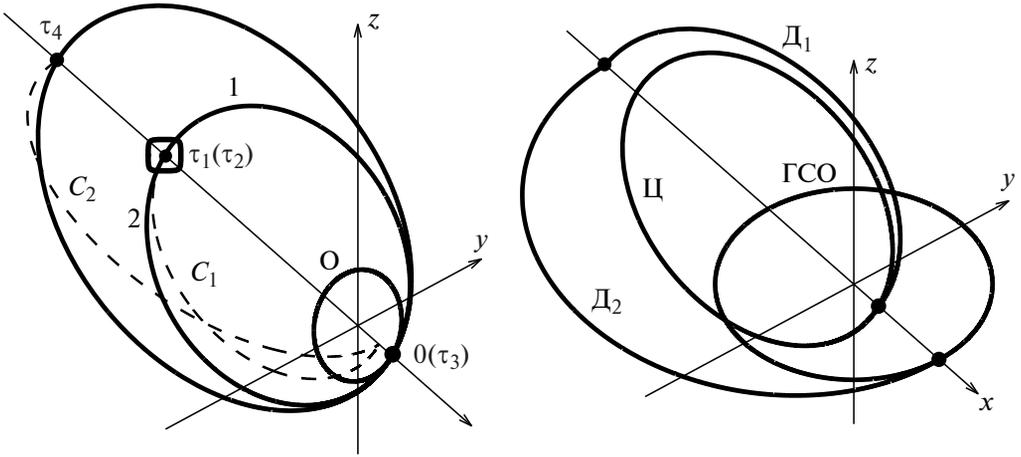


Схема перелета КА на целевую орбиту (слева) и схема довыведения с целевой орбиты на геостационарную (справа): O — опорная орбита, 1 — первая переходная орбита (до выделенной области), 2 — «безопасная» орбита (после выделенной области, апогеи первой переходной и безопасной орбит визуально неотличимы), Π — целевая орбита, C_1 — орбита сброса ДТБ, C_2 — орбита сброса РБ, D_1 — первая орбита довыведения, D_2 — вторая орбита довыведения, ГСО — геостационарная орбита.

где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — координаты центра масс КА;

$$r = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$$

— расстояние от КА до центра Земли; $v_x(t)$, $v_y(t)$, $v_z(t)$ — компоненты вектора скорости центра масс КА; μ — гравитационный параметр Земли.

Проведенные ранее исследования показали, что структурно искомая траектория перелета КА с опорной на целевую орбиту состоит из четырех пассивных участков и пяти импульсных воздействий (см. рисунок).

Пусть в момент τ подается импульсное воздействие. Оно происходит мгновенно и не меняет координат КА:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x(\tau_+) - x(\tau_-) &= 0, & y(\tau_+) - y(\tau_-) &= 0, & z(\tau_+) - z(\tau_-) &= 0, \\ \tau_+ - \tau_- &= 0. \end{aligned}$$

Здесь и далее τ_- обозначает окончание пассивного участка, $x(\tau_-)$, $y(\tau_-)$, $z(\tau_-)$ — фазовые переменные в этот момент времени (функции непрерывные слева); τ_+ — начало следующего пассивного участка, $x(\tau_+)$, $y(\tau_+)$, $z(\tau_+)$ — фазовые переменные в этот момент времени (функции непрерывные справа). С точки зрения формализации задачи и применения принципа Лагранжа [38] это разные участки и разные фазовые переменные. В основной теореме [38] подчеркивается, что они различны и обозначаются по-разному. Единая система обозначений в статье приведена для упрощения записи (индексы опущены).

В начальный момент времени КА до первого импульсного воздействия находится на опорной круговой орбите заданного наклона i_0 и радиуса R_0 . В силу выбора системы координат долгота восходящего узла $\Omega_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
 x^2(0_-) + y^2(0_-) + z^2(0_-) &= R_0^2, \\
 x(0_-)C_{0x} + y(0_-)C_{0y} + z(0_-)C_{0z} &= 0, \\
 v_x(0_-) + \frac{v_0}{R_0} (y(0_-) \cos i_0 + z(0_-) \sin i_0) &= 0, \\
 v_y(0_-) - \frac{v_0}{R_0} x(0_-) \cos i_0 &= 0, \\
 v_z(0_-) - \frac{v_0}{R_0} x(0_-) \sin i_0 &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

где $C_0 = \sqrt{\mu R_0}$, $C_{0x} = 0$, $C_{0y} = -C_0 \sin i_0$, $C_{0z} = C_0 \cos i_0$ — величина и компоненты вектора кинетического момента КА относительно центра Земли; $R_0 = R_3 + h_0$ — радиус опорной орбиты, R_3 — радиус Земли, h_0 — высота опорной орбиты над поверхностью Земли; $v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{R_0}}$ — величина вектора скорости на опорной орбите.

Начальный момент $t = 0_-$ соответствует условиям до импульсного воздействия на круговой орбите, никакому пассивному участку он не соответствует. Величины $x(0_-)$, $y(0_-)$, $z(0_-)$, $v_x(0_-)$, $v_y(0_-)$, $v_z(0_-)$ — координаты и компоненты вектора скорости на круговой орбите до импульсного воздействия с учетом (2.2) — при формализации задачи в соответствии с [38] из рассмотрения исключаются:

$$(2.4) \quad x^2(0_+) + y^2(0_+) + z^2(0_+) = R_0^2, \quad x(0_+)C_{0x} + y(0_+)C_{0y} + z(0_+)C_{0z} = 0.$$

Отметим, что из пяти условий (2.3) в формализованной постановке задачи остается два (2.4). Три последних условия (2.3) входят составной частью в величину начального импульса:

$$\begin{aligned}
 \Delta v_{0x} &= v_x(0_+) + \frac{v_0}{R_0} (y(0_+) \cos i_0 + z(0_+) \sin i_0), \\
 \Delta v_{0y} &= v_y(0_+) - \frac{v_0}{R_0} x(0_+) \cos i_0, \\
 \Delta v_{0z} &= v_z(0_+) - \frac{v_0}{R_0} x(0_+) \sin i_0, \\
 \Delta v_0 &= \sqrt{\Delta v_{0x}^2 + \Delta v_{0y}^2 + \Delta v_{0z}^2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Импульсное воздействие в начальный момент времени $t = 0$ переводит КА на первую переходную орбиту. В не известный заранее момент времени τ_1 (согласно проведенным ранее исследованиям в окрестности апогея первой переходной орбиты) подается импульс, переводящий КА на «орбиту сброса

ДТБ» — эллиптическую орбиту, касающуюся условной границы атмосферы (с высотой перигея 100 км):

$$\begin{aligned}
 x(\tau_{1+}) - x(\tau_{1-}) &= 0, & y(\tau_{1+}) - y(\tau_{1-}) &= 0, & z(\tau_{1+}) - z(\tau_{1-}) &= 0, \\
 \tau_{1+} - \tau_{1-} &= 0, \\
 R_{\text{п}}(x(\tau_{1+}), y(\tau_{1+}), z(\tau_{1+}), v_x(\tau_{1+}), v_y(\tau_{1+}), v_z(\tau_{1+})) &= R_3 + 100 \text{ км}, \\
 \Delta v_1 &= \sqrt{(v_x(\tau_{1+}) - v_x(\tau_{1-}))^2 + (v_y(\tau_{1+}) - v_y(\tau_{1-}))^2 + (v_z(\tau_{1+}) - v_z(\tau_{1-}))^2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Радиус перигея $R_{\text{п}}(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$ в зависимости от координат и скоростей КА в момент выведения на орбиту сброса ДТБ определяется по формуле

$$R_{\text{п}}(\cdot) = a(\cdot)(1 - e(\cdot)),$$

где $a(\cdot)$ и $e(\cdot)$ — большая полуось и эксцентриситет, которые вычисляются как функции координат и скоростей КА по формулам из [39].

На следующем пассивном участке продолжительностью 120 с ДТБ отстыковывается от КА. В момент времени τ_2 КА импульсным воздействием переводится на «безопасную» орбиту (с высотой перигея 200 км):

$$\begin{aligned}
 x(\tau_{2+}) - x(\tau_{2-}) &= 0, & y(\tau_{2+}) - y(\tau_{2-}) &= 0, & z(\tau_{2+}) - z(\tau_{2-}) &= 0, \\
 \tau_{2+} - \tau_{2-} &= 0, \\
 R_{\text{п}}(x(\tau_{2+}), y(\tau_{2+}), z(\tau_{2+}), v_x(\tau_{2+}), v_y(\tau_{2+}), v_z(\tau_{2+})) &= R_3 + 200 \text{ км}, \\
 \tau_{2-} - \tau_{1+} &= 120 \text{ с}, \\
 \Delta v_2 &= \sqrt{(v_x(\tau_{2+}) - v_x(\tau_{2-}))^2 + (v_y(\tau_{2+}) - v_y(\tau_{2-}))^2 + (v_z(\tau_{2+}) - v_z(\tau_{2-}))^2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

В не известный заранее момент времени τ_3 (согласно проведенным ранее исследованиям в окрестности перигея «безопасной» орбиты) КА импульсным воздействием переводится на целевую орбиту:

$$\begin{aligned}
 x(\tau_{3+}) - x(\tau_{3-}) &= 0, & y(\tau_{3+}) - y(\tau_{3-}) &= 0, & z(\tau_{3+}) - z(\tau_{3-}) &= 0, \\
 \tau_{3+} - \tau_{3-} &= 0, \\
 \Delta v_3 &= \sqrt{(v_x(\tau_{3+}) - v_x(\tau_{3-}))^2 + (v_y(\tau_{3+}) - v_y(\tau_{3-}))^2 + (v_z(\tau_{3+}) - v_z(\tau_{3-}))^2}.
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

На продолжительном пассивном участке целевой орбиты спутник отделяется от РБ. Далее довыведение спутника на геостационар осуществляется за счет топлива спутника.

Проведенные ранее исследования показали, что наилучшей точкой перехода РБ на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы, является апогей целевой орбиты. При этом импульс сброса направлен против скорости дви-

жения РБ, угол наклона не меняется:

$$R_{\text{ца}} = r(\tau_{4-}) = \sqrt{x^2(\tau_{4-}) + y^2(\tau_{4-}) + z^2(\tau_{4-})},$$

$$V_{\text{ца}} = v(\tau_{4-}) = \sqrt{v_x^2(\tau_{4-}) + v_y^2(\tau_{4-}) + v_z^2(\tau_{4-})},$$

$$V_{\text{атм}} = \sqrt{\frac{2\mu r_{\text{атм}}}{r(\tau_{4-})(r(\tau_{4-}) + r_{\text{атм}})}},$$

$$\Delta v_4 = V_{\text{ца}} - V_{\text{атм}},$$

где τ_4 — момент прохождения апогея целевой орбиты, $r_{\text{атм}} = R_3 + 100$ км, $V_{\text{атм}}$ — скорость в апогее орбиты, касающейся условной границы атмосферы, на которую переходит после импульса РБ, $R_{\text{ца}}$ — радиус апогея целевой орбиты, $V_{\text{ца}}$ — скорость в апогее целевой орбиты.

Отметим, что характеристическая скорость маневров довыведения спутника с целевой орбиты на геостационар учитывается по упрощенной схеме и осуществляется за счет трех импульсных воздействий:

$$\Delta v_{\text{дов}}(\cdot) = \Delta v_{\text{дов1}}(\cdot) + \Delta v_{\text{дов2}}(\cdot) + \Delta v_{\text{дов3}}.$$

Все три импульса довыведения вычисляются по апсидальным формулам [39].

Первое импульсное воздействие $\Delta v_{\text{дов1}}(\cdot)$ подается в перигее целевой орбиты, и оно, не меняя наклона, повышает апогей до максимально возможного удаления КА от Земли R_{max} :

$$(2.9) \quad \Delta v_{\text{дов1}}(\cdot) = \sqrt{V_{\text{цп}}^2 + V_{\text{1п}}^2 - 2V_{\text{цп}}V_{\text{1п}}},$$

$$V_{\text{цп}} = \sqrt{\frac{2\mu R_{\text{ца}}}{R_{\text{цп}}(R_{\text{ца}} + R_{\text{цп}})}}, \quad V_{\text{1п}} = \sqrt{\frac{2\mu R_{\text{max}}}{R_{\text{цп}}(R_{\text{max}} + R_{\text{цп}})}},$$

где $R_{\text{цп}}$ — радиус перигея целевой орбиты, $V_{\text{цп}}$ — скорость в перигее целевой орбиты.

Отметим, что в формулах (2.9) вместо “более естественного и понятного” соотношения

$$(2.10) \quad \Delta v_{\text{дов1}} = V_{\text{1п}} - V_{\text{цп}}$$

используется формализованное соотношение $\Delta v_{\text{дов1}} = |V_{\text{1п}} - V_{\text{цп}}|$. Разумеется, на оптимальном решении имеем $V_{\text{1п}} > V_{\text{цп}}$ и модуль (корень из квадрата) в формуле вычисления $\Delta v_{\text{дов1}}$ не нужен. Однако при промежуточных расчетах желательно учесть потенциальную возможность $V_{\text{1п}} < V_{\text{цп}}$. В случае отсутствия модуля в таких потенциально возможных случаях использование упрощенной формулы (2.10) приводит к $\Delta v_{\text{дов1}} < 0$, что, хотя и “нефизично”, но в то же время само по себе не страшно, так как на найденном “оптимальном”² решении проблема не возникает. Главная причина использования более

² Более точным термином вместо “оптимальный” является “экстремальный”, потому что проверяются только условия первого порядка (принцип Лагранжа), а условия второго порядка и достаточные условия не проверяются.

сложной формулы с модулем состоит в ухудшении сходимости итерационного процесса как в случае использования более простой формулы, так и в случае использования “не всюду определенных” условий.

Второе импульсное воздействие $\Delta v_{\text{дов2}}(\cdot)$ подается в апогее, увеличивает перигей до радиуса ГСО $R_{\text{ГСО}}$ и меняет наклон до нуля:

$$(2.11) \quad \Delta v_{\text{дов2}}(\cdot) = \sqrt{V_{1a}^2 + V_{2a}^2 - 2V_{1a}V_{2a} \cos i_{\text{ц}}},$$

$$V_{1a} = \sqrt{\frac{2\mu R_{\text{цп}}}{R_{\text{max}}(R_{\text{max}} + R_{\text{цп}})}}, \quad V_{2a} = \sqrt{\frac{2\mu R_{\text{ГСО}}}{R_{\text{max}}(R_{\text{max}} + R_{\text{ГСО}})}},$$

где $i_{\text{ц}}$ — угол наклона целевой орбиты к плоскости экватора. В момент прохождения апогея эта величина может быть вычислена по формуле

$$(2.12) \quad \cos i_{\text{ц}} = \frac{\sqrt{v_x^2(\tau_{4-}) + v_y^2(\tau_{4-})}}{\sqrt{v_x^2(\tau_{4-}) + v_y^2(\tau_{4-}) + v_z^2(\tau_{4-})}}.$$

Третье импульсное воздействие $\Delta v_{\text{дов3}}$ в перигее, не меняя наклона, уменьшает апогей до радиуса ГСО, тем самым переводя спутник в не заданную заранее точку геостационарной орбиты:

$$(2.13) \quad \Delta v_{\text{дов3}} = V_{2п} - v_{\text{ГСО}},$$

$$V_{2п} = \sqrt{\frac{2\mu R_{\text{max}}}{R_{\text{ГСО}}(R_{\text{max}} + R_{\text{ГСО}})}}, \quad v_{\text{ГСО}} = \sqrt{\frac{\mu}{R_{\text{ГСО}}}}.$$

Отметим, что величина $\Delta v_{\text{дов3}}$ фактически является константой (зависит от заданной величины $R_{\text{ГСО}}$ и заданного параметра задачи R_{max}).

Входящие в формулы величины $R_{\text{цп}}$, $R_{\text{ца}}$, $i_{\text{ц}}$ являются кеплеровскими интегралами и могут быть вычислены в любой момент нахождения КА на целевой орбите. Вычисление этих величин в момент прохождения апогея целевой орбиты τ_4 оказалось технически удобнее. Итак, $\Delta v_{\text{дов}}(\cdot)$ с использованием (2.9)–(2.13) представлено в виде зависимости

$$\Delta v_{\text{дов}}(x(\tau_{4-}), y(\tau_{4-}), z(\tau_{4-}), v_x(\tau_{4-}), v_y(\tau_{4-}), v_z(\tau_{4-})),$$

что позволяет формализовать краевые условия:

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \Delta v_{\text{дов}}(x(\tau_{4-}), y(\tau_{4-}), z(\tau_{4-}), v_x(\tau_{4-}), v_y(\tau_{4-}), v_z(\tau_{4-})) &= \Delta v^*, \\ x(\tau_{4-})v_x(\tau_{4-}) + y(\tau_{4-})v_y(\tau_{4-}) + z(\tau_{4-})v_z(\tau_{4-}) &= 0, \\ \lambda_3(x(\tau_{4-}), y(\tau_{4-}), z(\tau_{4-}), v_x(\tau_{4-}), v_y(\tau_{4-}), v_z(\tau_{4-})) &= \\ &= v_x(\tau_{4-})(z(\tau_{4-})v_x(\tau_{4-}) - x(\tau_{4-})v_z(\tau_{4-})) - \\ &- v_y(\tau_{4-})(y(\tau_{4-})v_z(\tau_{4-}) - z(\tau_{4-})v_y(\tau_{4-})) - \frac{\mu z(\tau_{4-})}{r(\tau_{4-})} = 0, \end{aligned}$$

где $\lambda_3(\cdot)$ — z-компонента вектора Лапласа. Последнее соотношение в апогее может быть записано в виде $z(\tau_{4-}) = 0$, однако при расчетах использовалось основное соотношение на z-компоненту вектора Лапласа для удобства перехода к общему случаю — задаче с ограниченной тягой. Первое соотношение в (2.14) представляет собой ограничение на характеристическую скорость довыведения КА с целевой на геостационарную орбиту. Проведенное ранее исследование показало, что это ограничение активно, и поэтому в работе оно представлено в виде равенства. Также можно считать, что для случая нестрогого неравенства рассмотрен только один главный случай (в условиях дополняющей нежесткости соответствующий множитель Лагранжа больше нуля). Второе соотношение ортогональности радиус-вектора и вектора скорости выполняется на эллиптической орбите в двух точках — перигее и апогее. Различить их можно, например, следующим образом: до момента прохождения апогея радиальная составляющая вектора скорости положительна, после прохождения апогея отрицательна. Такие строгие неравенства на дальнейшее решение задачи на основе принципа Лагранжа влияние не окажут (будут пассивными) и потому в работе не приводятся. Третье соотношение показывает, что апогей находится в плоскости экватора. С одной стороны, это условие не является ограничительным, устраняя симметрию вращения задачи относительно вектора кинетического момента КА (C_{0x} , C_{0y} , C_{0z}) опорной орбиты. С другой стороны, условие нахождения линии апсид в плоскости экватора позволяет избежать лишних расходов на довыведение КА. С третьей стороны, оно позволяет серьезно упростить формулы довыведения, использовать их апсидальный вариант.

Функционалом задачи является полезная масса спутника на целевой орбите.

Обезразмеренная масса КА в начальный момент времени равна 1 ($m(0) = 1$). Масса КА изменяется в каждый момент импульсного воздействия по формуле Циолковского:

$$m(\tau_+) = m(\tau_-) \exp\left(-\frac{\Delta v(\tau)}{c}\right),$$

где $c = P_{\text{уд}} g_3$ — скорость истечения реактивной струи; $P_{\text{уд}}$ — удельная тяга; g_3 — гравитационное ускорение у поверхности Земли.

Пусть u_1 и u_2 — части характеристической скорости маневра выведения КА на целевую орбиту, реализованные за счет топлива из ДТБ и основного бака разгонного блока соответственно. Учитывая, что сухая масса бака пропорциональна массе вмещающегося в него топлива с коэффициентом α [40, с. 93], получаем, что масса КА после выполнения первой серии маневров и сброса ДТБ равна

$$m_1 = (1 + \alpha) \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right) - \alpha.$$

Полезная масса, оставшаяся на целевой орбите, с учетом подачи импульса перевода РБ на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы, в апогее

целевой орбиты [36] равна

$$m_{\text{н}}(\cdot) = \left[(1 + \alpha) \exp\left(-\frac{u_1}{c}\right) - \alpha \right] \left[\exp\left(-\frac{u_2}{c}\right) - \frac{\alpha \left(1 - \exp\left(-\frac{u_2}{c}\right)\right)}{(1 + \alpha) \exp\left(-\frac{\Delta v_4}{c}\right) - \alpha} \right].$$

В рассматриваемом случае перелета

$$u_1 = \Delta v(0) + \Delta v(\tau_1), \quad u_2 = \Delta v(\tau_2) + \Delta v(\tau_3).$$

Следовательно, полезная масса является сложной функцией от координат и скоростей КА после импульсного воздействия в начальный момент времени, скоростей КА до и после импульсного воздействия в моменты времени τ_1 , τ_2 , τ_3 , координат и скоростей КА в момент времени τ_4 .

Таким образом, рассматриваемая задача формализована. Ее решение сводится на основе принципа Лагранжа к решению краевой задачи [38].

3. Принцип Лагранжа

Функция Лагранжа имеет вид

$$\Lambda = \sum_{i=0}^4 \left(\int_{\tau_{i+}}^{\tau_{(i+1)-}} L dt \right) + l, \quad (\tau_{0+} = 0_+),$$

лагранжиан

$$L = p_x (\dot{x} - v_x) + p_y (\dot{y} - v_y) + p_z (\dot{z} - v_z) + p_{vx} \left(\dot{v}_x + \frac{\mu x}{r^3} \right) + p_{vy} \left(\dot{v}_y + \frac{\mu y}{r^3} \right) + p_{vz} \left(\dot{v}_z + \frac{\mu z}{r^3} \right),$$

гамильтониан

$$H = p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z + p_{vx} \left(-\frac{\mu x}{r^3} \right) + p_{vy} \left(-\frac{\mu y}{r^3} \right) + p_{vz} \left(-\frac{\mu z}{r^3} \right),$$

терминант

$$l = \sum_{i=1}^3 \lambda_{xi} (x(\tau_{i+}) - x(\tau_{i-})) + \sum_{i=1}^3 \lambda_{yi} (y(\tau_{i+}) - y(\tau_{i-})) + \sum_{i=1}^3 \lambda_{zi} (z(\tau_{i+}) - z(\tau_{i-})) + \sum_{i=1}^3 \lambda_{\tau i} (\tau_{i+} - \tau_{i-}) + \lambda_{\tau 12} (\tau_{2-} - \tau_{1+} - 120) + \lambda_{R0} (x(0_+)^2 + y(0_+)^2 + z(0_+)^2 - R_0^2) + \lambda_{C0} (x(0_+)C_{0x} + y(0_+)C_{0y} + z(0_+)C_{0z}) + \lambda_{R\text{н}1} (R_{\text{н}}(x(\tau_{1+}), y(\tau_{1+}), z(\tau_{1+}), v_x(\tau_{1+}), v_y(\tau_{1+}), v_z(\tau_{1+})) - R_3 - 100) +$$

$$\begin{aligned}
& + \lambda_{R\Pi 2}(R_{\Pi}(x(\tau_{2+}), y(\tau_{2+}), z(\tau_{2+}), v_x(\tau_{2+}), v_y(\tau_{2+}), v_z(\tau_{2+})) - R_3 - 200) + \\
& \quad + \lambda_{rv4}(x(\tau_{4-})v_x(\tau_{4-}) + y(\tau_{4-})v_y(\tau_{4-}) + z(\tau_{4-})v_z(\tau_{4-})) + \\
& \quad + \lambda_{zL}\lambda_3(x(\tau_{4-}), y(\tau_{4-}), z(\tau_{4-}), v_x(\tau_{4-}), v_y(\tau_{4-}), v_z(\tau_{4-})) + \\
& + \lambda_{\text{дов}}(\Delta v_{\text{дов}}(x(\tau_{4-}), y(\tau_{4-}), z(\tau_{4-}), v_x(\tau_{4-}), v_y(\tau_{4-}), v_z(\tau_{4-})) - \Delta v^*) - \lambda_0 m_{\Pi}.
\end{aligned}$$

$\lambda_{xi}, \lambda_{yi}, \lambda_{zi}, \lambda_{\tau i}, \lambda_{\tau 12}, \lambda_{R0}, \lambda_{C0}, \lambda_{R\Pi k}, \lambda_{rv4}, \lambda_{zL}, \lambda_{\text{дов}}, \lambda_0$ ($i = 1, 2, 3, k = 1, 2$) — числовые множители Лагранжа, $p_x(\cdot), p_y(\cdot), p_z(\cdot), p_{v_x}(\cdot), p_{v_y}(\cdot), p_{v_z}(\cdot)$ — сопряженные переменные (функциональные множители Лагранжа) на каждом из четырех участков. Дополнительная нумерация функций, связанная с номером участка, формально необходимая согласно теореме [38] для упрощения системы обозначений, в работе не используется.

Условия стационарности по фазовым переменным (сопряженная система уравнений, уравнения Эйлера–Лагранжа) имеют вид

$$\begin{aligned}
(3.1) \quad \dot{p}_x &= \frac{\mu}{r^3} \left[p_{vx} - \frac{3x}{r^2} (xp_{vx} + yp_{vy} + zp_{vz}) \right], \\
\dot{p}_y &= \frac{\mu}{r^3} \left[p_{vy} - \frac{3y}{r^2} (xp_{vx} + yp_{vy} + zp_{vz}) \right], \\
\dot{p}_z &= \frac{\mu}{r^3} \left[p_{vz} - \frac{3z}{r^2} (xp_{vx} + yp_{vy} + zp_{vz}) \right], \\
\dot{p}_{vx} &= -p_x, \quad \dot{p}_{vy} = -p_y, \quad \dot{p}_{vz} = -p_z.
\end{aligned}$$

Условия трансверсальности в виду громоздкости приводятся в формальном виде:

$$\begin{aligned}
(3.2) \quad p_{\xi}(\tau_{i+}) &= \frac{\partial l}{\partial \xi(\tau_{i+})}, \quad p_{\xi}(\tau_{i-}) = -\frac{\partial l}{\partial \xi(\tau_{i-})}, \\
p_{\xi}(0_+) &= \frac{\partial l}{\partial \xi(0_+)}, \quad p_{\xi}(\tau_{4-}) = -\frac{\partial l}{\partial \xi(\tau_{4-})}, \\
\xi &= x, y, z, v_x, v_y, v_z, \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Производные функций $R_{\Pi}(\cdot), \Delta v_{\text{дов}}(\cdot), m_{\Pi}(\cdot)$, входящие в условия трансверсальности, вычисляются при помощи специально разработанной технологии численно-аналитического дифференцирования.

Условия стационарности:

$$\begin{aligned}
(3.3) \quad H(\tau_{1-}) &= -\lambda_{\tau 1}, \quad H(\tau_{1+}) = -\lambda_{\tau 1} + \lambda_{\tau 12}, \quad H(\tau_{2-}) = -\lambda_{\tau 2} + \lambda_{\tau 12}, \\
H(\tau_{2+}) &= -\lambda_{\tau 2}, \quad H(\tau_{3-}) = -\lambda_{\tau 3}, \quad H(\tau_{3+}) = -\lambda_{\tau 3}, \quad H(\tau_{4-}) = 0.
\end{aligned}$$

В начальный момент времени условие стационарности отсутствует. Следствием условий стационарности в момент времени τ_3 является непрерывность

гамильтониана: $H(\tau_{3+}) = H(\tau_{3-})$. Из условий стационарности в моменты времени τ_1 и τ_2 следует, что $H(\tau_{2+}) = H(\tau_{1-})$.

В самом деле, поскольку правая часть системы дифференциальных уравнений не зависит явно от времени, то функция $H(t)$ постоянна на решении этой системы, т.е. $H(\tau_{2-}) = H(\tau_{1+})$. Из условий стационарности получаем, что $H(\tau_{1+}) = H(\tau_{1-}) + \lambda_{\tau_{12}}$, $H(\tau_{2-}) = H(\tau_{2+}) + \lambda_{\tau_{12}}$. Вычитая из одного равенства другое, получим, что $H(\tau_{1+}) - H(\tau_{2-}) = H(\tau_{1-}) - H(\tau_{2+})$. Откуда получаем, что $H(\tau_{1-}) - H(\tau_{2+}) = 0$, т.е. $H(\tau_{2+}) = H(\tau_{1-})$, что и требовалось.

В качестве условия нормировки выбирается $\lambda_0 = 1$.

В связи со сложной структурой траектории доказательство невозможности аномального случая $\lambda_0 = 0$ представляет собой отдельное исследование и при написании данной работы не рассматривалось.

Неизвестными краевой задачи являются: 48 произвольных постоянных интегрирования системы дифференциальных уравнений (2.1), (3.1) (по 12 неизвестных на каждом из четырех участков); моменты времени $\tau_{1\pm}, \tau_{2\pm}, \tau_{3\pm}, \tau_{4-}$; 20 числовых множителей Лагранжа. Всего 75 неизвестных. Для их определения имеется 19 условий на координаты КА и время (2.2), (2.4), (2.6), (2.7), (2.14), 48 условий трансверсальности (3.2), 7 условий стационарности (3.3). Всего 75 условий, т.е. число неизвестных в краевой задаче совпадает с числом условий для их определения.

4. Численное решение

Краевая задача принципа Лагранжа сводится на основе метода стрельбы к системе нелинейных уравнений, которая решается численно модифицированным методом Ньютона–Исаева–Сонина–Федоренко [41, 42, гл. 1].

Выбор вычислительной схемы метода стрельбы оказывает очень большое влияние на скорость сходимости метода Ньютона, и более эффективным является задание параметров пристрелки, определяющих импульсное воздействие в специально выбранном базисе — модифицированном орбитальном базисе (при этом начало новой системы координат и исходной совпадают).

Базисные векторы $\vec{e}_r(\tau)$, $\vec{e}_{v_{\text{тр}}}(\tau)$, $\vec{e}_c(\tau)$ локальной системы координат в момент каждого из импульсных воздействий определяются следующим образом. Вектор $\vec{e}_r(\tau)$ направлен по радиусу-вектору КА в момент подачи импульсного воздействия, направление $\vec{e}_{v_{\text{тр}}}(\tau)$ совпадает с направлением трансверсальной компоненты скорости, $\vec{e}_c(\tau)$ дополняет систему до правой тройки. Тогда

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \vec{e}_r(\tau) &= \frac{\vec{r}(\tau)}{|\vec{r}(\tau)|}, & \vec{e}_{v_{\text{тр}}}(\tau) &= \frac{\vec{v}_{\text{тр}}(\tau)}{|\vec{v}_{\text{тр}}(\tau)|}, \\ \vec{e}_c(\tau) &= \frac{\vec{C}(\tau)}{|\vec{C}(\tau)|}, & \vec{e}_v(\tau) &= \frac{\vec{v}(\tau)}{|\vec{v}(\tau)|}, \\ \vec{C}(\tau) &= [\vec{e}_r(\tau), \vec{e}_v(\tau)], & \vec{v}_{\text{тр}}(\tau) &= [\vec{e}_c(\tau), \vec{e}_r(\tau)]. \end{aligned}$$

Скорости КА и, следовательно, компоненты вектора импульса $\Delta v_r(\tau)$, $\Delta v_{\text{TP}}(\tau)$, $\Delta v_c(\tau)$ в каждый момент τ подачи импульсного воздействия задаются в системе координат, связанной с КА:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \Delta v_r(\tau) &= \Delta v(\tau) \cos \psi(\tau) \cos \theta(\tau), & \Delta v_{\text{TP}}(\tau) &= \Delta v(\tau) \sin \psi(\tau) \cos \theta(\tau), \\ \Delta v_c(\tau) &= \Delta v(\tau) \sin \theta(\tau), \end{aligned}$$

где $\theta(\tau)$ — угол тангажа (угол между вектором импульса и плоскостью орбиты) в момент времени τ , $\psi(\tau)$ — угол рыскания (отсчитывается в плоскости орбиты от радиуса-вектора в направлении вектора скорости) в момент времени τ , $\Delta v(\tau)$ — величина импульса (значение в основной системе координат совпадает со значением в локальной).

Компоненты вектора импульса в исходной системе координат $\Delta v_x(\tau)$, $\Delta v_y(\tau)$, $\Delta v_z(\tau)$ получаются по следующим формулам перехода от одного базиса к другому, записанных в матричном виде:

$$(4.3) \quad \begin{pmatrix} \Delta v_x(\tau) \\ \Delta v_y(\tau) \\ \Delta v_z(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{rx}(\tau) & e_{vx\text{TP}}(\tau) & e_{cx}(\tau) \\ e_{ry}(\tau) & e_{vy\text{TP}}(\tau) & e_{cy}(\tau) \\ e_{rz}(\tau) & e_{vz\text{TP}}(\tau) & e_{cz}(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta v_r(\tau) \\ \Delta v_{\text{TP}}(\tau) \\ \Delta v_c(\tau) \end{pmatrix},$$

где $e_{rx}(\tau)$, $e_{ry}(\tau)$, $e_{rz}(\tau)$ — координаты вектора $\vec{e}_r(\tau)$; $e_{vx\text{TP}}(\tau)$, $e_{vy\text{TP}}(\tau)$, $e_{vz\text{TP}}(\tau)$ — координаты вектора $\vec{e}_{\text{TP}}(\tau)$; $e_{cx}(\tau)$, $e_{cy}(\tau)$, $e_{cz}(\tau)$ — координаты вектора $\vec{e}_c(\tau)$ в основной системе координат в момент времени τ .

Компоненты вектора скорости КА до импульсного воздействия $v_x(\tau_-)$, $v_y(\tau_-)$, $v_z(\tau_-)$ в исходной системе координат в момент времени τ определяются в результате решения задачи Коши (а в начальный момент времени на опорной круговой орбите по формулам из справочника [39]). Компоненты вектора скорости КА после подачи импульсного воздействия $v_x(\tau_+)$, $v_y(\tau_+)$, $v_z(\tau_+)$ в основной системе координат в момент времени τ вычисляются по формулам:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} v_x(\tau_+) &= \Delta v_x(\tau) + v_x(\tau_-), \\ v_y(\tau_+) &= \Delta v_y(\tau) + v_y(\tau_-), \\ v_z(\tau_+) &= \Delta v_z(\tau) + v_z(\tau_-). \end{aligned}$$

В вектор параметров пристрелки в начальный момент входят: φ_0 — угловое положение КА на опорной круговой орбите, величина импульса Δv_0 , два угла, задающих направление первого импульсного воздействия ψ_0 , θ_0 , и шесть значений сопряженных переменных $p_x(0_+)$, $p_y(0_+)$, $p_z(0_+)$, $p_{vx}(0_+)$, $p_{vy}(0_+)$, $p_{vz}(0_+)$. Угловое положение КА φ_0 позволяет определить координаты КА, а также его скорости на опорной орбите до импульсного воздействия по формулам из справочника [39]. В моменты времени τ_k ($k = 1, 2, 3$) импульсных воздействий, переводящих КА соответственно на «орбиту сброса ДТБ», «безопасную» и целевую орбиты, в векторы параметров пристрелки входят величины импульсных воздействий Δv_k , два угла, задающих направление импульсных воздействий ψ_k , θ_k , и шесть значений сопряженных переменных после импульсных воздействий $p_x(\tau_{k+})$, $p_y(\tau_{k+})$, $p_z(\tau_{k+})$, $p_{vx}(\tau_{k+})$, $p_{vy}(\tau_{k+})$,

$p_{vz}(\tau_{k+})$. Скорости КА после импульсного воздействия вычисляются по формулам (4.1)–(4.4). В вектор параметров пристрелки также входят продолжительности пассивных участков $\Delta\tau_1$, $\Delta\tau_3$ и $\Delta\tau_4$ ($\Delta\tau_2=120$ с — параметр задачи) и числовые множители Лагранжа λ_{R0} , λ_{C0} , $\lambda_{Rп1}$, $\lambda_{Rп2}$, λ_{rv4} , $\lambda_{дов}$, λ_{zL} . Координаты КА на каждом следующем участке интегрирования исходя из условий непрерывности берутся равными соответствующим координатам на предыдущем участке и не входят в вектор параметров пристрелки, а также соответствующие условия непрерывности не входят в вектор-функцию невязок.

В вектор-функцию невязок входят: условия на радиусы перигея КА в момент выхода на «орбиту сброса ДТВ» и «безопасную» орбиту в моменты времени τ_1 и τ_2 соответственно; ограничение на импульс довыведения в момент окончания перелета; условия нахождения КА в апогее целевой орбиты в момент τ_4 подачи последнего импульсного воздействия для перехода РБ на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы; равенство нулю z -компоненты вектора Лапласа в момент времени τ_4 ; 12 условий трансверсальности в начальный момент и конечный моменты времени; 9 следствий из условий трансверсальности на координаты КА — скачки сопряженных переменных, обусловленные наличием ограничения на радиус перигея в моменты времени τ_1 и τ_2 , и условия непрерывности сопряженных переменных в момент времени τ_3 ; 18 условий трансверсальности на скорости КА до и после импульсного воздействия в моменты времени τ_1 , τ_2 и τ_3 ; следствие из условий стационарности в моменты времени τ_1 и τ_2 ; непрерывность гамильтониана в момент времени τ_3 ; равенство нулю гамильтониана в момент времени τ_4 .

5. Результаты

Представлена экстремаль при следующих параметрах задачи:

$$\begin{aligned} \mu &= 398\,601,19 \text{ км}^3/\text{с}^2, \quad R_3 = 6378,25 \text{ км}, \quad h_0 = 200 \text{ км}, \\ R_{\max} &= 280\,000 \text{ км}, \quad R_{\text{ГСО}} = 42\,164 \text{ км}, \quad P_{\text{уд}} = 350 \text{ с}, \quad g_3 = 9,80665 \text{ м}/\text{с}^2, \\ i_0 &= 0,9 \text{ рад}, \quad \alpha = 0,08, \quad \Delta v^* = 1,5 \text{ км}/\text{с}^2, \quad \Delta\tau_2 = 120 \text{ с}. \end{aligned}$$

Основные размерные единицы, которые использовались при расчетах: 1000 км и 1 час. При переходе к другим расчетным размерным единицам сопряженные переменные должны быть пересчитаны по соответствующим формулам. Для численного интегрирования авторами использовался метод Дормана–Принса 8(7). Значения параметров пристрелки, числовых множителей Лагранжа, фазовых и сопряженных переменных в началах и концах пассивных участков приведены с необходимой для повторения расчетов точностью. Их уточнение может потребовать одну-две итерации метода Ньютона. Соответствие фазовых и сопряженных переменных в началах и концах пассивных участков можно проверить с помощью численного интегрирования. Выполнение условий трансверсальности и стационарности можно проверить с использованием технологии численно-аналитического дифференцирования.

В начальный момент времени на опорной орбите в точке, соответствующей угловому положению КА $\varphi_0 = 0,000307492$ рад, подается импульс величины $\Delta v_0 = 1,790280$ км/с, направление импульса задается двумя углами $\psi_0 = 1,570796511$ рад, $\theta_0 = -0,031065593$ рад. Координаты, скорости КА и сопряженные переменные после первого импульсного воздействия:

$$\begin{aligned}x(0_+) &= 6578,250 \text{ км}, & y(0_+) &= 1,257 \text{ км}, & z(0_+) &= 1,584 \text{ км}, \\v_x(0_+) &= -0,002944 \text{ км/с}, & v_y(0_+) &= 5,994615 \text{ км/с}, & v_z(0_+) &= 7,464706 \text{ км/с}, \\p_x(0_+) &= 0,089295766, & p_y(0_+) &= 1,813741405 \cdot 10^{-5}, \\p_z(0_+) &= 2,062570174 \cdot 10^{-5}, & p_{vx}(0_+) &= -1,047893452 \cdot 10^{-5}, \\p_{vy}(0_+) &= 0,022000079, & p_{vz}(0_+) &= 0,026020930.\end{aligned}$$

Продолжительность первого пассивного участка $\Delta\tau_1 = 7778,265$ с. Координаты, скорости КА и сопряженные переменные до импульсного воздействия, переводящего КА на «орбиту сброса ДТБ»:

$$\begin{aligned}x(\tau_{1-}) &= -20\,417,506 \text{ км}, & y(\tau_{1-}) &= 44,699 \text{ км}, & z(\tau_{1-}) &= 55,603 \text{ км}, \\v_x(\tau_{1-}) &= -0,023113 \text{ км/с}, & v_y(\tau_{1-}) &= -1,931335 \text{ км/с}, \\v_z(\tau_{1-}) &= -2,404967 \text{ км/с}, & p_x(\tau_{1-}) &= 0,009217659, \\p_y(\tau_{1-}) &= -7,999319341 \cdot 10^{-5}, & p_z(\tau_{1-}) &= -0,000116968, \\p_{vx}(\tau_{1-}) &= 5,397932380 \cdot 10^{-5}, & p_{vy}(\tau_{1-}) &= 0,019187690, \\p_{vz}(\tau_{1-}) &= 0,028158871.\end{aligned}$$

В момент времени τ_1 в окрестности апогея первой переходной орбиты подается импульс величины $\Delta v_1 = 0,017905$ км/с, направление импульса задается двумя углами $\psi_1 = -1,568891340$ рад, $\theta_1 = 0,078465462$ рад. Координаты, скорости КА и сопряженные переменные после импульсного воздействия, переводящего КА «орбиту сброса ДТБ»:

$$\begin{aligned}x(\tau_{1+}) &= -20\,417,506 \text{ км}, & y(\tau_{1+}) &= 44,699 \text{ км}, & z(\tau_{1+}) &= 55,603 \text{ км}, \\v_x(\tau_{1+}) &= -0,023085 \text{ км/с}, & v_y(\tau_{1+}) &= -1,921253 \text{ км/с}, \\v_z(\tau_{1+}) &= -2,390170 \text{ км/с}, & p_x(\tau_{1+}) &= -0,022777483, \\p_y(\tau_{1+}) &= 9,226665723 \cdot 10^{-5}, & p_z(\tau_{1+}) &= 9,732570693 \cdot 10^{-5}, \\p_{vx}(\tau_{1+}) &= -0,000150718, & p_{vy}(\tau_{1+}) &= -0,022960891, \\p_{vz}(\tau_{1+}) &= -0,024276861.\end{aligned}$$

Продолжительность второго пассивного участка — параметр задачи $\Delta\tau_2 = 120$ с. Координаты, скорости КА и сопряженные переменные до импульсного воздействия, переводящего КА на «безопасную» орбиту:

$$\begin{aligned}x(\tau_{2-}) &= -20\,413,392 \text{ км}, & y(\tau_{2-}) &= -185,840 \text{ км}, & z(\tau_{2-}) &= -231,204 \text{ км}, \\v_x(\tau_{2-}) &= 0,091656 \text{ км/с}, & v_y(\tau_{2-}) &= -1,920856 \text{ км/с}, \\v_z(\tau_{2-}) &= -2,389677 \text{ км/с},\end{aligned}$$

$$p_x(\tau_{2-}) = -0,022775591, \quad p_y(\tau_{2-}) = -0,000372271, \quad p_z(\tau_{2-}) = -0,000393840, \\ p_{vx}(\tau_{2-}) = 0,000608516, \quad p_{vy}(\tau_{2-}) = -0,022956224, \quad p_{vz}(\tau_{2-}) = -0,024271920.$$

В момент времени τ_2 подается импульс величины $\Delta v_2 = 0,017910$ км/с, направление импульса задается двумя углами $\psi_2 = 1,574537652$ рад, $\theta_2 = 0,080471408$ рад. Координаты, скорости КА и сопряженные переменные после импульсного воздействия, переводящего КА на «безопасную» орбиту:

$$x(\tau_{2+}) = -20\,413,392 \text{ км}, \quad y(\tau_{2+}) = -185,840 \text{ км}, \quad z(\tau_{2+}) = -231,204 \text{ км}, \\ v_x(\tau_{2+}) = 0,091982 \text{ км/с}, \quad v_y(\tau_{2+}) = -1,933160 \text{ км/с}, \\ v_z(\tau_{2+}) = -2,402686 \text{ км/с}, \quad p_x(\tau_{2+}) = -0,001946427, \\ p_y(\tau_{2+}) = 7,114712350 \cdot 10^{-5}, \quad p_z(\tau_{2+}) = 0,000157508, \\ p_{vx}(\tau_{2+}) = 5,197160474 \cdot 10^{-5}, \quad p_{vy}(\tau_{2+}) = 0,004386100, \\ p_{vz}(\tau_{2+}) = 0,009711318.$$

Продолжительность третьего пассивного участка $\Delta\tau_3 = 7707,227$ с. Координаты, скорости КА и сопряженные переменные до импульсного воздействия, переводящего КА на целевую орбиту:

$$x(\tau_{3-}) = 6578,250 \text{ км}, \quad y(\tau_{3-}) = -0,053 \text{ км}, \quad z(\tau_{3-}) = 0,007 \text{ км}, \\ v_x(\tau_{3-}) = 4,743611 \cdot 10^{-5} \text{ км/с}, \quad v_y(\tau_{3-}) = 6,001513 \text{ км/с}, \\ v_z(\tau_{3-}) = 7,459164 \text{ км/с}, \quad p_x(\tau_{3-}) = 0,102240000, \\ p_y(\tau_{3-}) = -8,659081488 \cdot 10^{-7}, \quad p_z(\tau_{3-}) = 9,583528338 \cdot 10^{-8}, \\ p_{vx}(\tau_{3-}) = 1,591310975 \cdot 10^{-7}, \quad p_{vy}(\tau_{3-}) = 0,021609646, \\ p_{vz}(\tau_{3-}) = 0,025485443.$$

В момент времени τ_3 в окрестности перигея «безопасной» орбиты подается импульс величины $\Delta v_3 = 1,278611$ км/с, направление импульса задается двумя углами $\psi_3 = 1,570795995$ рад, $\theta_3 = -0,025757010$ рад. Координаты, скорости КА и сопряженные переменные после импульсного воздействия, переводящего КА на целевую орбиту:

$$x(\tau_{3+}) = 6578,250 \text{ км}, \quad y(\tau_{3+}) = -0,053 \text{ км}, \quad z(\tau_{3+}) = 0,007 \text{ км}, \\ v_x(\tau_{3+}) = 5,352540 \cdot 10^{-5} \text{ км/с}, \quad v_y(\tau_{3+}) = 6,828426 \text{ км/с}, \\ v_z(\tau_{3+}) = 8,434388 \text{ км/с}, \quad p_x(\tau_{3+}) = 0,102240000, \\ p_y(\tau_{3+}) = -8,659081482 \cdot 10^{-7}, \quad p_z(\tau_{3+}) = 9,583528330 \cdot 10^{-8}, \\ p_{vx}(\tau_{3+}) = 1,591310971 \cdot 10^{-7}, \quad p_{vy}(\tau_{3+}) = 0,021609646, \\ p_{vz}(\tau_{3+}) = 0,025485443.$$

Продолжительность четвертого пассивного участка $\Delta\tau_4 = 197\,878,402$ с. На целевой орбите происходит отстыковка спутника от РБ. Последний тормозной импульс подается в точке, соответствующей апогею целевой орбиты. Координаты, скорости КА и сопряженные переменные до импульсного

воздействия, переводящего РБ на орбиту, касающуюся условной границы атмосферы:

$$\begin{aligned}
 x(\tau_{4-}) &= -226\,432,098 \text{ км}, & y(\tau_{4-}) &= 2,026 \text{ км}, & z(\tau_{4-}) &= -6,115 \cdot 10^{-10} \text{ км}, \\
 v_x(\tau_{4-}) &= -1,775160 \cdot 10^{-6} \text{ км/с}, & v_y(\tau_{4-}) &= -0,198378 \text{ км/с}, \\
 v_z(\tau_{4-}) &= -0,245034 \text{ км/с}, & p_x(\tau_{4-}) &= -9,581390462 \cdot 10^{-5}, \\
 p_y(\tau_{4-}) &= 8,230843826 \cdot 10^{-10}, & p_z(\tau_{4-}) &= -1,214480715 \cdot 10^{-9}, \\
 p_{vx}(\tau_{4-}) &= -2,090933500 \cdot 10^{-7}, & p_{vy}(\tau_{4-}) &= -0,022151189, \\
 p_{vz}(\tau_{4-}) &= 0,014169354.
 \end{aligned}$$

Далее приведены числовые множители Лагранжа, входящие непосредственно в вычислительную схему метода стрельбы:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{R0} &= 0,017815018, & \lambda_{C0} &= -7,520663278 \cdot 10^{-9}, & \lambda_{R\Pi1} &= 0,043517462, \\
 \lambda_{R\Pi2} &= -0,027848883, & \lambda_{rv4} &= 1,997985665 \cdot 10^{-15}, & \lambda_{\text{дов}} &= 0,033387259, \\
 \lambda_{zL} &= -5,445119694 \cdot 10^{-11}, & \lambda_{x1} &= 0,009217659, & \lambda_{y1} &= -7,999319341 \cdot 10^{-5}, \\
 \lambda_{z1} &= -0,000116968, & \lambda_{x2} &= -0,022775591, & \lambda_{y2} &= -0,000372271, \\
 \lambda_{z2} &= -0,000393840, & \lambda_{x3} &= 0,102240000, & \lambda_{y3} &= -8,659081488 \cdot 10^{-7}, \\
 \lambda_{z3} &= 9,583528338 \cdot 10^{-8}, & \lambda_{\tau1} &= 0, & \lambda_{\tau2} &= 0, & \lambda_{\tau3} &= 0, & \lambda_{\tau12} &= 0.
 \end{aligned}$$

6. Заключение

Использованная в работе методика одновременного выбора вычислительной схемы метода стрельбы и хорошего начального приближения соответствующих параметров пристрелки на основе решенной ранее задачи в более простой постановке оказалась эффективной — задачу построения экстремалей удалось решить. Представленная в работе задача и ее решение, являясь еще одним шагом методики «лестница задач», в последующем послужили основой решения задачи оптимизации перелета КА с большой ограниченной тягой (не в импульсной постановке). Также на основе данной методики планируется построить экстремаль в аналогичной задаче с учетом возмущений, обусловленных нецентральностью гравитационного поля Земли, сопротивлением атмосферы, а также притяжением других небесных тел.

Таким образом, найдена экстремаль, ее оптимальность на основе условий высших порядков или теоремы глобальной оптимальности не проверена и требует дополнительных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шустов Б.М., Рыжлова Л.В., Кулешов Ю.П. и др. Концепция системы противодействия космическим угрозам: астрономические аспекты // *Астрономический вестник*. 2013. Т. 47. № 4. С. 327–340.

2. *Kessler D., Cour-Palais B.* Collision Frequency of Artificial Satellites: The Creation of a Debris Belt // *J. Geophys. Res.* 1978. V. 83. P. 2637–2646.
3. *Лаврентьев В.Г., Олейников И.И., Червонов А.М.* Основные аспекты мониторинга техногенного состояния околоземного космического пространства для обеспечения безопасности космической деятельности // *Механика, управление и информатика.* 2015. Т. 7. № 1(54). С. 216–228.
4. *Логинов С.С., Назаров Ю.П., Юраш В.С., Яковлев М.В.* Проектирование системы информационного мониторинга в целях предотвращения техногенного засорения околоземного космического пространства // *Космонавтика и ракетостроение.* 2014. № 4(77). С. 145–150.
5. *Бордовицына Т.В., Александрова А.Г., Чувашов И.Н.* Численное моделирование динамики околоземных космических объектов искусственного происхождения с использованием параллельных вычислений // *Вестн. Томск. гос. ун-та.* 2011. № 4(16). С. 34–48.
6. *Трушкова Е.А., Матвеев Г.А.* Оптимизация процесса обнаружения орбит новых космических объектов с помощью параллельного расчета возможных орбит // *Программные продукты и системы.* 2015. № 3. С. 80–87.
7. *Молотов И.Е., Воронаев В.А., Юдин А.Н. и др.* Комплексы электронно-оптических средств для мониторинга околоземного космического пространства // *Экологический вестн. науч. центров черномор. эконом. сотрудничества.* 2017. № 4-2. С. 110–116.
8. *Космический мусор. Кн. 2. Предупреждение образования космического мусора / Под науч. ред. Райжунова Г.Г.* М.: Физматлит, 2014.
9. *Juergen S., Bischof B., Foth W.-O., Gunter J.-J.* ROGER a potential orbital space debris removal system [Electronic resource]. URL: <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010cosp...38.3935S> (accessed 28.05.2022)
10. *Guang Zhai, Yue Qiu, Bin Liang, Cheng Li.* On-orbit capture with flexible tether-net system // *Acta Astronautica.* 2009. No. 69, P. 613–623.
11. *Юдинцев В.В.* Динамика захвата сетью вращающегося объекта — космического мусора // *Вестн. моск. авиац. ин-та.* 2018. Т. 25. № 4. С. 37–48.
12. *Савельев Б.И.* Многоразовый космический аппарат-буксир для уборки космического мусора // *Патент № 2510359.* Российская Федерация. 2014. Бюллетень № 9.
13. *Dudziak R., Tuttle S., Barraclough S.* Harpoon technology development for the active removal of space debris // *Advances in Space Research.* 2015. V. 56(3). P. 509–527.
14. *Асланов В.С., Алексеев А.В., Ледков А.С.* Определение параметров оснащенной гарпунном тросовой системы для буксировки космического мусора // *Тр. МАИ.* 2016. № 90. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=74644>
15. *Ледков А.С.* Управление силой тяги при буксировке космического мусора на упругом тросе // *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана.* 2014. № 10. С. 383–397.
16. *Авдеев А.В., Башкин А.С., Каторгин Б.И., Парфеньев М.В.* Анализ возможности очистки околоземного пространства от опасных фрагментов космического мусора с помощью космической лазерной установки на основе автономного непрерывного химического HF-лазера // *Квантовая электроника.* 2011. Т. 41. № 7. С. 669–674.

17. *Авдеев А.В.* К вопросу борьбы с космическим мусором с помощью лазерной космической установки на основе HF-НХЛ // Тр. МАИ. 2012. № 61. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=35496>
18. *Аполлонов В.В.* Уничтожение космического мусора и объектов естественного происхождения лазерным излучением // Квантовая электроника. 2013. Т. 43. № 9. С. 890–894.
19. *Phipps C., Baker K., Libby S., et al.* Removing orbital debris with lasers // *Advances in Space Research*. 2012. V. 49(9). P. 1283–1300.
20. *Кузнецов И.И., Мухин И.Б., Снетков И.Л., Палашов О.В.* Схемы орбитальных лазеров для удаления космического мусора // *Космический мусор: фундаментальные и практические аспекты угрозы*. Сер. «Механика, управление и информатика». Под редакцией Л.М. Зеленого, Б.М. Шустова. 2019. С. 199–206.
21. *Baranov A.A., Grishko D.A., Razoumny Y.N., Li Jun.* Flyby of large-size space debris objects and their transition to the disposal orbits in LEO // *Advances in Space Research*. 2017. V. 59(12). P. 3011–3022.
22. *Баранов А.А., Гришко Д.А.* Баллистические аспекты облета крупногабаритного космического мусора на низких околокруговых орбитах // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. 2015. № 4. С. 143.
23. Space debris mitigation guidelines. Inter-Agency Space Debris Coordination Committee. Revision 2. 2020.
24. ГОСТ Р 52925–2018. Изделия космической техники. Общие требования к космическим средствам по ограничению техногенного засорения околоземного космического пространства. Введен 2019-01-01. М.: Федеральное агентство по техническому регулированию и метрологии, 2018.
25. *Голиков А.Р., Баранов А.Р., Будянский А.А., Чернов Н.В.* Выбор низковысотных орбит захоронения и перевод на них выработавших свой ресурс космических аппаратов // *Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*. 2015. № 4. С. 4–19.
26. *Бульмин Ю.Л., Созонова И.Л.* Анализ выполнения требований межагентского координационного комитета по предупреждению образования космического мусора // *Вестн. Сиб. гос. аэрокосм. ун-та им. акад. М.Ф. Решетнева*. 2013. № 6. С. 100–106.
27. *Коловский И.К., Подолякин В.Н., Шмаков Д.Н.* Оценка возможности проведения маневра увода с рабочей орбиты космических аппаратов «Гонец-М» // *Космонавтика и ракетостроение*. 2018. № 2(101). С. 107–113.
28. *Вениаминов С.С., Червонов А.М.* Космический мусор — угроза человечеству. М.: Изд-во ИКИ РАН, 2012.
29. *Зеленцов В.В.* Очистка околоземного космического пространства от космического мусора // *Аэрокосм. науч. журн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн*. 2016. № 6. С. 1–14.
30. *Адушкин В.В., Вениаминов С.С., Козлов С.И.* Как не допустить дальнейшего засорения околоземного космического пространства // *Воздушно-космическая сфера*. 2017. № 1(91). С. 96–103.
31. *Кириллов В.А., Багатеев И.Р., Тарлецкий И.С., Баландина Т.Н., Баландин Е.А.* Анализ концепций очистки околоземного космического пространства // *Сиб. журн. науки и технологий*. 2017. Т. 18. № 2. С. 343–351.

32. *Клюшников В.Ю.* Возможные направления реализации функций распределенного космического аппарата // *Космонавтика и ракетостроение.* 2014. № 2(75). С. 66–74.
33. *Шатров Я.Т., Баранов Д.А., Трушляков В.И., Куденцов В.Ю.* Определение направлений разработки методов, технических решений и средств снижения техногенного воздействия на окружающую среду для реализации на борту космических средств выведения. // *Вестн. Самар. гос. аэрокосм. ун-та.* 2011. № 1(25). С. 38–47.
34. *Афанасьева Т.И., Гридчина Т.А., Колоко Ю.Ф.* Оценка возможных орбит увода для очищения области космического пространства на высотах 900–1500 км // *Космонавтика и ракетостроение.* 2014. № 1. С. 94–105.
35. *Григорьев И.С., Проскураков А.И.* Оптимизация целевой орбиты и траектории апсидального импульсного выведения космического аппарата на нее с учетом сброса отработавших ступеней в атмосферу // *Инженер. журн.: наука и инновации.* 2019. № 4(88). <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2019-4-1869>
36. *Григорьев И.С., Проскураков А.И.* Импульсные перелеты космического аппарата со сбросом ступеней в атмосферу и фазовым ограничением (часть I) // *Инженер. журн.: наука и инновации.* 2019. № 9(93). <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2019-9-1917>
37. *Григорьев И.С., Проскураков А.И.* Импульсные перелеты космического аппарата со сбросом ступеней в атмосферу и фазовым ограничением (часть II) // *Инженер. журн.: наука и инновации.* 2019. № 10(94). <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2019-9-1925>
38. *Григорьев И.С., Григорьев К.Г.* К проблеме решения в импульсной постановке задач оптимизации траекторий перелетов космического аппарата с реактивным двигателем большой тяги в произвольном гравитационном поле в вакууме // *Космические исследования.* 2002. № 40(1). С. 88–111.
39. *Дубошин Г.Н.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976.
40. *Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В.* Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975.
41. *Исаев В.К., Сонин В.В.* Об одной модификации метода Ньютона численного решения краевых задач // *Журн. вычисл. мат. и мат. физики.* 1963. № 6(3). С. 1114–1116.
42. *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1994.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.

Поступила в редакцию 21.11.2021

После доработки 18.11.2022

Принята к публикации 30.11.2022

© 2023 г. В.В. ЕВСТАФЬЕВА, канд. физ.-мат. наук
(v.evstafieva@spbu.ru)

(Санкт-Петербургский государственный университет)

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С НЕОДНОЗНАЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Объектом изучения является n -мерная система обыкновенных дифференциальных уравнений с неоднозначной нелинейностью релейного типа при непрерывном периодическом возмущении. Рассматриваются непрерывные, периодические решения системы, траектория которых в фазовом пространстве состоит из двух кусков, соединяющихся в точках переключения, соответствующих переключению реле. Разработан алгоритм выбора параметров нелинейности, при которых в системе существует единственное асимптотически орбитально устойчивое периодическое решение с заданными колебательными свойствами, в том числе с заданным периодом и двумя точками переключения за период.

Ключевые слова: автоматические системы управления, канонические преобразования, синтез управления, релейная нелинейность, вынужденные периодические колебания, точки переключения, устойчивые решения.

DOI: 10.31857/S0005231023030030, EDN: ZYPBFM

1. Введение

Теория релейных автоматических систем активно развивается на протяжении нескольких десятилетий [1–25]. Несмотря на то, что накоплен значительный опыт и получены интересные научные результаты [14], все еще остаются открытыми вопросы, связанные с существованием и свойствами решений даже для дифференциальных уравнений 2-го порядка [13], которые требуют теоретического анализа периодических и других колебательных решений для полного понимания динамики систем с релейными характеристиками. В системах с релейной обратной связью решения могут иметь достаточно сложные режимы [14], например, скользящий режим и многократные быстрые или медленные переключения [5]. К многомерным системам затруднительно применять методы, разработанные для двухмерных систем, поэтому при их исследовании используются методы декомпозиции [10, 15]. Системы с разрывным управлением широко используются в практике автоматического регулирования. Методы припасовывания, неподвижных точек и точечных отображений до сих пор используются активно для исследования кусочно-интегрируемых (в том числе релейных) систем [17, 19, 24]. В приложениях часто

требуется регулировать поведение автоматической системы с релейной обратной связью и переводить различные типы ее движений в периодические колебания, а также управлять периодом и характером возникающих колебательных движений. Нелинейность гистерезисного (в том числе релейного) типа часто используют в прикладных задачах [6, 10, 14].

2. Постановка задачи

В данной статье в качестве объекта управления рассматривается в евклидовом пространстве n -мерная система обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной нелинейностью и внешней возмущающей силой в правой части следующего вида:

$$(1) \quad \dot{Y} = AY + Bu(\sigma) + Kf(t), \quad \sigma = (C, Y).$$

Здесь собственная матрица системы A и векторы $B = (b_1, \dots, b_n)^*$, $K = (k_1, \dots, k_n)^*$ являются вещественными и не зависят от времени t ; символ $*$ означает транспонирование; Y — вектор состояний системы. В роли нелинейности рассматривается релейная характеристика $u(\sigma)$ неидеального двухпозиционного релейного элемента, которая имеет зону гистерезиса (неоднозначности) с обходом на плоскости (σ, u) против хода часовой стрелки с пороговыми числами ℓ_1, ℓ_2 и выходными числами m_1, m_2 (ℓ_1, ℓ_2, m_1, m_2 — вещественные числа). Полагаем для определенности, что $\ell_1 < \ell_2$ и $m_1 < m_2$. Вектор $C = (c_1, \dots, c_n)^*$ определяет обратную связь в системе, является вещественным и постоянным. Рассматриваемую в статье релейную характеристику с гистерезисом широко используют в системах автоматического управления, к примеру, в моделях авторулевых. Внешнее возмущающее воздействие описывается функцией $f(t)$ из класса непрерывных, T -периодических функций.

Ввиду сложности исследования аналитическими методами систем с релейной обратной связью, особенно систем высокой размерности, все чаще используют приближенные методы с компьютерной реализацией. В этой статье нелинейная многомерная система исследуется аналитическими методами. Несмотря на громоздкость формул, полученные результаты дают возможность теоретического обоснования различных способов проектирования конкретных систем управления. Предлагается подход к решению вопроса синтеза управления, обеспечивающего существование периодических колебаний с определенными свойствами в системах с релейной обратной связью. Применяемый в статье подход подробно изложен в [7]. Суть подхода заключается в следующем: при определенных соотношениях между параметрами системы, а именно, элементами матрицы A и векторов B, C , исходная система n -го порядка неособым линейным преобразованием приводится к канонической системе специального вида, удобного для аналитического исследования и анализа пространства параметров. Данный подход позволяет определить

в пространстве параметров системы (1) области, отвечающие периодическим решениям с заданными свойствами.

Решение системы рассматриваем в классе непрерывных, T_B -периодических функций с двумя точками переключения, лежащими на гиперплоскостях вида $\sigma(t) = \ell_\eta$ ($\eta = 1, 2$), и периодом, равным или кратным периоду функции внешнего воздействия. Другими словами, период искомого решения системы задаем соотношением $T_B = kT$, связывающим период T функции $f(t)$ и некоторое натуральное число k . Гиперплоскости указанного вида далее будем называть гиперплоскостями переключения. Под точкой переключения подразумеваем такое состояние системы, при котором σ достигает одно из пороговых чисел, а нелинейная характеристика $u(\sigma)$ при этом меняет значение выходного числа. В точках переключения происходит “сшивание” кусков траектории изображающей точки решения в фазовом пространстве в силу линейных систем следующего вида:

$$(2) \quad \dot{Y} = AY + Bm_\alpha + Kf(t), \quad \alpha = 1, 2.$$

Исследования системы (1) проводились автором ранее [7–9, 15, 19–21]. В [7] получено необходимое условие существования периодического решения системы (1) с рассматриваемыми свойствами для случая, когда собственные числа матрицы системы являются простыми, вещественными, ненулевыми, и по крайней мере одно из них положительное. Кроме того, получены формулы для определения точек переключения. В [8] установлено достаточное условие существования искомого периодического решения, и доказана единственность решения с фиксированным периодом для случая простых, вещественных и ненулевых собственных чисел матрицы системы. На основе результатов, полученных А.В. Покровским [3], сформулирована теорема существования единственного асимптотически устойчивого решения с периодом, совпадающим с периодом функции внешнего возмущения. В [9] рассмотрена гурвицева матрица системы, получены условия существования и единственности периодического решения, а также проведено исследование решения на достижимость гиперплоскостей переключения и устойчивость. В [15] исследована система, матрица которой имеет нулевое собственное число. Статьи [19–21] посвящены исследованию периодических и непериодических колебательных решений с периодами, соизмеримыми с периодом функции внешнего возмущения, вида $T_B = T/k$. В [19, 20] рассмотрен вопрос существования гармонических колебаний специального типа для разных случаев, а именно, с положительным и кратным ненулевым собственным числом матрицы соответственно. В [20] матрица системы приводится к жордановой форме. В статье [21] рассмотрена вещественная симметрическая матрица с кратным ненулевым собственным числом, и исследованы непериодические колебательные решения. Матрица системы приводится к диагональному виду.

В данной статье дополнены и обобщены результаты исследования периодических решений системы (1) с периодами, кратными периоду функции $f(t)$,

когда матрица системы имеет простые ненулевые собственные числа, т.е. результаты, полученные в [7–9]. В отличие от [7–9] в настоящей статье условия достижимости гиперплоскостей переключения без касания и условия асимптотически орбитальной устойчивости решения исходной системы сформулированы в виде теорем, обобщающих случай ненулевых собственных чисел матрицы (теорема 3 и теорема 4 соответственно). Основным результатом исследования является алгоритм синтеза управления системы (1) для существования единственного асимптотически орбитально устойчивого периодического решения с заданным периодом и двумя точками переключения за период.

3. Построение систем трансцендентных уравнений

Решение системы (1) рассматриваем в форме Коши

$$(3) \quad Y(t) = e^{A(t-t_0)}Y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(\tau-t)} (Bm_\alpha + Kf(\tau)) d\tau \quad (\alpha = 1, 2),$$

где t_0 — начальный момент времени. Точки переключения Y^1, Y^2 периодического решения системы обладают следующим свойством:

$$Y^\beta = Y(t_0, m_\alpha, t_0) = Y(t_0, m_\alpha, t_0 + T_B), \quad (C, Y^\beta) = \ell_\eta, \quad \forall \alpha, \beta, \eta = 1, 2.$$

Полагаем, что изображающая точка периодического решения системы (1) начинает свое движение в точке Y^1 на гиперплоскости $\sigma = \ell_1$ в момент времени $t_0 = 0$ и достигает гиперплоскость $\sigma = \ell_2$ в точке Y^2 в момент времени $t = t_1$ (момент первой встречи с $\sigma = \ell_2$, см. определение 1 в [19]) в силу системы (2) при условии, что $m_\alpha = m_1$. Затем она возвращается на гиперплоскость $\sigma = \ell_1$ в точку Y^1 в момент времени $t = T_B$ (момент первой встречи с $\sigma = \ell_1$) в силу системы (2) при условии, что $m_\alpha = m_2$. Таким образом, согласно предписанной последовательности движения изображающей точки решения системы (1) имеем $Y(0) = Y(T_B) = Y^1, Y(t_1) = Y^2$.

Рассмотрим модель внешнего T -периодического возмущения вида

$$(4) \quad f(t) = f_0 + f_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + f_2 \sin(2\omega t + \varphi_2),$$

где $f_0, f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2, \omega$ — вещественные постоянные, $T = 2\pi/\omega, \omega > 0$.

Предположим, что система (1) имеет хотя бы одно периодическое решение с периодом T_B , и изображающая точка этого решения движется по траектории в предписанной выше ей последовательности. Приведем систему трансцендентных уравнений в общем виде относительно двух моментов времени переключения (при этом второй момент времени совпадает с периодом искомого решения системы) и отвечающих им точек переключения в фазовом пространстве [7]. Имеем

$$(5) \quad \ell_1 = (C, Y^1), \quad \ell_2 = (C, Y^2),$$

где

$$Y^2 = e^{At_1}Y^1 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}(Bm_1 + Kf(\tau))d\tau,$$

$$Y^1 = e^{A(T_B-t_1)}Y^2 + \int_{t_1}^{T_B} e^{A(T_B-\tau)}(Bm_2 + Kf(\tau))d\tau.$$

Заметим, что полученную систему из четырех уравнений можно решать относительно t_1 , T_B , Y^1 , Y^2 численными методами, но цель данного исследования состоит в том, чтобы решить точными методами. Поэтому для разрешимости системы (5) в аналитическом виде далее преобразуем исходную систему к каноническому виду.

Условия обратимости. Будем считать элементы матрицы A и вектора B параметрами. Пусть выполняются следующие условия на параметры системы (1): 1) матрица A имеет только простые собственные числа, 2) векторы $B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$ являются линейно независимыми.

Данные условия гарантируют обратимость преобразования исходной системы в канонический вид, позволяющий провести аналитическое исследование. Исходная и каноническая системы в процессе исследования являются взаимозаменяемыми. Ради простоты выкладок рассмотрим только вещественные собственные числа.

Выпишем системы трансцендентных уравнений для различных случаев ненулевых собственных чисел матрицы системы. Пусть матрица A имеет простые, вещественные и ненулевые собственные числа λ_i ($i = \overline{1, n}$). Далее кратко опишем рассмотренный в [7] общий подход к преобразованию исходной системы и приведению системы трансцендентных уравнений (5) к упрощенному виду, разделяющего моменты времени и точки переключения. В этом случае систему (1) приводим неособым преобразованием $Y = SX$ к каноническому виду

$$(6) \quad \dot{X} = A_0X + B_0u(\sigma) + K_0f(t), \quad \sigma = (\Gamma, X),$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_0 = \begin{pmatrix} k_0^1 \\ \dots \\ k_0^n \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \dots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

Элементы γ_i ($i = \overline{1, n}$) вычисляются по формуле

$$(7) \quad \gamma_i = \frac{-1}{D'(\lambda_i)} \sum_{h=1}^n c_h N_h(\lambda_i),$$

где

$$D'(\lambda_i) = \left. \frac{dD(p)}{dp} \right|_{p=\lambda_i}, \quad D(p) = |A - pE|, \quad N_h(p) = \sum_{i=1}^n b_i D_{ih}(p).$$

Здесь λ_i — корни характеристического уравнения $D(p) = 0$, E — единичная матрица, $D_{ih}(p)$ — алгебраическое дополнение элемента a_{ih} определителя $D(p)$, стоящего на пересечении i -й строки и h -го столбца, b_i — элементы вектора B , c_h — элементы вектора обратной связи C , p — некоторый вещественный параметр.

Матрица преобразования S имеет следующий вид:

$$(8) \quad S = - \begin{pmatrix} \frac{N_1(\lambda_1)}{D'(\lambda_1)} & \cdots & \frac{N_1(\lambda_n)}{D'(\lambda_n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{N_n(\lambda_1)}{D'(\lambda_1)} & \cdots & \frac{N_n(\lambda_n)}{D'(\lambda_n)} \end{pmatrix}.$$

Дополнительно в качестве параметров исходной (и, как следствие, канонической) системы рассмотрим элементы вектора обратной связи. Выбираем параметры вектора Γ таким образом, что все элементы, кроме одного, равны нулю. Индекс при ненулевом элементе вектора Γ обозначим через s . Иными словами, полагаем $\gamma_s \neq 0$ и $\gamma_j = 0$, где $j = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, n$. В соответствии с (7) параметры c_h ($h = \overline{1, n}$) выбираем из следующей системы:

$$(9) \quad \sum_{h=1}^n c_h N_h(\lambda_j) = 0, \quad \sum_{h=1}^n c_h N_h(\lambda_s) \neq 0.$$

Предположение относительно параметров вектора обратной связи позволяет расщепить систему n -го порядка на системы 1-го порядка, которые могут быть последовательно проинтегрированы и до конца исследованы аналитическими методами, а также упростить систему трансцендентных уравнений (5).

Функция $\sigma(t)$ определяется из системы дифференциальных уравнений

$$(10) \quad \sigma(t) = \gamma_s x_s, \quad \dot{x}_s = \lambda_s x_s + u(\sigma) + k_s^0 f(t),$$

остальные переменные x_j ($j \neq s$) определяются из неоднородных линейных уравнений 1-го порядка

$$(11) \quad \dot{x}_j = \lambda_j x_j + u(\sigma) + k_j^0 f(t), \quad j = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, n.$$

Отметим, что в условиях указанного выбора параметров вектора обратной связи, когда один параметр полагаем ненулевым (с индексом s), а все остальные параметры вектора нулевыми, обе гиперплоскости переключения в координатах x_i ($i = \overline{1, n}$) ориентируются ортогонально оси x_s . С помощью (10)

можно найти время перехода изображающей точки решения от одной гиперплоскости переключения к другой как постоянную величину, не зависящую от начального положения этой точки на исходной гиперплоскости переключения. Далее, если подставить найденное значение времени перехода в решения уравнений (11), то зависящие от времени выражения становятся постоянными величинами. Таким образом, решение систем уравнений (10), (11) определяет точечное отображение одной гиперплоскости переключения в другую гиперплоскость.

Решая систему уравнений (10) относительно функции $\sigma(t)$ с начальными и граничными условиями $\ell_1 = \sigma(\ell_1, 0, m_1, 0)$, $\ell_2 = \sigma(\ell_1, 0, m_1, t_1)$, $\ell_1 = \sigma(\ell_2, t_1, m_2, T_B)$, получаем систему трансцендентных уравнений относительно моментов времени переключения t_1 , T_B и формулы для нахождения точек переключения X^1 , X^2 . Система трансцендентных уравнений при условии $\lambda_s > 0$ (случай рассмотрен в [7]) принимает вид

$$\begin{aligned}
 \ell_2 = & \left(\ell_1 + \frac{\gamma_s}{\lambda_s} (m_1 + k_s^0 f_0) + \frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} \sin(\varphi_1 + \delta_1) + \right. \\
 & \left. + \frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \sin(\varphi_2 + \delta_2) \right) e^{\lambda_s t_1} - \frac{\gamma_s}{\lambda_s} (m_1 + k_s^0 f_0) - \\
 & - \frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} \sin(\omega t_1 + \varphi_1 + \delta_1) - \frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \sin(2\omega t_1 + \varphi_2 + \delta_2), \\
 \ell_1 = & \left(\ell_2 + \frac{\gamma_s}{\lambda_s} (m_2 + k_s^0 f_0) + \frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} \sin(\omega t_1 + \varphi_1 + \delta_1) + \right. \\
 & \left. + \frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \sin(2\omega t_1 + \varphi_2 + \delta_2) \right) e^{\lambda_s (T_B - t_1)} - \frac{\gamma_s}{\lambda_s} (m_2 + k_s^0 f_0) - \\
 (12) \quad & - \frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} \sin(\omega T_B + \varphi_1 + \delta_1) - \frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \sin(2\omega T_B + \varphi_2 + \delta_2),
 \end{aligned}$$

а при условии $\lambda_s < 0$ (случай рассмотрен в [9]) имеет вид

$$\begin{aligned}
 \ell_2 = & \left(\ell_1 + \frac{\gamma_s}{\lambda_s} (m_1 + k_s^0 f_0) - \frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} \sin(\varphi_1 + \delta_1) - \right. \\
 & \left. - \frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \sin(\varphi_2 + \delta_2) \right) e^{\lambda_s t_1} - \frac{\gamma_s}{\lambda_s} (m_1 + k_s^0 f_0) + \\
 & + \frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} \sin(\omega t_1 + \varphi_1 + \delta_1) + \frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \sin(2\omega t_1 + \varphi_2 + \delta_2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell_1 = & \left(\ell_2 + \frac{\gamma_s}{\lambda_s} (m_2 + k_s^0 f_0) - \frac{\gamma_s k_s^0 f_1 \sin(\omega t_1 + \varphi_1 + \delta_1)}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} - \right. \\
& \left. - \frac{\gamma_s k_s^0 f_2 \sin(2\omega t_1 + \varphi_2 + \delta_2)}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \right) e^{\lambda_s (T_B - t_1)} - \frac{\gamma_s}{\lambda_s} (m_2 + k_s^0 f_0) + \\
(13) \quad & + \frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} \sin(\omega T_B + \varphi_1 + \delta_1) + \frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \sin(2\omega T_B + \varphi_2 + \delta_2).
\end{aligned}$$

Здесь и далее $\delta_1 = \arctg(\omega/\lambda_s)$, $\delta_2 = \arctg(2\omega/\lambda_s)$.

Точки переключения $X^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)^*$, $X^2 = (x_1^2, \dots, x_n^2)^*$ преобразованной системы (6) принадлежат гиперплоскостям переключения $\sigma = \ell_\eta$ ($\eta = 1, 2$) и определяются по следующим формулам: $x_s^1 = \ell_1/\gamma_s$, $x_s^2 = \ell_2/\gamma_s$,

$$\begin{aligned}
x_j^1 = & \left(1 - e^{\lambda_j T_B} \right)^{-1} \left(e^{\lambda_j T_B} \left[m_1 \int_0^{t_1} e^{-\lambda_j \tau} d\tau + m_2 \int_{t_1}^{T_B} e^{-\lambda_j \tau} d\tau + \right. \right. \\
& + k_j^0 f_0 \int_0^{T_B} e^{-\lambda_j \tau} d\tau + k_j^0 f_1 \int_0^{T_B} e^{-\lambda_j \tau} \sin(\omega \tau + \varphi_1) d\tau + \\
& \left. \left. + k_j^0 f_2 \int_0^{T_B} e^{-\lambda_j \tau} \sin(2\omega \tau + \varphi_2) d\tau \right] \right), \\
(14) \quad & \\
x_j^2 = & \left(1 - e^{\lambda_j T_B} \right)^{-1} e^{\lambda_j t_1} \left(\int_{t_1}^{T_B} e^{-\lambda_j (T_B - \tau)} \left[m_2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + k_j^0 (f_0 + f_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + f_2 \sin(2\omega t + \varphi_2)) \right] d\tau + \right. \\
& \left. + \int_0^{t_1} e^{-\lambda_j \tau} \left[m_1 + k_j^0 (f_0 + f_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + f_2 \sin(2\omega t + \varphi_2)) \right] d\tau \right), \\
& j = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, n.
\end{aligned}$$

4. Синтез управления. Условия разрешимости систем трансцендентных уравнений

Рассмотрим вопрос выбора параметров ℓ_1 , ℓ_2 , m_1 , m_2 и c_h ($h = \overline{1, n}$) нелинейной характеристики $u(\sigma)$ для существования устойчивых периодических решений системы (1), (4) с заданными колебательными свойствами

при условии, что параметры матрицы A и вектора B обеспечивают обратимость канонического преобразования, а все остальные коэффициенты системы (1), (4) фиксированы. Синтезируем управление для системы с периодическим возмущением так, чтобы вынужденные колебания системы (1), (4) имели период T_B , равный или кратный периоду T функции $f(t)$, т.е. $T_B = kT$, где $k \in \mathbb{N}$.

Далее разделяем на два подслучая в зависимости от знака собственного числа, соответствующего ненулевому элементу вектора обратной связи, поскольку именно знак одного собственного числа влияет на вид системы трансцендентных уравнений, которая подлежит изучению и решению аналитическими методами. В случае, если полагать ненулевыми два элемента вектора обратной связи, следует рассматривать все комбинации знаков двух соответствующих собственных чисел, и количество подслучаев увеличивается до четырех.

Случай 1 (положительное собственное число). Обратимся к условиям теоремы, которые гарантируют существование единственного решения $t_1 \in (0, kT)$ системы уравнений (12) для заданного натурального k .

Теорема 1 [7]. Пусть функция $f(t)$ имеет вид (4). Пусть система (1) имеет периодическое решение с периодом $T_B = kT$, где $k \in \mathbb{N}$, $T = 2\pi/\omega$, $\omega > 0$. Пусть собственные числа матрицы A являются простыми, вещественными, ненулевыми, и по крайней мере одно из них положительное ($\lambda_s > 0$), причем элемент γ_s преобразованного вектора обратной связи Γ отличен от нуля. Пусть, наконец, имеют место неравенства

1)

$$m_2 - m_1 e^{\lambda_s k T} + \lambda_s (1 - e^{\lambda_s k T}) (\ell_1 / \gamma_s + k_s^0 L) > 0,$$

(15)

$$m_1 < -\lambda_s \left(\frac{\ell_1}{\gamma_s} + k_s^0 L \right) < m_2,$$

где

(16)

$$L = \frac{f_0}{\lambda_s} + \frac{f_1 \sin(\varphi_1 + \delta_1)}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} + \frac{f_2 \sin(\varphi_2 + \delta_2)}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}};$$

$$\delta_1 = \arctg(\omega/\lambda_s), \quad \delta_2 = \arctg(2\omega/\lambda_s);$$

2)

$$\begin{aligned} & \left(\ell_1 + \frac{\gamma_s}{\lambda_s} (m_1 + k_s^0 f_0) \right) (e^{\lambda_s k T} H - 1) + \\ & + \frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} \left(\sin(\varphi_1 + \delta_1) e^{\lambda_s k T} H - \sin \left(\frac{\omega}{\lambda_s} \ln H + \varphi_1 + \delta_1 \right) \right) + \\ (17) \quad & + \frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \left(\sin(\varphi_2 + \delta_2) e^{\lambda_s k T} H - \sin \left(\frac{2\omega}{\lambda_s} \ln H + \varphi_2 + \delta_2 \right) \right) > 0, \end{aligned}$$

где

$$(18) \quad H = \frac{m_2 - m_1}{\lambda_s(1 - e^{\lambda_s k T})(\ell_1/\gamma_s + k_s^0 L) + m_2 - m_1 e^{\lambda_s k T}};$$

и равенство

3)

$$(19) \quad \begin{aligned} \ell_2 = & \ell_1 e^{\lambda_s k T} H + \frac{\gamma_s}{\lambda_s} (m_1 + k_s^0 f_0) \left(e^{\lambda_s k T} H - 1 \right) + \\ & + \frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} \left(\sin(\varphi_1 + \delta_1) e^{\lambda_s k T} H - \sin \left(\frac{\omega}{\lambda_s} \ln H + \varphi_1 + \delta_1 \right) \right) + \\ & + \frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \left(\sin(\varphi_2 + \delta_2) e^{\lambda_s k T} H - \sin \left(\frac{2\omega}{\lambda_s} \ln H + \varphi_2 + \delta_2 \right) \right). \end{aligned}$$

Тогда система (12) при заданном натуральном k имеет единственное решение $t_1 \in (0, kT)$, которое определяется по формуле

$$(20) \quad t_1 = kT + \frac{1}{\lambda_s} \ln H.$$

Случай 2 (отрицательные собственные числа). Обратимся к условиям разрешимости системы (13), сформулированные в виде теоремы в [9].

Теорема 2 [9]. Пусть функция $f(t)$ имеет вид (4). Пусть система (1) имеет периодическое решение с периодом $T_B = kT$, где $k \in \mathbb{N}$, $T = 2\pi/\omega$, $\omega > 0$. Пусть собственные числа матрицы A являются простыми, вещественными и отрицательными. Пусть один из элементов преобразованного вектора обратной связи отличен от нуля (например, $\gamma_s \neq 0$). Пусть, наконец, имеют место следующие условия:

1) выполняется система неравенств (15), где

$$(21) \quad L = \frac{f_0}{\lambda_s} - \frac{f_1 \sin(\varphi_1 + \delta_1)}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} - \frac{f_2 \sin(\varphi_2 + \delta_2)}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}};$$

2) справедливо неравенство

$$(22) \quad \begin{aligned} & \left(\ell_1 + \frac{\gamma_s}{\lambda_s} (m_1 + k_s^0 f_0) \right) (e^{\lambda_s k T} H - 1) - \\ & - \frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} \left(\sin(\varphi_1 + \delta_1) e^{\lambda_s k T} H - \sin \left(\frac{\omega}{\lambda_s} \ln H + \varphi_1 + \delta_1 \right) \right) - \\ & - \frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \left(\sin(\varphi_2 + \delta_2) e^{\lambda_s k T} H - \sin \left(\frac{2\omega}{\lambda_s} \ln H + \varphi_2 + \delta_2 \right) \right) > 0, \end{aligned}$$

где H определяется по формуле (18);

3) выполняется равенство

$$(23) \quad \begin{aligned} \ell_2 = & \ell_1 e^{\lambda_s k T} H + \frac{\gamma_s}{\lambda_s} (m_1 + k_s^0 f_0) \left(e^{\lambda_s k T} H - 1 \right) - \\ & - \frac{\gamma_s k_s^0 f_1}{\sqrt{\lambda_s^2 + \omega^2}} \left(\sin(\varphi_1 + \delta_1) e^{\lambda_s k T} H - \sin \left(\frac{\omega}{\lambda_s} \ln H + \varphi_1 + \delta_1 \right) \right) - \\ & - \frac{\gamma_s k_s^0 f_2}{\sqrt{\lambda_s^2 + 4\omega^2}} \left(\sin(\varphi_2 + \delta_2) e^{\lambda_s k T} H - \sin \left(\frac{2\omega}{\lambda_s} \ln H + \varphi_2 + \delta_2 \right) \right). \end{aligned}$$

Тогда система (13) при заданном натуральном k имеет единственное решение $t_1 \in (0, kT)$, которое определяется по формуле (20).

Пусть найдено решение t_1 системы трансцендентных уравнений, параметры которой удовлетворяют условиям выше при заданном $k \in \mathbb{N}$. Теорему о существовании и единственности периодического решения рассматриваемого класса для случая ненулевых собственных чисел матрицы системы, приведенной и доказанной в [8], дополним следующим условием: t_1 является наименьшим решением первого уравнения трансцендентной системы и kT — наименьшим решением второго уравнения системы при фиксированном t_1 , поскольку t_1, kT — моменты времени переключения (моменты первой встречи с гиперплоскостями).

5. Условия достижимости гиперплоскостей переключения

Качество переходных процессов связано с выполнением двух задач: 1) обеспечением требуемого режима, в том числе с заданным периодом; 2) предотвращением типичного для релейных систем скользящего режима.

Пусть изображающая точка искомого решения системы (1) движется в предписанной ей последовательности. Будем рассматривать только такие соотношения между параметрами системы, для которых каноническое преобразование остается неособым, т.е. выполняется условие обратимости. В силу неособого преобразования результаты исследования канонической системы переносятся на исходную систему. Рассмотрим условия достижимости изображающей точкой решения канонической системы гиперплоскостей переключения, причем без касания во избежание режима скольжения.

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 1, причем собственные числа λ_j ($j \neq s$) являются отрицательными, или условия теоремы 2. Пусть система (1) неособым преобразованием приведена к каноническому виду (6). Пусть имеют место следующие условия:

- 1) $n - 1$ элементов γ_j ($j \neq s$) вектора Γ равны нулю;
- 2) при $\gamma_s \lambda_s > 0$, $m_1 < m_2$, $\ell_1 < \ell_2$ выполняются неравенства $-\gamma_s m_2 / \lambda_s < \ell_1$ и $-\gamma_s m_1 / \lambda_s > \ell_2$;
- 3) $\lambda_s \ell_1 + \gamma_s m_2 + \gamma_s k_s^0 f(t_\beta) \neq 0$ и $\lambda_s \ell_2 + \gamma_s m_1 + \gamma_s k_s^0 f(t_\beta) \neq 0$ ($\beta = 1, 2$), где t_1 — момент времени первого переключения, $t_2 = 0$;

4) множество Q описывается системой неравенств

$$\begin{cases} \|\bar{X}\| \leq \frac{1}{\min_j |\lambda_j|} \left[\max_{\alpha=1,2} |m_\alpha| \cdot \|\bar{B}_0\| + M \cdot \|\bar{K}_0\| \right], j = \overline{1, n}, j \neq s, \\ \ell_1 \leq x_s \gamma_s \leq \ell_2, \end{cases}$$

где векторы \bar{X} , \bar{B}_0 , \bar{K}_0 размерности $(n-1)$ отличаются от векторов канонической системы X , B_0 , K_0 тем, что в них исключен s -й элемент, константа M определяется из неравенства $|f(t)| \leq |f_0| + |f_1| + |f_2| = M$, справедливого для любого t , при этом f_0, f_1, f_2 являются постоянными коэффициентами функции $f(t)$.

Тогда в фазовом пространстве изображающая точка периодического решения канонической системы, начав свое движение в $X_0 \in Q$ на одной из гиперплоскостей вида $\sigma(t) = \ell_\eta$ ($\eta = 1, 2$), достигает вторую гиперплоскость без касания в силу системы (6).

Доказательство теоремы 3 приведено в Приложении.

В реальных системах начальные условия задаются с определенной точностью. Поэтому возникает вопрос, как малые изменения начальных условий влияют на поведение решения при $t \rightarrow \infty$.

Теорема 4. Пусть каноническая система (6) для $\lambda_s \neq 0$ имеет kT -периодическое решение рассматриваемого класса, и выполняются условия теоремы 3. Тогда решение системы (6) является асимптотически устойчивым, а в силу неособого преобразования решение исходной системы (1) является асимптотически орбитально устойчивым.

Доказательство теоремы 4. В работе [9] после формулировки теоремы 3.3 проведено исследование периодического решения на устойчивость, в результате которого доказано существование асимптотически устойчивого kT -периодического решения системы (6) и установлена асимптотически орбитальная устойчивость решения системы (1) для $\lambda_j < 0, j \neq s$, независимо от знака λ_s . Условия следствия (к теореме 3.3) включены в условия теоремы 3 настоящей статьи. Таким образом, теорема 4 обобщает результаты, установленные в [9].

6. Алгоритм синтеза управления

В релейных системах при внешнем бигармоническом воздействии, имеющем период T , могут существовать вынужденные колебания с периодом, кратным периоду внешнего воздействия, т.е. kT , где $k \in \mathbb{N}, k > 1$. Такие колебания реализуются только в нелинейных системах и называются субгармоническими порядка k . Гармонические вынужденные колебания с периодом T также могут существовать в системах рассматриваемого класса наряду с субгармоническими колебаниями. Такое явление называют захватыванием основной частоты и ее доли [1].

В данном исследовании разработан алгоритм, позволяющий в пространстве параметров системы (1) локализовать такие области, которые соответствуют kT -периодическим решениям с определенными свойствами, а также выявить области, не отвечающие искомым решениям. Следует отметить, что k задается из множества натуральных чисел в зависимости от того, какое вынужденное колебание (гармоническое или субгармоническое) представляет интерес для исследования. Алгоритм предназначен для выбора значений параметров $\ell_1, \ell_2, m_1, m_2, c_h$ ($h = \overline{1, n}$) релейной характеристики $u(\sigma)$, при которых существует асимптотически орбитально устойчивое kT -периодическое решение системы (1) с двумя точками переключения за период на гиперплоскостях вида $\sigma = \ell_\eta$ ($\eta = 1, 2$). Заметим, что все остальные параметры системы (1) фиксированы и удовлетворяют условиям обратимости системы (1).

Ниже приведем алгоритм.

1. Рассчитываем период функции $f(t)$ вида (4) по формуле $T = 2\pi/\omega$. Задаем любое $k \in \mathbb{N}$, и тем самым задаем период искомого решения $T_B = kT$.

2. Строим характеристическое уравнение $D(p) = |A - pE| = 0$.

3. Находим собственные числа λ_i ($i = \overline{1, n}$) матрицы A , согласно предположениям они простые, ненулевые и вещественные. Применимость алгоритма возможна в двух случаях: 1) одно собственное число является положительным, остальные — отрицательными, 2) все собственные числа являются отрицательными.

3.1. Если среди λ_i есть положительное число, то обозначим его λ_s . Если все λ_i являются отрицательными, то положим $\lambda_s = \max_i \lambda_i$. Теперь $\lambda_s > 0$ или $\lambda_s < 0$, остальные $(n - 1)$ собственных чисел λ_j отрицательные.

3.1.1. Строим матрицу неособого преобразования S по формуле (8).

3.1.2. Находим обратную матрицу S^{-1} .

3.1.3. Вычисляем вектор K_0 по формуле $K_0 = S^{-1}K$, где K — вещественный вектор, стоящий перед функцией $f(t)$ в системе (1).

3.1.4. Положим $\gamma_s = \text{sgn}(\lambda_s)$, при этом необходимое условие для достижимости гиперплоскостей переключения выполняется.

3.1.5. Положим $\sum_{h=1}^n c_h N_h(\lambda_s) = -D'(\lambda_s)\gamma_s$, исходя из (7), (9). Тогда система (9) принимает следующий вид:

$$\sum_{h=1}^n c_h N_h(\lambda_j) = 0, \quad \sum_{h=1}^n c_h N_h(\lambda_s) = -D'(\lambda_s)\gamma_s.$$

Решаем полученную неоднородную (поскольку $D'(\lambda_s)\gamma_s \neq 0$) систему n линейных алгебраических уравнений. Находим ее решение c_h ($h = \overline{1, n}$).

3.1.6. Рассчитываем значения $\delta_1 = \arctg(\omega/\lambda_s)$, $\delta_2 = \arctg(2\omega/\lambda_s)$.

3.1.7. Положим $\ell_1 = 10\text{sgn}(\lambda_s)$.

3.1.8. Если собственное число $\lambda_s > 0$, то переходим к шагу 3.1.9, если $\lambda_s < 0$ — к шагу 3.2.9.

3.1.9. Рассчитываем значение L по формуле (16).

3.1.10. Обозначим через P выражение, стоящее во втором неравенстве системы (15), т.е. $P = -\lambda_s (\ell_1/\gamma_s + k_s^0 L)$. Вычисляем P . Далее задаем любое вещественное значение m_1 такое, что $m_1 < P$ согласно (15). Задаем любое вещественное значение m_2 такое, что $m_2 > P$ согласно (15) и $m_2 > -\lambda_s \ell_1/\gamma_s$ согласно условию 2) теоремы 3. Проверяем условие 3) теоремы 3 при $t_\beta = 0$, а именно, $\lambda_s \ell_1 + \gamma_s m_2 + \gamma_s k_s^0 f(0) \neq 0$: если выполняется, то переходим к шагу 3.2.11, в противном случае нарушается условие достижимости гиперплоскостей переключения без касания и переходим к шагу 8.

3.1.11. Рассчитываем значение H по формуле (18).

3.1.12. Проверяем условие (17): если выполняется, то переходим к шагу 3.1.13, в противном случае нарушается одно из условий теоремы 1 и переходим к шагу 8.

3.1.13. Находим значение параметра ℓ_2 по формуле (19), и если оно удовлетворяет условиям 2) и 3) теоремы 3 при $t_\beta = 0$, а именно, $m_1 < -\lambda_s \ell_2/\gamma_s$ и $\lambda_s \ell_2 + \gamma_s m_1 + \gamma_s k_s^0 f(0) \neq 0$, то переходим к шагу 3.1.14, в противном случае — к шагу 8.

3.1.14. Вычисляем значение t_1 по формуле (20); если t_1, kT являются наименьшими решениями первого и второго уравнений трансцендентной системы соответственно, и условие 3) теоремы 3 при $t_\beta = t_1$ выполняется, то переходим к шагу 4, в противном случае — к шагу 8.

3.2.9. Рассчитываем значение L по формуле (21).

3.2.10. Обозначим через P выражение, стоящее во втором неравенстве системы (15). Вычисляем P . Далее задаем любое вещественное значение m_1 такое, что $m_1 < P$ согласно (15). Задаем любое вещественное значение m_2 такое, что $m_2 > P$ согласно (15) и $m_2 > -\lambda_s \ell_1/\gamma_s$ согласно условию 2) теоремы 3. Проверяем условие 3) теоремы 3 при $t_\beta = 0$, а именно, $\lambda_s \ell_1 + \gamma_s m_2 + \gamma_s k_s^0 f(0) \neq 0$: если выполняется, то переходим к шагу 3.2.11, в противном случае переходим к шагу 8.

3.2.11. Рассчитываем значение H по формуле (18).

3.2.12. Проверяем условие (22): если выполняется, то переходим к шагу 3.2.13, в противном случае нарушается одно из условий теоремы 2 и переходим к шагу 8.

3.2.13. Вычисляем значение ℓ_2 по формуле (23), и если оно удовлетворяет условиям 2) и 3) теоремы 3 при $t_\beta = 0$, то переходим к шагу 3.2.14, в противном случае — к шагу 8.

3.2.14. Вычисляем значение t_1 по формуле (20), и если условие 3) теоремы 3 при $t_\beta = t_1$ выполняется, то переходим к шагу 4, в противном случае — к шагу 8.

4. Находим координаты точек переключения X^1, X^2 канонической системы (6): $x_s^1 = \ell_1/\gamma_s, x_s^2 = \ell_2/\gamma_s$, остальные — по формулам (14), полученные

точки принадлежат траектории асимптотически устойчивого kT -периодического решения системы (6).

5. Вычисляем точки переключения Y^1, Y^2 обратным преобразованием $Y^\beta = SX^\beta$ ($\beta = 1, 2$).

6. Строим по формуле (3) траекторию искомого асимптотически орбитально устойчивого периодического решения системы (1) с начальным значением Y^1 или по формуле $X(t) = S^{-1}Y(t)$ траекторию асимптотически устойчивого периодического решения системы (6) с начальным значением X^1 .

7. Завершаем алгоритм. Определены параметры c_h ($h = \overline{1, n}$), ℓ_1, ℓ_2, m_1, m_2 , которые удовлетворяют условиям теоремы 1 из [8], теоремы 3 и теоремы 4. Таким образом, при этих значениях параметров в рассматриваемой системе существует единственное асимптотически орбитально устойчивое kT -периодическое решение с точками переключения Y^1, Y^2 за период, причем изображающая точка решения достигает гиперплоскостей вида $\sigma(t) = \ell_\eta$ ($\eta = 1, 2$) в точках переключения без касания. Построена траектория решения.

8. Завершаем алгоритм. При нарушении хотя бы одного из условий теоремы 1 или теоремы 2 не выполняются необходимые условия существования решения периода kT с двумя точками переключения за период, которые принадлежат гиперплоскостям переключения вида $\sigma(t) = \ell_\eta$ ($\eta = 1, 2$). При нарушении условий 2) и 3) теоремы 3 не выполняется условие достижимости гиперплоскостей переключения без касания (решение может перейти в положение равновесия при его наличии или скользящий режим). Следовательно, выбранные значения параметров c_h ($h = \overline{1, n}$), ℓ_1, m_1, m_2 релейной характеристики $u(\sigma)$ не гарантируют, что в системе (1) существует орбитально устойчивое kT -периодическое решение с двумя точками переключения за период, которые лежат на гиперплоскостях переключения. В этом случае следует выбрать другие значения параметров.

7. Пример реализации алгоритма

Пусть $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} -12 & -11 & -37 \\ 4,6 & 3,6 & 15,4 \\ 1,8 & 1,8 & 5,2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 12,5 \\ -4,5 \\ -2,5 \end{pmatrix}$. Векторы B, AB, A^2B являются линейно независимыми, т.к.

$$\begin{vmatrix} 1 & -12 & 26,8 \\ 0 & 4,6 & -10,92 \\ 0 & 1,8 & -3,96 \end{vmatrix} = 1,44 \neq 0.$$

Пусть внешнее воздействие описывает T -периодическая функция

$$f(t) = 1 + 2 \sin(t + \pi/3) + 5 \sin(2t).$$

1. Рассчитываем период $T = 2\pi$ и задаем $k = 2$.
2. Выписываем характеристическое уравнение

$$D(p) = \begin{vmatrix} -12 - p & -11 & -37 \\ 4,6 & 3,6 - p & 15,4 \\ 1,8 & 1,8 & 5,2 - p \end{vmatrix} = 0.$$

3. Находим корни характеристического уравнения — собственные числа матрицы A : $\lambda_1 = -0,2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$.

3.1. Все собственные числа отрицательные. Положим $\lambda_s = \lambda_1$, т.к. λ_1 является наибольшим собственным числом.

3.1.1. Строим неособую матрицу преобразования $S = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3.1.2. Находим обратную матрицу $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3.1.3. Находим вектор $K_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

3.1.4. Положим $\gamma_s = -1$, условие $\gamma_s \lambda_s > 0$ выполняется.

3.1.5. Вычисляем $-D'(\lambda_s)\gamma_s = -1,44$. Из неоднородной системы линейных алгебраических уравнений имеем следующие значения параметров вектора обратной связи: $c_1 = -1$, $c_2 = -1$, $c_3 = -4$.

3.1.6. Рассчитываем $\delta_1 \approx -1,373401$, $\delta_2 \approx -1,471128$ (здесь и далее расчеты проведены с точностью 10^{-6}).

3.1.7. Положим $\ell_1 = -10$.

3.1.8. Имеем $\lambda_s < 0$, переходим к шагу 3.2.9.

3.2.9. Рассчитываем $L \approx -1,896301$.

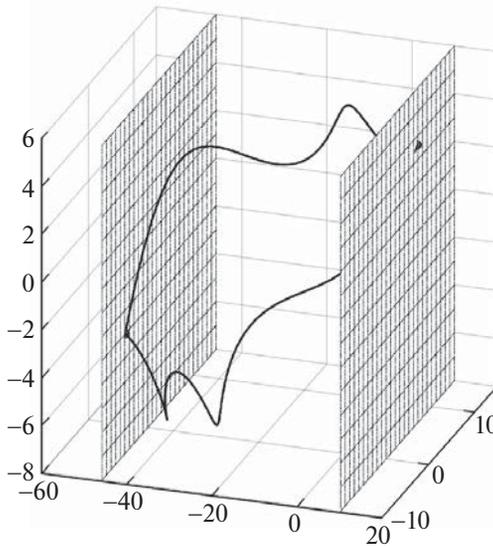
3.2.10. Вычисляем выражение, стоящее во втором неравенстве системы (15), $P \approx 2,7585203$. Далее задаем любое вещественное значение m_1 такое, что $m_1 < P$, положим $m_1 = -9$. Вычисляем $-\lambda_s \ell_1 / \gamma_s = 2$ и задаем любое вещественное значение m_2 такое, что $m_2 > P$ и $m_2 > 2$, положим $m_2 = 7,54$. Проверяем условие 3) теоремы 3 при $t_\beta = 0$, а именно, $\lambda_s \ell_1 + \gamma_s m_2 + \gamma_s k_s^0 f(0) \approx -0,07478 \neq 0$. Переходим к шагу 3.2.11.

3.2.11. Рассчитываем $H \approx 2,884940$.

3.2.12. Значения параметров ℓ_1 , m_1 , m_2 удовлетворяют неравенству (22), согласно которому $43,570427 > 0$. Переходим к шагу 3.2.13.

3.2.13. Находим $\ell_2 \approx 46,050182$. Проверяем условие достижимости без касания при $t_\beta = 0$: $5,254065 \neq 0$ верно. Переходим к шагу 3.2.14.

3.2.14. Рассчитываем момент первого переключения $t_1 \approx 7,268850$ (t_1 , $2T$ являются наименьшими решениями первого и второго уравнения системы (13) соответственно). Проверяем условие 3) теоремы 3 при $t_\beta = t_1$: первое



Решение с периодом 4π и точками переключения X^1, X^2 .

неравенство $9,250182 \neq 0$ и второе неравенство $14,579030 \neq 0$ выполняются. Переходим к шагу 4.

4. Находим точки переключения канонической системы X^1, X^2 :

$$X^1 \approx \begin{pmatrix} 10 \\ 6,822206 \\ 3,640645 \end{pmatrix}, \quad X^2 \approx \begin{pmatrix} -46,050182 \\ -4,946928 \\ -2,983556 \end{pmatrix}.$$

5. Находим точки переключения исходной системы Y^1, Y^2 :

$$Y^1 \approx \begin{pmatrix} -31,337690 \\ 15,900271 \\ 6,359355 \end{pmatrix}, \quad Y^2 \approx \begin{pmatrix} 214,312942 \\ -88,096622 \\ -43,066625 \end{pmatrix}.$$

6. Строим траекторию решения канонической системы. На рисунке представлен график траектории 4π -периодического решения в фазовом пространстве (x_1, x_2, x_3) системы с начальной точкой X^1 . Отмечены точки переключения на соответствующих гиперплоскостях переключения (выделены штриховкой), которые ориентированы ортогонально оси x_1 , поскольку $\gamma_1 \neq 0$, причем $-46,050182 \leq x_1 \leq 10$.

7. Завершаем алгоритм со следующим выводом: при $\ell_1 = -10$, $\ell_2 \approx 46,050182$, $m_1 = -9$, $m_2 = 7,54$ и $\gamma_1 = -1$ в преобразованной системе или $c_1 = -1$, $c_2 = -1$, $c_3 = -4$ в исходной системе существует единственное асимптотически устойчивое или соответственно асимптотически орбитально устойчивое 4π -периодическое решение с двумя точками переключения за период.

8. Заключение

На основе результатов, полученных в [7–9] и данной статье, разработан алгоритм выбора в пространстве параметров системы областей, соответствующих искомому решению, а также поиска в фазовом пространстве точек переключения этого решения. При описании алгоритма применены результаты теорем, которые установлены строгими аналитическими выкладками с использованием равносильных переходов и свойств логарифмической функции. Полученная система условий на параметры представляется непротиворечивой и имеющей решение в виде непустого множества. Для подтверждения корректности и работоспособности алгоритма приведен пример, демонстрирующий расчет параметров нелинейной характеристики и вектора обратной связи, при которых в системе существует асимптотически орбитально устойчивое 4π -периодическое решение (субгармоническое вынужденное колебание 2-го порядка) с двумя точками переключения за период. При реализации алгоритма на примере трехмерной системы использованы стандартные функции Matlab. В случае необходимости полной автоматизации процесса выбора параметров управления и построения траектории решения алгоритм может служить основой (пошаговой инструкцией) для написания программного кода.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 3. Изображающая точка решения канонической системы, начиная свое движение из точки на гиперплоскости, перемещается в предписанной ей последовательности между двумя гиперплоскостями переключения вдоль оси координат x_s при условии 1) теоремы 3, причем гиперплоскости в фазовом пространстве расположены ортогонально оси x_s .

Каноническую систему вида (6) при условии 1) теоремы 3 представим в виде двух следующих систем:

$$\dot{\bar{X}} = \bar{A}_0 \bar{X} + \bar{B}_0 m_\alpha + \bar{K}_0 f(t), \quad \begin{cases} \sigma(t) = \gamma_s x_s, \\ \dot{x}_s = \lambda_s x_s + m_\alpha + k_s^0 f(t), \end{cases}$$

где \bar{A}_0 — матрица, на диагонали которой расположены собственные числа λ_j ($j \neq s$), остальные элементы нулевые, $\bar{X} = (x_1, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_n)^*$, $\bar{B}_0 = (b_1^0, \dots, b_{s-1}^0, b_{s+1}^0, \dots, b_n^0)^*$, $\bar{K}_0 = (k_1^0, \dots, k_{s-1}^0, k_{s+1}^0, \dots, k_n^0)^*$, $\lambda_j < 0$, $b_j^0 = 1$, $j = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, n$.

При условии, что вещественные собственные числа λ_j ($j \neq s$) являются отрицательными, с помощью функций Ляпунова в фазовом пространстве системы (6) можно выделить на гиперплоскостях переключения ограниченное, замкнутое, выпуклое множество, которое отображается в себя в силу решения канонической системы. Нулевое решение системы $\dot{\bar{X}} = \bar{A}_0 \bar{X}$ является асимптотически устойчивым, поэтому существует положительно определенная квадратичная форма $V(\bar{X}) = \bar{X}^* V \bar{X}$. Уравнение вида $V(\bar{X}) = C_\nu$

$(C_\nu - \text{постоянные, } \nu \in \mathbb{N})$, описывает цилиндрические поверхности в n -мерном фазовом пространстве канонической системы.

Для пересечения области притяжения $V(\bar{X}) \leq \min_\nu C_\nu$ с гиперплоскостями переключения вида $(\Gamma, X) = \ell_\eta$ ($\eta = 1, 2$) необходимо потребовать выполнение следующих условий:

$$(П.1) \quad -(\Gamma, A_0^{-1}B_0m_2) < \ell_1, \quad -(\Gamma, A_0^{-1}B_0m_1) > \ell_2,$$

которые означают, что при отсутствии внешнего воздействия виртуальные точки устойчивости $X^{(\alpha)} = -A_0^{-1}B_0m_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) канонической системы расположены вне зоны неоднозначности $u(\sigma)$.

Выбор элементов вектора Γ согласно условию 1) теоремы 3 приводит неравенства (П.1) при $\lambda_s \neq 0$ к упрощенному виду

$$(П.2) \quad -\gamma_s m_2 / \lambda_s < \ell_1, \quad -\gamma_s m_1 / \lambda_s > \ell_2.$$

Очевидно, что система неравенств (П.2) имеет место, если $\gamma_s \lambda_s > 0$ при $m_1 < m_2$ и $\ell_1 < \ell_2$. Заметим, что при $\lambda_s > 0$ имеем $\gamma_s > 0$, а при $\lambda_s < 0$ имеем $\gamma_s < 0$. Таким образом, условие 2) теоремы 3 необходимо потребовать для того, чтобы область притяжения пересекала гиперплоскости переключения.

Пересечение множества, описанного неравенством $V(\bar{X}) \leq \min_\nu C_\nu$, с гиперплоскостями переключения дает выпуклое компактное множество Q , которое задается в соответствии с условием 4) теоремы 3. Если начальные точки X_0 взяты из области, ограниченной поверхностью $V(\bar{X}) = \min_\nu C_\nu$, то траектория изображающей точки решения в силу канонической системы останется в этой области фазового пространства. Отсюда следует утверждение, что изображающая точка решения системы (6), начав свое движение в $X_0 \in Q$ на одной из гиперплоскостей вида $\sigma(t) = \ell_\eta$ ($\eta = 1, 2$), достигает за конечный промежуток времени другую гиперплоскость.

Далее определим условия, при которых не возникнет режим скольжения. Выпишем условие, при котором изображающая точка решения системы (6) достигает гиперплоскости без касания в точках переключения $X = X^\beta$ в соответствующие моменты времени t_β ($\beta = 1, 2$), где t_1 — момент времени первого переключения, $t_2 = kT$ — момент времени второго переключения. Существование и единственность t_1 при заданном $k \in \mathbb{N}$ гарантируют условия теоремы 1 или условия теоремы 2 в зависимости от знака собственного значения λ_s . Итак, имеем неравенство $(\Gamma, \dot{X}) \neq 0$. С учетом условия 1) теоремы 3 последнее неравенство для $\lambda_s \neq 0$ переписывается в виде условия 3) теоремы 3, которое обеспечивает достижимость гиперплоскостей переключения без касания. Заметим, что функция $f(t)$ является T -периодической: ее значение в момент времени второго переключения kT совпадает со значением в нуле, поэтому в условии 3) теоремы 3 для простоты используем $t_2 = 0$. Теорема 3 доказана полностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цыпкин Я.З.* Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974.
2. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.
3. *Покровский А.В.* Существование и расчет устойчивых режимов в релейных системах // Автомат. и телемех. 1986. № 4. С. 16–23.
4. *Visintin A.* Differential models of hysteresis. Berlin: Springer, 1994.
5. *Johansson K.H., Rantzer A., Astrom K.J.* Fast switches in relay feedback systems // Automatica. 1999. Vol. 35. No. 4. P. 539–552.
6. *Mayergoyz I.D.* Mathematical models of hysteresis and their applications. Amsterdam: Elsevier, 2003.
7. *Евстафьева В.В.* О необходимых условиях существования периодических решений в динамической системе с разрывной нелинейностью и внешним периодическим воздействием // Уфимск. матем. журн. 2011. Т. 3. № 2. С. 20–27.
8. *Yevstafyeva V.V.* Existence of the unique kT -periodic solution for one class of nonlinear systems // J. Sib. Fed. Univ. Math. & Phys. 2013. Vol. 6. No. 1. P. 136–142.
9. *Евстафьева В.В.* Об условиях существования двухточечно-колебательного периодического решения в неавтономной релейной системе с гурвицевой матрицей // Автомат. и телемех. 2015. № 6. С. 42–56.
10. *Rachinskii D.* Realization of arbitrary hysteresis by a low-dimensional gradient flow // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2016. Vol. 21. No. 1. P. 227–243.
11. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of periodic solutions to automatic control system with relay nonlinearity and sinusoidal external influence // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2017. Vol. 27. No. 2. P. 204–211.
12. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of subharmonic solutions to a hysteresis system with sinusoidal external influence // Electron. J. Differ. Equ. 2017. No. 140. P. 1–10.
13. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* On uniqueness and properties of periodic solution of second-order nonautonomous system with discontinuous nonlinearity // J. Dyn. Control Syst. 2017. Vol. 23. No. 4. P. 825–837.
14. *Leonov G.A., Shumafov M.M., Teshev V.A., Aleksandrov K.D.* Differential equations with hysteresis operators. Existence of solutions, stability, and oscillations // Differ. Equ. 2017. Vol. 53. No. 13. P. 1764–1816.
15. *Евстафьева В.В.* Периодические решения системы дифференциальных уравнений с гистерезисной нелинейностью при наличии нулевого собственного числа // Укр. матем. журн. 2018. Т. 70. № 8. С. 1085–1096.
16. *Медведский А.Л., Мелешенко П.А., Нестеров В.А., Решетова О.О., Семенов М.Е., Соловьев А.М.* Неустойчивые колебательные системы с гистерезисом: задачи стабилизации и управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2020. № 4. С. 58–82.
17. *Фурсов А.С., Тодоров Т.С., Крылов П.А., Митрев Р.П.* О существовании колебательных режимов в одной нелинейной системе с гистерезисами // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 8. С. 1103–1121.
18. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay // Int. J. Control. 2020. Vol. 93. No. 4. P. 763–770.

19. *Евстафьева В.В.* О существовании двухточечно-колебательных решений возмущенной релейной системы с гистерезисом // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 169–178.
20. *Евстафьева В.В.* Существование T/k -периодических решений нелинейной неавтономной системы с кратным собственным числом матрицы // Матем. заметки. 2021. Т. 109. № 4. С. 529–543.
21. *Євстаф'єва В.В.* Існування двоточково-коливних розв'язків релейної неавтономної системи з кратним власним числом дійсної симетричної матриці // Укр. матем. журн. 2021. Т. 73. № 5. С. 640–650.
22. *Фурсов А.С., Митрев Р.П., Крылов П.А., Тодоров Т.С.* О существовании периодического режима в одной нелинейной системе // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 8. С. 1104–1115.
23. *Vasquez-Beltran M.A., Jayawardhana B., Peletier R.* Recursive algorithm for the control of output remnant of Preisach hysteresis operator // IEEE Control Syst. Lett. 2021. Vol. 5. No. 3. P. 1061–1066.
24. *Камачкин А.М., Потанов Д.К., Евстафьева В.В.* Неподвижные точки отображения, порожденного системой обыкновенных дифференциальных уравнений с релейным гистерезисом // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 4. С. 456–469.
25. *Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V.* Continuous dependence on parameters and boundedness of solutions to a hysteresis system // Appl. Math. 2022. Vol. 67. No. 1. P. 65–80.

Стаття представлена к публикации членом редколлегии А.И. Маликовым.

Поступила в редакцию 02.12.2021

После доработки 20.07.2022

Принята к публикации 26.10.2022

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2023 г. А.И. ГЛУЩЕНКО, д-р техн. наук (aiglush@ipu.ru),
К.А. ЛАСТОЧКИН (lastconst@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ГАРАНТИЕЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. ЧАСТЬ II. ОБЪЕКТЫ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ¹

Предлагается адаптивная система управления по вектору состояний классом линейных систем с кусочно-постоянными неизвестными параметрами. Решение 1) гарантирует глобальную экспоненциальную устойчивость замкнутой системы при конечном возбуждении регрессора после каждого изменения параметров; 2) не требует знания матрицы коэффициентов усиления и моментов времени изменения параметров системы. Полученные теоретические результаты подтверждены математическим моделированием.

Ключевые слова: адаптивное управление, системы с переключением, переменные параметры, параметрическая ошибка, конечное возбуждение, идентификация, экспоненциальная устойчивость.

DOI: 10.31857/S0005231023030042, EDN: ZYTLKX

1. Введение

Классические алгоритмы адаптивного беспоиcкового управления с эталонной моделью при постоянных неизвестных параметрах объекта обеспечивают асимптотическую сходимостъ регулируемых координат к координатам эталонной модели [1–3]. Однако в приложениях реальные физические системы часто описываются моделями с переменными или кусочно-постоянными неизвестными параметрами. В этих условиях стандартные решения доставляют целевую асимптотическую устойчивость только при удовлетворении функции изменения неизвестных параметров специальным требованиям [1, 2, 4]. Скоростъ изменения переменных параметров должна быть существенно меньше скорости протекания переходных процессов в системе (требование квазистационарности). Интервал времени между изменениями кусочно-постоянных параметров должен быть достаточно большим (требование регулярности).

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект МД.1787.2022.4).

Подробно проблемы применения классических адаптивных систем с эталонной моделью для объектов с переменными или кусочно-постоянными неизвестными параметрами обсуждались и экспериментально демонстрировались в [1, с. 552–554, с. 732–734; 2, с. 337–345].

Современные комбинированные модификации [5–7] классических алгоритмов адаптивного беспоискового управления направлены на ослабление хорошо известного требования исчезающего возбуждения регрессора, выполнение которого при использовании классических алгоритмов необходимо и достаточно для экспоненциальной устойчивости ошибки слежения [8]. Комбинированные алгоритмы, в своем большинстве, используют инерционные схемы обработки измеряемых с объекта сигналов, позволяющие свести задачу адаптивного управления к задаче идентификации неизвестных параметров линейного регрессионного уравнения. Ослабление условия исчезающего возбуждения достигается за счет сохранения ранее измеренных сигналов с помощью специальных интеллектуальных алгоритмов или различных фильтров с памятью, благодаря чему даже после окончания периода возбуждения обеспечивается настройка параметров закона управления [9]. Общим ограничением рассматриваемых модифицированных алгоритмов адаптации является требование постоянства неизвестных параметров объекта управления, необходимое для предотвращения смешивания информации о различных неизвестных параметрах [10]. Детально ограничения комбинированных адаптивных систем управления с эталонной моделью для объектов с переменными или кусочно-постоянными неизвестными параметрами обсуждалась и экспериментально демонстрировалась в [6, рис. 7, рис. 8; 7, рис. 2; 10, рис. 4].

Таким образом, на сегодняшний день важными и актуальными остаются задачи развития методов адаптивного беспоискового управления объектами с переменными или кусочно-постоянными неизвестными параметрами. Не претендуя на полноту обзора, остановимся на рассмотрении основных методов решения задач адаптивного управления классом систем с кусочно-постоянными неизвестными параметрами.

Мотивация рассмотрения задач управления системами с переключением параметров прежде всего связана с популярной в приложениях техникой линеаризации нелинейных моделей физических систем в окрестностях рабочих точек [11, с. 13; 12]. Классическая модель с переключениями, полученная с помощью упомянутой техники, состоит из непрерывной части, включающей дифференциальное уравнение известного порядка, и дискретной части, которая определяет логику изменения параметров уравнения. Логика переключений описывает переход траекторий объекта в полиэдральный регион фазового пространства, связанный с новой рабочей точкой. Число регионов разбиения фазового пространства соответствует числу линейных моделей с неизвестными параметрами, которыми с достаточной точностью может быть аппроксимирована исходная нелинейная модель. Поскольку обычно параметры каждой модели неизвестны или известны усредненно, построение законов

управления для систем с переключением параметров должно осуществляться с привлечением методов адаптивного управления.

Отправной точкой для создания процедур синтеза алгоритмов адаптивного беспойскового управления объектами с переключением параметров стали пионерские работы Тао [12–15], в которых была предложена унифицированная адаптивная система управления для объектов с переключениями и продемонстрированы ее преимущества относительно классических алгоритмов адаптивного управления системами с постоянными параметрами. Логика переключений считается известной и вводится столько настраиваемых законов управления, сколько отдельных регионов выделено в фазовом пространстве исходной нелинейной системы. Переключения между законами управления осуществляются синхронно с переключениями параметров в модели объекта управления. Параметры каждого закона управления настраиваются собственным законом адаптации и только при его применении. Эталонная модель, задающая желаемое качество управления, может быть задана системой с постоянными параметрами, а может являться системой с переключениями. Более того, с целью повышения качества управления, переключения в эталонной модели могут осуществляться асинхронно с переключениями в объекте управления. Асимптотическая устойчивость результирующей гибридной стратегии адаптивного управления и ограниченность всех сигналов могут доказываться как с помощью метода общей функции Ляпунова (common Lyapunov function в зарубежной литературе [16]), так и с помощью метода составной функции Ляпунова (multiple Lyapunov function в зарубежной литературе [16]). Первый подход применяется, если для всех матриц состояния эталонной модели удастся найти общее решение уравнения Ляпунова, второй подход используется в противоположной ситуации. Важно отметить, что в случае использовании составной функции Ляпунова, для асимптотической устойчивости оказывается необходимо выполнение условия неисчезающего возбуждения регрессора, а при использовании общей функции Ляпунова это требование необходимо только для обеспечения экспоненциальной скорости сходимости. Недостатком результатов [12–15] является обеспечение экспоненциальной скорости сходимости ошибки слежения только при удовлетворении условия неисчезающего возбуждения регрессора, что при его невыполнении и частых переключениях параметров объекта приводит к неудовлетворительному качеству отслеживания траекторий эталонной модели.

Преодолеть недостатки решений [12–15] удалось благодаря применению комбинированных законов адаптации, ослабляющих условия неисчезающего возбуждения регрессора. В [17–21] на основе алгоритма конкурентного обучения [5] предложены законы адаптации, гарантирующие экспоненциальную устойчивость замкнутой системы с переключениями при выполнении условия конечного возбуждения регрессора после каждого переключения. Предложенные законы позволяют настраивать параметры неактивных законов управления, если в период их использования удалось составить информационную матрицу полного ранга. Благодаря данному приему удастся доказать

глобальную экспоненциальную устойчивость ошибки слежения и сходимости всех параметрических ошибок. Недостатком работ [17–21] является использование нетривиальных оффлайн процедур мониторинга и обработки измеримых с объекта сигналов с целью составления полноранговой информационной матрицы после каждого переключения параметров объекта.

Рассмотренные решения [12–15, 17–21] исходят из предположения о том, что логика переключения параметров системы известна и связана с посещением траекториями объекта определенных областей фазового пространства. Однако на практике, во-первых, точки линеаризации, границы полиэдральных регионов и, следовательно, логика переключений могут быть неизвестны или известны недостаточно точно, а во-вторых, скачкообразное изменение параметров может вызываться не только движением фазовых траекторий, но и другими явлениями событийной дискретной природы, в том числе проявлением неучтенных нелинейностей, действием внешних параметрических возмущений, отказом или повреждением исполнительных органов. Поэтому актуальной представляется задача синтеза адаптивных алгоритмов управления, выполняющих одновременно с настройкой параметров закона управления детектирование моментов времени переключения параметров объекта.

В [22, 23] предложены два различных алгоритма детектирования, позволяющие с достаточной точностью при наличии внешних возмущений обнаруживать моменты времени скачкообразного изменения параметров объекта (его дискретного состояния, в зарубежной литературе — *switching state*). Идеологически алгоритмы детектирования основаны на косвенном сравнении текущих параметров объекта с предыдущими, информация о которых сохранена в специальный массив. Если косвенная информация о текущих параметрах, в смысле выбранной метрики, достаточно отличается от косвенной информации о предыдущих, значит произошло скачкообразное изменение параметров объекта. После детектирования создается новый информационный массив и заполняется косвенной информацией о текущих параметрах объекта. Впоследствии в целях детектирования косвенное сравнение текущих параметров объекта осуществляется с сохраненной в массивы информацией о всех предыдущих состояниях объекта. Основным отличием решений [22, 23] от [12–15, 17–21] является отсутствие необходимости априорного знания как логики переключения параметров объекта, так и числа точек линеаризации исходной нелинейной модели, а поэтому вводится столько настраиваемых законов управления, сколько состояний объекта удалось выделить в процессе детектирования. Вместе с тем решения [22, 23] используют концепцию конкурентного обучения, что так же, как и в [17–21] позволяет по сохраненным данным настраивать параметры всех моделей одновременно. Недостатками алгоритмов [22, 23] является оффлайн манипулирование с данными и возможность построения на их основе только непрямых законов адаптации с хорошо известными сопутствующими трудностями [1–3, 21]. Более обстоятельный обзор современных и классических методов идентификации и адаптивного

управления системами с переключениями параметров возможно отыскать в монографии [11] и постановочных частях работ [12–15, 17–23].

В целом все рассмотренные алгоритмы адаптивного управления объектами с переключениями параметров обладают общими недостатками, основными из которых являются, во-первых, разрывное поведение сигнала управления при переключении на закон управления, предназначенный для конкретного региона фазового пространства нелинейной системы, а во-вторых, в использовании избыточного числа, в сущности, структурно одинаковых законов адаптации параметров закона управления.

Оба недостатка связаны с использованием концепции управления системой с переключениями с помощью соответствующего закона управления с переключением. В адаптивной постановке утверждается [12, 24], что, имея несколько законов управления и адаптации, переключаясь между ними, удастся улучшить быстродействие подстройки параметров управления и обеспечить более высокое качество управления, чем при использовании общего закона управления и адаптации. Более того, часто мотивация использования нескольких законов адаптации связана с использованием эталонной модели с переключениями в ситуации, если общая функция Ляпунова не существует [11]. Однако концепция управления с переключениями противоречит основному принципу адаптивного беспоискового управления, в соответствии с которым для управления системой с параметрической неопределенностью необходима непрерывная подстройка под текущие параметры объекта управления параметров одного закона управления [1–3]. Отказ от этого основополагающего принципа и использование концепции управления с переключениями вызваны недостатками классического закона адаптации, прежде всего, медленной скоростью сходимости и недостаточной способностью отслеживания кусочно-постоянных неизвестных параметров.

Таким образом, обобщая вышесказанное, целью настоящей работы является создание новой адаптивной системы управления объектами с кусочно-постоянными неизвестными параметрами, в которой используются общий закон управления и закон настройки его параметров для всех возможных переключений параметров объекта. В такой постановке логика переключений параметров объекта управления считается неизвестной, а эталонная модель выбирается общей для всех областей фазового пространства системы.

Основной результат работы, позволяющий достичь поставленную цель, основан на объединении предложенного в первой части работы подхода адаптивного управления с гарантией экспоненциальной устойчивости [25] с недавно разработанным законом идентификации неизвестных кусочно-постоянных параметров линейного регрессионного уравнения [26]. Отличия предлагаемой системы адаптивного управления объектами с кусочно-постоянными неизвестными параметрами от рассмотренных в обзоре и других алгоритмов, которые интересующийся читатель может самостоятельно обнаружить в биб-

лиографии цитируемой литературы [11–15, 17–23], можно сформулировать следующим образом:

- 1) для управления объектами с переключением параметров используется закон управления без переключений коэффициентов;
- 2) настройка параметров закона управления осуществляется с помощью одного нового прямого закона адаптации, способного отслеживать кусочно-постоянные неизвестные идеальные параметры закона управления;
- 3) оффлайн процедуры обработки массивов измеряемой с объекта информации не используются;
- 4) априорная информация о значениях/знаке матрицы коэффициентов усиления объекта не требуется;
- 5) переключения параметров объекта могут быть вызваны как движением траекторий объекта между полиэдральными регионами фазового пространства, так и различными неизвестными событиями дискретной природы;
- 6) глобальная экспоненциальная устойчивость замкнутой системы и экспоненциальная сходимости настраиваемых параметров управления к истинным значениям достигаются при выполнении достаточно слабого условия конечного возбуждения регрессора после каждого переключения параметров объекта.

Основные определения

При доказательстве теорем и утверждений будут использованы определение конечного возбуждения регрессора и следствие из леммы Калмана–Якубовича–Попова.

Определение 1. Регрессор $\omega(t)$ возбуждается конечно $\omega(t) \in \text{FE}$ на интервале $[t_r^+; t_e]$, если существуют $t_r^+ \geq 0$, $t_e > t_r^+$ и α такие, что верно неравенство:

$$(1.1) \quad \int_{t_r^+}^{t_e} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau \geq \alpha I_{n \times n},$$

где $\alpha > 0$ – степень возбуждения, $I_{n \times n}$ – единичная матрица.

Следствие 1. Для любой матрицы $D > 0$ управляемой пары (A, B) с гурвицевой матрицей $A \in R^{n \times n}$ и $B \in R^{n \times m}$ существуют матрицы $P = P^T > 0$, $Q \in R^{n \times m}$, $K \in R^{m \times m}$ и число $\mu > 0$, такие что:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} A^T P + PA &= -QQ^T - \mu P, & PB &= QK, \\ K^T K &= D + D^T. \end{aligned}$$

2. Постановка задачи

Рассмотрим класс непрерывных линейных систем с дискретным изменением параметров:

$$(2.1) \quad \forall t \geq t_0^+, \quad \dot{x}(t) = \Theta_{\kappa(t)}^T \Phi(t) = A_{\kappa(t)}x(t) + B_{\kappa(t)}u(t), \quad x(t_0^+) = x_0,$$

$$\Phi(t) = [x^T(t) \quad u^T(t)]^T, \quad \Theta_{\kappa(t)}^T = [A_{\kappa(t)} \quad B_{\kappa(t)}],$$

где $x(t) \in R^n$ — координаты состояния с неизвестными начальными условиями x_0 , $u(t) \in R^m$ — управляющие воздействия, $A_{\kappa(t)} \in R^{n \times n}$ — неизвестная матрица состояний, $B_{\kappa(t)} \in R^{n \times m}$ — неизвестная матрица усиления, $\kappa(t) \in \Xi = \{1, 2, \dots, N\}$ — неизвестная дискретная функция, определяющая моменты времени изменения параметров объекта, t_0^+ — известный начальный момент времени, N — количество значений, которые могут принимать параметры $\Theta_{\kappa(t)}$. Пара $(A_{\kappa(t)}, B_{\kappa(t)})$ управляема, $\forall t > t_0^+$ вектор $\Phi(t) \in R^{n+m}$ измерим, а матрица $\Theta_{\kappa(t)} \in R^{(n+m) \times n}$ неизвестна.

Для конкретности считается, что $\kappa(t)$ и $\Theta_{\kappa(t)}$ непрерывны справа:

$$(2.2) \quad \forall t \geq t_0^+ \quad \kappa(t) = \lim_{\tau \rightarrow t_i^+} \kappa(\tau), \quad \Theta_{\kappa(t)} = \lim_{\tau \rightarrow t_i^+} \Theta_{\kappa(\tau)},$$

где t_i^- — момент времени, соответствующий значению функции слева от разрыва, а t_i^+ — момент времени, соответствующий значению функции справа от разрыва.

В общем случае сигналом $\kappa(t)$ кодируется последовательность переключений

$$(2.3) \quad \Sigma = \left\{ (j_0, t_0^+), \dots, (j_{i-1}, t_{i-1}^+), (j_i, t_i^+), \dots \mid \right.$$

$$j_i \in \Xi, j_i \neq j_{i+1}, t_i^+ \in \mathfrak{S}, i \in \mathbb{N} \left. \right\},$$

$$\mathfrak{S} = \left\{ t_0^+, t_1^+, \dots, t_{i-1}^+, t_i^+, \dots \mid i \in \mathbb{N} \right\},$$

которая определяет, что $\forall t \in [t_i^+; t_{i+1}^+)$, $\kappa(t) = j_i$, $\Theta_{\kappa(t)} = \Theta_{j_i}$ (на i -м интервале времени параметр $\Theta_{\kappa(t)}$ принимает j -е значение из множества Ξ).

Функция $\kappa(t)$ может однозначно определяться движением состояний $x(t)$ и управлений $u(t)$ системы (2.1), а может изменять свои значения в зависимости от различных неизвестных событий дискретной природы:

$$(2.4a) \quad \kappa(t) = j_i \Leftrightarrow \Phi(t) \in \Pi_j = \{ \Phi(t) \in R^{n+m} \mid H_j \Phi(t) \leq [j]0 \},$$

или

$$(2.4b) \quad \kappa(t) = j_i \Leftrightarrow t \in [t_i^+; t_{i+1}^+),$$

где Π_j — j -й полиэдральный регион в пространстве R^{n+m} , $\Pi_j \in R^{(n+m) \times (n+m)}$ — матрица, задающая регион Π_j , $\leq [j]$ — операторы сравнения ($<$ или \leq), гарантирующие удовлетворение условий $\cup_j^N \Pi_j = R^{m+n}$, $\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset \forall j \neq i$.

Для краткости и в то же время общности изложения, существующие на интервале $[t_i^+; t_{i+1}^+)$ параметры объекта (2.1) обозначим ϑ_i ($\forall t \in [t_i^+; t_{i+1}^+)$ $\vartheta_i = \Theta_{\kappa(t)} = \Theta_{j_i}$), что позволяет независимо от природы изменения параметров (2.4а) или (2.4б) записать (2.1) в виде:

$$(2.5) \quad \forall t \geq t_0^+, \dot{x}(t) = \vartheta^T(t)\Phi(t) = \begin{cases} A_0x(t) + B_0u(t), & \text{если } t \in [t_0^+; t_1^+) \\ \vdots \\ A_ix(t) + B_iu(t), & \text{если } t \in [t_i^+; t_{i+1}^+) \end{cases}$$

$$\vartheta(t) = \vartheta_i = \vartheta_0 + \sum_{q=1}^i \Lambda_q h(t - t_q^+), \quad \dot{\vartheta}(t) = \sum_{q=1}^i \Lambda_q \delta(t - t_q^+),$$

где $\Lambda_i = \vartheta_i - \vartheta_{i-1} = \Theta_{j_i} - \Theta_{j_{i-1}}$ — величина изменения ϑ_i в момент времени t_i^+ , $h(t - t_i^+)$ — функция единичного скачка в момент времени t_i^+ , $\delta(t - t_i^+)$ — функция единичного импульса в момент времени t_i^+ .

Требуемое качество управления в замкнутой управлением $u(t)$ системе (2.5) зададим эталонной моделью с постоянными параметрами:

$$(2.6) \quad \forall t \geq t_0^+, \dot{x}_{ref}(t) = A_{ref}x_{ref}(t) + B_{ref}r(t), \quad x_{ref}(t_0^+) = x_{0ref},$$

где $x_{ref}(t) \in R^n$ — вектор координат состояния эталонной модели с начальными условиями x_{0ref} , $r(t) \in R^m$ — сигнал задания, $A_{ref} \in R^{n \times n}$ — гурвицева матрица состояний эталонной модели, $B_{ref} \in R^{n \times m}$ — матрица усиления эталонной модели.

Для объекта (2.5) и эталонной модели (2.6) предполагается выполненным необходимое и достаточное условие идеального отслеживания (ideal model following conditions или Erzberger's matching conditions в западной литературе).

Допущение 1. Существуют матрицы $K_i^x \in R^{m \times n}$ и $K_i^r \in R^{m \times m}$ такие, что верно

$$(2.7) \quad A_i + B_i K_i^x = A_{ref}, \quad B_i K_i^r = B_{ref}.$$

С учетом допущения 1, уравнение в отклонениях между уравнением объекта (2.5) и эталонной модели (2.6) имеет вид:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \dot{e}_{ref}(t) &= A_{ref}e_{ref}(t) + B_i u(t) - (A_{ref} - A_i)x(t) - B_{ref}r(t) = \\ &= A_{ref}e_{ref}(t) + B_i [u(t) - K_i^x x(t) - K_i^r r(t)] = \\ &= A_{ref}e_{ref}(t) + B_i [u(t) - \theta^T(t)\omega(t)], \end{aligned}$$

где

$$e_{ref}(t) = x(t) - x_{ref}(t), \quad \omega(t) = [x^T(t) \quad r^T(t)]^T \in R^{n+m},$$

$$\theta_i = [K_i^x \quad K_i^r]^T \in R^{(n+m) \times m},$$

$$\theta(t) = \theta_i = \theta_0 + \sum_{q=1}^i \Delta_q^\theta h(t - t_q^+), \quad \dot{\theta}_i = \sum_{q=1}^i \Delta_q^\theta \delta(t - t_q^+), \quad \Delta_i^\theta = \theta_i - \theta_{i-1}.$$

Поскольку параметры $\theta(t)$ и множества $\Xi, \Sigma, \mathfrak{S}$ неизвестны, введем непрерывный закон управления с настраиваемыми параметрами:

$$(2.9) \quad u(t) = \hat{\theta}^T(t) \omega(t),$$

где $\hat{\theta}(t) \in R^{(n+m) \times m}$ — оценка параметров $\theta(t)$.

Подставив (2.9) в (2.8), имеем:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \dot{e}_{ref}(t) &= A_{ref} e_{ref}(t) + B_i [\hat{\theta}^T(t) - \theta^T(t)] \omega(t) = \\ &= A_{ref} e_{ref}(t) + B_i \tilde{\theta}^T(t) \omega(t), \end{aligned}$$

где $\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta(t)$ — ошибка оценки параметров $\theta(t)$.

Относительно параметров $\theta(t)$ и возбуждения регрессора $\Phi(t)$ принимаются следующие допущения.

Допущение 2. Пусть $\exists \bar{\Delta}_\theta > 0, T_{\min} > \min_{\forall i \in \mathbb{N}} T_i > 0$ такие, что $\forall i \in \mathbb{N}$ одновременно:

- 1) $t_{i+1}^+ - t_i^+ \geq T_{\min}, \quad \|\theta_i - \theta_{i-1}\| = \|\Delta_i^\theta\| \leq \bar{\Delta}_\theta;$
- 2) $\Phi(t) \in \text{FE}$ на $[t_i^+; t_i^+ + T_i]$ со степенью $\alpha_i;$
- 3) $\Phi(t) \in \text{FE}$ на $[\hat{t}_i^+; \hat{t}_i^+ + T_i]$ со степенью $\bar{\alpha}_i,$
где $\alpha_i > \bar{\alpha}_i > 0, \quad \hat{t}_i^+ \in [t_i^+; t_i^+ + T_i].$

Допущение 3. Существует и известен параметр $l > 0$ такой, что:

$$\Phi(t) \in \text{FE} \Rightarrow \bar{\varphi}(t) = \left[\int_{\hat{t}_i^+}^t e^{-l(t-\tau)} \Phi^T(\tau) d\tau \quad e^{-l(t-t_i^+)} \right]^T \in \text{FE}.$$

Тогда основная цель работы сводится к построению алгоритма формирования оценок $\hat{\theta}(t)$, гарантирующего выполнение целевого условия:

$$(2.11) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi(t)\| = 0(\exp),$$

где $\xi(t) = \left[e_{ref}^T(t) \quad \text{vec}^T(\tilde{\theta}(t)) \right]^T$ — обобщенная ошибка слежения.

Замечание 1. Допущение 1 является классическим в теории адаптивного управления с эталонной моделью (заинтересованный читатель может ознакомиться в [27, 28] с недавно предложенными новыми методами ослабления допущения 1 для линейных объектов управления с постоянными параметрами).

Первая часть допущения 2 требует конечной частоты и амплитуды изменения неизвестных параметров, что является стандартными требованиями соответственно в теории систем с переключениями [11, 16] и теории идентификации [1–3]. Вторая и третья часть допущения 2 описывают необходимое и достаточное условие идентифицируемости истинных значений всех элементов i -й матрицы неизвестных параметров [29].

Допущение 3 соответствует условиям идентифицируемости вектора параметров $\bar{\vartheta}^T(t) = [A_i \ B_i \ x(t_i^+)]$ и требует отсутствия в алгебраическом спектре матрицы A числа -1 . Если начальные условия системы $x(t_0^+)$ известны, то принятие допущения 3 не требуется. Подробнее необходимость и ограниченность допущения 3 комментировались в разделе 3.4 работы [28].

3. Предварительные результаты

Рассмотрим решение задачи экспоненциального регулирования (2.11) при известных $\kappa(t)$ и $\Theta_{\kappa(t)}$.

Выбор управления в форме $u(t) = \hat{\theta}^T(t)\omega(t)$, $\hat{\theta}(t) = \theta(t)$, в силу гурвицевости матрицы A_{ref} , для всех $t \geq t_0^+$ гарантирует $\tilde{\theta}(t) = 0$ и экспоненциальную устойчивость ошибки $e_{ref}(t)$ [16]. Однако сигнал управления в этом случае испытывает разрывы первого рода при изменении параметров объекта управления, что может быть неприемлемо в приложениях.

Альтернативный выбор управления заключается в использовании следующего алгоритма фильтрации:

$$(3.1) \quad \dot{\hat{\theta}}(t) = -\gamma_1 (\hat{\theta}(t) - \theta(t)) = -\gamma_1 \tilde{\theta}(t), \quad \hat{\theta}(t_0^+) = \hat{\theta}_0,$$

где $\gamma_1 > 0$ — коэффициент усиления, регулирующий скорость сходимости $\tilde{\theta}(t)$.

Для управления (2.9) с фильтрацией (3.1) оказывается верно следующее утверждение.

Утверждение 1. При достаточно большом значении параметра $\gamma_1 > 0$ и выполнении хотя бы одного из условий:

- 1) $i \leq i_{\max} < \infty$,
- 2) $\forall q \in \mathbb{N} \left\| \Delta_q^\theta \right\| \leq c_q \phi(t_q^+, t_0^+)$, $c_q > c_{q+1}$, $\phi(t_q^+, t_0^+) = e^{-\gamma_1(t_q^+ - t_0^+)}$,

управление (2.9) с (3.1) гарантирует $\forall t \geq t_0^+ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi(t)\| = 0$ (exp).

Доказательство утверждения приведено в Приложении.

Условия экспоненциальной устойчивости из утверждения 1 эквивалентны ограниченности суммы всех коррекций Δ_q^θ по норме:

$$i \leq i_{\max} < \infty \Leftrightarrow \|\theta(t)\| \leq \|\theta_0\| + \sum_{q=1}^{i_{\max}} \left\| \Delta_q^\theta \right\| h(t - t_q^+) < \infty,$$

$$\left\| \Delta_q^\theta \right\| \leq c_q \phi(t_q^+, t_0^+) \Leftrightarrow \|\theta(t)\| \leq \|\theta_0\| + \sum_{q=1}^i c_q \phi(t_q^+, t_0^+) h(t - t_q^+) < \infty,$$

что, в отличие от разрывов управления при выборе $\hat{\theta}(t) = \theta(t)$, не является ограничительным.

Таким образом, при известных параметрах $\theta(t)$ задача экспоненциального регулирования (2.11) может быть разрешена с помощью непрерывного управления (2.9) с фильтрацией (3.1). Этот результат мотивирует для решения задачи (2.11) в адаптивной постановке по доступным для измерения сигналам $\Phi(t)$ косвенно реализовать фильтрацию (3.1).

4. Основной результат

Следуя методу адаптивного управления с гарантией экспоненциальной устойчивости [25], для косвенной реализации (3.1) сначала получим регрессионное уравнение, связывающее неизвестные параметры $\theta(t)$ с измеримыми сигналами $\Phi(t)$.

Результат такой параметризации оформим в виде утверждения, в котором \hat{t}_i^+ будем считать оценкой t_i^+ .

Утверждение 2. На основании состояний фильтра со сбросом

$$(4.1) \quad \dot{\bar{\Phi}}(t) = -l\bar{\Phi}(t) + \Phi(t), \quad \bar{\Phi}(\hat{t}_i^+) = 0_{m+n},$$

процедур нормализации

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \bar{z}_n(t) &= n_s(t) [x(t) - l\bar{x}(t)], \quad \bar{\varphi}_n(t) = n_s(t)\bar{\varphi}(t), \\ n_s(t) &= \frac{1}{1 + \bar{\varphi}^T(t)\bar{\varphi}(t)}, \quad \bar{x}(t) = [I_{n \times n} \quad 0_{n \times m}] \bar{\Phi}(t), \end{aligned}$$

расширения ($\sigma > 0$)

$$(4.3a) \quad \dot{z}(t) = e^{-\sigma(t-\hat{t}_i^+)} \bar{\varphi}_n(t) \bar{z}_n^T(t), \quad z(\hat{t}_i^+) = 0_{(n+m+1) \times n},$$

$$(4.3b) \quad \dot{\varphi}(t) = e^{-\sigma(t-\hat{t}_i^+)} \bar{\varphi}_n(t) \bar{\varphi}_n^T(t), \quad \varphi(\hat{t}_i^+) = 0_{(n+m+1) \times (n+m+1)},$$

смешивания

$$(4.4) \quad \begin{aligned} Y(t) &:= \text{adj} \{ \varphi(t) \} z(t), \\ \Delta(t) &:= \det \{ \varphi(t) \}, \end{aligned}$$

вырезания

$$(4.5) \quad \begin{aligned} z_A(t) &= Y^T(t)\mathfrak{L}, \quad \mathfrak{L} = [I_{n \times n} \quad 0_{n \times (m+1)}]^T \in R^{(n+m+1) \times n}, \\ z_B(t) &= Y^T(t)\mathfrak{e}_{n+m+1}, \quad \mathfrak{e}_{n+m+1} = [0_{m \times n} \quad I_{m \times m} \quad 0_{m \times 1}]^T \in R^{(n+m+1) \times m}, \end{aligned}$$

подстановки

$$(4.6) \quad \mathcal{Y}(t) := \begin{bmatrix} \text{adj} \{ z_B^T(t) z_B(t) \} z_B^T(t) (\Delta(t) A_{ref} - z_A(t)) \\ \text{adj} \{ z_B^T(t) z_B(t) \} z_B^T(t) \Delta(t) B_{ref} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{M}(t) := \det \{ z_B^T(t) z_B(t) \},$$

и сглаживания ($k = k_0 \gamma_1$, $k_0 \geq 1$)

$$(4.7a) \quad \dot{\Upsilon}(t) = -k (\Upsilon(t) - \mathcal{Y}(t)), \quad \Upsilon(t_0^+) = 0_{(n+m) \times n},$$

$$(4.7b) \quad \dot{\Omega}(t) = -k (\Omega(t) - \mathcal{M}(t)), \quad \Omega(t_0^+) = 0,$$

имеем возмущенное регрессионное уравнение относительно $\theta(t)$:

$$(4.8) \quad \Upsilon(t) = \Omega(t)\theta(t) + w(t),$$

где функции $\Upsilon(t), \Omega(t)$ вычисляются по $\Phi(t)$ и дополнительно:

а) при выполнении допущений 1-3 $\forall t \geq t_0^+ + T_0$ верно $0 < \Omega_{LB} \leq \Omega(t) \leq \Omega_{UB} < \infty$.

б) если $\tilde{t}_i^+ = \hat{t}_i^+ - t_i^+ = 0$, то $\|w(t)\| \leq w_{\max} \phi(t, t_0^+ + T_0) \leq w_{\max}$.

Доказательство утверждения и определение величин $w(t), w_{\max}$ приведены в Приложении.

Временно предположив постоянство параметров $\vartheta(t) = \vartheta$ и $\theta(t) = \theta$, кратко поясним назначение используемых процедур. Фильтрация (4.1) позволяет по измеримым сигналам $\Phi(t)$ получить в распоряжение измеримое регрессионное уравнение $x(t) - l\bar{x}(t) = \bar{\vartheta}^T \bar{\varphi}(t)$ относительно параметров объекта управления (2.1). Нормализация (4.2) обеспечивает принадлежность пространству L_∞ всех используемых в дальнейших процедурах сигналов. Процедуры расширения и смешивания (4.3a), (4.3b), (4.4) позволяют преобразовать полученную в (4.1), (4.2) регрессию к виду $Y(t) = \Delta(t)\bar{\vartheta}$, где $\Delta(t) \in R$ — скалярный регрессор (см. доказательство утверждения и [9]). Кроме того, интегральная фильтрация (4.3a), (4.3b) позволяет обеспечить $\forall t \geq t_0^+ + T_0$ выполнение условия $\Delta(t) \geq \Delta_{LB} > 0$ [26]. Вырезание (4.5) в силу $\Delta(t) \in R$ реализует переход к отдельному рассмотрению регрессионных уравнений $z_A(t) = \Delta(t)A$, $z_B(t) = \Delta(t)B$ относительно матриц A и B . С помощью подстановки (4.6) выражений (4.5) в условие согласованности (2.7) выполняется переход от уравнений относительно A и B к уравнению $\mathcal{Y}(t) = \mathcal{M}(t)\theta$ относительно θ (см. доказательство утверждения и [25, 27, 28]). Сглаживание (4.7a), (4.7b) позволяет для всех $t \geq t_0^+ + T_0$ отделить $\Omega(t)$ от нуля и обеспечивает достаточную гладкость $\Upsilon(t)$ и $\Omega(t)$.

Вернемся к рассмотрению кусочно-постоянных неизвестных параметров системы (2.1). В этом случае получаем ненулевое возмущение $w(t)$, вызванное нарушением коммутативности фильтров (4.1), (4.3a), (4.7a).

При произвольном выборе \hat{t}_i^+ в силу интегральной природы (4.3a), (4.3b) возмущение $w(t)$ оказывается незатухающей функцией. Однако, как следует из результатов части б) утверждения выбором $\hat{t}_i^+ = t_i^+$, т.е. путем сброса фильтров (4.1) и (4.3a), (4.3b) после каждого изменения параметров системы (2.1) возможно обеспечить экспоненциальное убывание $w(t)$.

Моменты времени t_i^+ изменения параметров системы (2.1) неизвестны по постановке, поэтому вводим в рассмотрение следующий алгоритм обнаружения переключений.

Утверждение 3. Если выполнены допущения 2 и 3, оценка \hat{t}_i^+ формируется по функции

$$(4.9) \quad \epsilon(t) = \Delta(t)\bar{\varphi}_n(t)\bar{z}_n^T(t) - \bar{\varphi}_n(t)\bar{\varphi}_n^T(t)Y(t),$$

в соответствии с алгоритмом детектирования

$$(4.10) \quad \begin{aligned} & \text{Инициализация: } i \leftarrow 1, \quad t_{\text{up}} = \hat{t}_{i-1}^+ \\ & \text{ЕСЛИ } t - t_{\text{up}} \geq \Delta_{pr} \quad \text{И} \quad \|\epsilon(t)\| > 0, \\ & \text{ТО } \hat{t}_i^+ := t + \Delta_{pr}, \quad t_{\text{up}} \leftarrow t, \quad i \leftarrow i + 1, \end{aligned}$$

то ситуационным выбором $\min_{i \in \mathbb{N}} T_i > \Delta_{pr} \geq 0$ гарантируется $\tilde{t}_i^+ = \Delta_{pr} \leq T_i$.

Доказательство утверждения приведено в Приложении.

Имея в распоряжении регрессионное уравнение (4.8), вычисленное исключительно по измеримым сигналам $\Phi(t)$, и алгоритм обнаружения переключений (4.10), обеспечивающий $\tilde{t}_i^+ = \Delta_{pr} \geq 0$, можно косвенно реализовать фильтрацию (3.1) и гарантировать достижение поставленной цели (2.11) в адаптивной постановке.

Теорема 1. Пусть $\Delta_{pr} = 0$, выполнены допущения 1–3, тогда закон настройки:

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}(t) &= -\gamma(t)\Omega(t) \left(\Omega(t)\hat{\theta}(t) - \Upsilon(t) \right) = \\ &= -\gamma(t)\Omega^2(t)\tilde{\theta}(t) + \gamma(t)\Omega(t)w(t), \quad \hat{\theta}(t_0^+) = \hat{\theta}_0, \\ \gamma(t) &= \begin{cases} 0, & \text{если } \Omega(t) < \Omega_{LB}, \\ \frac{\gamma_1}{\Omega^2(t)} & \text{иначе,} \end{cases} \end{aligned}$$

если дополнительно выполняется хотя бы одно из условий:

- 1) $i \leq i_{\max} < \infty$,
- 2) $\forall q \in \mathbb{N}, \|\Delta_q^\theta\| \leq c_q \phi^{k_0}(t_q^+, t_0^+), c_q > c_{q+1}, \phi(t_q^+, t_0^+) = e^{-\gamma_1(t_q^+ - t_0^+)}$,

при $k_0 \geq 1$ и достаточно большом значении параметра $\gamma_1 > 0$ гарантирует:

- i) $\forall t \geq t_0^+ \xi(t) \in L_\infty$
- ii) $\forall t \geq t_0^+ + T_0 \lim_{t \rightarrow \infty} \|\xi(t)\| = 0 \text{ (exp)}.$

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Структурная схема предложенного алгоритма адаптивного управления объектами с кусочно-постоянными неизвестными параметрами представлена на рис. 1.



Рис. 1. Структурная схема разработанной адаптивной системы.

Таким образом, разработанная адаптивная система управления объектами с кусочно-постоянными параметрами состоит из закона управления (2.9), закона адаптации (4.11), набора процедур (4.1)–(4.8) обработки измеряемых сигналов и алгоритма детектирования (4.9)–(4.10) переключений параметров объекта (2.1). В отличие от существующих методов адаптивного управления системами с переключениями, предложенный подход не требует какой-либо информации о матрицах коэффициентов усиления объекта B_i , не использует сигнал управления с разрывными параметрами, равноприменим для управления объектами с переключениями, вызванными дискретными событиями (2.4b) и движением фазовых траекторий (2.4a), и гарантирует глобальную экспоненциальную сходимость ошибки $\xi(t)$ к нулю при условии конечного возбуждения регрессора после каждого переключения параметров.

4.1. Робастность

Любая система управления, проектируемая в предположении отсутствия внешних возмущающих воздействий, обязательно в случае их наличия должна гарантировать хотя бы ограниченность регулируемых сигналов.

Робастность предложенной системы адаптивного управления (2.9), (4.10), (4.11) в смысле ограниченности ошибки $\xi(t)$ зависит от робастности как закона адаптации (4.11), так и алгоритма детектирования (4.10).

При использовании закона (4.11) и действии внешних возмущений на объект управления (2.1) или измеримые сигналы $\Phi(t)$, параметрическая ошибка $\tilde{\theta}(t)$ описывается следующим линейным дифференциальным уравнением:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}}(t) &= -\gamma\Omega(t) \left(\Omega(t)\hat{\theta}(t) - \Upsilon(t) \right) - \dot{\theta}(t) = \\ &= -\gamma\Omega^2(t)\tilde{\theta}(t) + \gamma\Omega(t) (w(t) - \delta_w(t)) - \dot{\theta}(t), \end{aligned}$$

где $\delta_w(t) \in L_\infty$ — внешнее возмущение, вызванное распространением через (4.1)–(4.8) возмущений, действующих на объект управления или измеримые сигналы.

Уравнение (4.12) в силу $\gamma(t) > 0$, $\Omega(t) \in L_\infty$, $\forall t \geq t_0 + T_0$ $\Omega(t) \geq \Omega_{LB} > 0$ является устойчивым в смысле ограниченный вход — ограниченный выход. Поэтому в случае присутствия в функции $\Upsilon(t)$ ограниченного внешнего возмущения $\delta_w(t) \in L_\infty$, закон (4.11) гарантирует сходимость параметрической ошибки $\tilde{\theta}(t)$ в ограниченную область положения равновесия. Если размер данной области достаточен для ограниченности состояний $x(t)$ объекта, то дополнительно обеспечивается и ограниченность $\xi(t)$.

Поскольку ошибочные или хуже того постоянные сбросы фильтров (4.1), (4.3a), (4.3b), при действии на объект управления внешних возмущений могут приводить к значительному ухудшению качества идентификации или полной потери законом (4.11) идентифицирующей способности вместе с обеспечением ограниченности ошибки $\tilde{\theta}(t)$, важно также постараться предотвратить возникновение ошибок детектирования переключений параметров объекта.

Для этого в [26, 30] было предложено использовать следующую робастную версию алгоритма (4.10):

$$(4.13) \quad \begin{aligned} &\text{Инициализация: } i \leftarrow 1, \quad t_{up} = \hat{t}_{i-1}^+ \\ &\text{ЕСЛИ } t - t_{up} \geq \Delta_{pr} \text{ И } \|\mathbb{E}\{\epsilon(t)\}\| > \left\| \left\| 0,9\sqrt{\text{var}\{t\}} \right\| + \|\rho(t)\| \right\|, \\ &\text{ТО } \hat{t}_i^+ := t + \Delta_{pr}, \quad t_{up} \leftarrow t, \quad i \leftarrow i + 1, \end{aligned}$$

где $\rho(t)$ — функциональный параметр робастного алгоритма, $\mathbb{E}\{\cdot\}$ — математическое ожидание, $\text{var}\{\cdot\}$ — дисперсия.

Выбор параметра $\rho(t)$ алгоритма (4.13) позволяет регулировать точность детектирования и настраиваться под конкретный класс внешних возмущающих воздействий. Например, если возмущение представляет собой шум с нулевым математическим ожиданием, то в соответствии с результатами [26, 30], достаточно выбрать $\rho(t) = 0$. В общем случае рекомендуется выбирать $\rho(t)$ следующим образом:

$$(4.14) \quad \rho(t) = E \left\{ \bar{\varphi}_n(t) \left(\Delta(t) \rho_1 - \rho_2 \bar{\varphi}_n^T(t) \operatorname{adj} \{ \varphi(t) \} \int_{\hat{t}_i^+}^t e^{-\sigma(\tau - \hat{t}_i^+)} \bar{\varphi}_n(\tau) d\tau \right) \right\},$$

где $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0$ — некоторые постоянные.

При отсутствии возмущений свойства алгоритма (4.13) совпадают со свойствами алгоритма (4.10), а при наличии возмущений алгоритм (4.13) при правильном выборе функционального параметра $\rho(t)$ позволяет избежать ошибок детектирования. Больше подробностей об алгоритме (4.13) возможно найти в [26, 30].

5. Математическое моделирование

В среде Matlab/Simulink выполним моделирование предложенной адаптивной системы управления при переключениях параметров объекта, вызванных как дискретными неизвестными событиями (2.4b), так и переходом состояний объекта между полиэдральными регионами фазового пространства (2.4a). Моделирование будем проводить, используя численное интегрирование методом Эйлера с постоянным шагом дискретизации $\tau_s = 10^{-4}$ секунды.

5.1. Переключение параметров в дискретные моменты времени

Проверим работоспособность разработанной системы при изменении параметров объекта, вызванных дискретными неизвестными событиями. Моделирование выполним как при отсутствии, так и при наличии внешних возмущений.

5.1.1. Отсутствие внешних возмущений

Рассмотрим объект управления в форме (2.5) с тремя переключениями:

$$\forall t \geq 0, \dot{x}(t) = \begin{cases} A_0 x(t) + B_0 u(t), & \text{если } t \in [0; 5) \\ A_1 x(t) + B_1 u(t), & \text{если } t \in [5; 10) \\ A_2 x(t) + B_2 u(t), & \text{если } t \geq 10, \end{cases}$$

$$(5.1.1) \quad A_0 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}; \quad B_0 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

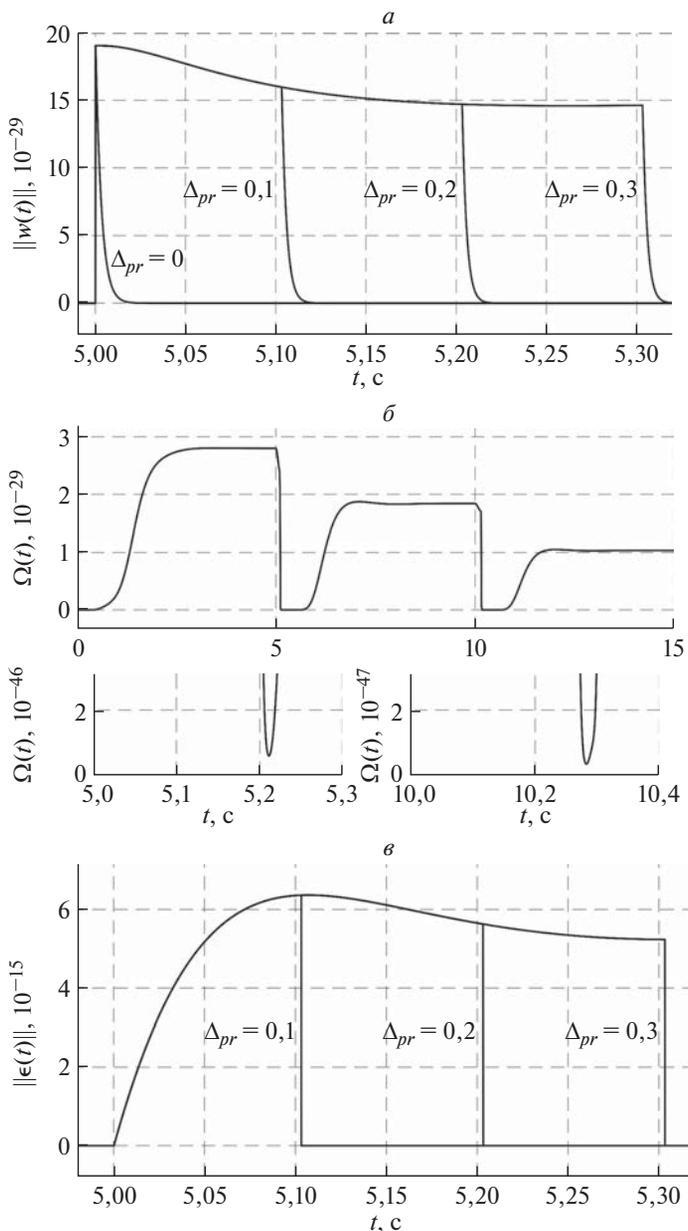


Рис. 2. Переходные процессы по: а) $\|w(t)\|$ при различных Δ_{pr} ; б) регрессору $\Omega(t)$ при $\Delta_{pr} = 0,1$; в) $\|\epsilon(t)\|$ при различных Δ_{pr} .

Эталонную модель и задание для (5.1.1) зададим следующим образом:

$$(5.1.2) \quad \forall t \geq 0, \quad \dot{x}_{ref}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} x_{ref}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad x_{ref}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Структурное соответствие матриц эталонной модели матрицам объекта гарантирует выполнение допущения 1.

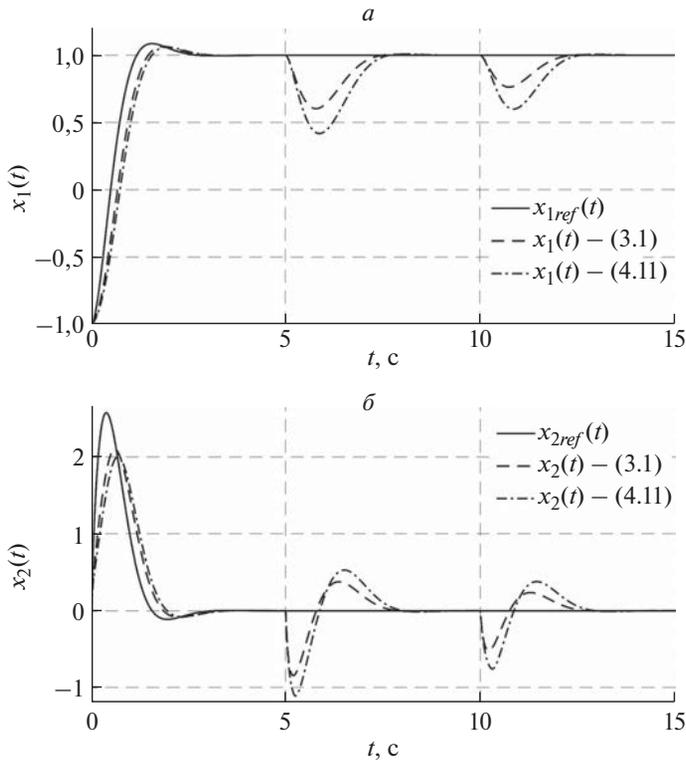


Рис. 3. Переходные процессы по состояниям эталонной модели $x_{ref}(t)$ и объекта $x(t)$ при применении управлений (2.9) с (3.1) и (4.11).

Начальные условия объекта (5.1.1), параметры фильтров (4.1), (4.3), (4.7), а также параметры закона адаптации (4.11) и алгоритма детектирования (4.10) установим в соответствии с выражением:

$$(5.1.3) \quad x(0) = [-1 \ 0]^T, \quad \hat{\theta}(0) = [0 \ 0 \ 1]^T, \quad l = 10, \quad \sigma = 5, \\ k_0 = 100, \quad \gamma_0 = 1, \quad \gamma_1 = 1, \quad \Delta_{pr} = 0,1.$$

Удостоверимся в выполнении допущений 2–3, а также требований теоремы и утверждений 2, 3.

На рис. 2 представлено: а) сравнение $\|w(t)\|$ при различных Δ_{pr} ; б) переходные процессы по регрессору $\Omega(t)$ при $\Delta_{pr} = 0,1$; в) сравнение $\|\epsilon(t)\|$ при различных Δ_{pr} .

Малые амплитуды сигналов на рис. 2 объясняются использованием процедуры смешивания (4.4) и плохой обусловленностью $\varphi(t)$: $\lambda_{\max}(\varphi(t)) \gg \gg \lambda_{\min}(\varphi(t)) > 0 \Rightarrow \Delta(t) = \prod_{i=1}^{n+m+1} \lambda_i(\varphi(t)) \rightarrow 0$. Подробнее вычислительная ликвидация сигналов обсуждалась в [25]. В целом результаты моделирования подтверждают выполнение в эксперименте допущений, сделанных в теоретическом анализе:

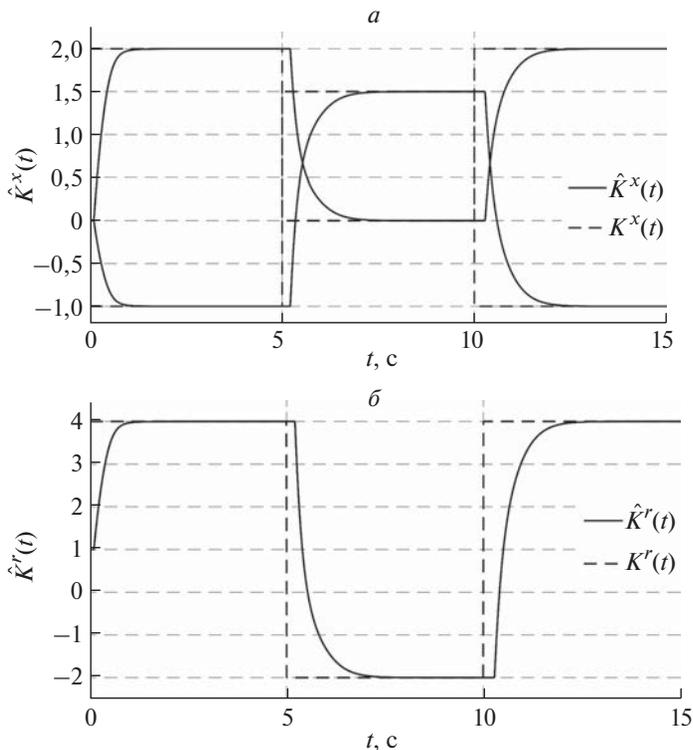


Рис. 4. Переходные процессы по оценкам $\hat{\theta}(t)$ неизвестных параметров $\theta(t)$.

- переключение параметров объекта приводит к возникновению конечного возбуждения регрессора на $[t_i^+; t_i^+ + T_i]$ и $[\hat{t}_i^+; \hat{t}_i^+ + T_i]$ (п. 2)–3) из допущения 2);
- выбором l возможно гарантировать сохранение возбуждения регрессора и его дальнейшее распространение в параметризации (допущение 3).

Кроме того, моделирование подтвердило теоретические выводы утверждений 2–3:

- регрессор $\Omega(t)$ отделен от нуля $\forall t \geq t_0^+ + T_0$;
- возмущение $w(t)$ при близких к нулю значениях параметра Δ_{pr} является экспоненциально убывающей функцией;
- индикатор $\epsilon(t)$ отличен от нуля только на интервале $[t_i^+; \hat{t}_i^+]$;
- при использовании алгоритма детектирования (4.10) выполняется неравенство $\hat{t}_i^+ \leq T_i$, а величина ошибки детектирования \hat{t}_i^+ определяется величиной Δ_{pr} .

Таким образом, все принятые допущения в эксперименте выполнены, а выводы утверждений 2, 3 получили экспериментальное подтверждение.

На рис. 3 приведено сравнение переходных процессов по координатам состояния $x(t)$ с эталонными $x_{ref}(t)$ при применении управлений (2.9) с (3.1) и (4.11).

Временные диаграммы по $x(t)$ показывают достаточно высокое быстродействие предложенной адаптивной системы управления (2.9), (4.11) по сравнению с идеальным непрерывным законом (2.9), (3.1) и подтверждают доказанную в утверждении 1 и теореме экспоненциальную сходимость к нулю ошибки $e_{ref}(t)$ при конечном числе переключений параметров объекта.

На рис. 4 представлены переходные процессы по оценкам $\hat{\theta}(t)$ неизвестных параметров $\theta(t)$.

Рисунок 4 подтверждает доказанную в теореме экспоненциальную сходимость ошибки $\tilde{\theta}(t)$ к нулю.

Таким образом, эксперимент, проведенный в условиях переключения параметров объекта управления в дискретные неизвестные моменты времени, полностью подтвердил теоретические свойства предложенной адаптивной системы управления.

5.1.2. Влияние внешних возмущений

Проверим работоспособность предложенной адаптивной системы при действии на объект управления внешнего ограниченного возмущения.

Объект управления (2.5) рассмотрим в следующей форме:

$$(5.1.4) \quad \forall t \geq 0, \dot{x}(t) = \begin{cases} A_0 x(t) + B_0(u(t) + 0,25 \operatorname{sgn}(\sin(2,5t))), & \text{если } t \in [0; 5) \\ A_1 x(t) + B_1(u(t) + 0,25 \operatorname{sgn}(\sin(2,5t))), & \text{если } t \in [5; 10) \\ A_2 x(t) + B_2(u(t) + 0,25 \operatorname{sgn}(\sin(2,5t))), & \text{если } t \geq 10, \end{cases}$$

где A_i, B_i — матрицы, определенные в (5.1.1), $0,25 \operatorname{sgn}(\sin(2,5t))$ — внешнее согласованное с сигналом управления ограниченное возмущение.

Все начальные условия и параметры адаптивной системы установим в соответствии с выражением (5.1.3). Для детектирования изменений параметров объекта будем использовать робастный алгоритм (4.13), где функциональный параметр $\rho(t)$ выберем в соответствии с выражением (4.14) при $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 10^{-1}$.

На рис. 5 приведены переходные процессы по:

- а) $\|E\{\epsilon(t)\}\|$ и $\left\|0,9\sqrt{\operatorname{var}\{\epsilon(t)\}}\right\| + \|\rho(t)\|$;
- б) состоянию $x_1(t)$ при применении (2.9) с (3.1) и (4.11);
- в) оценкам $\hat{\theta}(t)$ неизвестных параметров $\theta(t)$.

Результаты моделирования подтверждают выводы, сделанные при аналитическом обсуждении робастности:

- уравнение параметрической ошибки (4.12) действительно является устойчивым в смысле ограниченный вход — ограниченный выход;
- если параметрическая ошибка $\tilde{\theta}(t)$ экспоненциально сходится в достаточно малую окрестность нуля, то гарантируется ограниченность $x(t)$ и $e_{ref}(t)$;
- при правильном выборе функционального параметра $\rho(t)$ робастный алгоритм (4.13) позволяет обнаружить переключение параметров объекта

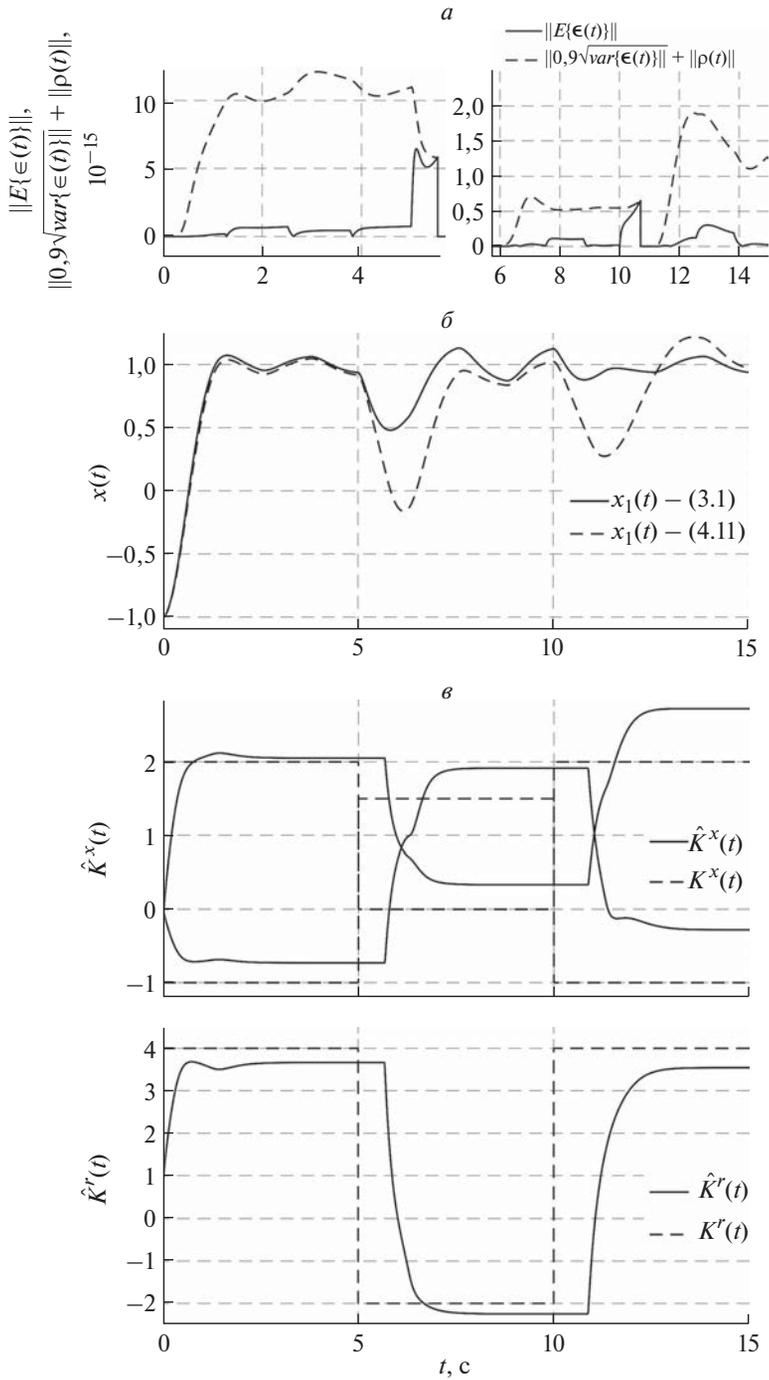


Рис. 5. Переходные процессы по: а) $\|E\{\epsilon(t)\}\|$ и $\|0,9\sqrt{\text{var}\{\epsilon(t)\}} + \|\rho(t)\|$; б) состоянию $x_1(t)$ при использовании (2.9) с (3.1) и (4.11); в) оценкам $\hat{\theta}(t)$ параметров $\theta(t)$.

даже при действии на объект управления внешних ограниченных возмущений.

Таким образом, проведенный эксперимент подтвердил робастность к влиянию внешних ограниченных возмущений закона настройки (4.11) и алгоритма детектирования (4.13).

5.2. Переключения параметров при фазовом переходе

В этом эксперименте валидируем возможность использования предложенной адаптивной системы управления при переключениях параметров объекта управления, вызванных движением состояний системы в фазовом пространстве.

Рассмотрим объект управления (2.1) с одинарным разбиением фазового пространства:

$$(5.2.1) \quad \forall t \geq 0, \quad \dot{x}(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0,2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t), & \text{если } x_1(t) \geq 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1,5 & -0,2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), & \text{если } x_1(t) < 0. \end{cases}$$

Эталонную модель и задающее воздействие для (5.2.1) определим следующим образом:

$$(5.2.2) \quad \forall t \geq 0, \quad \dot{x}_{ref}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} x_{ref}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} r(t),$$

$$r(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq t < 10 \\ -1, & \text{если } 10 \leq t < 20 \\ 1, & \text{если } 20 \leq t < 30 \\ -1, & \text{если } 30 \leq t < 40. \end{cases}$$

Структурное соответствие матриц эталонной модели матрицам объекта гарантирует выполнение допущения 1.

Начальные условия объекта (5.2.1) и эталонной модели (5.2.2), параметры фильтров (4.1), (4.3), (4.7), а также параметры закона адаптации (4.11) и алгоритма детектирования (4.10) установим в соответствии с выражением:

$$(5.2.3) \quad \begin{aligned} x(0) &= [-2 \ 2]^T, \quad x_{ref}(0) = [-1 \ 0]^T, \quad \hat{\theta}(0) = [0 \ 0 \ -1]^T, \\ l &= 10, \quad \sigma = 5, \quad k_0 = 100, \quad \gamma_0 = 1, \quad \gamma_1 = 1, \quad \Delta_{pr} = 0,1. \end{aligned}$$

На рис. 6 приведены переходные процессы по: а) $x(t)$ и $x_{ref}(t)$; б) $\hat{\theta}(t)$ и $\theta(t)$.

Результаты моделирования подтверждают выводы утверждений 2, 3 и теоремы, а также валидируют возможность применения разработанной адаптивной системы для решения задач управления объектами с переключениями, вызванными движением фазовых траекторий (2.4а).

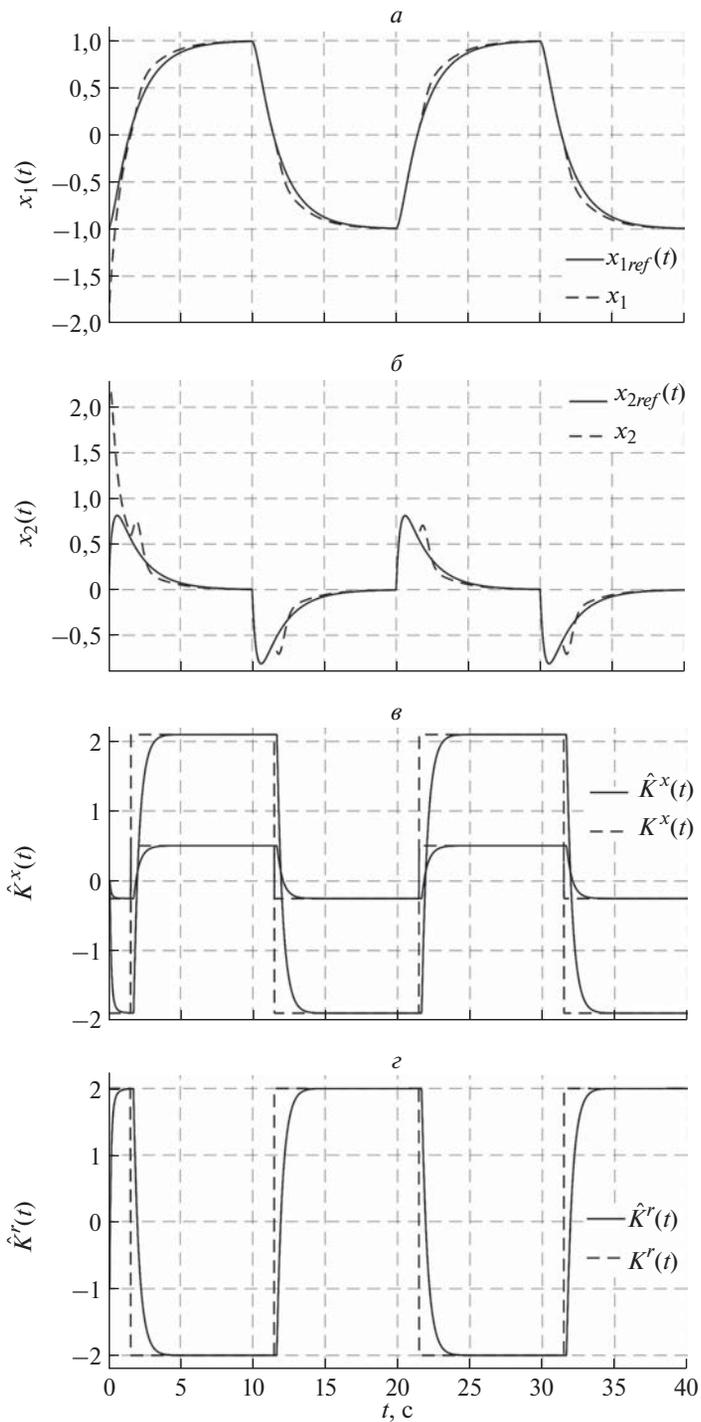


Рис. 6. Переходные процессы по: а) $x(t)$ и $x_{ref}(t)$; б) $\hat{\theta}(t)$ и $\theta(t)$.

6. Заключение

Для решения задач управления линейными объектами с неизвестными кусочно-постоянными параметрами предложен новый закон настройки параметров регулятора, равноприменимый к системам с различной природой переключений параметров, обеспечивающий при конечном возбуждении регрессора после каждого изменения параметров экспоненциальную устойчивость обобщенной ошибки слежения $\xi(t)$. В отличие от существующих решений, разработанная система адаптивного управления не требует знания знаков/значений матриц коэффициентов усиления и моментов времени t_i^+ изменения параметров объекта, а также свободна от процедур оффлайн манипулирования с данными.

Целью дальнейших исследований может являться расширение полученных результатов на а) задачи управления по выходу линейными системами с кусочно-постоянными параметрами; б) задачи управления по вектору состояний при нарушении условий согласованности (2.7) (например, применение предложенного подхода в схемах [27, 28]).

Третья часть работы будет посвящена разработке метода адаптивного управления с гарантией экспоненциальной устойчивости системами с переменными параметрами.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Разделим доказательство экспоненциальной устойчивости $\xi(t)$ на два этапа. На первом этапе покажем экспоненциальную сходимость к нулю $\tilde{\theta}(t)$ независимо от ограниченности $e_{ref}(t)$ и $\omega(t)$. На втором этапе, в силу сходимости $\tilde{\theta}(t)$, покажем сходимость $e_{ref}(t)$.

Шаг 1. Решим полученное из (3.1) уравнение $\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta(t)$:

$$(II.1) \quad \tilde{\theta}(t) = \phi(t, t_0^+) \tilde{\theta}(t_0^+) - \int_{t_0^+}^t \phi(t, \tau) \sum_{q=1}^i \Delta_q^\theta \delta(\tau - t_q^+) d\tau,$$

где $\phi(t, \tau) = e^{-\int_\tau^t \gamma_1 d\tau}$.

Воспользовавшись фильтрующим свойством функции единичного импульса:

$$(II.2) \quad \int_{t_0^+}^t f(\tau) \delta(\tau - t_q^+) d\tau = f(t_q^+) h(t - t_q^+), \quad \forall f(t),$$

из (П.1) можем получить:

$$\begin{aligned}
 & \|\tilde{\theta}(t)\| \leq \phi(t, t_0^+) \|\tilde{\theta}(t_0^+)\| + \sum_{q=1}^i \phi(t, t_q^+) \|\Delta_q^\theta\| h(t - t_q^+) = \\
 \text{(П.3)} \quad & = \underbrace{\left(\|\tilde{\theta}(t_0^+)\| + \sum_{q=1}^i \phi(t_0^+, t_q^+) \|\Delta_q^\theta\| h(t - t_q^+) \right)}_{\beta(t)} \phi(t, t_0^+),
 \end{aligned}$$

где $\phi(t_0^+, t_q^+) = \phi^{-1}(t_q^+, t_0^+) = \phi^{-1}(t, t_0^+) \phi(t, t_q^+) = \phi(t_0^+, t) \phi(t, t_q^+)$.

Для доказательства экспоненциальной сходимости $\tilde{\theta}(t)$ осталось показать ограниченность $\beta(t)$. Если число переключений параметров системы конечно: $i \leq i_{\max} < \infty$, то поскольку:

- а) при конечном i моменты времени t_i^+ конечны,
- б) $\phi(t_0^+, t_q^+)$ ограничена при конечном t_q^+ ,

верна оценка сверху:

$$\text{(П.4)} \quad \beta(t) \leq \|\tilde{\theta}(t_0^+)\| + \sum_{q=1}^{i_{\max}} \phi(t_0^+, t_q^+) \|\Delta_q^\theta\| h(t - t_q^+) = \beta_{\max}.$$

Если $\forall q \in \mathbb{N} \|\Delta_q^\theta\| \leq c_q \phi(t_q^+, t_0^+)$, $c_q > c_{q+1}$, то даже при неограниченном i верно:

$$\text{(П.5)} \quad \beta(t) \leq \|\tilde{\theta}(t_0^+)\| + \sum_{q=1}^i c_q h(t - t_q^+) = \beta_{\max}.$$

Ряд в (П.5) знакоположительный и все его частичные суммы ограничены в силу монотонности $0 < c_{q+1} < c_q$, а поэтому $\sum_{q=1}^{\infty} c_q h(t - t_q^+) < \infty$, что ведет к $\beta(t) \leq \beta_{\max}$.

Из ограниченности (П.4) или (П.5) мгновенно следует:

$$\text{(П.6)} \quad \|\tilde{\theta}(t)\| \leq \beta_{\max} \phi(t, t_0^+) = \beta_{\max} e^{-\gamma_1(t-t_0^+)} < \beta_{\max}.$$

Перейдем к анализу ошибки слежения $e_{ref}(t)$.

Шаг 2. Введем в рассмотрение квадратичную форму:

$$\begin{aligned}
 \text{(П.7)} \quad V_{e_{ref}} &= e_{ref}^T P e_{ref} + \frac{2a_0^2}{\gamma_1} e^{-\gamma_1(t-t_0^+)}, \quad H = \text{blockdiag} \left\{ P, \frac{2a_0^2}{\gamma_1} \right\}, \\
 & \underbrace{\lambda_{\min}(H)}_{\lambda_m} \|\bar{e}_{ref}\|^2 \leq V(\|\bar{e}_{ref}\|) \leq \underbrace{\lambda_{\max}(H)}_{\lambda_M} \|\bar{e}_{ref}\|^2,
 \end{aligned}$$

где $\bar{e}_{ref}(t) = \left[e_{ref}^T(t) \ e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+)} \right]^T$, $a_0 > 0$, а P есть решение при $K = I_{n \times n}$ системы:

$$\begin{aligned} A_{ref}^T P + P A_{ref} &= -Q Q^T - \mu P, \quad P I_{n \times n} = Q K, \\ K^T K &= D + D^T, \end{aligned}$$

которая эквивалентна уравнению Риккати $A_{ref}^T P + P A_{ref} + P P^T + \mu P = 0_{n \times n}$.

Производная (П.7) имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{e_{ref}} &= e_{ref}^T (A_{ref}^T P + P A_{ref}) e_{ref} - 2a_0^2 e^{-\gamma_1(t-t_0^+)} + 2e_{ref}^T P I_n B_i \tilde{\theta}^T \omega = \\ (П.8) \quad &= -\mu e_{ref}^T P e_{ref} - e_{ref}^T Q Q^T e_{ref} - 2a_0^2 e^{-\gamma_1(t-t_0^+)} + tr \left(2B_i \tilde{\theta}^T \omega e_{ref}^T Q K \right). \end{aligned}$$

Так как $K K^T = K^T K = I_{n \times n}$, выражение (П.8) примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{e_{ref}} &= -\mu e_{ref}^T P e_{ref} - 2a_0^2 e^{-\gamma_1(t-t_0^+)} - e_{ref}^T Q K K^T Q^T e_{ref} + \\ (П.9) \quad &+ tr \left(2B_i \tilde{\theta}^T \omega e_{ref}^T Q K \right) = -\mu e_{ref}^T P e_{ref} - 2a_0^2 e^{-\gamma_1(t-t_0^+)} + \\ &+ tr \left(-K^T Q^T e_{ref} e_{ref}^T Q K + 2B_i \tilde{\theta}^T \omega e_{ref}^T Q K \right). \end{aligned}$$

Использував дополнение до полного квадрата

$$\begin{aligned} K^T Q^T e_{ref} e_{ref}^T Q K - 2B_i \tilde{\theta}^T \omega e_{ref}^T Q K + B_i \tilde{\theta}^T \omega \omega^T \tilde{\theta} B_i^T &= \\ (П.10) \quad &= \left(B_i \tilde{\theta}^T \omega - K^T Q^T e_{ref} \right) \left(B_i \tilde{\theta}^T \omega - K^T Q^T e_{ref} \right)^T \geq 0, \end{aligned}$$

имеем:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{e_{ref}} &\leq -\mu e_{ref}^T P e_{ref} - 2a_0^2 e^{-\gamma_1(t-t_0^+)} + \\ &+ tr \left(-K^T Q^T e_{ref} e_{ref}^T Q K + 2B_i \tilde{\theta}^T \omega e_{ref}^T Q K \pm B_i \tilde{\theta}^T \omega \omega^T \tilde{\theta} B_i^T \right) \leq \\ &\leq -\mu e_{ref}^T P e_{ref} - 2a_0^2 e^{-\gamma_1(t-t_0^+)} + tr \left(B_i \tilde{\theta}^T \omega \omega^T \tilde{\theta} B_i^T \right) \leq \\ (П.11) \quad &\leq -\mu \lambda_{\min}(P) \|e_{ref}\|^2 - 2a_0^2 e^{-\gamma_1(t-t_0^+)} + b_{\max}^2 \lambda_{\max}(\omega \omega^T) \|\tilde{\theta}\|^2 \leq \\ &\leq -\mu \lambda_{\min}(P) \|e_{ref}\|^2 - 2a_0^2 e^{-\gamma_1(t-t_0^+)} + \\ &\quad + b_{\max}^2 \beta_{\max}^2 \lambda_{\max}(\omega \omega^T) \phi^2(t, t_0^+) \leq \\ &\leq -\mu \lambda_{\min}(P) \|e_{ref}\|^2 - 2a_0^2 e^{-\gamma_1(t-t_0^+)} + \\ &\quad + b_{\max}^2 \beta_{\max}^2 \lambda_{\max}(\omega \omega^T) e^{-\gamma_1(t-t_0^+)} e^{-\gamma_1(t-t_0^+)}, \end{aligned}$$

где $\forall i \in \mathbb{N} \|B_i\| \leq b_{\max}$ — из условия управляемости пары (A_i, B_i) .

Для экспоненциальной устойчивости $e_{ref}(t)$ необходимо экспоненциальное убывание третьего слагаемого в (П.11), что требует:

$$(П.12) \quad \chi(t) = \lambda_{\max}(\omega(t)\omega^T(t)) e^{-\gamma_1(t-t_0^+)} \leq \chi_{UB},$$

где $\chi_{UB} > 0$.

Оценим скорость роста $\lambda_{\max}(\omega(t)\omega^T(t))$, рассмотрев функцию $L_{e_{ref}} = e_{ref}^T P e_{ref}$:

$$(П.13) \quad \begin{aligned} \dot{L}_{e_{ref}} &= e_{ref}^T (A_{ref}^T P + P A_{ref}) e_{ref} + 2e_{ref}^T P B_i \tilde{\theta}^T \omega \leq \\ &\leq -\mu e_{ref}^T P e_{ref} + 2e_{ref}^T P B_i \tilde{K}_x x + 2e_{ref}^T P B_i \tilde{K}_r r \leq \\ &\leq -\mu \lambda_{\min}(P) \|e_{ref}\|^2 + 2\lambda_{\max}(P) b_{\max} \|e_{ref}\| \|\tilde{\theta}\| \|x\| + \\ &\quad + 2\lambda_{\max}(P) b_{\max} \|e_{ref}\| \|\tilde{\theta}\| r_{\max} \leq \\ &\leq -\mu \lambda_{\min}(P) \|e_{ref}\|^2 + 2\lambda_{\max}(P) b_{\max} \|e_{ref}\|^2 \|\tilde{\theta}\| + \\ &\quad + 2\lambda_{\max}(P) b_{\max} (x_{ref}^{UB} + r_{\max}) \|e_{ref}\| \|\tilde{\theta}\| \leq \\ &\leq \left(-\mu \lambda_{\min}(P) + 2\lambda_{\max}(P) b_{\max} \|\tilde{\theta}\| \right) \|e_{ref}\|^2 + \\ &\quad + 2\lambda_{\max}(P) b_{\max} (x_{ref}^{UB} + r_{\max}) \|e_{ref}\| \|\tilde{\theta}\|, \end{aligned}$$

где $\|x_{ref}(t)\| \leq x_{ref}^{UB}$ — оценка сверху на норму вектора состояний эталонной модели.

Ошибка $\tilde{\theta}(t)$ ограничена, тогда в консервативном случае из (П.13) имеем:

$$(П.14) \quad \dot{L}_{e_{ref}} \leq c_1 \|e_{ref}\|^2 + 2c_2 \|e_{ref}\|,$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= -\mu \lambda_{\min}(P) + 2\lambda_{\max}(P) b_{\max} \beta_{\max} > 0, \\ c_2 &= \lambda_{\max}(P) b_{\max} \beta_{\max} (x_{ref}^{UB} + r_{\max}). \end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством Юнга $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$, из (П.14), имеем:

$$(П.15) \quad \begin{aligned} \dot{L}_{e_{ref}} &\leq (c_1 + 2c_2^2) \|e_{ref}\|^2 + 0,5 \leq \\ &\leq (c_1 + 2c_2^2) \|e_{ref}\|^2 + 1 = \frac{c_1 + 2c_2^2}{\lambda_{\max}(P)} L_{e_{ref}} + 1. \end{aligned}$$

Решим (П.15) с учетом

$$\lambda_{\min}(P) \|e_{ref}(t)\|^2 \leq L_{e_{ref}}(t), \quad L_{e_{ref}}(t) \leq \lambda_{\max}(P) \|e_{ref}(t)\|^2 :$$

$$\begin{aligned}
\|e_{ref}(t)\| &\leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} e^{\frac{c_1+2c_2^2}{2\lambda_{\max}(P)}(t-t_0^+)} \|e_{ref}(t_0^+)\| + \\
&+ \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P) e^{\frac{c_1+2c_2^2}{\lambda_{\max}(P)}(t-t_0^+)}}{\lambda_{\min}(P) (c_1 + 2c_2^2)}}.
\end{aligned}
\tag{II.16}$$

Откуда скорость роста $x(t)$ не превосходит экспоненциальной, а поэтому, в силу ограниченности $r(t)$ верно:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\max}(\omega(t)\omega^T(t)) &= tr(\omega(t)\omega^T(t)) = \sum_{i=1}^n x_i^2(t) + \\
&+ \sum_{i=1}^m r_i^2(t) \leq \bar{c}_0 e^{\bar{c}_1(t-t_0^+)}, \quad \bar{c}_0 > 0, \quad \bar{c}_1 > 0.
\end{aligned}
\tag{II.17}$$

Подставив оценку (II.17) в выражение (II.12), имеем выполнение (II.12) при достаточно большом значении $\gamma_1 > 0$. Далее, используя (II.12) в (II.11), получаем:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{e_{ref}} &\leq -\mu\lambda_{\min}(P) \|e_{ref}\|^2 - 2a_0^2 e^{-\gamma_1(t-t_0^+)} + \\
&+ a_0^2 e^{-\gamma_1(t-t_0^+)} = -\bar{\eta}_{e_{ref}} V_{e_{ref}},
\end{aligned}
\tag{II.18}$$

где

$$a_0^2 = b_{\max}^2 \beta_{\max}^2 \chi_{UB}, \quad \bar{\eta}_{e_{ref}} = \min \left\{ \frac{\mu\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)}, \frac{\gamma_1}{2} \right\}.$$

Решение дифференциального неравенства (II.18) позволяет получить:

$$V_{e_{ref}}(t) \leq e^{-\bar{\eta}_{e_{ref}}(t-t_0^+)} V_{e_{ref}}(t_0^+).
\tag{II.19}$$

Откуда следует экспоненциальная сходимость ошибки слежения $e_{ref}(t)$ к нулю:

$$\|e_{ref}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m}} \|e_{ref}(t_0^+)\| e^{-\eta_{e_{ref}}(t-t_0^+)},
\tag{II.20}$$

где

$$\eta_{e_{ref}} = \frac{1}{2} \bar{\eta}_{e_{ref}}.$$

Объединив (П.20) и (П.6), запишем:

$$(П.21) \quad \|\xi(t)\| \leq \max \left\{ \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m}} \|e_{ref}(t_0^+)\|, \beta_{\max} \right\} e^{-\eta_{e_{ref}}(t-t_0^+)},$$

что завершает доказательство утверждения.

Доказательство утверждения 2. Продифференцируем $x(t) - l\bar{x}(t)$:

$$(П.22) \quad \dot{x}(t) - l\dot{\bar{x}}(t) = -l(x(t) - l\bar{x}(t)) + \vartheta^T(t)\Phi(t).$$

Решив дифференциальное уравнение (П.22), имеем:

$$(П.23) \quad \begin{aligned} x(t) - l\bar{x}(t) &= e^{-l(t-\hat{t}_i^+)} x(\hat{t}_i^+) + \\ &+ \int_{\hat{t}_i^+}^t e^{-l(t-\tau)} \vartheta^T(\tau) \Phi(\tau) d\tau \pm \vartheta^T(t) \bar{\Phi}(t) = \\ &= \bar{\vartheta}^T(t) \bar{\varphi}(t) + \int_{\hat{t}_i^+}^t e^{-l(t-\tau)} \vartheta^T(\tau) \Phi(\tau) d\tau - \vartheta^T(t) \bar{\Phi}(t), \end{aligned}$$

где $\bar{\vartheta}^T(t) = [A_i \ B_i \ x(\hat{t}_i^+)] \in R^{n \times (n+m+1)}$.

Применив (4.2) к левой и правой частям выражения (П.23), имеем:

$$(П.24) \quad \begin{aligned} \forall t \geq t_0^+ \quad \bar{z}_n(t) &= n_s(t) [x(t) - l\bar{x}(t)] = \bar{\vartheta}^T(t) \bar{\varphi}_n(t) + \bar{\varepsilon}_0(t), \\ \bar{\varepsilon}_0(t) &= n_s(t) \left(\int_{\hat{t}_i^+}^t e^{-l(t-\tau)} \vartheta^T(\tau) \Phi(\tau) d\tau - \vartheta^T(t) \bar{\Phi}(t) \right), \end{aligned}$$

где $\bar{z}_n(t) \in R^n$, $\bar{\varphi}_n(t) \in R^{n+m+1}$, $\bar{\varepsilon}_0(t) \in R^n$.

Используя (4.4) и умножив $z(t)$ на $\text{adj}\{\varphi(t)\}$, имеем:

$$(П.25) \quad \begin{aligned} Y(t) &:= \text{adj}\{\varphi(t)\} (z(t) \pm \varphi(t) \bar{\vartheta}(t)) = \Delta(t) \bar{\vartheta}(t) + \bar{\varepsilon}_1(t), \\ \text{adj}\{\varphi(t)\} \varphi(t) &= \det\{\varphi(t)\} I_{(n+m+1) \times (n+m+1)} = \\ &= \Delta(t) I_{(n+m+1) \times (n+m+1)}, \\ \bar{\varepsilon}_1(t) &= \text{adj}\{\varphi(t)\} (z(t) - \varphi(t) \bar{\vartheta}(t)), \end{aligned}$$

где $Y(t) \in R^{(n+m+1) \times n}$, $\Delta(t) \in R$, $\bar{\varepsilon}_1(t) \in R^{(n+m+1) \times n}$.

В силу $\Delta(t) \in R$ вырезание (4.5) позволяет из (П.25) записать:

$$\begin{aligned}
 z_A(t) &= Y^T(t)\mathfrak{L} = \Delta(t)A_i + \bar{\varepsilon}_1^T(t)\mathfrak{L}, \\
 z_B(t) &= Y^T(t)\mathbf{e}_{n+m+1} = \Delta(t)B_i + \bar{\varepsilon}_1^T(t)\mathbf{e}_{n+m+1}, \\
 \mathfrak{L} &= [I_{n \times n} \quad 0_{n \times (m+1)}]^T \in R^{(n+m+1) \times n}, \\
 \mathbf{e}_{n+m+1} &= [0_{m \times n} \quad I_{m \times m} \quad 0_{m \times 1}]^T \in R^{(n+m+1) \times m},
 \end{aligned}
 \tag{П.26}$$

где $z_A(t) \in R^{n \times n}$, $z_B(t) \in R^{n \times m}$.

Умножим каждое уравнение из (2.7) на $\text{adj} \{z_B^T(t)z_B(t)\} z_B^T(t)\Delta(t)$ слева. Подставив с учетом (П.26) в результат умножения уравнения (4.5) и объединив полученные выражения, имеем уравнение:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Y}(t) &= \mathcal{M}(t)\theta(t) + d(t) \\
 \mathcal{Y}(t) &:= \begin{bmatrix} \text{adj} \{z_B^T(t)z_B(t)\} z_B^T(t) (\Delta(t)A_{ref} - z_A(t)) \\ \text{adj} \{z_B^T(t)z_B(t)\} z_B^T(t)\Delta(t)B_{ref} \end{bmatrix}, \\
 \text{adj} \{z_B^T(t)z_B(t)\} z_B^T(t)z_B(t) &= \det \{z_B^T(t)z_B(t)\} I_{m \times m} = \mathcal{M}(t)I_{m \times m}, \\
 d(t) &:= - \begin{bmatrix} \text{adj} \{z_B^T(t)z_B(t)\} z_B^T(t) (\bar{\varepsilon}_1^T(t)\mathfrak{L} + \bar{\varepsilon}_1^T(t)\mathbf{e}_{n+m+1}K_i^x) \\ \text{adj} \{z_B^T(t)z_B(t)\} z_B^T(t)\bar{\varepsilon}_1^T(t)\mathbf{e}_{n+m+1}K_i^r \end{bmatrix},
 \end{aligned}
 \tag{П.27}$$

где $\mathcal{Y}(t) \in R^{(n+m) \times n}$, $\mathcal{M}(t) \in R$, $d(t) \in R^{(n+m) \times n}$.

С учетом (П.27) для решения уравнения (4.7a) имеет место соотношение:

$$\begin{aligned}
 \Upsilon(t) &= \int_{t_0^+}^t e^{\int_{t_0^+}^{\tau} kd\tau} \mathcal{M}(\tau)\theta(\tau) d\tau + \int_{t_0^+}^t e^{\int_{t_0^+}^{\tau} kd\tau} d(\tau) d\tau \pm \Omega(t)\theta(t) = \\
 &= \Omega(t)\theta(t) + w(t), \\
 w(t) &= \Upsilon(t) - \Omega(t)\theta(t),
 \end{aligned}
 \tag{П.28}$$

что подтверждает возможность получения (4.8) на основании процедур (4.1)–(4.7).

Для доказательства части а) решим (4.7b) на $[\hat{t}_i^+; t_i^+ + T_i]$ и $[t_i^+ + T_i; \hat{t}_{i+1}^+]$:

$$\begin{aligned}
 \forall t \in [\hat{t}_i^+; t_i^+ + T_i] \quad \Omega(t) &= \phi^{k_0}(t, \hat{t}_i^+) \Omega(\hat{t}_i^+) + \int_{\hat{t}_i^+}^t \phi^{k_0}(t, \tau) \mathcal{M}(\tau) d\tau, \\
 \forall t \in [t_i^+ + T_i; \hat{t}_{i+1}^+] \quad \Omega(t) &= \phi^{k_0}(t, t_i^+ + T_i) \Omega(t_i^+ + T_i) + \\
 &+ \int_{t_i^+ + T_i}^t \phi^{k_0}(t, \tau) \mathcal{M}(\tau) d\tau.
 \end{aligned}
 \tag{П.29}$$

С точностью до обозначений в [26] доказано при $\Phi(t) \in \text{FE}$, $\hat{t}_i^+ \geq t_i^+$ выполнение $\forall t \in [t_i^+ + T_i; \hat{t}_{i+1}^+)$ неравенства $\Delta_{\text{UB}} \geq \Delta(t) \geq \Delta_{\text{LB}} > 0$. Тогда на рассматриваемых в (П.29) интервалах для регрессора $\mathcal{M}(t)$ оказывается верно:

$$(П.30) \quad \begin{aligned} \forall t \in [\hat{t}_i^+; t_i^+ + T_i] \quad \mathcal{M}(t) &= \det \left\{ z_B^T(t) z_B(t) \right\} = \Delta^m(t) \det \left\{ B_i^T B_i \right\} \equiv 0, \\ \forall t \in [t_i^+ + T_i; \hat{t}_{i+1}^+] \quad \Delta_{\text{UB}}^m \det \left\{ B_i^T B_i \right\} &\geq \mathcal{M}(t) \geq \Delta_{\text{LB}}^m \det \left\{ B_i^T B_i \right\} > 0. \end{aligned}$$

Подставив (П.30) в (П.29), учитывая $0 \leq \phi(t, \tau) \leq 1$, имеем оценки на $\Omega(t)$:

$$(П.31) \quad \begin{aligned} \forall t \in [\hat{t}_0^+; t_0^+ + T_0] \quad \Omega(t) &\equiv 0, \\ \forall i \geq 1 \quad \forall t \in [\hat{t}_i^+; t_i^+ + T_i] \quad \Omega(\hat{t}_i^+) &\geq \Omega(t) \geq \phi^{k_0}(t_i^+ + T_i, \hat{t}_i^+) \Omega(\hat{t}_i^+) > 0, \\ \forall t \in [t_i^+ + T_i; \hat{t}_{i+1}^+] \quad \Omega(t_i^+ + T_i) &+ (\hat{t}_{i+1}^+ - t_i^+ - T_i) \Delta_{\text{UB}}^m \det \left\{ B_i^T B_i \right\} \geq \\ &\geq \Omega(t) \geq \phi^{k_0}(\hat{t}_{i+1}^+, t_i^+ + T_i) \left(\Omega(t_i^+ + T_i) + \right. \\ &\quad \left. + (\hat{t}_{i+1}^+ - t_i^+ - T_i) \Delta_{\text{LB}}^m \det \left\{ B_i^T B_i \right\} \right) > 0. \end{aligned}$$

Откуда получим:

$$(П.32) \quad \begin{aligned} \forall t \geq t_0^+ + T_0 \quad \Omega_{\text{UB}} &\geq \Omega(t) \geq \Omega_{\text{LB}} > 0, \\ \Omega_{\text{LB}} &= \min_{\forall i \geq 1} \left\{ \begin{aligned} &\phi^{k_0}(\hat{t}_{i+1}^+, t_i^+ + T_i) \left(\Omega(t_i^+ + T_i) + \right. \\ &\quad \left. + (\hat{t}_{i+1}^+ - t_i^+ - T_i) \Delta_{\text{LB}}^m \det \left\{ B_i^T B_i \right\} \right), \\ &\phi^{k_0}(t_i^+ + T_i, \hat{t}_i^+) \Omega(\hat{t}_i^+) \end{aligned} \right\}, \\ \Omega_{\text{UB}} &= \max_{\forall i \geq 1} \left\{ \Omega(\hat{t}_i^+), \Omega(t_i^+ + T_i) + (\hat{t}_{i+1}^+ - t_i^+ - T_i) \Delta_{\text{UB}}^m \det \left\{ B_i^T B_i \right\} \right\}, \end{aligned}$$

что завершает доказательство части а).

Для доказательства части б) продифференцируем возмущение $w(t)$:

$$(П.33) \quad \begin{aligned} \dot{w}(t) &= \dot{\Upsilon}(t) - \dot{\Omega}(t)\theta(t) - \Omega(t)\dot{\theta}(t) = \\ &= -k(\Upsilon(t) - \mathcal{Y}(t)) + k(\Omega(t) - \mathcal{M}(t))\theta(t) - \Omega(t)\dot{\theta}(t) = \\ &= -k(\Upsilon(t) - \mathcal{M}(t)\theta(t) - d(t)) + k(\Omega(t) - \mathcal{M}(t))\theta(t) - \Omega(t)\dot{\theta}(t) = \\ &= -k(\Upsilon(t) - \Omega(t)\theta(t)) - \Omega(t)\dot{\theta}(t) + kd(t) = \\ &= -kw(t) - \Omega(t)\dot{\theta}(t) + kd(t), \quad w(t_0^+) = 0_{(n+m) \times m}, \end{aligned}$$

Покажем выполнение при $\tilde{t}_i^+ = 0$ тождественного равенства $d(t) \equiv 0$. Как следует из определения (П.27), верно $\bar{\varepsilon}_1(t) \equiv 0 \Leftrightarrow d(t) \equiv 0$. Предполо-

жим $\forall i \in \mathbb{N}$ $\hat{t}_i^+ \geq t_i^+$ и получим определение $\bar{\varepsilon}_1(t)$ на интервалах $[\hat{t}_i^+; t_{i+1}^+)$ и $[t_i^+; \hat{t}_i^+)$:

$$\begin{aligned}
 & \forall t \in [\hat{t}_i^+; t_{i+1}^+) \quad \vartheta(t) = \vartheta_i \\
 & \quad \Downarrow \\
 & \bar{\varepsilon}_1(t) = \text{adj} \{ \varphi(t) \} \int_{\hat{t}_i^+}^t e^{-\int_{\hat{t}_i^+}^{\tau} \sigma ds} \bar{\varphi}_n(\tau) \bar{z}_n^T(\tau) d\tau - \Delta(t) \bar{\vartheta}_i = \\
 (П.34) \quad & = \text{adj} \{ \varphi(t) \} \left(\int_{\hat{t}_i^+}^t e^{-\int_{\hat{t}_i^+}^{\tau} \sigma ds} \bar{\varphi}_n(\tau) \bar{\varphi}_n^T(\tau) d\tau \bar{\vartheta}_i + \right. \\
 & \quad \left. + \int_{\hat{t}_i^+}^t e^{-\int_{\hat{t}_i^+}^{\tau} \sigma ds} \bar{\varphi}_n(\tau) \bar{\varepsilon}_0^T(\tau) d\tau \right) - \\
 & - \Delta(t) \bar{\vartheta}_i = \Delta(t) \bar{\vartheta}_i - \Delta(t) \bar{\vartheta}_i + \int_{\hat{t}_i^+}^t e^{-\int_{\hat{t}_i^+}^{\tau} \sigma ds} \bar{\varphi}_n(\tau) \bar{\varepsilon}_0^T(\tau) d\tau = 0_{(n+m+1) \times n}.
 \end{aligned}$$

В то же время:

$$\begin{aligned}
 & \forall t \in [t_{i-1}^+; \hat{t}_i^+) \quad \vartheta(t) = \vartheta_{i-1}; \forall t \in [\hat{t}_i^+; t_i^+) \quad \vartheta(t) = \vartheta_i \\
 & \quad \Downarrow \\
 & \forall t \in [t_i^+; \hat{t}_i^+) , \bar{\varepsilon}_1(t) = \text{adj} \{ \varphi(t) \} \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^t e^{-\int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\tau} \sigma ds} \bar{\varphi}_n(\tau) \bar{z}_n^T(\tau) d\tau - \Delta(t) \bar{\vartheta}_i = \\
 & \quad = \text{adj} \{ \varphi(t) \} \times \\
 (П.35) \quad & \times \left(\int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\hat{t}_i^+} e^{-\int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\tau} \sigma ds} \bar{\varphi}_n(\tau) \bar{\varphi}_n^T(\tau) d\tau \bar{\vartheta}_{i-1} + \int_{t_i^+}^t e^{-\int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\tau} \sigma ds} \bar{\varphi}_n(\tau) \bar{\varphi}_n^T(\tau) d\tau \bar{\vartheta}_i \right) + \\
 & \quad + \text{adj} \{ \varphi(t) \} \times \\
 & \times \left(\pm \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\hat{t}_i^+} e^{-\int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\tau} \sigma ds} \bar{\varphi}_n(\tau) \bar{\varphi}_n^T(\tau) d\tau \bar{\vartheta}_i + \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^t e^{-\int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\tau} \sigma ds} \bar{\varphi}_n(\tau) \bar{\varepsilon}_0^T(\tau) d\tau \right) - \\
 & \quad - \Delta(t) \bar{\vartheta}_i = \text{adj} \{ \varphi(t) \} \times \\
 & \times \left(\int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\hat{t}_i^+} e^{-\int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\tau} \sigma ds} \bar{\varphi}_n(\tau) \bar{\varphi}_n^T(\tau) d\tau (\bar{\vartheta}_{i-1} - \bar{\vartheta}_i) + \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^t e^{-\int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\tau} \sigma ds} \bar{\varphi}_n(\tau) \bar{\varepsilon}_0^T(\tau) d\tau \right).
 \end{aligned}$$

Объединение выражений (П.34) и (П.35) позволяет записать:

$$(П.36) \quad \bar{\varepsilon}_1(t) := \begin{cases} \text{adj} \{ \varphi(t) \} \left(\int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{t_i^+} e^{-\int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\tau} \sigma ds} \bar{\varphi}_n(\tau) \bar{\varphi}_n^T(\tau) d\tau (\bar{\vartheta}_{i-1} - \bar{\vartheta}_i) + \right. \\ \left. + \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^t e^{-\int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{\tau} \sigma ds} \bar{\varphi}_n(\tau) \bar{\varepsilon}_0^T(\tau) d\tau \right), i > 0, \forall t \in [t_i^+; \hat{t}_i^+) \\ 0_{(n+m+1) \times n}, \forall t \in [\hat{t}_i^+; t_{i+1}^+) \end{cases}$$

откуда следует $\bar{\varepsilon}_1(t) \equiv 0$ при $\tilde{t}_i^+ = 0$, что влечет за собой $d(t) \equiv 0$.

Используя (П.2), решим уравнение (П.33) с учетом $d(t) \equiv 0$:

$$(П.37) \quad \begin{aligned} w(t) &= - \int_{t_0^+ + T_0}^t \phi^{k_0}(t, \tau) \Omega(\tau) \sum_{q=1}^i \Delta_q^\theta \delta(\tau - t_q^+) d\tau = \\ &= - \sum_{q=1}^i \phi^{k_0}(t, t_q^+) \Omega(t_q^+) \Delta_q^\theta h(t - t_q^+) = \\ &= \left(- \sum_{q=1}^i \phi^{k_0}(t_0^+ + T_0, t_q^+) \Omega(t_q^+) \Delta_q^\theta h(t - t_q^+) \right) \phi^{k_0}(t, t_0^+ + T_0). \end{aligned}$$

Здесь отметим отсутствие в силу допущения 2 переключений параметров на интервале $[t_0^+; t_0^+ + T_0)$, что приводит к суммированию в (П.37) от $q = 1$ до i .

Если число переключений параметров конечно: $i \leq i_{\max} < \infty$, то поскольку:

- а) при конечном i моменты времени t_i^+ также конечны;
- б) $\forall q \in \mathbb{N}$ $\phi^{k_0}(t_0^+ + T_0, t_q^+)$ ограничена при конечном t_q^+ ,
- в) $k_0 \geq 1$,

верна оценка сверху:

$$(П.38) \quad \begin{aligned} \|w(t)\| &\leq \phi(t, t_0^+ + T_0) \sum_{q=1}^{i_{\max}} \phi^{k_0}(t_0^+ + T_0, t_q^+) \Omega_{\text{UB}} \left\| \Delta_q^\theta \right\| h(t - t_q^+) = \\ &= w_{\max} \phi(t, t_0^+ + T_0) \leq w_{\max}. \end{aligned}$$

Если $\forall q \in \mathbb{N}$ $\left\| \Delta_q^\theta \right\| \leq c_q \phi^{k_0}(t_q^+, t_0^+)$, $c_q > c_{q+1}$, то из (П.37) имеем:

$$(П.39) \quad \|w(t)\| \leq \phi^{k_0}(t, t_0^+ + T_0) \Omega_{\text{UB}} \phi^{k_0}(t_0^+ + T_0, t_0^+) \sum_{q=1}^i c_q h(t - t_q^+).$$

Все частичные суммы знакоположительного ряда в (П.39) ограничены, а поэтому $\sum_{q=1}^i c_q h(t - t_q^+) < \infty$ и даже при неограниченном числе переключений верна оценка:

$$(П.40) \quad \|w(t)\| \leq w_{\max} \phi(t, t_0^+ + T_0) \leq w_{\max},$$

что завершает доказательство утверждения.

Замечание 2. Возмущение $d(t)$, отличающее реальное поведение возмущения $w(t)$ от оценки (П.40), возникает в предложенной параметризации при $\tilde{t}_i^+ > 0$ на ограниченных интервалах времени $[t_i^+; \hat{t}_i^+]$, и $\forall t \geq \hat{t}_i^+$ его вклад в $w(t)$ представляет глобально-экспоненциально затухающую функцию. Поэтому $d(t)$ может влиять исключительно на качество переходных процессов по $\tilde{\theta}(t)$ и $e_{ref}(t)$, но не на глобальные свойства ошибки $\xi(t)$. Уменьшить влияние $d(t)$ возможно увеличением параметра σ (подробный анализ механизма улучшения см. в утверждении 4 из [26]).

Доказательство утверждения 3. В соответствии с результатами работы [26] алгоритм (4.10) гарантирует выполнение условия $\hat{t}_i^+ = \Delta_{pr} \leq T_i$, если функция $\epsilon(t)$ является индикатором изменения параметров системы:

$$(П.41) \quad \forall t \in [t_i^+; \hat{t}_i^+) f(t) \neq 0, \forall t \in [\hat{t}_i^+; t_{i+1}^+) f(t) = 0,$$

т.е. отлична от нуля только на интервале $[t_i^+; \hat{t}_i^+)$ задержки детекции.

Подставив выражения (П.25) и (П.24) в (4.9), имеем:

$$(П.42) \quad \begin{aligned} \epsilon(t) &= \Delta(t) \bar{\varphi}_n(t) \bar{z}_n^T(t) - \bar{\varphi}_n(t) \bar{\varphi}_n^T(t) Y(t) = \Delta(t) \bar{\varphi}_n(t) \bar{\varphi}_n^T(t) \bar{\vartheta}(t) + \\ &+ \Delta(t) \bar{\varphi}_n(t) \bar{\varepsilon}_0^T(t) - \Delta(t) \bar{\varphi}_n(t) \bar{\varphi}_n^T(t) \bar{\vartheta}(t) - \bar{\varphi}_n(t) \bar{\varphi}_n^T(t) \bar{\varepsilon}_1(t) = \\ &= \Delta(t) \bar{\varphi}_n(t) \bar{\varepsilon}_0^T(t) - \bar{\varphi}_n(t) \bar{\varphi}_n^T(t) \bar{\varepsilon}_1(t). \end{aligned}$$

Ошибка $\epsilon(t)$ удовлетворяет определению (П.41), если $\bar{\varepsilon}_0^T(t)$ и $\bar{\varepsilon}_1(t)$ удовлетворяют (П.41). По доказанному в утверждении 2 (см. (П.36)) функция $\bar{\varepsilon}_1(t)$ является индикатором изменений параметров системы. Тогда осталось доказать аналогичный тезис для $\bar{\varepsilon}_0^T(t)$. Предположим $\forall i \in \mathbb{N} \hat{t}_i^+ \geq t_i^+$, а тогда:

$$(П.43) \quad \begin{aligned} \forall t \in [t_i^+; t_{i+1}^+) \quad \vartheta(t) &= \vartheta_i \\ &\Downarrow \\ \forall t \in [t_i^+; t_{i+1}^+) \quad \bar{\varepsilon}_0(t) &= n_s(t) \left(\int_{\hat{t}_i^+}^t e^{-l(t-\tau)} \dot{x}(\tau) d\tau - \vartheta_i^T \bar{\Phi}(t) \right) = \\ &= n_s(t) \left(\vartheta_i^T \int_{\hat{t}_i^+}^t e^{-l(t-\tau)} \Phi(\tau) d\tau - \vartheta_i^T \bar{\Phi}(t) \right) = \\ &= n_s(t) (\vartheta_i^T \bar{\Phi}(t) - \vartheta_i^T \bar{\Phi}(t)) = 0. \end{aligned}$$

В то же время:

$$\begin{aligned}
& \forall t \in [t_{i-1}^+; t_i^+) \quad \vartheta(t) = \vartheta_{i-1}, \quad \forall t \in [t_i^+; \hat{t}_i^+) \quad \vartheta(t) = \vartheta_i \\
& \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\
& \forall t \in [t_i^+; \hat{t}_i^+), \quad \bar{\varepsilon}_0(t) = n_s(t) \left(\int_{\hat{t}_{i-1}^+}^t e^{-l(t-\tau)} \dot{x}(\tau) d\tau - \vartheta_i^T \bar{\Phi}(t) \right) = \\
(П.44) \quad & = n_s(t) \left(e^{-l(t-t_i^+)} \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{t_i^+} e^{-l(t_i^+-\tau)} \vartheta_{i-1}^T \Phi(\tau) d\tau + \int_{t_i^+}^t e^{-l(t-\tau)} \vartheta_i^T \Phi(\tau) d\tau - \right. \\
& \left. - \vartheta_i^T \left(e^{-l(t-t_i^+)} \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{t_i^+} e^{-l(t_i^+-\tau)} \Phi(\tau) d\tau + \int_{t_i^+}^t e^{-l(t-\tau)} \Phi(\tau) d\tau \right) \right) = \\
& = n_s(t) e^{-l(t-t_i^+)} (\vartheta_{i-1}^T - \vartheta_i^T) \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{t_i^+} e^{-l(t_i^+-\tau)} \Phi(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Объединив выражения (П.43) и (П.44), имеем

$$(П.45) \quad \bar{\varepsilon}_0(t) = \begin{cases} n_s(t) e^{-l(t-t_i^+)} (\vartheta_{i-1}^T - \vartheta_i^T) \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^{t_i^+} e^{-l(t_i^+-\tau)} \Phi(\tau) d\tau, & i > 0, \\ 0_n, & \forall t \in [\hat{t}_i^+; t_{i+1}^+), \end{cases} \quad \forall t \in [t_i^+; \hat{t}_i^+),$$

что вместе с (П.36) позволяет записать:

$$(П.46) \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \epsilon(t) = \begin{cases} \Delta(t) \bar{\varphi}_n(t) \bar{\varepsilon}_0^T(t) - \bar{\varphi}_n(t) \bar{\varphi}_n^T(t) \bar{\varepsilon}_1(t), & i > 0, \quad \forall t \in [t_i^+; \hat{t}_i^+), \\ 0_{(n+m+1) \times n}, & \forall t \in [\hat{t}_i^+; t_{i+1}^+), \end{cases}$$

откуда $\epsilon(t)$ — индикатор изменений параметров системы, и по доказанному в [26] при $\Delta(t) \in \text{FE}$ и $\bar{\varphi}_n(t) \in \text{FE}$ на $[\hat{t}_i^+; t_i^+ + T_i]$ (что обеспечивается выполнением допущений 2 и 3) верно $\tilde{t}_i^+ = \Delta_{pr} \leq T_i$.

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы проведем аналогично доказательству утверждения 1.

Рассмотрим два интервала $[t_0^+; t_0^+ + T_0)$ и $[t_0^+ + T_0; \infty)$. На $[t_0^+; t_0^+ + T_0)$ в консервативном случае выполняется неравенство $\Omega(t) \leq \Omega_{LB}$, а значит $\dot{\tilde{\theta}}(t) = 0_{(n+m) \times m} \Rightarrow \tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(t_0^+)$ (в силу отсутствия по допущению 2 переключений на $[t_0^+; t_0^+ + T_0)$). Тогда, из ограниченности $\tilde{\theta}(t)$, по доказанному в утверждении 1 (см. (П.13)–(П.17)), следует экспоненциальная скорость роста $e_{ref}(t)$ и, следовательно, ограниченность $e_{ref}(t)$ своим конечным значением на правой границе рассматриваемого интервала: $\forall t \in [t_0^+; t_0^+ + T_0)$ $e_{ref}(t) \leq e_{ref}(t_0^+ + T_0)$. Откуда следует ограниченность $\xi(t)$ на интервале $[t_0^+; t_0^+ + T_0)$.

Перейдем к рассмотрению интервала $[t_0^+ + T_0; \infty)$.

Шаг 1. Экспоненциальная сходимость $\tilde{\theta}(t) \forall t \geq t_0^+ + T_0$.

Решение уравнения (4.11) $\forall t \geq t_0^+ + T_0$ с учетом (П.38) или (П.40) и ограниченности $\Omega(t) \geq \Omega_{LB}$ удовлетворяет неравенству:

$$(П.47) \quad \begin{aligned} \tilde{\theta}(t) &= \phi(t, t_0^+ + T_0) \tilde{\theta}(t_0^+ + T_0) + \int_{t_0^+ + T_0}^t \phi(t, \tau) \frac{\gamma_1 w(\tau)}{\Omega(\tau)} d\tau - \\ &- \int_{t_0^+ + T_0}^t \phi(t, \tau) \sum_{q=1}^i \Delta_q^\theta \delta(\tau - t_q^+) d\tau \leq \phi(t, t_0^+ + T_0) \tilde{\theta}(t_0^+ + T_0) + \\ &+ \frac{\gamma_1 w_{\max}}{\Omega_{LB}} \int_{t_0^+ + T_0}^t \phi(t, \tau) \phi(\tau, t_0^+ + T_0) d\tau - \sum_{q=1}^i \phi(t, t_q^+) \Delta_q^\theta h(t - t_q^+). \end{aligned}$$

Поскольку выполняется хотя бы одно из условий:

- 1) $i \leq i_{\max} < \infty$,
- 2) $\forall q \in \mathbb{N} \|\Delta_q^\theta\| \leq c_q \phi^{k_0}(t_q^+, t_0^+) \leq c_q \phi(t_q^+, t_0^+)$, $c_q > c_{q+1}$,

то аналогично (П.3)–(П.5) из (П.47) можем получить следующую оценку сверху:

$$(П.48) \quad \begin{aligned} \|\tilde{\theta}(t)\| &\leq \beta_{\max} \phi(t, t_0^+ + T_0) + \frac{\gamma_1 w_{\max}}{\Omega_{LB}} \phi(t, t_0^+ + T_0) (t - t_0^+ - T_0) \leq \\ &\leq \beta_{\max} \phi(t, t_0^+ + T_0) + \frac{\gamma_1 w_{\max}}{\Omega_{LB}} \chi_1(t) e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t - t_0^+ - T_0)}, \end{aligned}$$

где $\chi_1(t)$ — переменный параметр:

$$\chi_1(t) = e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t - t_0^+ - T_0)} (t - t_0^+ - T_0), \quad \chi_1(t_0^+ + T_0) = 0,$$

а $\beta(t)$ для обоих рассматриваемых случаев определен следующим образом:

$$(П.49) \quad \beta(t) \leq \|\tilde{\theta}(t_0^+ + T_0)\| + \sum_{q=1}^{i_{\max}} \phi(t_0^+ + T_0, t_q^+) \|\Delta_q^\theta\| h(t - t_q^+) = \beta_{\max},$$

$$\begin{aligned}
\beta(t) &\leq \left\| \tilde{\theta}(t_0^+ + T_0) \right\| + \sum_{q=1}^i \phi(t_0^+ + T_0, t_q^+) \phi(t_q^+, t_0^+) c_q h(t - t_q^+) = \\
(\text{П.50}) \quad &= \left\| \tilde{\theta}(t_0^+ + T_0) \right\| + \sum_{q=1}^i \phi(t_0^+ + T_0, t_0^+) c_q h(t - t_q^+) = \beta_{\max}.
\end{aligned}$$

Если параметр $\chi_1(t)$ ограничен, то для $\tilde{\theta}(t)$ верно:

$$(\text{П.51}) \quad \left\| \tilde{\theta}(t) \right\| \leq \left(\beta_{\max} + \frac{\gamma_1 w_{\max}}{\Omega_{LB}} \chi_1^{\text{UB}} \right) e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+-T_0)}.$$

Тогда необходимо показать $|\chi_1(t)| \leq \chi_1^{\text{UB}}$. Дифференцируем $\chi_1(t)$ по времени:

$$(\text{П.52}) \quad \dot{\chi}_1(t) = -\frac{\gamma_1}{2} \chi_1(t) + e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+-T_0)}.$$

Оценка сверху на решение (П.52) принимает вид:

$$\begin{aligned}
|\chi_1(t)| &\leq \left| \int_{t_0^+ + T_0}^t e^{-\int_{\tau}^t \frac{\gamma_1}{2} d\tau} e^{-\frac{\gamma_1}{2}(\tau-t_0^+-T_0)} d\tau \right| \leq \\
(\text{П.53}) \quad &\leq \left| \int_{t_0^+ + T_0}^t e^{-\frac{\gamma_1}{2}(\tau-t_0^+-T_0)} d\tau \right| \leq \frac{2}{\gamma_1},
\end{aligned}$$

что доказывает целевую ограниченность $|\chi_1(t)| \leq \chi_1^{\text{UB}}$.

Из ограниченности (П.53) мгновенно следует экспоненциальная сходимость (П.51), что и требовалось доказать на Шаге 1.

Шаг 2. Экспоненциальная сходимость ошибки $\xi(t) \forall t \geq t_0^+ + T_0$.

Чтобы доказать сходимость $\xi(t) \forall t \geq t_0^+ + T_0$ в силу оценки (П.51), остается доказать сходимость ошибки слежения $e_{\text{ref}}(t) \forall t \geq t_0^+ + T_0$.

Введем в рассмотрение следующую квадратичную форму:

$$\begin{aligned}
V_{e_{\text{ref}}} &= e_{\text{ref}}^T P e_{\text{ref}} + \frac{4a_0^2}{\gamma_1} e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+-T_0^+)}, \quad H = \text{blockdiag} \left\{ P, \frac{4a_0^2}{\gamma_1} \right\}, \\
(\text{П.54}) \quad &\underbrace{\lambda_{\min}(H)}_{\lambda_m} \|\bar{e}_{\text{ref}}\|^2 \leq V(\|\bar{e}_{\text{ref}}\|) \leq \underbrace{\lambda_{\max}(H)}_{\lambda_M} \|\bar{e}_{\text{ref}}\|^2,
\end{aligned}$$

$$\bar{e}_{\text{ref}}(t) = \begin{bmatrix} e_{\text{ref}}^T(t) & e^{-\frac{\gamma_1}{4}(t-t_0^+-T_0^+)} \end{bmatrix}^T.$$

Аналогично доказательству утверждения 1, $\forall t \geq t_0^+ + T_0$ производная (П.54) может быть записана в виде:

$$(П.55) \quad \begin{aligned} \dot{V}_{e_{ref}}(t) \leq & -\mu\lambda_{\min}(P) \|e_{ref}(t)\|^2 - 2a_0^2 e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+-T_0)} + \\ & + b_{\max}^2 \lambda_{\max}(\omega(t)\omega^T(t)) \|\tilde{\theta}(t)\|^2. \end{aligned}$$

На основании (П.55) введем следующую оценку сверху на $b_{\max}^2 \|\tilde{\theta}(t)\|^2$:

$$(П.56) \quad b_{\max}^2 \|\tilde{\theta}(t)\|^2 \leq b_{\max}^2 \left(\beta_{\max} + \frac{\gamma_1 w_{\max}}{\Omega_{LB}} \chi_1^{\text{UB}} \right)^2 e^{-\gamma_1(t-t_0^+-T_0)}.$$

Подставим (П.56) в (П.55):

$$(П.57) \quad \begin{aligned} \dot{V}_{e_{ref}}(t) \leq & -\mu\lambda_{\min}(P) \|e_{ref}(t)\|^2 - 2a_0^2 e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+-T_0)} + \\ & + b_{\max}^2 \left(\beta_{\max} + \frac{\gamma_1 w_{\max}}{\Omega_{LB}} \chi_1^{\text{UB}} \right)^2 \lambda_{\max}(\omega(t)\omega^T(t)) e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+-T_0)} \times \\ & \times e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+-T_0)}. \end{aligned}$$

Для экспоненциальной устойчивости $e_{ref}(t)$ необходимо экспоненциальное убывание третьего слагаемого в (П.57), что требует:

$$(П.58) \quad \chi(t) = \lambda_{\max}(\omega(t)\omega^T(t)) e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+)} \leq \chi_{\text{UB}},$$

где $\chi_{\text{UB}} > 0$.

Ошибка $\tilde{\theta}(t)$ ограничена (П.51). В этом случае, по доказанному в утверждении 1, скорость роста $\lambda_{\max}(\omega(t)\omega^T(t))$ не превосходит экспоненциальной (П.17). Тогда при достаточно большом $\gamma_1 > 0$ оценка (П.58) справедлива. Подставив (П.58) в (П.57), имеем:

$$(П.59) \quad \begin{aligned} \dot{V}_{e_{ref}}(t) \leq & -\mu\lambda_{\min}(P) \|e_{ref}(t)\|^2 - 2a_0^2 e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+-T_0)} + \\ & + a_0^2 e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t-t_0^+-T_0)} \leq -\bar{\eta}_{e_{ref}} V_{e_{ref}}(t), \end{aligned}$$

где

$$a_0^2 = b_{\max}^2 \left(\beta_{\max} + \frac{\gamma_1 w_{\max}}{\Omega_{LB}} \chi_1^{\text{UB}} \right)^2 \chi_{\text{UB}}, \quad \bar{\eta}_{e_{ref}} = \min \left\{ \frac{\mu\lambda_{\min}(P)}{\lambda_{\max}(P)}, \frac{\gamma_1}{4} \right\}.$$

Решение дифференциального неравенства (П.59) позволяет получить:

$$(П.60) \quad V_{e_{ref}}(t) \leq e^{-\bar{\eta}_{e_{ref}}(t-t_0^+-T_0)} V_{e_{ref}}(t_0^+ + T_0).$$

Откуда следует экспоненциальная сходимость ошибки слежения $e_{ref}(t)$ к нулю:

$$(П.61) \quad \|e_{ref}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m}} \|e_{ref}(t_0^+ + T_0)\| e^{-\eta_{e_{ref}}(t-t_0^+-T_0)},$$

где

$$\eta_{e_{ref}} = \frac{1}{2} \bar{\eta}_{e_{ref}}.$$

Объединение (П.61) и (П.51) позволяет записать:

$$(П.62) \quad \|\xi(t)\| \leq \max \left\{ \sqrt{\frac{\lambda_M}{\lambda_m}} \|e_{ref}(t_0^+ + T_0)\|, \right. \\ \left. \beta_{\max} + \frac{\gamma_1 w_{\max}}{\Omega_{LB}} \chi_1^{\text{UB}} \right\} e^{-\eta_{e_{ref}}(t-t_0^+-T_0)},$$

что вместе с ограниченностью $\xi(t)$ на интервале $[t_0^+; t_0^+ + T_0]$ позволяет сделать вывод как о глобальной ограниченности $\xi(t) \in L_\infty$, так и об экспоненциальной сходимости $\xi(t)$ к нулю $\forall t \geq t_0^+ + T_0$. Доказательство теоремы завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ioannou P., Sun J.* Robust Adaptive Control. N.Y.: Dover, 2013.
2. *Narendra K.S., Annaswamy A.M.* Stable Adaptive Systems. Courier Corporation, 2012.
3. *Tao G.* Adaptive Control Design and Analysis. John Wiley & Sons, 2003.
4. *Narendra K.S.* Hierarchical Adaptive Control of Rapidly Time-Varying Systems Using Multiple Models // Control Complex Syst. Butterworth-Heinemann, 2016. P. 33–66.
5. *Chowdhary G.V., Johnson E.N.* Theory and Flight-Test Validation of A Concurrent-Learning Adaptive Controller // J. Guid. Control & Dyn. 2011. Vol. 34. No. 2. P. 592–607.
6. *Pan Y., Aranovskiy S., Bobtsov A., Yu H.* Efficient Learning from Adaptive Control under Sufficient Excitation // Int. J. Robust & Nonlinear Control. 2019. Vol. 29. No. 10. P. 3111–3124.
7. *Lee H.I., Shin H.S., Tsourdos A.* Concurrent Learning Adaptive Control with Directional Forgetting // IEEE Trans. Automat. Control. 2019. Vol. 64. No. 12. P. 5164–5170.
8. *Jenkins B.M., Annaswamy A.M., Lavretsky E., Gibson T.E.* Convergence Properties of Adaptive Systems and The Definition of Exponential Stability // SIAM J. Control & Optimiz. 2018. Vol. 56. No. 4. P. 2463–2484.
9. *Ortega R., Nikiforov V., Gerasimov D.* On Modified Parameter Estimators for Identification and Adaptive Control. A Unified Framework and Some New Schemes // Annual Reviews in Control. 2020. Vol. 50. P. 278–293.

10. *Glushchenko A., Petrov V., Lastochkin K.* Regression Filtration with Resetting to Provide Exponential Convergence of MRAC for Plants with Jump Change of Unknown Parameters // *IEEE Trans. Automat. Control.* 2022. P. 1–8. Early Access.
11. *Kersting S.* Adaptive Identification and Control of Uncertain Systems with Switching. PhD thesis, Technische Universitat Munchen; 2018.
<https://mediatum.ub.tum.de/doc/1377055/1377055.pdf>. Accessed March 15, 2022.
12. *Sang Q., Tao G.* Adaptive Control of Piecewise Linear Systems: The State Tracking Case // *IEEE Trans. on Automat. Control.* 2011. Vol. 57. No. 2. P. 522–528.
13. *Sang Q., Tao G.* Adaptive Control of Piecewise Linear Systems With Applications to NASA GTM // *Proc. Amer. Control Conf.* 2011. P. 1157–1162.
14. *Sang Q., Tao G.* Adaptive Control of Piecewise Linear Systems with Output Feedback for Output Tracking // *Conf. Dec. & Control.* 2012. P. 5422–5427.
15. *Sang Q., Tao G.* Adaptive Control of Piecewise Linear Systems with State Feedback for Output Tracking // *Asian J. Control.* 2013. Vol. 15. No. 4. P. 933–943.
16. *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Boston: Birkhauser, 2003.
17. *De La Torre G., Chowdhary G., Johnson E.N.* Concurrent learning adaptive control for linear switched systems // *Amer. Control Conf.* 2013. P. 854–859.
18. *Goldar S.N., Yazdani M., Sinafar B.* Concurrent Learning Based Finite-Time Parameter Estimation in Adaptive Control of Uncertain Switched Nonlinear Systems // *J. Control, Automat. & Electr. Syst.* 2017. Vol. 28. No. 4. P. 444–456.
19. *Wu C., Huang X., Niu B., Xie X.J.* Concurrent Learning-Based Global Exponential Tracking Control of Uncertain Switched Systems With Mode-Dependent Average Dwell Time // *IEEE Access.* 2018. Vol. 6. P. 39086–39095.
20. *Wu C., Li J., Niu B., Huang X.* Switched Concurrent Learning Adaptive Control of Switched Systems with Nonlinear Matched Uncertainties // *IEEE Access.* 2020. Vol. 8. P. 33560–33573.
21. *Liu T., Buss M.* Indirect Model Reference Adaptive Control of Piecewise Affine Systems with Concurrent Learning // *IFAC-PapersOnLine.* 2020. Vol. 53. No. 2. P. 1924–1929.
22. *Du Y., Liu F., Qiu J., Buss M.* Online Identification of Piecewise Affine Systems Using Integral Concurrent Learning // *IEEE Trans. Circuits & Syst. I: Reg. Papers,* 2021. Vol. 68. No. 10 P. 4324–4336.
23. *Du Y., Liu F., Qiu J., Buss M.* A Novel Recursive Approach for Online Identification of Continuous-Time Switched Nonlinear Systems // *Int. J. Robust Nonlinear Control.* 2021. P. 1–20.
24. *Narendra K.S., Balakrishnan J.* Adaptive Control Using Multiple Models // *IEEE Trans. Automat. Control.* 1997. Vol. 42. No. 2. P. 171–187.
25. *Глушченко А.И., Ласточкин К.А., Петров В.А.* Адаптивное управление с гарантией экспоненциальной устойчивости. Часть I. Объекты с постоянными параметрами // *АиТ.* 2022. № 4. С. 62–99.
Glushchenko A., Lastochkin K., Petrov V. Exponentially Stable Adaptive Control. Part I. Time-Invariant Plants // *Autom. Remote Control.* 2022. V. 83. No. 4. P. 548–578.
26. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Unknown Piecewise Constant Parameters Identification with Exponential Rate of Convergence // *Int. J. Adap. Control Signal Proc.* 2023. V. 37. No. 1. P. 315–346.

27. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Exponentially Stable Adaptive Optimal Control of Uncertain LTI Systems // arXiv preprint arXiv:2205.02913. 2022. P. 1–37.
28. *Glushchenko A., Lastochkin K.* Exponentially Convergent Direct Adaptive Pole Placement Control of Plants with Unmatched Uncertainty under FE Condition // IEEE Control Syst. Letters. 2022. Vol. 6. P. 2527–2532.
29. *Wang L., Ortega R., Bobtsov A., Romero J., Yi B.* Identifiability Implies Robust, Globally Exponentially Convergent On-Line Parameter Estimation: Application to Model Reference Adaptive Control // preprint arXiv:2108.08436; 2021. P. 1–16.
30. *Hakem A., Cocquempot V., Pekre K.* Switching time estimation and active mode recognition using a data projection method // Int. J. App. Math. & Comp. Sc. 2016. Vol. 26. No.4. P. 827–840.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.

Поступила в редакцию 11.07.2022

После доработки 21.11.2022

Принята к публикации 30.11.2022

Управление в технических системах

© 2023 г. А.В. АНТОНОВ, канд. техн. наук (antonov.av@imash.ru),
А.С. ФОМИН, канд. техн. наук (alexey-nvkz@mail.ru)
(Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва)

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЯТИПОДВИЖНОГО МАНИПУЛЯТОРА ГИБРИДНОЙ СТРУКТУРЫ¹

Управление любой робототехнической системой невозможно реализовать без предварительного решения обратной кинематической задачи, состоящей в определении законов управления приводами, требуемых для реализации заданной траектории движения и закладываемых в систему управления. Настоящая статья посвящена решению обратной кинематической задачи для пятиподвижного манипулятора гибридной (параллельно-последовательной) структуры. После краткого описания структуры манипулятора, включающей трехподвижную параллельную и двухподвижную последовательную части и обеспечивающей выходному звену три вращательные и две поступательные степени свободы, в статье подробно изложен алгоритм решения обратной задачи. Алгоритм основан на представлении манипулятора в виде эквивалентной системы последовательной структуры и последующем использовании формулы произведения матричных экспонент. Предлагаемый алгоритм позволяет получить решение в аналитическом виде без каких-либо допущений на геометрию манипулятора; рассмотренный пример подтверждает работоспособность алгоритма. Методика решения обратной задачи может быть также адаптирована к анализу других манипуляторов гибридной структуры.

Ключевые слова: манипулятор, параллельно-последовательная (гибридная) структура, кинематический анализ, обратная кинематическая задача, кинематический винт, формула произведения матричных экспонент.

DOI: 10.31857/S0005231023030054, EDN: ZZBRNY

1. Введение

Манипуляторы гибридной структуры — это механические устройства, включающие одновременно несколько кинематических цепей параллельной и/или последовательной структуры, которые служат основой для множества многоподвижных робототехнических систем [1]. Такие манипуляторы обладают рядом важных функциональных свойств, в том числе расширенными

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-79-10304, <https://rscf.ru/project/22-79-10304/>.

габаритами рабочего пространства [2], а также возможностью обходить или исключать особые положения [3].

Настоящая статья посвящена классу манипуляторов гибридной структуры, обладающих пятью степенями свободы, в которых на параллельную кинематическую цепь насаивается последовательная. Известен ряд манипуляторов такого типа, среди которых: CaNuMan — манипулятор, образованный трехподвижным модулем параллельной структуры и двухподвижным модулем последовательной структуры [4]; обрабатывающий станок, состоящий из параллельной части с двумя степенями свободы и последовательной части с тремя степенями свободы [5]; полировальный станок, включающий трехподвижный модуль параллельной структуры для вертикального движения и вращения относительно горизонтальных осей и двухподвижный модуль последовательной структуры для позиционирования вдоль данных осей [6].

В рамках решения задачи управления робототехническими системами, в частности манипуляторами гибридной структуры, необходимо получить решение обратной кинематической задачи (обратной задачи о положениях), заключающейся в определении законов управления приводами при заданной траектории движения выходного звена. Важность данной задачи обусловлена тем, что ее решение закладывается непосредственно в систему управления манипулятора.

Методы решения обратной кинематической задачи для разнообразных манипуляторов гибридной структуры можно найти в ряде исследований. Одним из первых исследований в данном направлении является [7], в котором решение обратной задачи о положениях удалось свести к определению решения системы трех алгебраических уравнений шестой степени; решение было найдено численными методами. В [8] автор сопоставил исходному манипулятору гибридной структуры эквивалентный манипулятор последовательной структуры; используя классический метод Денавита–Хартенберга [9, с. 506] и составляя соответствующие матрицы однородных преобразований, были получены кинематические соотношения, на основе которых были найдены выражения для искомым приводных координат в аналитическом виде. Аналогичный метод Денавита–Хартенберга был применен при анализе других манипуляторов гибридной структуры в [10] (совместно с геометрическим подходом) и [5, 11]. Представление исходного манипулятора гибридной структуры в виде эквивалентного манипулятора последовательной структуры было также использовано в [12], но вместо метода Денавита–Хартенберга авторы применили формулу произведения матричных экспонент [9, с. 119]. Данная формула была также использована в [13, 14]. В указанных выше исследованиях [12–14] структурно-геометрические особенности рассматриваемых манипуляторов дали возможность получить решение обратной кинематической задачи в аналитическом виде. Особенности структуры манипулятора и наличие кинематической развязки между поступательными и вращательными движениями выходного звена позволили авторам [15] рассматривать по отдельности параллельную и последовательную части манипулятора и получить решение

обратной задачи о положениях в упрощенном виде. Также в [3, 16–19] можно найти кинематический анализ других манипуляторов: большинство алгоритмов решения основано на использовании алгебраических или геометрических подходов, каждый из которых индивидуален и зависит от структуры рассматриваемого манипулятора.

Ранее в [1] был представлен ряд новых манипуляторов гибридной структуры, однако решение обратной задачи о положениях, непосредственно связанное с практической задачей управления данными устройствами, было рассмотрено лишь для одного из манипуляторов [20]. Настоящее исследование продолжает упомянутые выше статьи и рассматривает решение обратной задачи о положениях для другого манипулятора гибридной структуры, описание которого представлено в следующем разделе.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 приведено описание исследуемого манипулятора. Раздел 3 посвящен алгоритму решения обратной задачи о положениях, а в разделе 4 приведен численный пример решения данной задачи согласно предложенному алгоритму. Раздел 5 содержит обсуждение особенностей алгоритма и краткий сравнительный анализ с другими исследованиями. Заключение обобщает результаты проведенного исследования и указывает направления его дальнейшего развития. Статья также имеет два приложения: Приложение 1 приводит краткие теоретические основы используемого метода решения, а Приложение 2 содержит выражения коэффициентов, используемых в уравнениях.

2. Описание манипулятора

Кинематическая схема исследуемого манипулятора представлена на рис. 1, где использованы следующие обозначения: 1 — основание; 2, ..., 5 — промежуточные звенья; 6 — платформа; 7 — каретка; 8 — выходное звено. Манипулятор состоит из параллельной части, образованной звеньями 1, ..., 6, и последовательной части, образованной звеньями 7 и 8. Промежуточные звенья 2, ..., 5 соединены с основанием 1 и платформой 6 вращательными (*B*) шарнирами, при этом звенья 2 и 3 соединены друг с другом вращательным шарниром, а звенья 4 и 5 — поступательным (*П*): таким образом, платформа 6 соединена с основанием 1 двумя кинематическими цепями типа *BVB* и двумя цепями типа *BПB*. Оси всех упомянутых выше вращательных шарниров параллельны друг другу, что обеспечивает платформе 6 плоское движение с тремя степенями свободы. Каретка 7 образует с платформой 6 поступательную пару, а с выходным звеном 8 — вращательную, что обеспечивает выходному звену 8 две степени свободы относительно платформы 6 и пять степеней свободы относительно основания 1. Единственная степень свободы, отсутствующая у выходного звена 8, — это вращение относительно оси, перпендикулярной осям всех прочих вращательных шарниров манипулятора, поэтому можно считать, что выходное звено 8 обладает тремя поступательными и двумя вращательными степенями свободы.

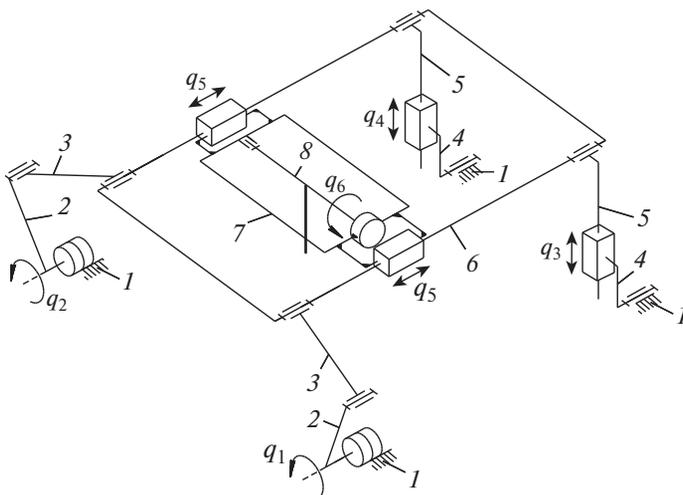


Рис. 1. Кинематическая схема исследуемого манипулятора.

В данном манипуляторе приводными (управляемыми) шарнирами являются шарниры, обозначенные на рис. 1 параметрами q_1, \dots, q_6 , где:

- q_1 и q_2 соответствуют вращениям в приводах цепей BBB;
- q_3 и q_4 соответствуют поступательным перемещениям в приводах цепей BPP;
- q_5 соответствует поступательному перемещению в приводе каретки 7;
- q_6 соответствует вращению в приводе выходного звена 8.

Можно видеть, что манипулятор обладает приводной избыточностью: движение платформы 6 относительно основания 1 осуществляется за счет работы четырех приводов, в то время как она обладает тремя степенями свободы. И хотя такое решение требует согласованной работы данных приводов, наличие избыточного привода позволяет повысить жесткость манипулятора и исключить ряд особых положений, присущих манипуляторам параллельной структуры [21]. Кроме того, наличие четвертой кинематической цепи позволяет сделать манипулятор симметричным и увеличить его габариты таким образом, чтобы можно было выполнять операции над объектами протяженной формы, что и является одним из назначений данного манипулятора [1].

3. Решение обратной задачи о положениях

Фактически обратная задача о положениях заключается в определении относительного положения звеньев манипулятора в приводных шарнирах при известной конфигурации выходного звена. В связи с этим сперва необходимо рассмотреть, как описать эти относительные положения и конфигурацию. Первые можно представить в виде вектора приводных координат $\mathbf{q} = [q_1 \dots q_6]^T \in \mathbb{R}^6$, соответствующих предыдущему разделу. Конфигурацию выходного звена можно описать при помощи вектора $\mathbf{p}_S \in \mathbb{R}^3$, определяющего положение некой точки S выходного звена, и единичного вектора $\hat{\mathbf{n}} \in \mathbb{R}^3$, $\|\hat{\mathbf{n}}\|_2 = 1$, определяющего его ориентацию (рис. 2, а). Параметры \mathbf{p}_S

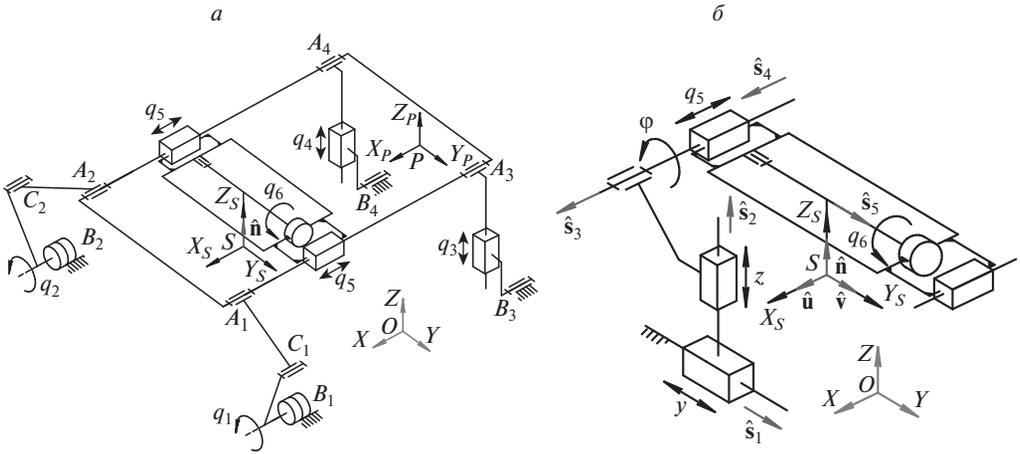


Рис. 2. Кинематический анализ: *а* — расположение систем координат и приводных координат; *б* — эквивалентная кинематическая цепь с последовательной структурой.

и $\hat{\mathbf{n}}$ задаются относительно неподвижной системы координат $OXYZ$, расположенной на основании манипулятора известным (заданным) образом. Поскольку в рассматриваемом манипуляторе вращательных степеней свободы у выходного звена всего две, вектора $\hat{\mathbf{n}}$ достаточно для описания его ориентации (нет необходимости использовать матрицу поворота).

Таким образом, решение обратной задачи о положениях сводится к нахождению вектор-функции $\mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$:

$$(1) \quad \mathbf{q} = \mathbf{f}(\mathbf{p}_S, \hat{\mathbf{n}}), \quad \|\hat{\mathbf{n}}\|_2 = 1.$$

Методику решения обратной задачи о положениях можно представить следующим образом.

Согласно структуре манипулятора, платформа совершает плоское движение и обладает тремя степенями свободы. В связи с этим мы можем представить, что платформа соединена с основанием некой «виртуальной» кинематической цепью типа ППВ, у которой оси поступательных пар параллельны плоскости движения, а ось вращательной пары перпендикулярна ей (рис. 2, б). Таким образом, мы можем рассматривать соединение выходного звена как эквивалентную кинематическую цепь с последовательной структурой ППВПВ. Как будет показано далее, такое представление дает возможность применить известные методы исследования манипуляторов последовательной структуры к манипулятору гибридного типа.

Пусть $SX_S Y_S Z_S$ — система координат выходного звена, конфигурация которой относительно системы координат основания $OXYZ$ определяется матрицей $\mathbf{T}_S \in SE(3)$, так, что:

$$(2) \quad \mathbf{T}_S = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} & \hat{\mathbf{v}} & \hat{\mathbf{n}} & \mathbf{p}_S \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $\hat{\mathbf{u}}$ и $\hat{\mathbf{v}}$ — единичные векторы, образующие вместе с вектором $\hat{\mathbf{n}}$ правую тройку ортонормированных векторов; как будет показано далее, направление данных векторов не влияет на решение обратной задачи и потому может быть выбрано произвольным образом.

Рассматривая упомянутую выше кинематическую цепь с последовательной структурой *ППВПВ*, можно записать матрицу \mathbf{T}_S через произведение матричных экспонент следующим образом (см. Приложение 1 и выражение (П.2)):

$$(3) \quad \mathbf{T}_S = \left(\prod_{i=1}^5 e^{[\xi_i]\theta_i} \right) \mathbf{M}_S,$$

где $\mathbf{M}_S \in SE(3)$ — матрица, определяющая положение и ориентацию выходного звена в некоторой начальной конфигурации манипулятора; i — порядковый номер шарнира цепи, считая от основания, $i = 1, \dots, 5$; $\xi_i \in \mathbb{R}^6$ — (единичный) кинематический винт, соответствующий оси i -го шарнира в начальной конфигурации манипулятора; $[\xi_i]$ — матричное представление винта ξ_i согласно выражениям (П.1) и (П.3); θ_i — перемещение в i -м шарнире.

Для рассматриваемой цепи *ППВПВ* кинематические винты ξ_i и перемещения θ_i будут иметь следующий вид согласно выражению (П.1) и рис. 2, б:

$$(4) \quad \xi_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \hat{\mathbf{s}}_1 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \hat{\mathbf{s}}_2 \end{bmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_3 \\ \mathbf{r}_3 \times \hat{\mathbf{s}}_3 \end{bmatrix}, \quad \xi_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \hat{\mathbf{s}}_4 \end{bmatrix}, \quad \xi_5 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_5 \\ \mathbf{r}_5 \times \hat{\mathbf{s}}_5 \end{bmatrix},$$

$$(5) \quad \theta_1 = y, \quad \theta_2 = z, \quad \theta_3 = \varphi, \quad \theta_4 = q_5, \quad \theta_5 = q_6,$$

где $\hat{\mathbf{s}}_1, \dots, \hat{\mathbf{s}}_5$ — единичные векторы, параллельные осям соответствующих шарниров; \mathbf{r}_3 и \mathbf{r}_5 — векторы, определяющие координаты произвольных точек на осях соответствующих шарниров; y и z — линейные перемещения платформы в направлении векторов $\hat{\mathbf{s}}_1$ и $\hat{\mathbf{s}}_2$ (выбор таких обозначений станет понятен далее); φ — поворот платформы вокруг оси, определяемой вектором $\hat{\mathbf{s}}_3$.

Параметры \mathbf{M}_S , $\hat{\mathbf{s}}_1, \dots, \hat{\mathbf{s}}_5$, \mathbf{r}_3 и \mathbf{r}_5 определяются конструктивными особенностями манипулятора и выбранным расположением систем координат $OXYZ$ и $SX_S Y_S Z_S$, и потому их можно считать известными. Таким образом, при заданной матрице \mathbf{T}_S выражение (3) представляет собой систему уравнений относительно неизвестных θ_i , $i = 1, \dots, 5$, приведенных в (5). Для упрощения решения данной системы уравнений можно без потери общности расположить систему координат $OXYZ$ таким образом, чтобы ось OX была перпендикулярна плоскости, параллельной осям обоих шарниров Π «виртуальной» кинематической цепи *ППВ* (рис. 2, б). При этом оси данных шарниров можно направить параллельно осям OY и OZ , так, что

$$(6) \quad \hat{\mathbf{s}}_1 = [0 \ 1 \ 0]^T, \quad \hat{\mathbf{s}}_2 = [0 \ 0 \ 1]^T, \quad \hat{\mathbf{s}}_3 = [1 \ 0 \ 0]^T.$$

Подставим (2) и (4)–(6) в (3) и рассмотрим уравнение, соответствующее первой строке и третьему столбцу выражения (3). Данное уравнение содер-

жит всего одну неизвестную q_6 и имеет вид:

$$(7) \quad a_1 \cos q_6 + b_1 \sin q_6 + c_1 = 0,$$

где a_1 , b_1 и c_1 — коэффициенты, известные при решении обратной задачи о положениях и приведенные в Приложении 2.

Решение уравнения (7) можно найти следующим образом [22, с. 29]:

$$(8) \quad q_6 = 2 \operatorname{arctg} \frac{b_1 \pm \sqrt{a_1^2 + b_1^2 - c_1^2}}{a_1 - c_1}.$$

Для того чтобы уравнение выше имело действительное решение, подкоренное выражение должно быть неотрицательным. Согласно Приложению 2, при известных геометрических параметрах манипулятора данное выражение будет зависеть лишь от одной переменной n^x , являющейся проекцией вектора \hat{n} на ось OX . Поэтому перед расчетом переменной q_6 нужно сперва убедиться в неотрицательности подкоренного выражения для всех значений n^x или как минимум для тех значений n^x , для которых решается обратная задача о положениях. Позже в разделе 4 будет приведен пример такого анализа.

В числителе выражения (8) знак перед корнем соответствует различным решениям q_6 . Функция arctg в общем случае также определяет два различных решения, но, поскольку в правой части (8) перед данной функцией стоит множитель 2, два данных решения будут соответствовать одному и тому же значению q_6 . В итоге получим два различных решения q_6 , зависящие от знака перед корнем в числителе (8).

Далее рассмотрим уравнения, соответствующие второй и третьей строкам и третьему столбцу выражения (3). Их можно привести к виду, аналогичному (7):

$$(9) \quad \begin{aligned} a_2 \cos \varphi + b_2 \sin \varphi + c_2 &= 0, \\ a_3 \cos \varphi + b_3 \sin \varphi + c_3 &= 0, \end{aligned}$$

где a_2, \dots, c_3 — коэффициенты, зависящие от найденной выше переменной q_6 и приведенные в Приложении 2.

Уравнения (9) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно двух неизвестных $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, причем, согласно Приложению 2, $a_2 = b_3$ и $b_2 = -a_3$. При таком соотношении коэффициентов данная система уравнений в общем случае (при $a_2 b_3 - a_3 b_2 \neq 0$) будет иметь единственное решение [22, с. 30], из которого далее можно найти угол φ , используя функцию $\operatorname{atan2}$ [9, с. 188]. При этом каждое из двух решений (8) определит свое решение для угла φ .

Далее рассмотрим уравнение, соответствующее первой строке и четвертому столбцу выражения (3). Данное уравнение является линейным относительно переменной q_5 :

$$(10) \quad a_4 q_5 + b_4 = 0,$$

где a_4 и b_4 — коэффициенты, зависящие от найденной выше переменной q_6 и приведенные в Приложении 2.

При $a_4 \neq 0$ уравнение (10) дает одно решение для каждого значения q_6 . Согласно Приложению 2, $a_4 = s_4^x$, где s_4^x — проекция вектора \hat{s}_4 на ось OX , определяемая геометрией манипулятора. Если геометрия такова, что данная проекция равна нулю, вектор \hat{s}_4 будет параллелен плоскости OYZ , как и векторы \hat{s}_1 и \hat{s}_2 . Поскольку три указанных вектора соответствуют осям поступательных пар эквивалентной кинематической цепи (рис. 2,б), мы получим структуру манипулятора, в которой оси трех поступательных пар параллельны одной плоскости. В такой структуре при заданной конфигурации выходного звена существует бесконечное число комбинаций параметров q_5 , y и z , определяющих перемещения в поступательных парах, что также соответствует бесконечному числу решений уравнения (10). Однако данный случай имеет исключительно теоретический интерес, поскольку в реальном манипуляторе можно всегда обеспечить геометрию, при которой $s_4^x \neq 0$.

Наконец, можно рассмотреть уравнения соответствующие второй и третьей строкам и четвертому столбцу выражения (3). Данные уравнения являются линейными относительно переменных y и z и имеют вид, аналогичный (10):

$$(11) \quad \begin{aligned} a_5 y + b_5 &= 0, \\ a_6 z + b_6 &= 0, \end{aligned}$$

где a_5, \dots, b_6 — коэффициенты, зависящие от найденных ранее переменных q_6 , φ и q_5 и приведенные в Приложении 2.

Согласно данному Приложению, $a_5 = a_6 = 1$, и уравнения (11) также дают по одному решению для каждого значения переменной q_6 .

Таким образом, при заданной конфигурации выходного звена, определяемой матрицей \mathbf{T}_S , были найдены все неизвестные θ_i , $i = 1, \dots, 5$, в том числе включающие две переменные q_5 и q_6 . Для того чтобы найти оставшиеся неизвестные q_1, \dots, q_4 , можно снова воспользоваться формулой произведения матричных экспонент (П.2), записанной для $i = 1, 2$ и 3 . Пусть $PX_P Y_P Z_P$ — система координат платформы, конфигурация которой относительно системы координат основания $OXYZ$ определяется матрицей \mathbf{T}_P , так, что начальной конфигурации платформы соответствует известная матрица \mathbf{M}_P . Тогда согласно (П.2) можно записать:

$$(12) \quad \mathbf{T}_P = \left(\prod_{i=1}^3 e^{[\xi_i] \theta_i} \right) \mathbf{M}_P,$$

где ξ_i и θ_i соответствуют выражениям (4) и (5).

Поскольку параметры θ_1 , θ_2 и θ_3 соответствуют параметрам y , z и φ , найденным ранее, выражение (12) позволяет рассчитать матрицу \mathbf{T}_P . Далее можно определить координаты \mathbf{p}_{Aj} , $j = 1, \dots, 4$, точек A_j , соответствующих вращательным шарнирам платформы (рис. 2,а), из следующего выражения:

$$(13) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{Aj} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_P \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{Aj} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, 4,$$

где \mathbf{r}_{A_j} — координаты точек A_j в системе координат платформы $PX_P Y_P Z_P$; данные координаты определяются конструкцией манипулятора и считаются известными.

Зная координаты \mathbf{p}_{A_j} , приводные координаты q_3 и q_4 можно определить как длину отрезка между точками A_j и B_j , $j = 3, 4$, где B_j соответствуют вращательным шарнирам основания (рис. 2,а):

$$(14) \quad q_j = \sqrt{(\mathbf{p}_{A_j} - \mathbf{p}_{B_j})^2}, \quad j = 3, 4,$$

где \mathbf{p}_{B_j} — координаты точек B_j в системе координат основания $OXYZ$; данные координаты определяются конструкцией манипулятора и считаются известными (мы полагаем без потери общности, что для каждого $j = 1, \dots, 4$ обе точки A_j и B_j лежат в плоскости, перпендикулярной осям вращательных шарниров j -й кинематической цепи).

Чтобы найти оставшиеся приводные координаты q_1 и q_2 , сперва определим координаты \mathbf{p}_{C_j} точек C_j , $j = 1, 2$, соответствующих промежуточным вращательным шарнирам цепей $ВПВ$ (рис. 2,а). С учетом принятого ранее направления оси OX можно записать следующие соотношения:

$$(15) \quad \begin{aligned} \left(p_{A_j}^y - p_{C_j}^y\right)^2 + \left(p_{A_j}^z - p_{C_j}^z\right)^2 &= l_{A_j C_j}^2, \\ \left(p_{B_j}^y - p_{C_j}^y\right)^2 + \left(p_{B_j}^z - p_{C_j}^z\right)^2 &= l_{B_j C_j}^2, \end{aligned} \quad j = 1, 2,$$

где $p_{A_j}^y, \dots, p_{C_j}^z$ — соответствующие компоненты векторов \mathbf{p}_{A_j} , \mathbf{p}_{B_j} и \mathbf{p}_{C_j} ; $l_{A_j C_j}$ и $l_{B_j C_j}$ — длины звеньев $A_j C_j$ и $B_j C_j$ соответственно.

Для каждого $j = 1, 2$ соотношения (15) представляют собой систему двух квадратных уравнений относительно двух неизвестных $p_{C_j}^y$ и $p_{C_j}^z$. Вычитая одно уравнение из другого, можно выразить $p_{C_j}^z$ через $p_{C_j}^y$:

$$(16) \quad p_{C_j}^z = a_7 p_{C_j}^y + b_7, \quad j = 1, 2,$$

где a_7 и b_7 — известные коэффициенты, приведенные в Приложении 2.

Подставляя (16) в любое из двух уравнений (15), получим квадратное уравнение относительно неизвестной $p_{C_j}^y$:

$$(17) \quad a_8 (p_{C_j}^y)^2 + b_8 p_{C_j}^y + c_8 = 0, \quad j = 1, 2,$$

где a_8 , b_8 и c_8 — известные коэффициенты, приведенные в Приложении 2.

Соотношение выше позволяет в общем случае получить два решения для переменной $p_{C_j}^y$, после чего из выражения (16) можно найти $p_{C_j}^z$ (квадратное уравнение (17) будет иметь действительное решение тогда и только тогда, когда при известной конфигурации платформы манипулятора возможна сборка его кинематической цепи, т.е. при $\|\mathbf{p}_{A_j} - \mathbf{p}_{B_j}\|_2 \leq l_{A_j C_j} + l_{B_j C_j}$). Наконец,

зная данные величины и полагая без потери общности, что приводная координата q_j , $j = 1, 2$, отсчитывается от положительного направления оси Oy , данную координату можно определить следующим образом:

$$(18) \quad q_j = \text{atan2} \left(p_{Cj}^z - p_{Bj}^z, p_{Cj}^y - p_{Bj}^y \right), \quad j = 1, 2.$$

Выражения (8), (10), (14) и (18) позволяют определить приводные координаты \mathbf{q} при заданных координатах выходного звена \mathbf{p}_S и $\hat{\mathbf{n}}$, т.е. представляют собой искомую вектор-функцию (1), определяющую решение обратной задачи о положениях для рассматриваемого манипулятора. Согласно проведенному анализу видно, что данная задача может иметь несколько различных решений (в общем случае возможно получить восемь различных комбинаций значений приводных координат), и выбор конкретного решения зависит от конструктивных особенностей манипулятора и выполняемой им операции. Так, например, различные решения уравнения (17) соответствуют различным сборкам кинематических цепей BBB (рис. 1): в случае, когда промежуточный вращательный шарнир цепи выходит за пределы платформы, рабочая зона манипулятора возрастает, что может быть важно при выполнении операций над объектами протяженной формы; при этом, однако, также возрастают габаритные размеры манипулятора. Кроме того, в зависимости от сборки кинематической цепи меняются области близости к особым положениям [23], в которых снижается жесткость манипулятора и возможна потеря управляемости. Наконец, некоторые сборки могут быть заранее недостижимы в связи с существующими ограничениями на допустимые перемещения в шарнирах.

4. Численный пример

Рассмотрим пример решения обратной задачи о положениях для манипулятора со следующими параметрами (линейные параметры указаны в мм):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}_4 &= [1 \ 0 \ 0]^T, & \hat{\mathbf{s}}_5 &= [0 \ 1 \ 0]^T, & \mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_5 = [0 \ 0 \ 250]^T, \\ \mathbf{r}_{A1} &= \mathbf{p}_{B1} = [300 \ 150 \ 0]^T, & \mathbf{r}_{A2} &= \mathbf{p}_{B2} = [300 \ -150 \ 0]^T, \\ \mathbf{r}_{A3} &= \mathbf{p}_{B3} = [-300 \ 150 \ 0]^T, & \mathbf{r}_{A4} &= \mathbf{p}_{B4} = [-300 \ -150 \ 0]^T, \\ \mathbf{M}_S &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{M}_P &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 250 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$l_{AjCj} = l_{BjCj} = 100, \quad j = 1, 2.$$

При указанных выше геометрических параметрах платформа и основание манипулятора имеют одинаковые размеры: прямоугольники $A_1A_2A_4A_3$ и $B_1B_2B_4B_3$ равны друг другу, причем одна из сторон в два раза длиннее

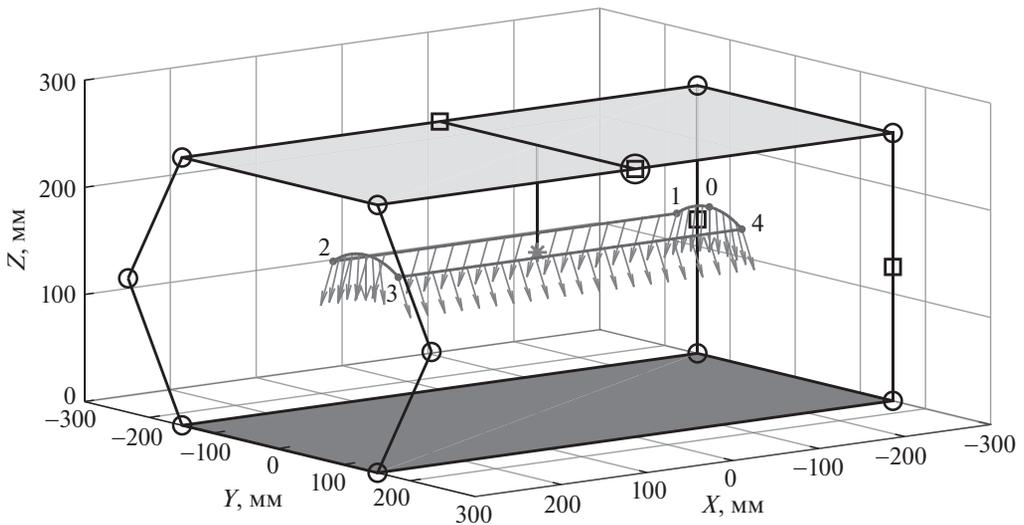


Рис. 3. Манипулятор в начальной конфигурации и заданная траектория движения.

другой (600 и 300 мм соответственно). В указанной начальной конфигурации, определяемой матрицами \mathbf{M}_S и \mathbf{M}_P , плоскость $A_1A_2A_4A_3$ платформы параллельна плоскости OXY основания и находится на высоте 250 мм над ней. При этом точка S выходного звена расположена на высоте 150 мм над плоскостью основания (выходное звено представляется в виде стержня длиной 100 мм). На рис. 3 приведено схематичное изображение манипулятора в данной конфигурации.

Согласно Приложению 2, при указанных геометрических параметрах в выражении (8) получим $\sqrt{a_1^2 + b_1^2 - c_1^2} = \sqrt{1 - (n^x)^2}$. Поскольку $|n^x| \leq 1$, подкоренное выражение будет всегда неотрицательным и уравнение (8) будет иметь решение. Кроме того, в системе уравнений (9) получим $a_2b_3 - a_3b_2 = (\cos q_6)^2$. Данное выражение будет равно нулю при $q_6 = \pm \pi/2$: в этом случае вектор \hat{n} параллелен оси OX . Очевидно, что при такой ориентации выходного звена платформа манипулятора может быть наклонена к плоскости основания под любым углом φ , так что обратная задача о положениях будет иметь бесконечное количество решений. В связи с этим при планировании траектории движения выходного звена рассматриваемого манипулятора необходимо избегать конфигураций, для которых $q_6 = \pm \pi/2$.

В качестве заданной траектории движения выходного звена рассмотрим кусочно-заданную кривую (рис. 3), которая может соответствовать обработке или анализу поверхности некоего протяженного объекта. Данная траектория симметрична относительно плоскостей OXZ и OYZ и состоит из двух прямолинейных участков (1–2 и 3–4) протяженностью 400 мм, расположенных над плоскостью OXY на высоте 156,6 мм и отстоящих друг от друга на 100 мм, и двух дугообразных участков (2–3 и 4–1), середина которых расположена над

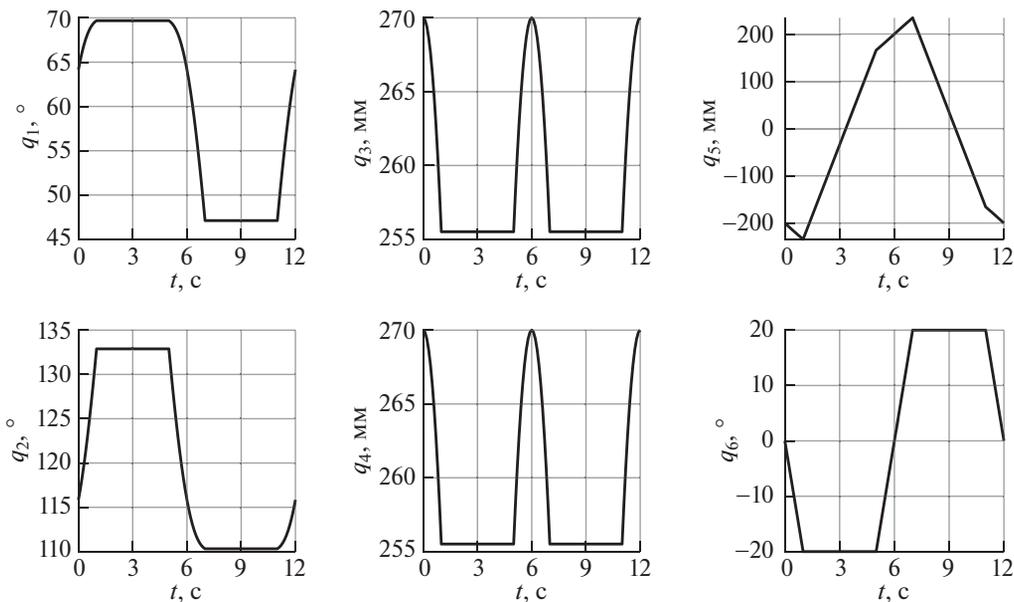


Рис. 4. Результат решения обратной задачи о положениях.

плоскостью OXY на высоте 170 мм. На всей траектории движения выходное звено лежит в плоскости, параллельной плоскости OYZ , причем на участках 1–2 и 3–4 оно сохраняет свою ориентацию, образуя с осью OZ угол $\pm 20^\circ$, а на участках 2–3 и 4–1 оно меняет ориентацию от одного предельного значения угла до другого (на рис. 3 стрелки обозначают ориентацию инструмента и соответствуют направлению вектора $-\hat{n}$). Движение начинается из точки 0, находящейся в середине участка 4–1. Временные интервалы движения вдоль участков 0–1, 1–2, 2–3, 3–4 и 4–0 составляют 1, 4, 2, 4 и 1 с соответственно.

Результаты решения обратной задачи о положениях для указанной геометрии манипулятора и траектории движения приведены на рис. 4 в виде графиков $\mathbf{q}(t)$, где t — время. Можно видеть, что результаты решения также имеют кусочный вид:

- 1) При $t \leq 1$ с (движение вдоль участка 0–1) платформа манипулятора опускается и смещается в отрицательном направлении OY , о чем свидетельствует увеличение значений q_1 и q_2 и уменьшение значений q_3 и q_5 . При этом угол отклонения выходного звена меняется от 0 до -20° , что соответствует изменению значения q_6 . Координата q_5 также незначительно изменяется, чтобы скомпенсировать наклон выходного звена и сохранить положение точки S вдоль оси OX неизменным.
- 2) При $1 < t \leq 5$ с (движение вдоль участка 1–2) платформа манипулятора неподвижна, ориентация выходного звена неизменна, и его линейное перемещение осуществляется только за счет привода каретки платформы. Значения q_1, \dots, q_4 и q_6 остаются постоянными, а координата q_5 изменяется соответствующим образом.

- 3) При $5 < t \leq 7$ с (движение вдоль участка 2–3) платформа манипулятора смещается в положительном направлении оси OY , что соответствует уменьшению значений q_1 и q_2 . Кроме того, платформа сперва поднимается, а затем опускается, о чем свидетельствуют рост и последующее уменьшение значений q_3 и q_5 . При этом выходное звено меняет свой угол наклона от -20° до $+20^\circ$, что соответствует изменению значения q_6 . Координата q_5 незначительно изменяется для компенсации данного наклона и сохранения неизменного положения точки S вдоль оси OX .
- 4) При $7 < t \leq 11$ с (движение вдоль участка 4–5) характер изменения приводных координат аналогичен движению вдоль участка 1–2: значение q_5 уменьшается, а остальные координаты остаются неизменными.
- 5) При $11 < t \leq 12$ с (движение вдоль участка 5–0) платформа манипулятора поднимается и смещается в отрицательном направлении OY , о чем свидетельствует увеличение значений q_1, \dots, q_4 . Угол отклонения выходного звена уменьшается от $+20^\circ$ до 0 , что соответствует изменению значения q_6 . Изменение координаты q_5 направлено на компенсацию отклонения выходного звена и сохранение неизменным положения точки S вдоль оси OX . По окончании движения манипулятор возвращается в исходную точку траектории, что также подтверждается из рис. 4: $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}(12)$.

Рассчитанные значения и характер изменения приводных координат соответствуют геометрическим параметрам манипулятора и заданной траектории движения выходного звена, что подтверждает корректность предложенного алгоритма решения обратной задачи о положениях.

5. Обсуждение результатов

Приведенный алгоритм решения обратной задачи о положениях основан на использовании формул произведения матричных экспонент (3) и (12), которые позволили установить взаимосвязь между заданными координатами выходного звена и искомыми приводными координатами. Данный подход требует лишь значения ряда параметров ($\xi_i, i = 1, \dots, 5, \mathbf{M}_S$ и \mathbf{M}_P), соответствующих некоторой начальной конфигурации манипулятора, за которую может быть принята любая желаемая конфигурация, и определяемых исключительно геометрией манипулятора и выбранным расположением систем координат. При этом используемый метод позволяет легко учесть геометрические неточности расположения осей шарниров: например, если оси шарниров, соответствующих приводным координатам q_4 и q_5 , имеют какие-либо отклонения, достаточно изменить соответствующим образом кинематические винты ξ_4 и ξ_5 — алгоритм в целом сохранит свою работоспособность. Также согласно Приложению 2 можно видеть, что коэффициенты решаемых уравнений не зависят от векторов $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}$ и их выражений в начальной конфигурации манипулятора (соответствующей матрице \mathbf{M}_S): таким образом, как было

сказано ранее, направление данных векторов может быть выбрано произвольным образом.

Проводя сравнительный анализ с другими исследованиями, посвященными решению обратной задачи о положениях прочих манипуляторов гибридной структуры, отметим, что формула произведения матричных экспонент была использована в ограниченном количестве исследований. Так, например, в [13] авторы использовали данную формулу, но только для последовательной части рассматриваемого манипулятора; авторы также сделали ряд допущений на геометрию манипулятора, что позволило получить уравнения довольно простого вида. В [14] структурно-геометрические особенности исследуемого манипулятора также привели к простым соотношениям, из которых решение обратной задачи удалось найти методом обратных преобразований (используя обратные матрицы вида $e^{-[\xi_i]\theta_i}$). Кроме того, стоит отметить исследование [12], в котором был применен схожий метод, а также представление исходного манипулятора гибридной структуры в виде эквивалентного манипулятора последовательной структуры аналогично текущей статье. Решение обратной задачи о положениях было найдено путем решения подзадач Падена–Кахана [24, с. 99], но, как отмечают сами авторы, такой подход можно использовать лишь для определенных структур манипуляторов. Что касается прочих исследований, в том числе упомянутых во введении, большинство из них либо основаны на составлении кинематических соотношений путем введения дополнительных систем координат (используя метод Денавита–Хартенберга), либо опираются на структурные особенности конкретного рассматриваемого манипулятора и учитывают различные геометрические допущения. Используемый в данной статье алгоритм не требует построения дополнительных систем координат или введения допущений, и потому его применение также представляет интерес для других манипуляторов гибридной структуры.

6. Заключение

Настоящая статья была посвящена разработке алгоритма решения обратной задачи о положениях для пятиподвижного манипулятора гибридной структуры, состоящего из параллельной части с тремя степенями свободы и последовательной части с двумя степенями свободы, а также имеющего приводную избыточность. Предложенный алгоритм основан на использовании формулы произведения матричных экспонент и позволяет получить решение в аналитическом виде, не предъявляя при этом никаких допущений к геометрическим параметрам манипулятора. Согласно алгоритму сперва определяются координаты, характеризующие ориентацию выходного звена, далее находятся оставшаяся координата последовательной части и координаты, описывающие расположение платформы параллельной части манипулятора, и, наконец, определяются неизвестные координаты в кинематических цепях параллельной части. Рассмотренный пример подтвердил работоспособность предложенного алгоритма.

Полученные кинематические соотношения могут быть использованы при решении прямой задачи о положениях, состоящей в определении конфигурации выходного звена при заданных значениях приводных координат, что имеет важное практическое значение и применяется для оценки реального положения выходного звена путем анализа данных с датчиков, установленных в приводах манипулятора. Рассмотренные соотношения также лежат в основе последующего анализа скоростей, особых положений манипулятора и определения его рабочих зон, что является направлением дальнейшего развития текущей работы. Кроме того, предложенные в данном исследовании методики могут быть адаптированы для изучения других манипуляторов гибридной структуры.

Дополнительные материалы

Файлы MATLAB с текстами программ, соответствующих представленным в данной статье алгоритмам, находятся в свободном доступе онлайн по ссылке: <http://dx.doi.org/10.17632/tp8nx5jhyv.1>.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Данное Приложение содержит краткие сведения об использовании формулы произведения матричных экспонент (product of exponentials formula [9]) при анализе кинематики манипуляторов.

Пусть выходное звено манипулятора соединено с основанием разомкнутой кинематической цепью, состоящей из n одноподвижных шарниров (любой многоподвижный шарнир можно представить в виде комбинации одноподвижных). При этом i -му шарниру, $i = 1, \dots, n$, можно сопоставить (единичный) кинематический винт $\xi_i \in \mathbb{R}^6$:

$$(П.1) \quad \xi_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \\ \mathbf{v}_i \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_i \\ \mathbf{r}_i \times \hat{\mathbf{s}}_i + h_i \hat{\mathbf{s}}_i \end{bmatrix}, & \text{если } h_i \neq \infty, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \hat{\mathbf{s}}_i \end{bmatrix}, & \text{если } h_i = \infty, \end{cases}$$

где $\boldsymbol{\omega}_i \in \mathbb{R}^3$ — векторная часть винта; $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^3$ — моментная часть винта; $\hat{\mathbf{s}}_i$ — единичный вектор, параллельный оси винта; \mathbf{r}_i — вектор, определяющий координаты произвольной точки на оси винта; h_i — шаг винта.

Пусть с выходным звеном связана некоторая система координат $SX_S Y_S Z_S$, конфигурацию которой относительно неподвижной системы координат основания $OXYZ$ можно описать при помощи матрицы $\mathbf{T}_S \in SE(3)$. Пусть матрица \mathbf{M}_S описывает некую начальную конфигурацию манипулятора, в которой шарнирам цепи можно сопоставить кинематические винты ξ_i , $i = 1, \dots, n$, согласно выражению (П.1). Тогда матрицы \mathbf{T}_S и \mathbf{M}_S связаны

друг с другом следующим образом [9, с. 120]:

$$(П.2) \quad \mathbf{T}_S = \left(\prod_{i=1}^n e^{[\xi_i]\theta_i} \right) \mathbf{M}_S,$$

где θ_i — перемещение в i -м шарнире; $[\xi_i]$ — матричное представление винта ξ_i :

$$(П.3) \quad [\xi_i] = \begin{bmatrix} \Lambda(\boldsymbol{\omega}_i) & \mathbf{v}_i \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 \end{bmatrix} \in se(3),$$

$$\Lambda(\boldsymbol{\omega}_i) = \Lambda \left(\begin{bmatrix} \omega_i^x \\ \omega_i^y \\ \omega_i^z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_i^z & \omega_i^y \\ \omega_i^z & 0 & -\omega_i^x \\ -\omega_i^y & \omega_i^x & 0 \end{bmatrix} \in so(3).$$

Выражение (П.2) представляет собой формулу произведения матричных экспонент $e^{[\xi_i]\theta_i}$, которые также можно представить следующим образом:

$$e^{[\xi_i]\theta_i} = \begin{bmatrix} e^{\Lambda(\boldsymbol{\omega}_i)\theta_i} & (\mathbf{I}_{3 \times 3}\theta_i + (1 - \cos \theta_i)\Lambda(\boldsymbol{\omega}_i) + (\theta_i - \sin \theta_i)\Lambda(\boldsymbol{\omega}_i)^2) \mathbf{v}_i \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix},$$

где $e^{\Lambda(\boldsymbol{\omega}_i)\theta_i}$ соответствует матрице поворота вокруг оси, определяемой вектором $\boldsymbol{\omega}_i$, на угол θ_i :

$$e^{\Lambda(\boldsymbol{\omega}_i)\theta_i} = \mathbf{I}_{3 \times 3} + \sin \theta_i \Lambda(\boldsymbol{\omega}_i) + (1 - \cos \theta_i)\Lambda(\boldsymbol{\omega}_i)^2.$$

Начальная конфигурация манипулятора \mathbf{M}_S и соответствующие ей кинематические винты ξ_i , $i = 1, \dots, n$, определяются конструктивными особенностями рассматриваемого манипулятора и выбором расположения систем координат $SX_S Y_S Z_S$ и $OXYZ$, и потому при анализе кинематики данные параметры считаются заранее известными. Таким образом, соотношение (П.2) устанавливает связь между перемещениями θ_i в шарнирах и конфигурацией выходного звена, описываемой матрицей \mathbf{T}_S . Данное соотношение может быть использовано не только для решения прямой задачи о положениях (для чего оно и применяется в большинстве случаев [9]), но также при решении обратной задачи, что демонстрируется в настоящей статье на примере манипулятора гибридной структуры.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Данное Приложение содержит коэффициенты уравнений, используемых при решении обратной задачи о положениях:

$$a_1 = n_0^x((s_5^y)^2 + (s_5^z)^2) - n_0^y s_5^x s_5^y - n_0^z s_5^x s_5^z,$$

$$b_1 = -n_0^y s_5^z + n_0^z s_5^y,$$

$$c_1 = n_0^x (s_5^x)^2 + n_0^y s_5^x s_5^y + n_0^z s_5^x s_5^z - n^x,$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= n_0^x (s_5^x s_5^y (1 - \cos q_6) + s_5^z \sin q_6) + n_0^y ((s_5^y)^2 (1 - \cos q_6) + \cos q_6) - \\
&\quad - n_0^z (s_5^x \sin q_6 - s_5^y s_5^z (1 - \cos q_6)), \\
b_2 &= n_0^x (s_5^x s_5^z (\cos q_6 - 1) + s_5^y \sin q_6) - n_0^y (s_5^x \sin q_6 + s_5^y s_5^z (1 - \cos q_6)) + \\
&\quad + n_0^z ((s_5^z)^2 (\cos q_6 - 1) - \cos q_6), \\
c_2 &= -n^y, \\
a_3 &= n_0^x (s_5^x s_5^z (1 - \cos q_6) - s_5^y \sin q_6) + n_0^y (s_5^x \sin q_6 + s_5^y s_5^z (1 - \cos q_6)) + \\
&\quad + n_0^z ((s_5^z)^2 (1 - \cos q_6) + \cos q_6), \\
b_3 &= n_0^x (s_5^x s_5^y (1 - \cos q_6) + s_5^z \sin q_6) + n_0^y ((s_5^y)^2 (1 - \cos q_6) + \cos q_6) - \\
&\quad - n_0^z (s_5^x \sin q_6 - s_5^y s_5^z (1 - \cos q_6)), \\
c_3 &= -n^z, \\
a_4 &= s_4^x, \\
b_4 &= p_{S0}^x (((s_5^y)^2 + (s_5^z)^2) (\cos q_6 - 1) + 1) + p_{S0}^y (s_5^x s_5^y (1 - \cos q_6) - s_5^z \sin q_6) + \\
&\quad + p_{S0}^z (s_5^x s_5^z (1 - \cos q_6) + s_5^y \sin q_6) + r_5^x ((s_5^y)^2 + (s_5^z)^2) (1 - \cos q_6) + \\
&\quad + r_5^y (s_5^x s_5^y (\cos q_6 - 1) + s_5^z \sin q_6) + r_5^z (s_5^x s_5^z (\cos q_6 - 1) - s_5^y \sin q_6) - p_S^x, \\
a_5 &= 1, \\
b_5 &= p_{S0}^x (s_5^x s_5^y (1 - \cos q_6) \cos \varphi + s_5^x s_5^z (\cos q_6 - 1) \sin \varphi + s_5^y \sin q_6 \sin \varphi + \\
&\quad + s_5^z \sin q_6 \cos \varphi) + \\
&\quad + p_{S0}^y (-s_5^x \sin q_6 \sin \varphi + (s_5^y)^2 (1 - \cos q_6) \cos \varphi + s_5^y s_5^z (\cos q_6 - 1) \sin \varphi + \\
&\quad + \cos q_6 \cos \varphi) + \\
&\quad + p_{S0}^z (-s_5^x \sin q_6 \cos \varphi + s_5^y s_5^z (1 - \cos q_6) \cos \varphi + (s_5^z)^2 (\cos q_6 - 1) \sin \varphi + \\
&\quad + \cos q_6 \sin \varphi) + \\
&\quad + q_5 (s_4^y \cos \varphi - s_4^z \sin \varphi) + r_3^y (1 - \cos \varphi) + r_3^z \sin \varphi + \\
&\quad + r_5^x (s_5^x (\cos q_6 - 1) (s_5^y \cos \varphi - s_5^z \sin \varphi) - s_5^y \sin q_6 \sin \varphi - s_5^z \sin q_6 \cos \varphi + \\
&\quad + r_5^y (s_5^x \sin q_6 \sin \varphi + ((s_5^y)^2 \cos \varphi - s_5^y s_5^z \sin \varphi - \cos \varphi) (\cos q_6 - 1)) + \\
&\quad + r_5^z (s_5^x \sin q_6 \cos \varphi + (s_5^y s_5^z \cos \varphi - (s_5^z)^2 \sin \varphi + \sin \varphi) (\cos q_6 - 1)) - p_S^y, \\
a_6 &= 1, \\
b_6 &= p_{S0}^x (s_5^x s_5^y (1 - \cos q_6) \sin \varphi + s_5^x s_5^z (1 - \cos q_6) \cos \varphi - s_5^y \sin q_6 \cos \varphi + \\
&\quad + s_5^z \sin q_6 \sin \varphi) + \\
&\quad + p_{S0}^y (s_5^x \sin q_6 \cos \varphi + (s_5^y)^2 (1 - \cos q_6) \sin \varphi + s_5^y s_5^z (1 - \cos q_6) \cos \varphi + \\
&\quad + \cos q_6 \sin \varphi) + \\
&\quad + p_{S0}^z (-s_5^x \sin q_6 \sin \varphi + s_5^y s_5^z (1 - \cos q_6) \sin \varphi + (s_5^z)^2 (1 - \cos q_6) \cos \varphi + \\
&\quad + \cos q_6 \cos \varphi) + \\
&\quad + q_5 (s_4^y \sin \varphi + s_4^z \cos \varphi) - r_3^y \sin \varphi + r_3^z (1 - \cos \varphi) + \\
&\quad + r_5^x (s_5^x (\cos q_6 - 1) (s_5^y \sin \varphi + s_5^z \cos \varphi) + s_5^y \sin q_6 \cos \varphi - s_5^z \sin q_6 \sin \varphi +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + r_5^y (-s_5^x \sin q_6 \cos \varphi + ((s_5^y)^2 \sin \varphi + s_5^y s_5^z \cos \varphi - \sin \varphi)(\cos q_6 - 1)) + \\
& + r_5^z (s_5^x \sin q_6 \sin \varphi + (s_5^y s_5^z \sin \varphi + (s_5^z)^2 \cos \varphi - \cos \varphi)(\cos q_6 - 1)) - p_{S^z}^z, \\
a_7 & = -\frac{p_{A_j}^y - p_{B_j}^y}{p_{A_j}^z - p_{B_j}^z}, \\
b_7 & = \frac{(p_{A_j}^y)^2 + (p_{A_j}^z)^2 - (p_{B_j}^y)^2 - (p_{B_j}^z)^2 - l_{A_j C_j}^2 + l_{B_j C_j}^2}{2(p_{A_j}^z - p_{B_j}^z)}, \\
a_8 & = 1 + a_7^2, \\
b_8 & = -2p_{A_j}^y - 2a_7(p_{A_j}^z - b_7), \\
c_8 & = (p_{A_j}^z - b_7)^2 - l_{A_j C_j}^2,
\end{aligned}$$

где p_S^x, p_S^y, p_S^z и n^x, n^y, n^z — соответствующие компоненты векторов \mathbf{p}_S и $\hat{\mathbf{n}}$; $p_{S_0}^x, p_{S_0}^y, p_{S_0}^z$ и n_0^x, n_0^y, n_0^z — те же компоненты, соответствующие начальной конфигурации манипулятора (матрице \mathbf{M}_S в выражении (3)); s_4^x, \dots, s_5^z — соответствующие компоненты векторов $\hat{\mathbf{s}}_4$ и $\hat{\mathbf{s}}_5$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ganiev R.F., Glazunov V.A., Filippov G.S.* Urgent problems of machine science and ways of solving them: Wave and additive technologies, the machine tool industry, and robot surgery // *J. Mach. Manuf. Reliab.* 2018. Vol. 47. P. 399–406. <https://doi.org/10.3103/S1052618818050059>
2. *Wen K., Harton D., Laliberté T., Gosselin C.* Kinematically redundant (6+3)-dof hybrid parallel robot with large orientational workspace and remotely operated gripper // *Proc. 2019 IEEE Inter. Conf. Robotics and Automation.* Montreal, QC, Canada, 20–24 May 2019. P. 1672–1678. <https://doi.org/10.1109/ICRA.2019.8793772>
3. *Liu Q., Huang T.* Inverse kinematics of a 5-axis hybrid robot with non-singular tool path generation // *Robot. Comp. Integ. Manuf.* 2019. Vol. 56. P. 140–148. <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2018.06.003>
4. *Carbone G., Ceccarelli M.* A stiffness analysis for a hybrid parallel-serial manipulator // *Robotica.* 2004. Vol. 22. No. 5. P. 567–576. <https://doi.org/10.1017/S0263574704000323>
5. *Lai Y.-L., Liao C.-C., Chao Z.-G.* Inverse kinematics for a novel hybrid parallel-serial five-axis machine tool // *Robot. Comp. Integ. Manuf.* 2018. Vol. 50. P. 63–79. <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2017.09.002>
6. *Oba Y., Kakinuma Y.* Simultaneous tool posture and polishing force control of unknown curved surface using serial-parallel mechanism polishing machine // *Prec. Eng.* 2017. Vol. 49. P. 24–32. <https://doi.org/10.1016/j.precisioneng.2017.01.006>
7. *Waldron K.J., Raghavan M., Roth B.* Kinematics of a hybrid series-parallel manipulation system // *J. Dyn. Sys., Meas., Control.* 1989. Vol. 111. No. 2. P. 211–221. <https://doi.org/10.1115/1.3153039>
8. *Cheng H.H.* Real-time manipulation of a hybrid serial-and-parallel-driven redundant industrial manipulator // *J. Dyn. Sys., Meas., Control.* 1994. Vol. 116. No. 4. P. 687–701. <https://doi.org/10.1115/1.2899268>

9. *Lynch K.M., Park F.C.* Modern robotics: Mechanics, planning, and control. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. <https://doi.org/10.1017/9781316661239>
10. *Tang Z., Payandeh S.* Design and modeling of a novel 6 degree of freedom haptic device // Proc. 3rd Joint EuroHaptics Conf. and Symp. on Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator Systems. Guilin, China, 19–23 December 2009. P. 1941–1946. <https://doi.org/10.1109/WHC.2009.4810891>
11. *Yan C., Gao F., Zhang Y.* Kinematic modeling of a serial-parallel forging manipulator with application to heavy-duty manipulations // Mech. Based Des. Struct. Mach. 2010. Vol. 38. No. 1. P. 105–129. <https://doi.org/10.1080/15397730903455344>
12. *Sun P., Li Y.B., Wang Z.S., Chen K., Chen B., Zeng X., Zhao J., Yue Y.* Inverse displacement analysis of a novel hybrid humanoid robotic arm // Mech. Mach. Theory. 2020. Vol. 147. P. 103743. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2019.103743>
13. *Yang G., Chen W., Ho E.H.L.* Design and kinematic analysis of a modular hybrid parallel-serial manipulator // Proc. 7th Inter. Conf. on Control, Automation, Robotics and Vision. Singapore, 2–5 December 2002. Vol. 1. P. 45–50. <https://doi.org/10.1109/ICARCV.2002.1234788>
14. *Tang C., Zhang J., Cheng S.* Kinematics analysis for a hybrid robot in minimally invasive surgery // Proc. 2009 IEEE Inter. Conf. on Robotics and Biomimetics. Guilin, China, 19–23 December 2009. P. 1941–1946. <https://doi.org/10.1109/ROBIO.2009.5420534>
15. *Lee M.K., Park K.W., Choi B.O.* Kinematic and dynamic models of hybrid robot manipulator for propeller grinding // J. Robot. Sys. 1999. Vol. 16. No. 3. P. 137–150. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-4563\(199903\)16:3<137::AID-ROB1>3.0.CO;2-V](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-4563(199903)16:3<137::AID-ROB1>3.0.CO;2-V)
16. *Pisla D., Gherman B., Vaida C., Suciu M., Plitea N.* An active hybrid parallel robot for minimally invasive surgery // Robot. Comp. Integ. Manuf. 2013. Vol. 29. No. 4. P. 203–221. <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2012.12.004>
17. *Hu B., Shi Y., Xu L., Bai P.* Reconsideration of terminal constraint/mobility and kinematics of 5-DOF hybrid manipulators formed by one 2R1T PM and one RR SM // Mech. Mach. Theory. 2020. Vol. 149. P. 103837. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2020.103837>
18. *Ye H., Wang D., Wu J., Yue Y., Zhou Y.* Forward and inverse kinematics of a 5-DOF hybrid robot for composite material machining // Robot. Comp. Integ. Manuf. 2020. Vol. 65. P. 101961. <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2020.101961>
19. *López-Custodio P.C., Fu R., Dai J.S., Jin Y.* Compliance model of Exechon manipulators with an offset wrist // Mech. Mach. Theory. 2022. Vol. 167. P. 104558. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2021.104558>
20. *Antonov A., Fomin A., Glazunov V., Kiselev S., Carbone G.* Inverse and forward kinematics and workspace analysis of a novel 5-DOF (3T2R) parallel-serial (hybrid) manipulator // Int. J. Adv. Robot. Sys. 2021. Vol. 18. No. 2. P. 2963. <https://doi.org/10.1177/1729881421992963>
21. *Gosselin C., Schreiber L.-T.* Redundancy in parallel mechanisms: A review // Appl. Mech. Rev. 2018. Vol. 70. No. 1. P. 010802. <https://doi.org/10.1115/1.4038931>
22. *Waldron K.J., Schmiedeler J.* Kinematics // Springer Handbook of Robotics. Cham: Springer, 2016. P. 11–36. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32552-1_2

23. *Liu S., Qiu Z., Zhang X.* Singularity and path-planning with the working mode conversion of a 3-DOF 3-RRR planar parallel manipulator // Mech. Mach. Theory. 2017. Vol. 107. P. 166–182. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2016.09.004>
24. *Murray R.M., Li Z., Sastry S.S.* A mathematical introduction to robotic manipulation. Boca Raton: CRC Press, 1994. <https://doi.org/10.1201/9781315136370>

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакиным.

Поступила в редакцию 22.08.2022

После доработки 23.10.2022

Принята к публикации 26.10.2022

Управление в технических системах

© 2023 г. С.Л. СЕМАКОВ, д-р физ.-мат. наук (slsemakov@yandex.ru)
(Московский физико-технический институт;
Московский автомобильно-дорожный институт),
М.В. СЕМАКОВА (marina.semakowa@yandex.ru)
(Московский государственный технический университет
гражданской авиации)

УПРАВЛЕНИЕ ТЯГОЙ ПРИ ПОСАДКЕ САМОЛЕТА НА КОРАБЛЬ

Рассматривается посадка самолета на корабль. Предлагаются схема вычисления вероятности ухода на второй круг и схема вычисления максимальной просадки траектории самолета после схода с палубы. Одним из управляющих параметров, определяющих указанные вероятность и просадку, является момент увеличения тяги двигателя перед касанием палубы. Существующие требования, налагаемые на упомянутые вероятность и максимальную просадку, позволяют определить диапазон допустимых моментов увеличения тяги. Приводятся результаты численных расчетов, полученные при рассмотрении посадки реального самолета на реальный авианесущий корабль.

Ключевые слова: посадка самолета, корабль, вероятность, управление, тяга, траектория.

DOI: 10.31857/S0005231023030066, EDN: ZZFTZN

1. Описание проблемы

Хорошо известно, что посадка является наиболее сложным и ответственным этапом полета. Вопросам обеспечения точности и безопасности посадки самолета, в частности самолетов корабельного базирования, посвящено немало работ отечественных и зарубежных авторов (см., например, [1–13]). Посадка на корабль усложнена тем, что посадочная поверхность является подвижной и ограничена по длине. Это предъявляет повышенные требования к точности посадки корабельных самолетов и обуславливает специфику их приземления, заключающуюся в зацеплении гаком самолета одного из нескольких тросов аэрофинишера, натянутых поперек посадочного участка палубы. При этом предусматривается возможность незацепления аэрофинишера и, как следствие, пробега самолета по палубе, являющегося одновременно и разбегом для последующего взлета и ухода на второй круг¹. Число

¹ Решение об уходе на второй круг может быть принято, конечно, и до предполагаемого момента касания палубы, если станет ясно, что по той или иной причине вероятность успешного приземления недостаточно высока. Этот аспект корабельной посадки подробно рассматривается в [10].

таких уходов на второй круг достаточно велико и по статистике составляет один-два процента от общего числа посадок.

В случае незацепления аэрофинишера из-за малости времени пробега по палубе (полторы-две секунды) самолет не успевает разогнаться до приемлемой скорости к моменту схода с палубы, так что непосредственно после схода с палубы сила тяжести преобладает над подъемной силой, вследствие чего начальный участок траектории самолета после схода с палубы имеет некоторую просадку по отношению к уровню палубы. При фиксированных углах тангажа и атаки в момент схода и заданном законе управления рулем высоты максимальная просадка однозначно определяется скоростью самолета в момент схода с палубы. Чтобы предотвратить возможное касание водной поверхности и обеспечить успешный взлет самолета, необходимо стремиться как можно меньшей сделать максимальную просадку. А для этого нужно повышать скорость самолета в момент схода с палубы.

Увеличение скорости схода может быть достигнуто за счет приращения тяги двигателя. Тяга нарастает не мгновенно, и в случае незацепления аэрофинишера для ощутимого разгона самолета при его движении по палубе летчику приходится увеличивать тягу двигателя до предполагаемого момента касания палубы. При этом нужно учитывать следующее обстоятельство, ограничивающее диапазон возможных моментов дачи тяги как сверху, так и снизу. Если тягу увеличивать рано, то скорость схода будет высокой, максимальная просадка — небольшой. Но раннее увеличение тяги приведет к заметному возрастанию посадочной скорости, что, в свою очередь, вызовет тенденцию к перелету зоны аэрофинишера и уменьшению вероятности успешного приземления. Если же увеличение тяги двигателя происходит поздно, то — в случае незацепления аэрофинишера — самолет будет иметь недостаточную скорость схода и, как следствие, недопустимо большую максимальную просадку траектории после схода с палубы.

Таким образом, возникает вопрос о нахождении диапазона допустимых моментов дачи тяги: с одной стороны, нужно обеспечить достаточно высокую вероятность успешного приземления, а с другой — при незацеплении аэрофинишера — незначительную максимальную просадку, гарантирующую некасание с водой. Ответ на этот вопрос и является целью настоящей работы.

2. Предлагаемая схема решения проблемы

Будем рассматривать только продольное движение самолета. Траекторию, по которой происходит посадка при отсутствии дачи тяги вплоть до момента касания палубы и по которой самолет движется при отсутствии возмущений, будем называть номинальной. Номинальная траектория представляет собой прямую линию (наклонная пунктирная линия на рис. 1); ее пересечение с палубой корабля при отсутствии качки происходит в заданной точке O (см. рис. 1). Через $s_{аф}$ обозначена длина участка палубы, занимаемого аэрофинишером. Для описания посадочной траектории введем в рассмотрение

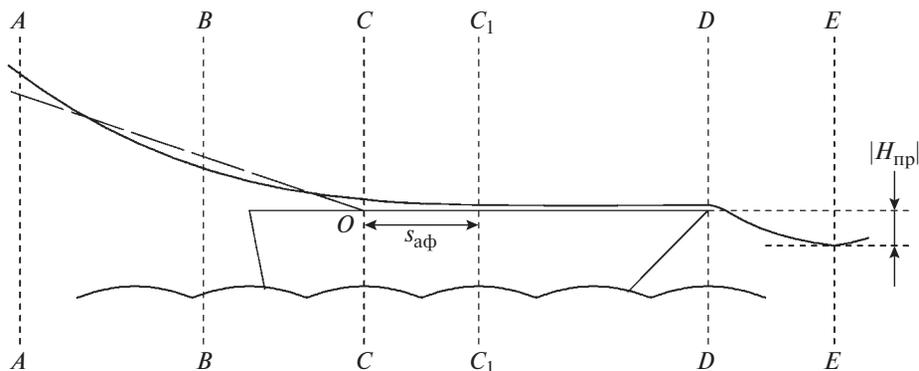


Рис. 1.

вспомогательные плоскости $A-A$, $B-B$, $C-C$, C_1-C_1 , $D-D$ и $E-E$, перпендикулярные вертикальной плоскости, в которой рассматриваются движения самолета и корабля и которая совпадает с плоскостью рис. 1. Линиями $A-A$, $B-B$, $C-C$, C_1-C_1 , $D-D$ и $E-E$ на рис. 1 изображены проекции соответствующих плоскостей на плоскость рис. 1. Плоскость $A-A$ находится на расстоянии 2,5-секундного полета по номинальной траектории до момента касания палубы; в системе координат, связанной с кораблем, эта плоскость неподвижна. Плоскость $B-B$ соответствует моменту дачи тяги, т.е. в тот момент, когда самолет пересекает плоскость $B-B$, летчик увеличивает тягу двигателя. Плоскости $C-C$ и C_1-C_1 связаны с кораблем и ограничивают участок палубы, занимаемый аэрофинишером. Плоскость $D-D$ тоже связана с кораблем и соответствует моменту схода самолета с палубы, если не произошло зацепления аэрофинишера. В этой работе будем предполагать, что зацепление аэрофинишера не происходит только в том случае, если имеет место перелет зоны $s_{\text{аф}}$. В противном случае предполагается, что зацепление происходит с вероятностью 1. Наконец, плоскость $E-E$ соответствует моменту достижения траекторией максимальной просадки после схода самолета с палубы.

Предлагаемая схема решения задачи заключается в следующем. По методу², описанному в [5, 13] (см. также [2, 9]), поточно определяется вероятность $P_{\text{нз}}$ перелета зоны аэрофинишера $s_{\text{аф}}$ (вероятность незацепления) в зависимости от момента t_p увеличения тяги двигателя. В качестве случайных возмущений выступают атмосферная турбулентность и качка корабля. После этого рассматриваются те траектории, которым соответствует фактический перелет зоны аэрофинишера. При этом оказывается, что при заданном моменте t_p дачи тяги модуль $v = |\mathbf{v}|$ вектора \mathbf{v} скорости самолета в момент схода с палубы и, как следствие, максимальная просадка $|H_{\text{пр}}|$ траектории после схода практически не зависят от разброса точек касания самолета с палубой и однозначно определяются моментом t_p и углом θ между вектором \mathbf{v} в момент схода самолета с палубы и горизонтальной плоскостью. Это позволяет

² Этот метод основан на результатах, полученных в [14] и затем усиленных в [15, 16].

упрощенно рассматривать участок движения самолета по палубе и после схода с нее в детерминированной постановке и путем интегрирования уравнений движения численно определить $H_{\text{пр}}$ в функции от t_p и θ .

В результате получаются две зависимости: $P_{\text{нз}}(t_p)$ и $H_{\text{пр}}(t_p, \theta)$. Существуют общепринятые ограничения на $P_{\text{нз}}$. Такие же ограничения существуют и на $H_{\text{пр}}$ при отсутствии качки корабля, т.е. при $\theta = 0$. Последнее обстоятельство позволяет сделать еще одно упрощение, а именно не учитывать качку корабля при рассмотрении пробега самолета по палубе. Из условия соблюдения ограничений на $P_{\text{нз}}$ и $H_{\text{пр}}$ затем и определяется диапазон допустимых моментов t_p увеличения тяги двигателя.

3. Вероятность незацепления аэрофинишера

Будем считать, что с момента t_p тяга двигателя $F(t)$ нарастает по экспоненциальному закону, т.е.

$$(1) \quad F(t) = \begin{cases} F_0 & \text{при } t \leq t_p, \\ F_0 + \Delta F \left(1 - \exp \left\{ -\frac{t - t_p}{\tau} \right\} \right) & \text{при } t \geq t_p, \end{cases}$$

где t_p — момент дачи тяги, τ — постоянная, характеризующая приемистость двигателя, F_0 и ΔF — фиксированные величины. Вероятность удара самолета о кормовой срез палубы корабля пренебрежимо мала³, так что вероятность незацепления аэрофинишера, принимаемая равной вероятности перелета зоны аэрофинишера $s_{\text{аф}}$, может быть определена как $P_{\text{нз}} = 1 - P$, где P — вероятность приземления самолета на участок палубы корабля от линии кормового среза до линии, совпадающей с последним тросом аэрофинишера, т.е. с правым концом отрезка $s_{\text{аф}}$ на рис. 1.

Для определения вероятности P используем метод, описанный в [5, 13]. Этот метод предполагает линеаризацию уравнений движения самолета (уравнений (9) из [5]) относительно номинальной траектории посадки, по которой двигался бы самолет при отсутствии возмущений. Отличие от [5, 13] в данном случае носит чисто технический характер и связано с тем, что номинальная траектория посадки является прямой линией только до момента t_p дачи тяги, а после этого момента она отклоняется от прямой линии вследствие новой зависимости тяги от времени по формуле (1); в [5, 13] тяга предполагалась постоянной вплоть до момента касания палубы.

Расчеты проводились при $\Delta F = F_0$, т.е. тяга после момента t_p асимптотически увеличивалась в два раза, и для трех значений постоянной τ , характеризующей приемистость двигателя: $\tau = 1$ с, $\tau = 1,5$ с и $\tau = 2$ с. Рассматривался тот же самолет с тем же законом управления (по принципу автоматической обратной связи), что и в [5, 13]. По своим характеристикам

³ Меньше 10^{-5} при умеренных балльностиях волнения моря [1].

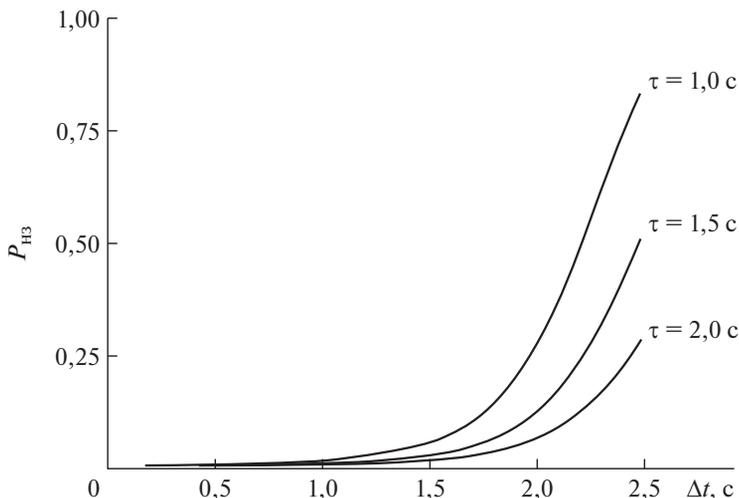


Рис. 2.

этот самолет идентичен корабельному самолету МиГ-29К. Полученные результаты для вероятности $P_{нз}$ представлены на рис. 2. По горизонтальной оси отложен промежуток времени $\Delta t = t_{land} - t_p$, определяющий момент дачи тяги t_p и представляющий собой время от момента t_p до предполагаемого (математического ожидания) момента t_{land} касания палубы в случае, если бы увеличения тяги не произошло. Численные значения вероятности $P_{нз}$, по которым построены графики на рис. 2, вынесены в Приложение и представлены в табл. 1.

4. Скорость самолета в момент касания палубы

Эта скорость необходима для последующего нахождения просадки $H_{пр}$. Продольное движение самолета в неспокойной атмосфере описывается системой (9) из [5]. Решая задачу определения искомой скорости в детерминированной постановке, т.е. при отсутствии атмосферной турбулентности и качки, получим в корабельной системе координат Oxy (см. рис. 3) из упомя-

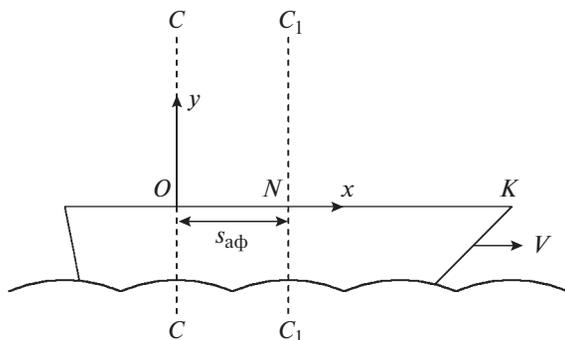


Рис. 3.

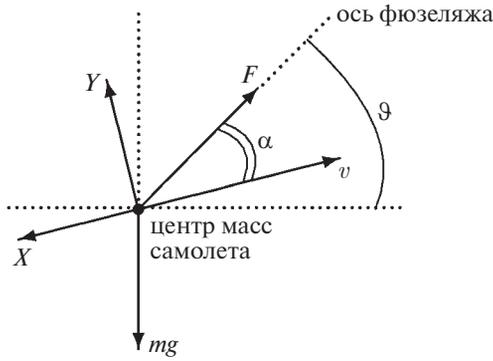


Рис. 4.

нутой выше системы (9) следующую:

$$(2) \quad \begin{cases} m \frac{dv}{dt} = F(t) \cos \alpha - mg \sin(\vartheta - \alpha) - qSC_x, \\ mv \frac{d(\vartheta - \alpha)}{dt} = qSC_y + F(t) \sin \alpha - mg \cos(\vartheta - \alpha), \\ \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_z, \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} = qSb_A m_z, \\ \frac{dy}{dt} = v \sin(\vartheta - \alpha), \\ \frac{dx}{dt} = v \cos(\vartheta - \alpha) - V. \end{cases}$$

Все используемые здесь обозначения подробно описаны в [5, 13]. Они являются общепринятыми для задач динамики полета самолета. В частности,

$$C_y = C_{y0} + C_y^\alpha \alpha + C_y^\delta \delta, \quad C_x = C_{x0} + AC_y^2, \\ m_z = m_{z0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^\delta \delta + \frac{b_A}{v_0} m_z^{\bar{w}_z} w_z, \quad q = \frac{\rho v^2}{2},$$

где δ — отклонение органа продольного управления; v — модуль вектора скорости самолета в неподвижной земной системе координат; C_{y0} , C_y^α , C_y^δ , A , C_{x0} , m_z^α , m_z^δ , m_{z0} , $m_z^{\bar{w}_z}$ — аэродинамические коэффициенты самолета; $\bar{w}_z = \frac{w_z b_A}{v_0}$; C_x — безразмерный коэффициент силы сопротивления воздуха \mathbf{X} (см. рис. 4); $C_x = |\mathbf{X}|/qS$; C_y — безразмерный коэффициент подъемной силы \mathbf{Y} : $C_y = |\mathbf{Y}|/qS$; b_A — средняя аэродинамическая хорда крыла; m_z — безразмерный коэффициент продольного момента M_z : $M_z = m_z qSb_A$; I_z — соответствующий момент инерции самолета; ϑ — угол тангажа, т.е. угол между осью фюзеляжа и горизонтальной плоскостью; S — площадь крыла в плане; $g = |\mathbf{g}|$, где \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения.

Закон управления для δ примем таким же, как в [5, 13]. Это замкнет систему уравнений (2), после чего последняя может быть проинтегрирована численно.

Реальные наблюдения показывают, что при незацеплении аэрофинишера скорость самолета в момент схода с палубы практически не зависит от точки начального касания самолета с палубой и однозначно определяется моментом t_p . Поэтому в качестве точки начального касания самолета с палубой можно принять точку N (см. рис. 3), соответствующую касанию палубы сразу за последним тросом аэрофинишера, а искомую скорость $v_{\text{кас}}$ самолета в момент касания определить как $v_{\text{кас}} = v(t_{\text{кас}})$, где $v(t)$ — функция, определяемая в результате численного интегрирования системы (2), а момент $t_{\text{кас}}$ предварительно определяется при этом из условия $x(t_{\text{кас}}) = s_{\text{аф}}$ (см. рис. 3).

Результаты численных расчетов скорости $v_{\text{кас}}$ в зависимости от момента t_p для трех рассматриваемых значений приемистости двигателя τ ($\tau = 1$ с, $\tau = 1,5$ с и $\tau = 2$ с) представлены в Приложении в табл. 3.

5. Скорость самолета в момент схода с палубы

Движение самолета по палубе описывается уравнением

$$(3) \quad m \frac{dv}{dt} = F(t) - \frac{\rho v^2}{2} SC_x - fG,$$

где $G = mg$, f — коэффициент трения, ρ — плотность воздуха. Будем считать, что при движении по палубе $\alpha \equiv 0$ и $\delta \equiv 0$. Представим $v(t)$ в виде суммы

$$v(t) = v_{\text{кас}} + \Delta v(t), \quad t_{\text{кас}} \leq t \leq t_{\text{сх}},$$

где $t_{\text{сх}}$ — момент схода самолета с палубы. Заметим, что $\Delta v(t) \ll v_{\text{кас}}$ в силу малости времени $t_{\text{сх}} - t_{\text{кас}}$ пробега по палубе. Поэтому можно линеаризовать уравнение (3) относительно функции $\Delta v(t)$. Это приводит к уравнению

$$\frac{d\Delta v}{dt} + \rho \frac{C_x}{m/S} v_{\text{кас}} \Delta v = g \left(\frac{F_0}{G} - f - \frac{C_x}{m/S} \frac{\rho v_{\text{кас}}^2}{2} \right) + g \frac{F(t) - F_0}{G},$$

где $C_x = C_{x0} + AC_{y0}^2$, поскольку $\alpha = \delta = 0$; $\Delta v(t_{\text{кас}}) = 0$. Решая это уравнение, получим для функции $\Delta v(t)$, $t_{\text{кас}} \leq t \leq t_{\text{сх}}$, явное выражение:

$$\Delta v(t) = \frac{b_1 + g\Delta F_0/G}{a_1} \left(1 - \exp\{-a_1(t - t_{\text{кас}})\} \right) + \frac{g\Delta F_0}{G} \frac{\tau}{1 - a_1\tau} \exp\left\{-\frac{t_{\text{кас}} - t_p}{\tau}\right\} \left(\exp\left\{-\frac{t - t_{\text{кас}}}{\tau}\right\} - \exp\{-a_1(t - t_{\text{кас}})\} \right),$$

где

$$a_1 = \rho \frac{C_x v_{\text{кас}}}{m/S}, \quad b_1 = g \left(\frac{F_0}{G} - f - \frac{C_x}{m/S} \frac{\rho v_{\text{кас}}^2}{2} \right).$$

Обозначим через T время пробега самолета по палубе от момента $t_{\text{кас}}$ до момента $t_{\text{сх}}$, т.е. $T = t_{\text{сх}} - t_{\text{кас}}$, а через L — длину участка палубы, пробегаемого самолетом от момента $t_{\text{кас}}$ до момента $t_{\text{сх}}$. Как было замечено в предыдущем разделе 4, скорость самолета в момент схода с палубы практически не зависит от точки начального касания палубы. Поэтому можно принять $L = NK$ (см. рис. 3). Тогда

$$NK = \int_{t_{\text{кас}}}^{t_{\text{кас}}+T} (v_{\text{кас}} + \Delta v(t) - V) dt = \left(v_{\text{кас}} - V + \frac{b_1 + g\Delta F_0/G}{a_1} \right) T + \\ + \frac{g\Delta F_0}{G} \frac{\tau^2}{1 - a_1\tau} \exp \left\{ -\frac{t_{\text{кас}} - t_p}{\tau} \right\} \left(1 - \exp \left\{ -\frac{T}{\tau} \right\} \right) - \\ - \left(\frac{b_1 + g\Delta F_0/G}{a_1} + \frac{g\Delta F_0}{G} \frac{\tau}{1 - a_1\tau} \exp \left\{ -\frac{t_{\text{кас}} - t_p}{\tau} \right\} \right) \frac{1 - \exp\{-a_1T\}}{a_1}.$$

Отсюда получается следующее уравнение для определения T :

$$(4) \quad T = \psi(T),$$

где

$$\psi(T) = \tilde{\psi}(T) / \left(v_{\text{кас}} - V + \frac{b_1 + g\Delta F_0/G}{a_1} \right), \\ \tilde{\psi}(T) = NK + \left(\frac{b_1 + g\Delta F_0/G}{a_1} + \frac{g\Delta F_0}{G} \frac{\tau}{1 - a_1\tau} \exp \left\{ -\frac{t_{\text{кас}} - t_p}{\tau} \right\} \right) \times \\ \times \frac{1 - \exp\{-a_1T\}}{a_1} - \frac{g\Delta F_0}{G} \frac{\tau^2}{1 - a_1\tau} \exp \left\{ -\frac{t_{\text{кас}} - t_p}{\tau} \right\} \left(1 - \exp \left\{ -\frac{T}{\tau} \right\} \right).$$

Решение уравнения (4) находится методом последовательных приближений:

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n, \quad T_n = \psi(T_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где T_0 — начальное приближение. Скорость самолета $v_{\text{сх}}$ в момент схода с палубы определяется по формуле

$$v_{\text{сх}} = v_{\text{кас}} + \Delta v(t_{\text{кас}} + T),$$

где $\Delta v(t_{\text{кас}} + T)$ есть значение функции $\Delta v(t)$ при $t = t_{\text{кас}} + T$. При проведении численных расчетов использовались характеристики корабля, соответствующие авианесущему крейсеру “Адмирал Кузнецов”. Результаты численных расчетов скорости $v_{\text{сх}}$ в зависимости от момента t_p дачи тяги для трех рассматриваемых значений приемистости двигателя τ ($\tau = 1$ с, $\tau = 1,5$ с и $\tau = 2$ с) представлены в Приложении в табл. 4.

6. Максимальная просадка траектории самолета после схода с палубы

После схода с палубы движение самолета рассматривается в детерминированной постановке и описывается системой (2) со следующими начальными условиями:

$$(5) \quad v = v_{cx}, \quad \alpha = 0, \quad \vartheta = 0, \quad \omega_z = 0, \quad y = 0, \quad x = s_{ag} + NK,$$

где NK — длина участка палубы от точки N до точки K (см. рис. 3). Отклонение δ органа продольного управления предполагается постоянным и определяется из условия балансировки

$$m_{z0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^\delta \delta = 0$$

при $\alpha = \alpha_{\text{бал}} = 15^\circ$.

Максимальная просадка $|H_{\text{пр}}|$ (см. рис. 1) определяется по минимальной координате y в результате численного интегрирования системы (2) с начальными условиями (5). Полученные результаты для просадки $H_{\text{пр}}$ представлены на рис. 5. Как и на рис. 2, по горизонтальной оси отложен промежуток времени $\Delta t = t_{\text{land}} - t_p$, определяющий момент дачи тяги t_p и представляющий собой время от момента t_p до предполагаемого (математического ожидания) момента t_{land} касания палубы в случае, если бы увеличения тяги не произошло. Численные значения просадки $H_{\text{пр}}$, по которым построены графики на рис. 5, вынесены в Приложение и представлены в табл. 2.

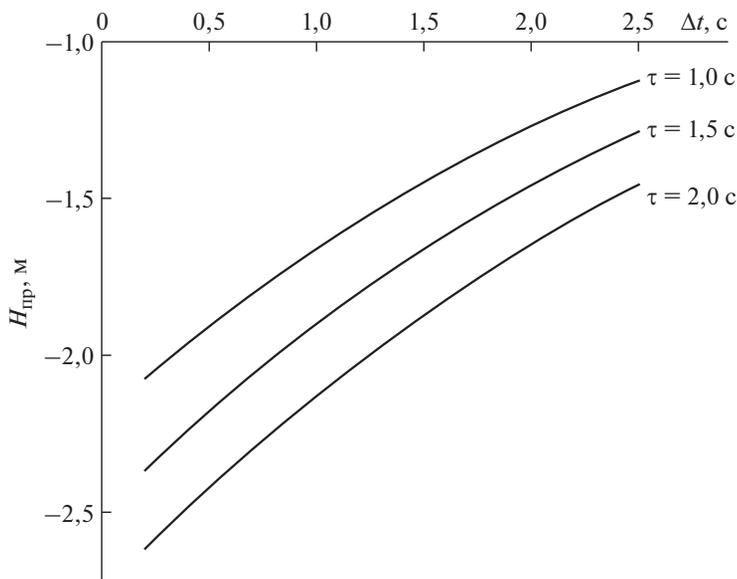


Рис. 5.

7. Определение допустимых моментов дачи тяги

При выборе допустимых моментов дачи тяги принято рассматривать ограничение не на вероятность $P_{\text{нз}}$ незацепления аэрофинишера после одного захода на посадку, а ограничение на вероятность $P_{\text{аб}}$ посадки на аварийный барьер. Вероятность $P_{\text{аб}}$ принимают равной вероятности незацепления после n заходов, т.е. $P_{\text{аб}} = P_{\text{нз}}^n$. При этом из условия ограниченности запаса топлива допустимое число повторений захода на посадку обычно принимают равным $n = 3$, так что $P_{\text{аб}} = P_{\text{нз}}^3$.

При посадке на аварийный барьер самолет может получить серьезные повреждения. Требуют, чтобы $P_{\text{аб}} < 10^{-4}$ [1], что равносильно неравенству $P_{\text{нз}} < 0,0464$. С учетом результатов, полученных выше для $P_{\text{нз}}$, это приводит к следующим ограничениям на время Δt , определяющее момент увеличения тяги двигателя:

$$\Delta t < \Delta t_{\text{max}}, \quad \text{где } \Delta t_{\text{max}} = \begin{cases} 1,40 \text{ с при } \tau = 1 \text{ с,} \\ 1,65 \text{ с при } \tau = 1,5 \text{ с,} \\ 1,85 \text{ с при } \tau = 2 \text{ с,} \end{cases}$$

т.е. при постоянной двигателя $\tau = 1$ с увеличение тяги должно происходить не ранее, чем за 1,40 с до предполагаемого момента касания палубы; при $\tau = 1,5$ с — не ранее, чем за 1,65 с; при $\tau = 2$ с — не ранее, чем за 1,85 с.

Посмотрим теперь, какие требования на Δt налагает условие ограниченности максимальной просадки самолета после схода с палубы. Просадка определялась выше при нулевой бальности волнения моря, т.е. без качки. Понятно, что при наличии качки максимальная просадка заметно увеличится за счет сходов с палубы с отрицательными углами θ . Тем не менее просадку нормируют и при отсутствии качки, предполагая при этом ее соответствующее увеличение при появлении качки. Так, например, в [1] указано, что в соответствии с нормами для палубных самолетов и авианосцев США максимальная просадка при отсутствии качки должна удовлетворять условию $H_{\text{пр}} > -3$ м. Если следовать этому критерию, то при использованных в рассмотренном примере численных значениях параметров задачи, характеризующих выбранные самолет и корабль, получается, что дачу тяги можно не делать вплоть до момента касания палубы и единственным ограничением на момент дачи тяги является условие $\Delta t < \Delta t_{\text{max}}$. Однако когда требуется удовлетворить более жесткому условию на $H_{\text{пр}}$, например $H_{\text{пр}} > -2$ м (это условие, помимо прочего, определяется высотой палубы корабля над водной поверхностью), то получаем уже двустороннее ограничение на Δt :

$$\Delta t_{\text{min}} < \Delta t < \Delta t_{\text{max}}, \quad \text{где } \Delta t_{\text{min}} = \begin{cases} 0,30 \text{ с при } \tau = 1 \text{ с,} \\ 0,75 \text{ с при } \tau = 1,5 \text{ с,} \\ 1,20 \text{ с при } \tau = 2 \text{ с,} \end{cases}$$

т.е. при постоянной двигателя $\tau = 1$ с увеличение тяги должно происходить не раньше, чем за 1,40 с, но не позже, чем за 0,30 с до предполагаемого момента касания палубы; при $\tau = 1,5$ с — не раньше, чем за 1,65 с, но не позже, чем за 0,75 с; при $\tau = 2$ с — не раньше, чем за 1,85 с, но не позже, чем за 1,20 с.

8. Заключение

Предложен алгоритм нахождения диапазона допустимых моментов увеличения тяги двигателя при посадке самолета на корабль. При существенном использовании результатов ранее опубликованных работ авторов предложена схема вычисления вероятности $P_{\text{нз}}$ незацепления аэрофинишера и — при незацеплении аэрофинишера — максимальной просадки $H_{\text{пр}}$ траектории самолета после схода с палубы. Вероятность $P_{\text{нз}}$ и просадка $H_{\text{пр}}$ вычисляются как функции от момента увеличения тяги двигателя, что позволяет, опираясь на существующие общепринятые ограничения на $P_{\text{нз}}$ и $H_{\text{пр}}$, определить диапазон возможных моментов увеличения тяги. Предложенная схема проиллюстрирована численными расчетами, проведенными для реальных самолета и корабля, идентичных корабельному самолету МиГ-29К и авианесущему крейсеру “Адмирал Кузнецов”.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

$\Delta t, \text{ с}$	$P_{\text{нз}}$		
	$\tau = 1 \text{ с}$	$\tau = 1,5 \text{ с}$	$\tau = 2 \text{ с}$
0,2	0,0081	0,0079	0,0078
0,3	0,0086	0,0082	0,0079
0,4	0,0090	0,0085	0,0081
0,5	0,0096	0,0088	0,0083
1,0	0,0172	0,0129	0,0108
1,5	0,0545	0,0302	0,0206
1,7	0,1003	0,0498	0,0307
1,8	0,1385	0,0658	0,0389
1,9	0,1917	0,0885	0,0501
2,0	0,2635	0,1202	0,0658
2,1	0,3562	0,1642	0,0876
2,2	0,4689	0,2237	0,1178
2,3	0,5945	0,3015	0,1592
2,4	0,7205	0,3987	0,2148
2,5	0,8312	0,5123	0,2873

Таблица 2

$\Delta t, \text{ с}$	$H_{\text{пр}}, \text{ м}$		
	$\tau = 1 \text{ с}$	$\tau = 1,5 \text{ с}$	$\tau = 2 \text{ с}$
0,2	-2,052	-2,334	-2,590
0,3	-1,993	-2,270	-2,523
0,4	-1,937	-2,208	-2,458
0,5	-1,881	-2,147	-2,394
1,0	-1,633	-1,871	-2,099
1,5	-1,425	-1,635	-2,844
1,7	-1,352	-1,552	-1,752
1,8	-1,317	-1,512	-1,708
1,9	-1,284	-1,473	-1,666
2,0	-1,251	-1,436	-1,625
2,1	-1,220	-1,400	-1,585
2,2	-1,190	-1,365	-1,546
2,3	-1,161	-1,332	-1,509
2,4	-1,133	-1,299	-1,472
2,5	-1,106	-1,268	-1,437

Таблица 3

Δt , с	$v_{кас}$, М/с		
	$\tau = 1$ с	$\tau = 1,5$ с	$\tau = 2$ с
0,2	67,210	67,039	66,944
0,3	67,389	67,174	67,053
0,4	67,591	67,322	67,173
0,5	67,786	67,482	67,304
1,0	68,930	68,407	68,079
1,5	70,166	69,464	68,991
1,7	70,664	69,904	69,380
1,8	70,912	70,125	69,577
1,9	71,157	70,348	69,776
2,0	71,402	70,570	69,976
2,1	71,644	70,793	70,177
2,2	71,883	71,014	70,379
2,3	72,120	71,235	70,581
2,4	72,354	71,455	70,783
2,5	72,585	71,674	70,985

Таблица 4

Δt , с	$v_{сх}$, М/с		
	$\tau = 1$ с	$\tau = 1,5$ с	$\tau = 2$ с
0,2	76,941	75,952	75,208
0,3	77,198	76,192	75,430
0,4	77,453	76,433	75,652
0,5	77,705	76,674	75,876
1,0	78,929	77,859	76,991
1,5	80,077	78,997	78,084
1,7	80,153	79,436	78,511
1,8	80,727	79,651	78,722
1,9	80,935	79,865	78,931
2,0	81,142	80,075	79,137
2,1	81,345	80,283	79,342
2,2	81,543	80,487	79,545
2,3	81,739	80,689	79,746
2,4	81,931	80,888	79,944
2,5	82,120	81,084	80,140

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джекер Р.М. Испытания по определению годности палубных самолетов к взлетно-посадочным операциям при базировании на авианосце / Технический перевод ЦАГИ № 12242, 1973.
2. Семаков С.Л. Выбросы случайных процессов: приложения в авиации. М.: Наука, 2005.
3. Rife J., Khanafseh S., Pullen S. et. al. Navigation, interference suppression, and fault monitoring in the sea-based joint precision approach and landing system // Proc. of the IEEE. 2008. V. 96. No. 12. P. 1958–1975.
4. Isaacs J.T., Ezal K.O., Hespanha J.P. Local carrier-based precision approach and landing system // Proc. 2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC-2016), Las Vegas, USA, 2016. P. 6284–6290.
5. Semakov S.L., Semakov I.S. Estimating the probability of safe landing for aircrafts // Proc. 2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC-2019), Nice, France, 2019. P. 2568–2573.
6. Hess R.A. Analysis of the aircraft carrier landing task, pilot + augmentation/automation // IFAC-PapersOnLine. 2019. V. 51. No. 34 (special issue: 2nd IFAC Conference on Cyber-Physical and Human Systems CPHS, Miami, USA, 13–15 December, 2018). P. 359–365.
7. Sidar M., Doolin B. On the feasibility of real-time prediction of aircraft carrier motion at sea // IEEE Trans. Autom. Control. 1983. V. 28. No. 3. P. 350–356.
8. Бем Л.А., Гуров В.Ф., Кабачинский В.В. и др. Летно-моделирующий комплекс исследования посадочных систем летательных аппаратов корабельного базирования // Патент № RU2042583C1, 1991.

9. *Semakov S.L.* Crossings problems in random processes theory and their applications in aviation. Newcastle, UK: Cambridge Scholars Publishing, 2019.
10. *Semakov S.L.* Aircraft landing strategy // Proc. 2021 IEEE 7th International Conference on Control, Automation and Robotics (ICCAR-2021), Singapore, Singapore, 2021. P. 184–188.
11. *Barratt S.T., Kochenderfe M.J., Boyd S.P.* Learning probabilistic trajectory models of aircraft in terminal airspace from position data // IEEE Trans. Intell. Transp. Syst. 2019. V. 20. No. 9. P. 3536–3545.
12. *Zhen Z., Yu C., Jiang S., Jiang J.* Adaptive super-twisting control for automatic carrier landing of aircraft // IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. 2020. V. 56. No. 2. P. 984–997.
13. *Semakov S.L., Semakov I.S.* Method of calculating the probability of a safe landing for ship-based aircraft // IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. 2022. V. 58. No. 6. P. 5425–5442.
14. *Семаков С.Л.* Первое достижение границ случайным процессом // АиТ. 1988. № 6. С. 87–95.
15. *Семаков С.Л.* Вероятность первого достижения уровня компонентом многомерного процесса на заданном промежутке с соблюдением ограничений на его другие компоненты // Теория вероятн. и ее примен. 1989. Т. 34. № 2. С. 402–406.
16. *Semakov S.L., Semakov I.S.* Estimating the probability that a random process first reaches the boundary of a region on a given time interval // Proc. 2018 IEEE 57th Conference on Decision and Control (CDC-2018), Miami Beach, USA, 2018. P. 256–261.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 23.01.2022

После доработки 27.05.2022

Принята к публикации 28.07.2022

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2023 г. С.Н. МЕДВЕДЕВ, канд. физ.-мат. наук
(s_n_medvedev@mail.ru)
(Воронежский государственный университет)

ЖАДНЫЕ И АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ С НЕСКОЛЬКИМИ ЦЕНТРАМИ С ЧЕРЕДОВАНИЕМ ОБЪЕКТОВ

В статье рассматривается задача маршрутизации транспортных средств с несколькими центрами с чередованием объектов. Предлагаются формальная постановка задачи с двумя типами объектов и математическая модель с двумя блоками булевых переменных. Вначале рассматривается модель без единого места сбора транспортных средств (мобильных объектов), а после вводится дополнительный специальный объект — место сбора. Показаны дополнительные ограничения, которые добавляются в математическую модель с учетом нового объекта. Отдельное внимание уделено условию отсутствия подциклов. Данное условие учитывается на основе матрицы смежности. Для предложенной задачи предлагаются жадные алгоритмы решения. Всего представлено пять алгоритмов, два из которых являются итеративными. На основе одного из рассмотренных жадных алгоритмов строится его вероятностная модификация на основе рандомизации переменных — адаптивный алгоритм. В завершение приводятся результаты вычислительного эксперимента по сравнению предложенных алгоритмов с точки зрения среднего значения целевой функции, а также времени работы. Также приводятся результаты эксперимента по настройке параметров адаптивного алгоритма.

Ключевые слова: задача маршрутизации транспортных средств, адаптивный алгоритм, жадный алгоритм.

DOI: 10.31857/S0005231023030078, EDN: ZZRSPP

1. Введение

В исследованиях, посвященных задачам маршрутизации транспортных средств (ЗМТС), можно выделить два глобальных направления: моделирование различных модификаций и дополнений задачи и разработка эффективных алгоритмов решения.

В [1] приводится обзор возможных постановок ЗМТС. Среди них автор выделяет графовую постановку, постановку в виде задачи математического целочисленного программирования, двух- и трехиндексные постановки задачи, а также в завершение приводится постановка в виде задачи теории

расписания. В ходе анализа последней постановки автор приходит к выводу о возможности применений к решению предложенной задачи эвристик, связанных с задачей коммивояжера, для определения верхней оценки числа транспортных средств. В [2] исследовалась модель зонирования для ЗМТС за счет ввода дополнительных ограничений. Данная модель позволяет определить разбиение клиентов на зоны и найти оптимальные маршруты в каждой из них. Исследование [3] посвящено непрерывной модели ЗМТС. В нем особое место уделено анализу скорости движения мобильных объектов. Статья [4] посвящена конструированию математической модели, включающей в себя ограничения многих известных постановок ЗМТС, для решения которой разработан алгоритм на основе муравьиных колоний с эволюционной стратегией.

В [5] предложен муравьиный алгоритм решения ЗМТС с адаптивным механизмом обучения с использованием градиентного спуска. Основная идея метода состоит из двух частей: классическая состоит в вычислении и отложении феромона на маршруте лучшего муравья в популяции, а вторая, модифицированная — в адаптивном обновлении матрицы феромонов с помощью градиентов. Представлены результаты расчетов, в которых разработанный авторами алгоритм на всех предложенных тестовых данных дает лучшее решение по сравнению с другими алгоритмами. В [6] предлагается генетический алгоритм решения ЗМТС с несколькими депо с временными окнами со специально разработанной техникой инициализации популяции. В [7] представлен подход, объединяющий в себе генетические алгоритмы и алгоритмы муравьиной колонии.

В [8, 9] авторами приводятся различные варианты математических моделей для ЗМТС с чередованием объектов и единым местом сбора, а также приводятся эвристические алгоритмы для ее решения, основанные на алгоритмах муравьиных колоний и генетических алгоритмах. В [10] предлагается точный алгоритм решения рассмотренной задачи, основанный на методе ветвей и границ.

Множество исследований ЗМТС имеют прикладной характер, так как область применения подобного рода задача крайне широка. Различные вариации ЗМТС могут использоваться, например, при группировке географических объектов в разнообразные кластеры [2] для грамотного планирования процессов продаж и перевозок, обслуживания, сбора мусора, предоставления медицинской помощи и т.п. Или же для грамотного составления маршрутов пилотируемых и беспилотных мобильных объектов в городских и межгородских транспортных сетях, при сборке урожая на полях, при тушении пожаров воздушными и наземными средствами [1, 5, 8]. Также подобного рода задачи встречаются при планировании вычислений, когда нескольким устройствам необходимо назначить определенные процессы [11]. Таким образом, актуальность в исследовании моделей и алгоритмов различных модификаций ЗМТС подтверждается не только теоретической необходимостью, но и практической значимостью.

В данной статье предложена математическая модель в виде задачи дискретной оптимизации для ЗМТС с чередованием объектов и единым местом сбора с условием отсутствия подциклов. В настоящем исследовании акцент сделан на построении математической модели с двумя блоками двухиндексных переменных и построении альтернативного условия отсутствия подциклов. Также в постановке не рассматривается фиксированное число мобильных объектов (транспортных средств). Разработаны итеративные и неитеративные жадные алгоритмы решения задачи, а также разработан адаптивный алгоритм, являющийся вероятностной модификацией одного из предложенных жадных алгоритмов. Два блока двухиндексных переменных в математической модели позволяют выделить в адаптивном алгоритме блок, не требующий обновления вероятностей на каждом шаге.

2. Постановка задачи

Приведем постановку ЗМТС с несколькими центрами с чередованием объектов [10].

Есть совокупность неподвижных объектов (вершин) двух типов: целевые объекты (тип А) и центры (тип В). Известны затраты, необходимые для перемещения между объектами. Несколько мобильных объектов (транспортных средств) должны в совокупности посетить все неподвижные объекты типа А таким образом, чтобы суммарные затраты были минимальными. Причем целевые объекты и центры должны чередоваться в маршрутах транспортных средств. Кроме того, каждый целевой объект в совокупности можно посетить только один раз, а любой центр можно посетить неограниченное число раз. При этом все мобильные объекты начинают и заканчивают свой маршрут в некоторой фиксированной точке сбора.

Под затратами можно понимать расстояние, временные затраты, стоимость и т.п.

Заметим, что количество мобильных агентов в постановке не оговаривается. Их может быть несколько, а может быть и только один.

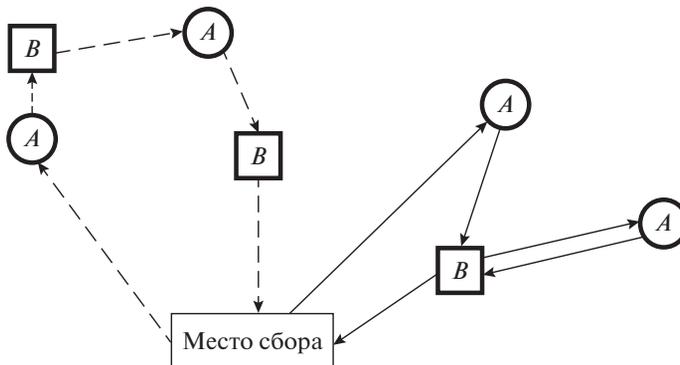


Рис. 1. ЗМТС с несколькими центрами с чередованием и единым местом сбора.

На рис. 1 представлена графическая интерпретация предложенной задачи, где целевые объекты обозначены кружками, центры — квадратами, а место сбора — прямоугольником. Дуги (пунктирные и сплошные) соответствуют некоторому маршруту.

На рис. 1 представлен маршрут с двумя посещениями места сбора. Классическая интерпретация ЗМТС говорит о наличии двух мобильных объектов, один из которых движется по пунктирным дугам, а второй — по сплошным. Другая интерпретация говорит о том, что присутствует только один мобильный объект, но он посещает место сбора два раза. В данной статье сделан акцент на количестве посещений единого места сбора (одним или несколькими транспортными средствами), а не на количестве мобильных объектов.

Заметим, что учет в постановке точного количества имеющихся мобильных объектов приведет к другой математической модели и другим алгоритмам решения.

3. Математическая модель

Вначале построим математическую модель задачи без требования того, чтобы все мобильные объекты начинали и заканчивали свой маршрут в некоторой фиксированной точке сбора (рис. 2).

Для составления математической модели введем следующие обозначения:

n — количество целевых объектов (неподвижных объектов типа А);

m — количество центров (неподвижных объектов типа В);

$(c_{ij}^1)_{m \times n}$ — матрица, задающая затраты для перемещения между i -м центром (тип В) и j -м целевым объектом (тип А);

$(c_{ji}^2)_{n \times m}$ — матрица, задающая затраты для перемещения между j -м целевым объектом (тип А) и i -м центром (тип В).

Введем два блока переменных:

$$x_{ij}, y_{ji} = \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

$x_{ij} = 1$, если мобильный объект от i -го центра приезжает к j -му целевому объекту, и $x_{ij} = 0$ в противном случае;

$y_{ji} = 1$, если мобильный объект от j -го целевого объекта приезжает к i -му центру, и $y_{ji} = 0$ в противном случае.

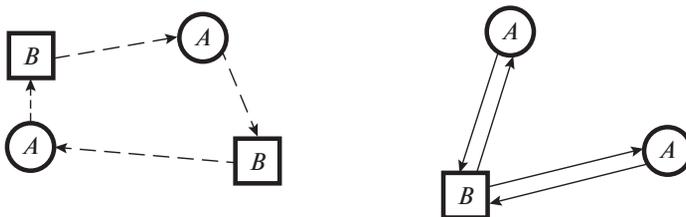


Рис. 2. ЗМТС с несколькими центрами с чередованием без единого места сбора.

Введем целевую функцию на основе условия, что совокупные затраты должны быть минимальны. Она будет иметь следующий вид:

$$(1) \quad L(X, Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_{ij}^1 x_{ij} + c_{ij}^2 y_{ij}) \rightarrow \min.$$

Здесь $X = (x_{ij})_{m \times n}$ и $Y = (y_{ji})_{n \times m}$ — матрицы соответствующих переменных.

Перейдем к составлению ограничений задачи, формирующих допустимое множество решений.

Из постановки следует, что к каждому целевому объекту должен приехать только один мобильный объект и от каждого целевого объекта должен уехать только один мобильный объект. Это можно записать одним ограничением вида

$$\left(\sum_{i=1}^m x_{ij} \right) \left(\sum_{i=1}^m y_{ji} \right) = 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

которое является нелинейным. Вместо него можно записать эквивалентные ограничения:

$$(2) \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$(3) \quad \sum_{i=1}^m y_{ji} = 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

которые относятся к типу ограничений классической задачи коммивояжера, и при этом математическая модель задачи останется линейной.

Для того чтобы маршрут каждого мобильного объекта был неразрывным, необходимо учитывать следующие условия: если к целевому объекту приезжает мобильный объект, то он же должен уехать от этого целевого объекта, и если от целевого объекта отъезжает мобильный объект, то он же должен был приехать к этому целевому объекту. Такие условия могут быть записаны нелинейными ограничениями вида

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^m x_{ij} \right) \left(1 - \sum_{i=1}^m y_{ji} \right) &= 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ \left(\sum_{i=1}^m y_{ji} \right) \left(1 - \sum_{i=1}^m x_{ij} \right) &= 0, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

которые эквивалентно преобразуются в линейное ограничение

$$(4) \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m y_{ji}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Такое ограничение является избыточным из-за (2) и (3).

Аналогично для неразрывности маршрута необходимо учитывать следующие условия: если к центру приезжает мобильный объект, то он же должен уехать от этого центра, и если от центра уезжает мобильный объект, то он же должен приехать к этому центру. Такие условия в свою очередь будут записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n y_{ji} \right) \left(\sum_{j=1}^n y_{ji} - \sum_{j=1}^n x_{ij} \right) &= 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} \right) \left(\sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1}^n y_{ji} \right) &= 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Данные нелинейные ограничения также можно эквивалентно переписать одним линейным ограничением вида

$$(5) \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n y_{ji}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Заметим, что такое ограничение можно интерпретировать следующим образом: количество въездов в центр совпадает с количеством выездов из него.

Ограничения (2), (3), (5) при введенных переменных x_{ij} , $y_{ji} = \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ формируют допустимое множество решений Ω .

Таким образом, построена математическая модель (1)–(3), (5) ЗМТС с несколькими центрами с чередованием.

Теперь рассмотрим случай, когда все мобильные объекты начинают и заканчивают свой маршрут в некоторой фиксированной точке сбора.

В качестве места сбора могут выступать: фиктивный целевой объект (объект типа А), фиктивный центр (объект типа В), пара фиктивных объектов с направлением прохода «целевой объект – центр» (А-В), пара фиктивных объектов с направлением прохода «центр – целевой объект» (В-А), причем для пар фиктивных объектов расстояние между ними равно нулю.

Каждый из этих случаев может быть продиктован конкретной практической постановкой. Например, при уборке стогов с поля удобно использовать пару «целевой объект – центр» (рис. 3), при работе грузовиков в песчаном карьере – пару «центр – целевой объект», при тушении ландшафтных пожаров самолетами – фиктивный объект типа В, при работе курьеров с обязательной доставкой документов – фиктивный объект типа А.

В данном исследовании будет использоваться пара «целевой объект – центр», которую, как уже было сказано, можно применить к практической задаче уборки стогов с поля. Если определить целевые объекты как стога, центры как места или машины, в которые загружаются стога, то очевидно, что от места сбора мобильные объекты (трактора) должны направиться к стогам, а не к машинам. Аналогично, после погрузки последнего стога в машину трактор от нее должен направиться на место сбора. Тогда для со-

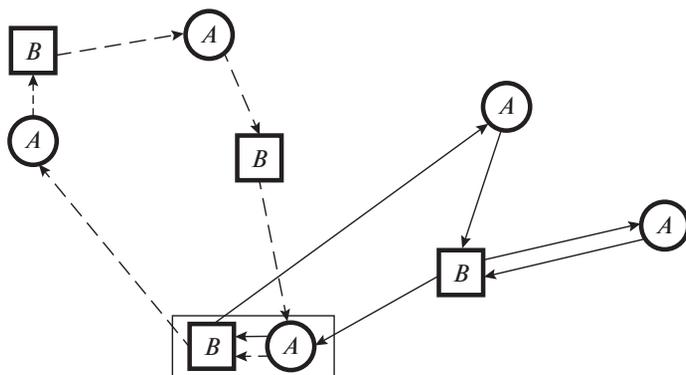


Рис. 3. ЗМТС с несколькими центрами с чередованием и единым местом сбора, заданной парой «целевой объект – центр».

хранения чередования в маршруте он должен быть следующим: «фиктивный стог – фиктивная машина – стог – машина – ... – стог – машина – фиктивный стог».

Итак, рассмотрим задачу, в которой место сбора задано парой «целевой объект – центр» (рис. 3).

Водятся фиктивный целевой объект и фиктивный центр. Пусть им отвечают индексы $j = 0$ и $i = 0$ соответственно. При этом на данную пару накладываются следующие условия:

- 1) мобильный объект из фиктивного целевого объекта может приехать только в фиктивный центр;
- 2) мобильный объект не может приехать от фиктивного центра в фиктивный целевой объект;
- 3) мобильный объект не может приехать в фиктивный центр из обычного целевого объекта;
- 4) мобильный объект не может приехать от фиктивного целевого объекта к обычному центру.

Необходимо ввести новые переменные x_{0j} , x_{i0} , y_{j0} , y_{0i} , $j = 0, \dots, n$, $i = 0, \dots, m$. При этом $x_{0j} \in \{0, 1\}$, $j = 0, \dots, n$ и $x_{0j} = 1$, если мобильный объект от фиктивного центра приезжает к j -му целевому объекту, и $x_{0j} = 0$ в противном случае. Переменные $x_{i0} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 0, \dots, m$ показывают количество посещений фиктивного целевого объекта из i -го центра. Заметим, что $x_{00} = 0$ согласно условию 2. Переменные $y_{j0} = 0$, $y_{0i} = 0$, $j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$ согласно условиям 3 и 4, а $y_{00} \in \mathbb{N}$.

Использование целочисленных переменных x_{i0} и y_{00} вместо булевых объясняется наличием ограничения (5), расширенного для $i = 0$ и $j = 0$. Записав это ограничение для $i = 0$, получим

$$\sum_{j=0}^n x_{0j} = \sum_{j=0}^n y_{j0}.$$

Если y_{00} при этом будет булевой переменной (автоматически $y_{00} = 1$, так как маршрут должен быть замкнутым), то с учетом условия 3 получим

$$\sum_{j=0}^n x_{0j} = \sum_{j=0}^n y_{j0} = y_{00} = 1,$$

т.е.

$$\sum_{j=0}^n x_{0j} = 1.$$

Таким образом, получается, что из фиктивного центра может выехать только один мобильный объект, что не отражает сути места сбора мобильных объектов и в общем случае не так. Поэтому вводится положительная целочисленная переменная y_{00} .

Аналогично рассуждая, получим, что и $x_{i0} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 0, \dots, m$. Здесь добавление нулевого элемента обусловлено тем, что не обязательно из каждого центра мобильный объект придет в фиктивный целевой объект.

Рассмотрим дополнительные ограничения, которые накладываются на фиктивные объекты.

Заметим, что количество выездов с места сбора и количество приездов на место сбора из постановки задачи не известны. Поэтому невозможно записать аналоги ограничений (2) и (3) для $j = 0$. Однако возможно записать аналог ограничения (4)

$$\sum_{i=0}^m x_{i0} = \sum_{i=0}^m y_{0i},$$

которое интерпретируется следующим образом: количество въездов в фиктивный целевой объект равно количеству выездов из него.

Расширение ограничения (5) уже было рассмотрено ранее и заключается в равенстве сумм:

$$\sum_{j=0}^n x_{0j} = \sum_{j=0}^n y_{j0},$$

и означает, что количество въездов в фиктивный центр равно количеству выездов из него.

Как было сказано ранее, переменные $y_{j0} = 0$, $y_{0i} = 0$, $j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$, поэтому два последних равенства представляются в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m x_{i0} &= y_{00}, \\ \sum_{j=0}^n x_{0j} &= y_{00}. \end{aligned}$$

Это дает возможность записать еще одно ограничение

$$\sum_{i=0}^m x_{i0} = \sum_{j=0}^n x_{0j}.$$

Очевидно, что оно избыточное, но оно отражает важное свойство места сбора: количество въездов и выездов для него совпадает.

Итак, на данном этапе получена следующая математическая модель:

$$(6) \quad L(X, Y) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n (c_{ij}^1 x_{ij} + c_{ij}^2 y_{ij}) \rightarrow \min,$$

$$(7) \quad \sum_{i=0}^m x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$(8) \quad \sum_{i=0}^m x_{i0} = y_{00},$$

$$(9) \quad \sum_{i=0}^m y_{ji} = 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$(10) \quad \sum_{j=0}^n x_{0j} = y_{00},$$

$$(11) \quad \sum_{j=0}^n x_{ij} = \sum_{j=0}^n y_{ji}, \quad i = 0, \dots, m,$$

$$(12) \quad x_{00} = 0,$$

$$(13) \quad y_{j0} = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$(14) \quad y_{0i} = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$(15) \quad x_{ij}, y_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$(16) \quad x_{0j} \in \{0, 1\}, \quad j = 0, \dots, n,$$

$$(17) \quad x_{i0} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i = 0, \dots, m,$$

$$(18) \quad y_{00} \in \mathbb{N}.$$

В дальнейшем для обозначения количества посещений места сбора (въездов или выездов) вместо суммы $\sum_{j=0}^n x_{0j}$ будет использоваться обозначение K .

Стоит заметить, что полученная модель пока не учитывает требования того, что маршрут какого-либо мобильного объекта не содержит подциклы. Поэтому далее будет рассмотрено условие отсутствия подциклов.

4. Условие отсутствия подциклов

Сейчас модель допускает наличие неразрывного маршрута для некоторого мобильного объекта, который не проходит через фиктивную пару — место

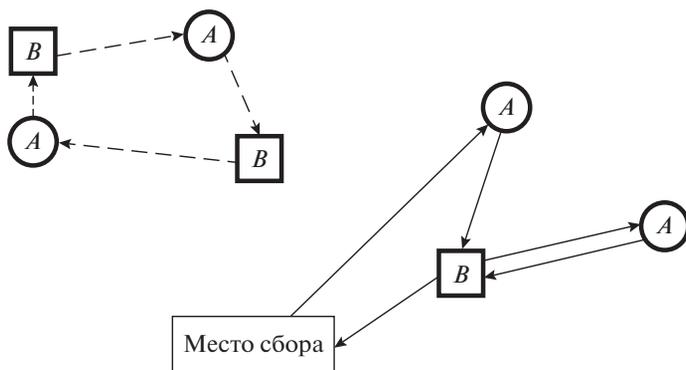


Рис. 4. Наличие неразрывного маршрута, который не проходит через место сбора.

сбора. Возможен случай, как на рис. 4, который не противоречит математической модели (6)–(18).

Такое решение содержит подциклы, выделенные пунктиром на рисунке. Таким образом, в математическую модель необходимо ввести дополнительное условие отсутствия подциклов. Оно может быть записано с использованием матрицы смежности.

Определение 1. Назовем два центра l и h смежными, если существует целевой объект j такой, что $x_{lj} = 1$ и $y_{jh} = 1$.

Будем говорить, что такие два центра соединены маршрутом длины 1 при условии $l \neq h$.

Будем считать, что если центр входит в маршрут, то он является смежным сам с собой.

Рассмотрим процесс построения матрицы смежности $A = (a_{lh})_{(m+1) \times (m+1)}$, $l, h = 0, \dots, m$. Диагональные элементы a_{ll} равны единице, если существует индекс j такой, что $x_{lj} = 1$, т.е. $\sum_{j=0}^n x_{lj} \geq 1$, и равны нулю в противном случае. Остальные элементы a_{lh} , $l \neq h$, равны единице, если существует индекс j такой, что $x_{lj} = 1$ и $y_{jh} = 1$, т.е. $\sum_{j=0}^n x_{lj}y_{jh} \geq 1$, и равны нулю в противном случае.

Используя скобку Айверсона, данные условия можно записать в виде

$$a_{ll} = \left[\sum_{j=0}^n x_{lj} \geq 1 \right], \quad a_{lh} = \left[\sum_{j=0}^n x_{lj}y_{jh} \geq 1 \right], \quad l, h = 0, \dots, m.$$

Пусть по найденному маршруту построена матрица смежности центров $A = (a_{lh})_{(m+1) \times (m+1)}$ по следующему правилу: если существует индекс j такой, что $x_{lj} = 1$ и $y_{jh} = 1$, то $a_{lh} = 1$. Элементы матрицы $\underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_k = A^k = (a_{lh}^k)_{(m+1) \times (m+1)}$ определяют количество маршрутов длины k между соответствующими центрами [12]. Если всего есть $(m+1)$ центр, то наибольшая

длина пути между ними равна m . Таким образом, если в матрице A^m нет нулевых элементов, то это означает, что из каждого центра можно попасть в каждый, т.е. все они связаны между собой и в маршруте нет подциклов.

Рассмотрим матрицу $A_M = (a_{lh})_{M \times M}$, полученную из матрицы A удалением нулевых строк и столбцов, $M \leq m$. Таким образом, матрица A_M — матрица смежности, в которой учтены только задействованные в маршруте центры. Если в матрице $(A_M)^k$, где k — любое из чисел $k \geq M$, нет нулевых элементов, то это означает, что все центры, входящие в маршрут, связаны между собой.

Таким образом, условие отсутствия подциклов может быть записано следующим образом:

$$(19) \quad a_{lh}^{(m)} \geq 1, l, \quad h = 0, \dots, m,$$

где $a_{lh}^{(m)}$ — элементы матрицы $(A_M)^m$, построенной по переменным x_{ij} и y_{ji} .

Ограничения (7)–(19) формируют допустимое множество решений Ω .

Таким образом, целевая функция (6) и ограничения (7)–(19) составляют математическую модель ЗМТС с несколькими центрами с чередованием и единым местом сбора.

5. Жадные алгоритмы решения

Рассмотрим один из вариантов жадного алгоритма решения поставленной задачи, общая идея которых состоит в принятии локально оптимальных решений на каждом этапе, допуская, что конечное решение также окажется оптимальным. Алгоритм заключается в построении связного маршрута с выбором ближайшего объекта нужного типа на каждом этапе [13].

Далее множество целевых объектов будем обозначать через J .

Алгоритм 1. Прямой жадный алгоритм.

1. Задать $L = 0$, $J = \{0, \dots, n\}$, $K = 0$, $i = 0$.

2. Если $i = 0$, то найти $j' = \arg \min_{j \in J \setminus \{0\}} \{c_{ij}^1\}$,

иначе найти $j' = \arg \min_{j \in J} \{c_{ij}^1\}$.

3. Положить $x_{ij'} = 1$, $L = L + c_{ij'}^1$.

4. Если $j' = 0$, то $i' = 0$, положить $y_{00} = y_{00} + 1$, $K = K + 1$,

иначе найти $i' = \arg \min_{i=1, \dots, m} \{c_{ji}^2\}$, положить $y_{j'i'} = 1$, $L = L + c_{j'i'}^2$.

5. Если $j' \neq 0$, то обновить J : $J = J \setminus \{j'\}$.

6. Проверить: $J = \{0\}$?

Если нет, то положить $i = i'$ и перейти к шагу 2,

если да, то положить $x_{i'0} = x_{i'0} + 1$, $L = L + c_{i'0}^1$, и $y_{00} = y_{00} + 1$, $K = K + 1$. Ответ получен.

На шаге 5 алгоритма не может быть ситуации, когда $J = \{0\}$ и $j' = 0$, так как при $j' = 0$ не происходит обновление множества J , и если оно уже

содержит только нулевой элемент, то окончание работы алгоритма должно было произойти на предыдущем шаге с предыдущим $j' \neq 0$. Таким образом, ветка «да» на шаге 6 не будет дублировать увеличение y_{00} на шаге 4 и не даст значение $x_{00} = 1$. Также на шаге 6 происходит выполнение ограничения (11) для $i = 0$.

Под ответом понимается маршрут, заданный в матричном виде, его длина L и количество посещений места сбора K .

Заметим, что данный алгоритм гарантирует хотя бы один выезд и один въезд в место сбора. Это обеспечивается шагами 1 и 6 на ветке «да». Также по построению маршрут получается замкнутым. Таким образом, выполняются ограничения, накладываемые на маршрут.

Алгоритм 1 является «интуитивным», прямым решением поставленной задачи. Каждый его шаг может являться командой мобильному объекту, находящемуся изначально в месте сбора.

Другой вариант жадного алгоритма не подразумевает обязательное начало построения маршрута из места сбора, но обязательно учитывает для него хотя бы один заезд и один выезд. То есть он также отвечает ограничениям. Данный алгоритм начинает работу в произвольном центре. Такая схема основывается на том, что жадные алгоритмы не обязаны начинать свою работу с первого объекта (первой строки матрицы затрат, первого столбца, первого города и т.п.), а могут это делать с произвольного объекта. С учетом того, что в рассматриваемой задаче присутствует два типа объектов, для каждого из них разработаны соответствующие схемы (*алгоритм 2* и *алгоритм 4*).

Алгоритм 2. Жадный алгоритм центров.

1. Задать $L = 0$, $J = \{0, \dots, n\}$, $K = 0$, задать произвольный индекс $i_{\text{нач}} = \{0, \dots, m\}$.

2. Если $i_{\text{нач}} = 0$, то выполнить *алгоритм 1* и завершить *алгоритм 2*, иначе перейти к шагу 3.

3. Положить $x_{i_{\text{нач}}0} = 1$, $L = L + c_{i_{\text{нач}}0}^1$, $y_{00} = 1$, $K = K + 1$, $i = 0$.

4. Если $i = 0$, то найти $j' = \arg \min_{j \in J \setminus \{0\}} \{c_{ij}^1\}$,

иначе найти $j' = \arg \min_{j \in J} \{c_{ij}^1\}$.

5. Положить $x_{ij'} = 1$, $L = L + c_{ij'}^1$.

6. Если $j' \neq 0$, то обновить J : $J = J \setminus \{j'\}$.

7. Проверить: $J = \{0\}$?

Если да, то перейти к шагу 10,

если нет, то перейти к шагу 8.

8. Если $j' = 0$, то положить $i' = 0$, $y_{00} = y_{00} + 1$, $K = K + 1$,

иначе положить $i' = \arg \min_{i=1, \dots, m} \{c_{ji}^2\}$, положить $y_{j'i'} = 1$, $L = L + c_{j'i'}^2$.

9. Положить $i = i'$ и перейти к шагу 4.

10. Положить $y_{j'i_{\text{нач}}} = 1$, $L = L + c_{j'i_{\text{нач}}}^2$. Ответ получен.

Заметим, что на шаге 3, т.е. в начале работы алгоритма, происходит обязательный проход через место сбора. Данный шаг необходим, иначе алгоритм не гарантирует посещение фиктивных объектов. На шаге 10 происходит замыкание маршрута, т.е. выполнение ограничения (11) для $i_{\text{нач}}$.

Данный алгоритм подразумевает итеративную модификацию, в которой на каждой итерации построение маршрута начинается с нового центра. Здесь используется классическая схема итеративной модификации жадных алгоритмов, основанная на переборе всех возможных начальных точек. С учетом наличия двух типов объектов предложены два итеративных жадных алгоритма (*алгоритм 3* и *алгоритм 5*).

Алгоритм 3. Итеративный жадный алгоритм центров.

1. Задать $i_{\text{тек}} = 0$, $L^* = \infty$.

2. Выполнить *алгоритм 2*, считая для него $i_{\text{нач}} = i_{\text{тек}}$. В результате получено решение $L^{i_{\text{тек}}}$, $(x_{ij})^{i_{\text{тек}}}$, $(y_{ji})^{i_{\text{тек}}}$, $K^{i_{\text{тек}}}$.

3. Проверить: $L^{i_{\text{тек}}} < L^*$?

Если да, то обновить L^* : $L^* = L^{i_{\text{тек}}}$, положить $(x_{ij})^* = (x_{ij})^{i_{\text{тек}}}$, $(y_{ji})^* = (y_{ji})^{i_{\text{тек}}}$, $K^* = K^{i_{\text{тек}}}$ и перейти к шагу 4,

иначе перейти к шагу 4.

4. Проверить: $i_{\text{тек}} = m$?

Если да, то перейти к шагу 6,

Если нет, то перейти к шагу 5.

5. Положить $i_{\text{тек}} = i_{\text{тек}} + 1$ и перейти к шагу 2.

6. Ответ L^* , $(x_{ij})^*$, $(y_{ji})^*$, K^* получен.

Другие варианты жадного алгоритма и его итеративной модификации заключаются в начале построения маршрута в некотором целевом объекте. В этом случае обязательный проход через место сбора происходит в конце работы алгоритма.

Алгоритм 4. Жадный алгоритм целевых объектов.

1. Задать $L = 0$, $J = \{0, \dots, n\}$, $K = 0$, задать произвольный индекс $j_{\text{нач}} = \{0, \dots, n\}$.

2. Если $j_{\text{нач}} = 0$, то положить $i = 0$ и выполнить *алгоритм 1* и завершить *алгоритм 4*,

иначе перейти к шагу 3.

3. Положить $j = j_{\text{нач}}$.

4. Если $j = 0$, то положить $i' = 0$, $y_{00} = y_{00} + 1$, $K = K + 1$, иначе найти $i' = \arg \min_{i=1, \dots, m} \{c_{ji}^2\}$, положить $y_{ji'} = 1$, $L = L + c_{ji'}^2$.

5. Если $j \neq 0$, то обновить J : $J = J \setminus \{j\}$.

6. Проверить: $J = \{0\}$?

Если да, то перейти к шагу 9,

если нет, то перейти к шагу 7.

7. Если $i' = 0$, то найти $j' = \arg \min_{j \in J \setminus \{0\}} \{c_{i'j}^1\}$,

иначе найти $j' = \arg \min_{j \in J} \{c_{i'j}^1\}$.

8. Положить $x_{i'j'} = 1$, $L = L + c_{i'j'}^1$, $j = j'$ и перейти к шагу 4.

9. Положить $x_{i'0} = x_{i'0} + 1$, $L = L + c_{i'0}^1$, и $y_{00} = y_{00} + 1$, $K = K + 1$, $x_{0j_{\text{нач}}} = 1$, $L = L + c_{0j_{\text{нач}}}^1$. Ответ получен.

В данном алгоритме замыкание маршрута в $j_{\text{нач}}$ и обязательное посещение фиктивных объектов (выполнение ограничений (7) и (9)) происходит на шаге 9.

Также рассмотрим итеративную модификацию этого алгоритма.

Алгоритм 5. Итеративный жадный алгоритм целевых объектов.

1. Задать $j_{\text{тек}} = 0$, $L^* = \infty$.

2. Выполнить *алгоритм 4*, считая для него $j_{\text{нач}} = j_{\text{тек}}$. В результате получено решение $L^{i_{\text{тек}}}$, $(x_{ij})^{i_{\text{тек}}}$, $(y_{ji})^{i_{\text{тек}}}$, $K^{i_{\text{тек}}}$.

3. Проверить: $L^{i_{\text{тек}}} < L^*$?

Если да, то обновить L^* : $L^* = L^{i_{\text{тек}}}$, положить $(x_{ij})^* = (x_{ij})^{i_{\text{тек}}}$, $(y_{ji})^* = (y_{ji})^{i_{\text{тек}}}$, $K^* = K^{i_{\text{тек}}}$ и перейти к шагу 4,

иначе перейти к шагу 4.

4. Проверить: $j_{\text{тек}} = n$?

Если да, то перейти к шагу 6,

Если нет, то перейти к шагу 5.

5. Положить $j_{\text{тек}} = j_{\text{тек}} + 1$ и перейти к шагу 2.

6. Ответ L^* , $(x_{ij})^*$, $(y_{ji})^*$, K^* получен.

6. Адаптивный алгоритм

Другой возможной модификацией жадных алгоритмов являются адаптивные алгоритмы [14], которые основываются на переходе к вероятностной постановке задачи.

Задача

$$L(X, Y) \rightarrow \min_{X, Y \in \Omega}$$

заменяется задачей вида

$$M(L(X, Y)) \rightarrow \min_{\{X\}: X \in \Omega, \{Y\}: Y \in \Omega},$$

где $\{X\}$ и $\{Y\}$ – множества случайных величин X и Y с реализациями X и Y из множества Ω .

Здесь $X = [X^1, \dots, X^n]$ – матрица случайных величин размера $(m+1) \times (n+1)$, $X^i = (X_{i0}, X_{i1}, \dots, X_{in})$ – строка матрицы X , X_{ij} – случайная величина, $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, n$; $Y = [Y^1, \dots, Y^n]$ – матрица случайных величин размера $(n+1) \times (m+1)$, $Y^j = (Y_{j0}, Y_{j1}, \dots, Y_{jm})$ – строка матрицы Y , Y_{ji} – случайная величина, $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, n$.

Таблица 1. Ряды распределений

X_{ij}			Y_{ji}		
Возможные значения	1	0	Возможные значения	1	0
Вероятность	p_{ij}^1	$q_{ij}^1 = 1 - p_{ij}^1$	Вероятность	p_{ij}^2	$q_{ij}^2 = 1 - p_{ij}^2$

Замечание 1. Для дальнейшего конструирования адаптивного алгоритма необходим только факт выезда мобильного объекта (или же его отсутствие) из центра в фиктивный целевой объект, а также факт выезда из фиктивного целевого объекта в фиктивный центр, а не количество этих выездов. Таким образом, будем считать, что случайные величины X_{i0} , $i = 0, \dots, m$ и Y_{00} принимаю только два возможных значения: 0 и 1.

Итак, с учетом замечания случайные величины заданы рядами распределений, представленными в табл. 1.

Для каждого $j = 0, \dots, n$ вводятся полные группы событий A_{ij} и B_{ij} : событие A_{ij} заключается в том, что x_{ij} примет значение 1 для какого-либо $i = 0, \dots, m$, $B_{ji} - y_{ji}$ примет значение 1 для какого-либо $i = 0, \dots, m$, т.е.

$$(20) \quad \sum_{i=0}^m p_{ij}^1 = 1, \quad j = 0, \dots, n,$$

$$(21) \quad \sum_{i=0}^m p_{ji}^2 = 1, \quad j = 0, \dots, n.$$

С учетом того, что изначально нет никаких предположений о возможном маршруте, и мобильный объект к целевому объекту может приехать от любого центра с равной вероятностью, а также с учетом множества Ω и условий (20), (21), распределения могут быть заданы, например, табл. 2.

Таблица 2. Ряды распределений

X_{00}			Y_{00}		
Возможные значения	1	0	Возможные значения	1	0
Вероятность	$p_{00}^1 = 0$	$q_{00}^1 = 1$	Вероятность	$p_{00}^2 = 1$	$q_{00}^2 = 0$
$X_{i0}, i = 1, \dots, m$			$Y_{j0}, j = 1, \dots, n, Y_{0i}, i = 1, \dots, m$		
Возможные значения	1	0	Возможные значения	1	0
Вероятность	$p_{i0}^1 = \frac{1}{m}$	$q_{i0}^1 = \frac{m-1}{m}$	Вероятность	$p_{j0}^2 = 0,$ $p_{0i}^2 = 0$	$q_{j0}^2 = 1,$ $q_{0i}^2 = 1$
$X_{ij}, i = 0, \dots, m, j = 1, \dots, n$			$Y_{ji}, j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, m$		
Возможные значения	1	0	Возможные значения	1	0
Вероятность	$p_{ij}^1 = \frac{1}{m+1}$	$q_{ij}^1 = \frac{m}{m+1}$	Вероятность	$p_{ji}^2 = \frac{1}{m}$	$q_{ji}^2 = \frac{m-1}{m}$

Другими словами матрицы вероятностей P^1, P^2 для возможных позитивных значений будут выглядеть следующим образом

$$P^1 = (p_{ij}^1)_{(m+1) \times (n+1)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m+1} & \cdots & \frac{1}{m+1} \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{m+1} & \cdots & \frac{1}{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{m+1} & \cdots & \frac{1}{m+1} \end{pmatrix},$$

$$P^2 = (p_{ij}^2)_{(n+1) \times (m+1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & \cdots & \frac{1}{m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{m} & \cdots & \frac{1}{m} \end{pmatrix}.$$

В основе адаптивного алгоритма лежат этапы I–III [13]:

I. Задание движения во множестве случайных величин X_{ij}, Y_{ji} .

II. Решение неравенства — условия локального улучшения (УЛУ)

$$M \left[L((X_{ij})^{N+1}, (Y_{ji})^{N+1}) - L((X_{ij})^N, (Y_{ji})^N) \right] \leq 0.$$

III. Пересчет вероятностей $p_{ij}^1, p_{ji}^2, i = 0, \dots, m, j = 0, \dots, n$ в соответствии с результатом УЛУ.

Данный алгоритм является итеративным, и величины $(X_{ij})^{N+1}, (Y_{ji})^{N+1}$ на $(N + 1)$ -й итерации по УЛУ должны выбираться так, чтобы значение целевой функции в них было лучше, чем в предыдущих точках на предыдущей итерации.

Необходимое теоретическое описание каждого этапа представлено в [13]. Здесь приведем лишь необходимые выкладки и формулы.

Движение во множестве случайных величин на этапе I зададим следующим образом

$$(X)^{N+1} = \bar{u}(X)^N + u(\chi)^{N+1},$$

$$(Y)^{N+1} = \bar{v}(Y)^N + v(\gamma)^{N+1}.$$

Здесь $(\chi)^{N+1}$ и $(\gamma)^{N+1}$ — неизвестные случайные величины, задающие направление движения на $(N + 1)$ -м шаге. При этом $(\chi)^{N+1} \in X, (\gamma)^{N+1} \in Y$ и χ_{ij} и γ_{ji} имеют ряды распределения, заданные табл. 3.

Таблица 3. Ряды распределения

$(\chi)_{ij}$			$(\gamma)_{ji}$		
Возможные значения	1	0	Возможные значения	1	0
Вероятность	π_{ij}^1	$1 - \pi_{ij}^1$	Вероятность	π_{ji}^2	$1 - \pi_{ji}^2$

Таблица 4. Ряды распределения

u			v		
Возможные значения	1	0	Возможные значения	1	0
Вероятность	p_u	$q_u = 1 - p_u$	Вероятность	p_v	$q_v = 1 - p_v$

Для случайных величин u и v ряды распределения представлены табл. 4.

Формулы пересчета вероятностей на этапе III с учетом формул движения будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} (p_{ij}^1)^{N+1} &= q_u(p_{ij}^1)^N + p_u(\pi_{ij}^1)^{N+1}, \quad i = 0, \dots, m, \quad j = 0, \dots, n, \\ (p_{ji}^2)^{N+1} &= q_v(p_{ji}^2)^N + p_v(\pi_{ji}^2)^{N+1}, \quad i = 0, \dots, m, \quad j = 0, \dots, n. \end{aligned}$$

Вероятности π_{ij}^1 и π_{ji}^2 находятся из УЛУ на этапе II.

Так как целая функция (6) представима в виде суммы двух функций по переменным x и y , запишем УЛУ этапа II в следующем виде

$$M\left[L_X((X_{ij})^{N+1}) - L_X((X_{ij})^N)\right] + M\left[L_Y((Y_{ji})^{N+1}) - L_Y((Y_{ji})^N)\right] \leq 0.$$

Как показано в [13], УЛУ может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} M\left[L_X((\chi_{ij})^{N+1}) - L_X((X_{ij})^N)\right] + M\left[L_Y((\gamma_{ji})^{N+1}) - L_Y((Y_{ji})^N)\right] = \\ = M\left[L_X((\chi_{ij})^{N+1})\right] - M\left[L_X((X_{ij})^N)\right] + \\ + M\left[L_Y((\gamma_{ji})^{N+1})\right] - M\left[L_Y((Y_{ji})^N)\right] \leq 0. \end{aligned}$$

В качестве базового алгоритма для вероятностной модификации будем использовать *алгоритм 4*. То есть в ходе работы алгоритма необходимо сначала найти переменную $y_{j'j'} = 1$, а затем – переменную $x_{i'j'} = 1$.

Неравенство УЛУ имеет бесконечное множество решений. Воспользуемся идеей алгоритма покоординатного спуска.

Предположим, что на текущей $(N + 1)$ -й итерации алгоритма на текущем шаге рассматривается l -я строка матриц (c_{ji}^2) и γ , т.е. рассматривается неизвестная случайная величина γ^l . Будем считать, что $(\pi_{ji}^2)^{N+1} = (p_{ji}^2)^N$, т.е. случайные величины $(\gamma_{ji})^{N+1}$ и $(Y_{ji})^N$ имеют одинаковое распределение, $i = 0, \dots, m, j \in J, j \neq l$. Будем решать неравенство относительно неизвестной величины γ^l .

$$\begin{aligned} M\left[L_X((\chi_{ij})^{N+1})\right] - M\left[L_X((X_{ij})^N)\right] + M\left[L_Y((\gamma_{ji})^{N+1})\right] - M\left[L_Y((Y_{ji})^N)\right] = \\ = M\left[L_X((\chi_{ij})^{N+1})\right] - M\left[L_X((X_{ij})^N)\right] + \\ + M\left[\sum_{i=0}^m c_{li}^2(\gamma_{li})^{N+1} + \sum_{i=0}^m \sum_{j \in J, j \neq l} c_{ji}^2(\gamma_{ji})^{N+1}\right] - \\ - M\left[\sum_{i=0}^m c_{li}^2(Y_{li})^N + \sum_{i=0}^m \sum_{j \in J, j \neq l} c_{ji}^2(Y_{ji})^N\right] \leq 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\sum_{i=0}^m p_{li}^2 = 1$, зафиксируем реализацию случайной величины Y^l . Пусть $Y^l = e_{i_1}$, где e_{i_1} — единичный вектор размерности $(n+1)$ с единицей на i_1 -м месте, т.е. $y_{li_1} = 1$, $y_{lj} = 0$, $i \neq i_1$, $j \neq l$. Тогда выражение $M \left[\sum_{i=0}^m c_{li}^2 (Y_{li})^N + \sum_{i=0}^m \sum_{j \in J, j \neq l} c_{ji}^2 (Y_{ji})^N \right]$ с учетом того, что $Y : Y \in \Omega$, примет вид

$$c_{li_1}^2 + M_{Y|Y^l=e_{i_1}} \left[\sum_{i=0}^m \sum_{j \in J, j \neq l} c_{ji}^2 (Y_{ji})^N \right] = c_{li_1}^2 + \sum_{i=0}^m \sum_{j \in J, j \neq l} c_{ji}^2 (p_{ji}^2)^N.$$

Аналогично, при какой-либо реализации γ^l , равной e_{i_2} , с учетом $\gamma \in Y : Y \in \Omega$ и $(\pi_{ji}^2)^{N+1} = (p_{ji}^2)^N$, $i = 0, \dots, m$, $j \in J$, $j \neq l$ выражение $M \left[\sum_{i=0}^m c_{li}^2 (\gamma_{li})^{N+1} + \sum_{i=0}^m \sum_{j \in J, j \neq l} c_{ji}^2 (\gamma_{ji})^{N+1} \right]$ примет вид

$$c_{li_2}^2 + \sum_{i=0}^m \sum_{j \in J, j \neq l} c_{ji}^2 (p_{ji}^2)^N.$$

Тогда в неравенстве УЛУ выражение $M \left[L_Y((\gamma_{ji})^{N+1}) \right] - M \left[L_Y((Y_{ji})^N) \right]$ примет вид

$$(22) \quad \left(c_{li_2}^2 + \sum_{i=0}^m \sum_{j \in J, j \neq l} c_{ji}^2 (p_{ji}^2)^N \right) - \left(c_{li_1}^2 + \sum_{i=0}^m \sum_{j \in J, j \neq l} c_{ji}^2 (p_{ji}^2)^N \right) = c_{li_2}^2 - c_{li_1}^2.$$

Далее рассмотрим оставшуюся часть неравенства УЛУ.

Итак, пусть теперь рассматривается i_2 -я строка матриц (c_{ij}^1) и χ , т.е. рассматривается неизвестная случайная величина χ^{i_2} . Будем считать, что $(\pi_{ij}^1)^{N+1} = (p_{ij}^1)^N$, т.е. случайные величины $(\chi_{ij})^{N+1}$ и $(X_{ij})^N$ имеют одинаковое распределение, $i = 0, \dots, m$, $i \neq i_2$, $j \in J$. Будем решать неравенство относительно неизвестной величины χ^{i_2} .

Пусть реализация случайной строки X^{i_2} зафиксирована, например, на предыдущей итерации алгоритма, т.е. $X^{i_2} = e_{l_1, \dots, l_L}$, где e_{l_1, \dots, l_L} — вектор нулей размерности $(n+1)$ с единицами на местах l_1, \dots, l_L . Тогда $x_{i_2 l_1} = 1, \dots, x_{i_2 l_L} = 1$. Тогда математическое ожидание $M \left[L_X((X_{ij})^N) \right] =$

$$= M \left[\sum_{j \in J} c_{i_2 j}^1 (X_{i_2 j})^N + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_2}}^m \sum_{j \in J} c_{ij}^1 (X_{ij})^N \right] \text{ с учетом того, что } X : X \in \Omega, \text{ а}$$

именно с учетом ограничения (7), примет вид

$$\begin{aligned}
& c_{i_2 l_1}^1 + \dots + c_{i_2 l_L}^1 + M_{X|X^{i_2}=e_{l_1, \dots, l_L}} \left[\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_2}}^m \sum_{j \in J, j \neq l_1, \dots, j \neq l_L} c_{ij}^1 (X_{ij})^N \right] = \\
& = c_{i_2 l_1}^1 + \dots + c_{i_2 l_L}^1 + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_2}}^m \sum_{j \in J, j \neq l_1, \dots, j \neq l_L} c_{ij}^1 (p_{ij}^1)^N = \\
& = c_{i_2 l_1}^1 + \dots + c_{i_2 l_L}^1 + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_2}}^m \sum_{j \in J} c_{ij}^1 (p_{ij}^1)^N - \\
& - \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_2}}^m c_{i l_1}^1 (p_{i l_1}^1)^N + \dots + c_{i l_L}^1 (p_{i l_L}^1)^N \right).
\end{aligned}$$

Заметим, что если некоторый индекс $l_k = 0$, то его можно не исключать из суммирования в математическом ожидании.

Заметим, что на одной итерации может быть выбрано несколько переменных x_{ij} , $j \in J$, равных единице. Но на одном шаге алгоритма такая переменная может быть только одна. Итак, на текущем шаге алгоритма выбирается одно значение $x_{i_2 q} = 1$, т.е. фиксируется промежуточная реализация χ^{i_2} , равная e_q . Тогда с учетом $\chi \in X: X \in \Omega$ и $(\pi_{ij}^1)^{N+1} = (p_{ij}^1)^N$, $i = 0, \dots, m$, $i \neq i_2$,

$$j \in J, \text{ выражение } M[L_X((\chi_{ij})^{N+1})] = M \left[\sum_{j \in J} c_{i_2 j}^1 (\chi_{hj})^{N+1} + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_2}}^m \sum_{j \in J} c_{ij}^1 (\chi_{ij})^{N+1} \right]$$

примет вид

$$c_{i_2 q}^1 + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_2}}^m \sum_{j \in J, j \neq q} c_{ij}^1 (p_{ij}^1)^N = c_{i_2 q}^1 + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_2}}^m \sum_{j \in J} c_{ij}^1 (p_{ij}^1)^N - \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_2}}^m c_{i q}^1 (p_{i q}^1)^N \right).$$

Тогда в неравенстве УЛУ выражение $M[L_X((\chi_{ij})^{N+1})] - M[L_X((X_{ij})^N)]$ примет вид

$$\begin{aligned}
& \left[c_{i_2 q}^1 + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_2}}^m \sum_{j \in J} c_{ij}^1 (p_{ij}^1)^N - \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_2}}^m c_{i q}^1 (p_{i q}^1)^N \right) \right] - \\
& - \left[c_{i_2 l_1}^1 + \dots + c_{i_2 l_L}^1 + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_2}}^m \sum_{j \in J} c_{ij}^1 (p_{ij}^1)^N - \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_2}}^m c_{i l_1}^1 (p_{i l_1}^1)^N + \dots + c_{i l_L}^1 (p_{i l_L}^1)^N \right) \right] =
\end{aligned}$$

$$= \left[c_{i_2q}^1 - \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_2}}^m c_{i_2q}^1 (p_{i_2q}^1)^N \right) \right] - \\ - \left[c_{i_2l_1}^1 + \dots + c_{i_2l_L}^1 - \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_2}}^m c_{il_1}^1 (p_{il_1}^1)^N + \dots + c_{il_L}^1 (p_{il_L}^1)^N \right) \right] \leq 0.$$

Таким образом, с учетом (22) УЛУ примет вид

$$(23) \quad c_{i_2}^2 - c_{l_{i_1}}^2 + \left[c_{i_2q}^1 - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_2}}^m c_{i_2q}^1 (p_{i_2q}^1)^N \right] - \\ - \left[c_{i_2l_1}^1 + \dots + c_{i_2l_L}^1 + \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_2}}^m c_{il_1}^1 (p_{il_1}^1)^N + \dots + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_2}}^m c_{il_L}^1 (p_{il_L}^1)^N \right) \right] \leq 0$$

или

$$(24) \quad \left[c_{i_2}^2 + c_{i_2q}^1 - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_2}}^m c_{i_2q}^1 (p_{i_2q}^1)^N \right] - \\ - \left[c_{l_{i_1}}^2 + c_{i_2l_1}^1 + \dots + c_{i_2l_L}^1 + \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_2}}^m c_{il_1}^1 (p_{il_1}^1)^N + \dots + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_2}}^m c_{il_L}^1 (p_{il_L}^1)^N \right) \right] \leq 0.$$

Итак, если реализация случайной величины Y^l зафиксирована на предыдущей итерации алгоритма: $Y^l = e_{i_1}$, то для гарантированного выполнения неравенств УЛУ (23) необходимо выбирать индексы i_2 (с учетом того, что на предыдущей итерации X^{i_2} зафиксирована: $X^{i_2} = e_{l_1, \dots, l_L}$) и q так, чтобы

величины $c_{i_2}^2$ и $\left[c_{i_2q}^1 - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_2}}^m c_{i_2q}^1 (p_{i_2q}^1)^N \right]$ были минимальны.

В результате неизвестные величины $(\gamma)^{N+1}$ находится следующим образом:

$$(\gamma_{l\mu})^{N+1} : \pi_{l\mu}^2 = 1, \text{ если } \min_{i=0, \dots, m} \{c_{li}^2\} = c_{l\mu}^2, \\ (\gamma_{li})^{N+1} : \pi_{li}^2 = 0, \quad i = 0, \dots, m, i \neq \mu, \\ (\gamma^j)^{N+1} = (Y^j)^{N+1}.$$

Пересчет вероятностей при этом на этапе III происходит по формулам

$$(25) \quad (p_{l\mu}^2)^{N+1} = q_\nu (p_{l\mu}^2)^N + p_\nu,$$

$$(26) \quad (p_{li}^2)^{N+1} = q_\nu (p_{li}^2)^N, \quad i = 0, \dots, m, \quad i \neq \mu,$$

$$(27) \quad (p_{ji}^2)^{N+1} = (p_{ji}^2)^N, \quad i = 0, \dots, m, \quad i \in J, \quad j \neq l.$$

Величина $(\chi)^{N+1}$ находится следующим образом:

$$\begin{aligned} (\chi_{\mu\nu})^{N+1} : \pi_{\mu\nu}^1 = 1, \text{ если } \min_{j \in J} \left\{ c_{\mu j}^1 - \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq \mu}}^m c_{ij}^1 (p_{ij}^1)^N \right) \right\} = \\ = c_{\mu\nu}^1 - \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq \mu}}^m c_{i\nu}^1 (p_{i\nu}^1)^N \right), \end{aligned}$$

$$(\chi_{i\nu})^{N+1} : \pi_{i\nu}^1 = 0, \quad i = 0, \dots, m, \quad i \neq \mu,$$

$$(\chi_{ij})^{N+1} = (X^{ij})^{N+1}, \quad i = 0, \dots, m, \quad j \in J, \quad j \neq \nu.$$

Формулы для пересчета вероятностей

$$(28) \quad (p_{\mu\nu}^1)^{N+1} = q_u (p_{\mu\nu}^1)^N + p_u,$$

$$(29) \quad (p_{i\nu}^1)^{N+1} = q_u (p_{i\nu}^1)^N, \quad i = 0, \dots, m, \quad i \neq \mu,$$

$$(30) \quad (p_{ij}^1)^{N+1} = (p_{ij}^1)^N, \quad i = 0, \dots, m, \quad i \in J, \quad j \neq \nu.$$

В выборе минимального элемента по матрице (c_{ij}^2) не участвуют вероятности, поэтому пересчет матрицы вероятностей (p_{ij}^2) по формулам (25)–(27) не требуется для работы алгоритма.

Полученные вероятности (28)–(30) необходимо пересчитать по формуле безусловных вероятностей, исходя из предположения, что все гипотезы изначально распределены равномерно

$$(31) \quad (\bar{p})^{N+1} = \frac{N}{N+1} \left((\bar{p})^N + \frac{1}{N} (p)^{N+1} \right).$$

Здесь $(\bar{p})^{N+1}$ – безусловная вероятность, $(p)^{N+1}$ – условная вероятность, полученная по формулам (28)–(30).

Таким образом, на каждом этапе происходит подстройка или адаптация вероятностей на основе предыдущих итераций алгоритма.

Таким образом, предложенное решение неравенства УЛУ позволяет модифицировать шаг 6 алгоритма 4 следующим образом:

при заданном i' найти

$$j' = \arg \min_{j \in J} \left\{ c_{i'j}^1 - \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i'}}^m c_{ij}^1 (p_{ij}^1)^N \right) \right\}.$$

Далее представлен адаптивный алгоритм решения поставленной задачи.

Алгоритм 6. Адаптивный алгоритм.

1. Задать рекордное значение $L^* = \infty$. Задать максимальное число итераций N_{\max} . Задать текущий номер итерации $N = 1$. Задать начальное распределение вероятностей $(p_{ij}^1)^N$ по табл. 2. Задать p_u .

2. Задать $L = 0, J = \{0, \dots, n\}, K = 0, j = 0$.

3. Если $j = 0$, то положить $i' = 0, y_{00} = y_{00} + 1, K = K + 1$,
иначе найти $i' = \arg \min_{i=1, \dots, m} \{c_{ji}^2\}$, положить $y_{ji'} = 1, L = L + c_{ji'}^2$.

4. Если $j \neq 0$, то обновить $J: J = J \setminus \{j\}$.

5. Проверить: $J = \{0\}$?

Если да, то перейти к шагу 10,

если нет, то перейти к шагу 9.

6. Если $i' = 0$, то найти $j' = \arg \min_{j \in J \setminus \{0\}} \left\{ c_{i'j}^1 - \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i'}}^m c_{ij}^1 (p_{ij}^1)^N \right) \right\}$,

иначе найти $j' = \arg \min_{j \in J} \left\{ c_{i'j}^1 - \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i'}}^m c_{ij}^1 (p_{ij}^1)^N \right) \right\}$.

7. Обновить вероятности по формулам (28)–(30).

8. Обновить безусловные вероятности по формуле (31).

9. Положить $x_{i'j'} = 1, L = L + c_{i'j'}^1, j = j'$ и перейти к шагу 3.

10. Положить $x_{i'0} = x_{i'0} + 1, L = L + c_{i'0}^1, y_{00} = y_{00} + 1, K = K + 1, x_{0j_{\text{нач}}} = 1, L = L + c_{0j_{\text{нач}}}^1$. В результате получено решение на текущей итерации $L^N, (x_{ij})^N, (y_{ji})^N, K^N$.

11. Проверить: $L^N < L^*$?

Если да, то обновить $L^*: L^* = L^N$, положить $(x_{ij})^* = x_{ij}^N, (y_{ji})^* = y_{ji}^N, K^* = K^N$ и перейти к шагу 12,

иначе перейти к шагу 12.

12. Проверить $N = N_{\max}$?

Если да, то перейти к шагу 14,

иначе перейти к шагу 13.

13. Положить $N = N + 1$ и перейти к шагу 2.

14. Ответ $L^*, (x_{ij})^*, (y_{ji})^*, K^*$ получен.

7. Вычислительный эксперимент

Все предложенные алгоритмы были программно реализованы в среде разработки Visual Studio 2019 на языке C# на ЭВМ с процессором Intel Pentium N4200, частотой 1,1 ГГц, оперативной памятью 4 Гб, 64-разрядной операци-

онной системой. С использованием программной реализации был проведен вычислительный эксперимент для сравнения результатов работы алгоритмов.

Для эксперимента были сгенерированы матрицы затрат различных размерностей по 500 шт. для каждого случая. В качестве затрат были взяты расстояния между объектами. Размерности задач выбраны исходя из практических соображений о том, что количество центров зачастую намного меньше количества целевых объектов. В последующих таблицах, отражающих результаты, приведены средние значения целевой функции и количества посещений места сбора — K . Заметим, что в таблицах представлены размерности без учета фиктивных объектов типов А и В.

Так как *алгоритмы 2 и 4* выполняются как *алгоритм 1* в случае нулевых начальных индексов, то в эксперименте для них выбирались начальные индексы, равные 1. Так же отметим, что результаты для самого *алгоритма 1* в таблицах не приведены, так как они схожи с результатами *алгоритма 2*.

В табл. 5 представлены значения целевой функции L^* , а также полученное значение K^* . Для адаптивного *алгоритма 6* выбраны следующие параметры: $N_{\max} = 100$, $p_i = 0, 1$.

В табл. 5 полужирным шрифтом выделены лучшие (или два близких) значения целевой функции для каждой размерности. Заметим, что для большинства тестовых данных лучшие результаты получены адаптивным алгоритмом, также хорошие результаты показывает *алгоритм 5* — итеративный алгоритм по целевым объектам. Стоит отметить, что при увеличении количества целевых объектов (тип А) значение целевой функции увеличивается. Это очевидно, так как увеличивается количество мест посещения для мобильных объектов. При увеличении количества центров (тип В) значение целевой функции уменьшается, что объясняется большей вариативностью при возврате от целевых объектов при построении маршрутов мобильными объектами. С точки зрения сравнения неитеративных *алгоритмов 2 и 4* лучшие результаты показывает *алгоритм 2*. Напротив, его итеративная модификация (*алгоритм 3*) работает хуже итеративного *алгоритма 5*. Это связано с большей вариативностью выбора в переборе целевых объектов, чем в переборе центров.

Заметим, что в данной статье ставится цель сравнения жадных алгоритмов с адаптивным и проведения соответствующего анализа. Однако, опираясь на результаты статьи [10], в которой использовались схожие данные для тестирования точного алгоритма, можно сделать вывод, что адаптивный алгоритм дает значения от 2 до 15% хуже оптимального в зависимости от размерности задачи.

В [15] доказано, что в случае, когда затраты заданы как расстояния, оптимальное значение K равно 1. Это подтверждается проведенным экспериментом. В табл. 5 наименьшие значения K соответствуют наименьшим значениям целевой функции. Также был проведен дополнительный регрессионный

Таблица 5. Значение целевой функции и количество мобильных объектов

тип В × тип А	Алгоритм 2		Алгоритм 3 (итер.)		Алгоритм 4		Алгоритм 5 (итер.)		Алгоритм 6 (адапт.)	
	L^*	K^*	L^*	K^*	L^*	K^*	L^*	K^*	L^*	K^*
1 × 10	1106	1,932	1106	1,932	1155	1,87	1071	1,298	1086	1
1 × 30	3188	3,67	3188	3,67	3255	3,582	3159	2,716	3052	1,002
1 × 50	5261	5,478	5261	5,478	5334	5,398	5237	4,502	4989	1,006
1 × 100	10513	10,012	10513	10,012	10591	9,932	10496	9,038	9891	1,012
2 × 10	723	1,004	711	1,004	778	1,006	709	1,001	768	1,034
2 × 30	1960	1,005	1956	1,002	2043	1,004	1954	1,001	2033	1,116
2 × 50	3211	1,004	3207	1,002	3303	1,01	3206	1,001	3298	1,258
2 × 100	6356	1,007	6354	1,003	6460	1,02	6353	1,003	6461	1,526
5 × 10	677	2,092	652	2,092	701	1,884	618	1,444	612	1,078
5 × 30	1516	1,798	1488	1,798	1592	2,334	1476	1,484	1447	1,11
5 × 50	2802	3,88	2770	3,88	2854	3,8	2745	3,21	2657	1,37
5 × 100	5447	2,02	5439	2,02	5547	2,024	5426	1,384	5428	1,816
8 × 10	598	1,512	583	1,512	644	1,648	564	1,162	553	1,042
8 × 30	1554	3,508	1550	3,508	1643	3,522	1529	2,626	1425	1,202
8 × 50	2383	2,726	2368	2,726	2439	2,878	2336	2,146	2281	1,28
8 × 100	5097	5,268	5041	5,268	5117	5,236	4981	4,13	4740	1,636
10 × 10	564	1,644	545	1,644	598	1,678	513	1,17	510	1,04
10 × 30	1282	3,08	1277	3,08	1349	3,022	1233	2,08	1168	1,126
10 × 50	2287	2,498	2283	2,498	2362	2,62	2259	1,804	2215	1,214
10 × 100	3465	6,13	3384	6,13	3443	5,512	3331	4,898	3255	1,566

анализ с целью выявления линейной зависимости между K и значениями целевой функции. Оценивалась модель по трем наборам данных: первая модель строилась по значениям всех алгоритмов для одной размерности, вторая модель строилась для фиксированного количества объектов типа В по результатам адаптивного алгоритма, третья модель — для фиксированного количества объектов типа А по результатам адаптивного алгоритма. В табл. 6 приведены коэффициенты детерминации полученных моделей.

Отметим, что для первого набора данных можно увидеть сильно выраженную линейную зависимость в большинстве случаев (коэффициент детерминации близок к 1), однако есть размерность, для которой линейная зависимость не подтверждена (эти случаи выделены в таблице полужирным шрифтом). Второй набор подтвердил линейную зависимость K от значений целевой функции. В третьем случае коэффициент детерминации варьируется от 0,56 до 0,66, что нельзя считать подтверждением линейной зависимости.

Исходя из данной таблицы, можно сделать предположение о линейной (или близкой к линейной) зависимости значения K от значений целевой функции. Однако для детального изучения данного вопроса требуется дополнительное исследование не в рамках представленной статьи.

Таблица 6. Коэффициенты детерминации

тип В × тип А	Коэффициент детерминации модели 1	тип В × тип А	Коэффициент детерминации модели 2	тип В × тип А	Коэффициент детерминации модели 3	
1 × 10	0,429364	1 × 10	0,98947	1 × 10	0,561744	
1 × 30	0,840595	1 × 30		2 × 10		
1 × 50	0,938962	1 × 50		5 × 10		
1 × 100	0,984294	1 × 100		8 × 10		
2 × 10	0,359795	2 × 10	0,995703	10 × 10	0,684219	
2 × 30	0,311298	2 × 30		1 × 30		
2 × 50	0,369441	2 × 50		2 × 30		
2 × 100	0,997976	2 × 100		5 × 30		
5 × 10	0,599609	5 × 10	0,984412	8 × 30	0,666925	
5 × 30	0,91009	5 × 30		10 × 30		
5 × 50	0,788263	5 × 50		1 × 50		
5 × 100	0,219113	5 × 100		2 × 50		
8 × 10	0,789282	8 × 10	5 × 50	0,653224	0,666925	
8 × 30	0,775139	8 × 30	0,994379			8 × 50
8 × 50	0,854995	8 × 50	8 × 100			10 × 50
8 × 100	0,964218	8 × 100	10 × 100			1 × 100
10 × 10	0,759837	10 × 10	0,904579	2 × 100	0,653224	
10 × 30	0,797575	10 × 30		5 × 100		
10 × 50	0,729778	10 × 50		8 × 100		
10 × 100	0,751988	10 × 100		10 × 100		

Таблица 7. Сравнение итеративных алгоритмов 3, 5 и 6

тип В × тип А	Алгоритм 3 (итер.)	Алгоритм 5 (итер.)	Алгоритм 6 (адапт.)	Алгоритм 6 (адапт.) 100 ит.
10 × 10	545	513	523	510
30 × 30	936	892	856	844
50 × 50	1300	1223	1159	1152
100 × 100	1647	1547	1501	1501

В табл. 5 для адаптивного алгоритма было выбрано фиксированное значение $N_{\max} = 100$ для всех размерностей. Однако в жадных итеративных алгоритмах количество итераций меняется в зависимости от размерности задачи. Было проведено сравнение трех итеративных алгоритмов при равном числе итераций в каждом из них. Для этого были сгенерированы дополнительные матрицы затрат размерностей 30×30 , 50×50 , 100×100 . Результаты представлены в табл. 7, в которой есть два столбца с адаптивным алгоритмом 6: в первом случае число итераций выбиралось равным размерности задачи, т.е. совпадало с количеством итераций алгоритмов 3 и 5, во втором — $N_{\max} = 100$.

Видно, что алгоритм 3 (итеративный алгоритм центров) работает хуже алгоритма 5 (итеративный алгоритм целевых объектов). Адаптивный ал-

Таблица 8. Сравнение итеративных *алгоритмов 5 и 6*

тип В × тип А	<i>Алгоритм 5</i> (итер.)	<i>Алгоритм 6</i> (итер.)	<i>Алгоритм 6</i> (адапт.) 100 ит.
1 × 10	1071	1086	1086
1 × 30	3159	3052	3052
1 × 50	5237	4989	4989
1 × 100	10496	9891	9891
2 × 10	709	768	768
2 × 30	1954	2033	2003
2 × 50	3206	3298	3298
2 × 100	6353	6461	6461
5 × 10	618	616	612
5 × 30	1476	1451	1447
5 × 50	2745	2658	2657
5 × 100	5426	5428	5428
8 × 10	564	564	553
8 × 30	1529	1431	1425
8 × 50	2336	2283	2281
8 × 100	4981	4740	4740
10 × 10	513	523	510
10 × 30	1233	1175	1168
10 × 50	2259	2217	2215
10 × 100	3331	3255	3255

алгоритм 6 дает лучший или схожий результат при одинаковом с другими алгоритмами числе итераций, а при их увеличении улучшает собственный результат.

Аналогичное сравнение представлено в табл. 8. Здесь адаптивный алгоритм сравнивается с *алгоритмом 5* при равном числе итераций в каждом из них. Также здесь представлены данные из табл. 5 с $N_{\max} = 100$.

Только в задачах с количеством объектов типа В, равным 2, *алгоритм 5* дает результаты значительно лучше, чем адаптивный *алгоритм 6*.

В табл. 9 представлены результаты по времени работы алгоритмов в миллисекундах.

Очевидно, что *алгоритмы 2 и 4* работают очень быстро. Итеративный *алгоритм 3* перебора центров также работает быстро, при этом время его работы в большей степени зависит от количества центров. Время работы итеративного *алгоритма 5* зависит от количества целевых объектов, поэтому оно существенно больше времени работы *алгоритма 3*, так как количество целевых объектов превосходит количество центров. Адаптивный *алгоритм 6* работает намного дольше всех остальных алгоритмов. Это связано и с заданным количеством итераций, и с пересчетом вероятностей и, главное, с необходимостью дополнительных вычислений сумм внутри поиска минимума на шаге 6. Дополнительные модификации алгоритмов подсчета и пересчета данных сумм могут существенно улучшить время его работы.

Таблица 9. Время работы алгоритмов

тип В × тип А	Алгоритм 2	Алгоритм 3 (итер.)	Алгоритм 4	Алгоритм 5 (итер.)	Алгоритм 6 (адапт.)
1 × 10	< 0,001	< 0,001	< 0,001	0,002	23,19
1 × 30	< 0,001	< 0,001	< 0,001	1,006	51,738
1 × 50	0,012	0,001	0,002	4,37	74,648
1 × 100	< 0,001	0,002	< 0,001	28,63	95,238
2 × 10	< 0,001	< 0,001	< 0,001	0,003	22,236
2 × 30	< 0,001	< 0,001	< 0,001	1,002	44,26
2 × 50	< 0,001	0,002	0,001	4,324	66,134
2 × 100	0,004	0,014	0,002	27,744	119,342
5 × 10	< 0,001	< 0,001	< 0,001	0,004	23,758
5 × 30	< 0,001	< 0,001	0,001	1,006	49,384
5 × 50	< 0,001	0,004	< 0,001	4,67	81,254
5 × 100	< 0,001	1	< 0,001	30,418	185,048
8 × 10	< 0,001	0,001	< 0,001	0,002	25,652
8 × 30	< 0,001	0,001	< 0,001	1,036	63,858
8 × 50	< 0,001	0,01	< 0,001	4,766	95,93
8 × 100	< 0,001	2,002	< 0,001	29,062	217,754
10 × 10	< 0,001	< 0,001	< 0,001	0,004	25,658
10 × 30	< 0,001	0,001	< 0,001	1,038	56,93
10 × 50	< 0,001	0,144	< 0,001	4,876	97,696
10 × 100	< 0,001	2,83	< 0,001	30,914	238,14

Таблица 10. Влияние параметра p_u

p_u	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
5 × 30	1447	1457	1466	1473	1479	1485	1490	1494	1498	1503
p_u	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
5 × 30	1438	1439	1439	1441	1441	1442	1444	1445	1446	1447
p_u	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,01
5 × 30	1485	1460	1450	1445	1443	1441	1439	1438	1439	1438

Таблица 11. Влияние количества итераций

N_{\max}	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
5 × 30	1495	1466	1454	1448	1445	1442	1440	1439	1438	1438
N_{\max}	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
5 × 30	1438	1437	1436							

Важным преимуществом адаптивного алгоритма 6 по сравнению с алгоритмами 2–5 является наличие настраиваемых параметров: p_u и N_{\max} . Их грамотный выбор может улучшить поисковые возможности алгоритма.

В табл. 10 и 11 представлены результаты по настройке указанных параметров. В табл. 10 $N_{\max} = 100$.

В ходе первого эксперимента с параметром p_u его значения варьировались от 0,1 до 1. Было выявлено, что результаты улучшаются при уменьшении значений параметра. Поэтому в следующем эксперименте были взяты значения от 0,01 до 0,1. В нем также получилось, что результаты лучше при малых значениях. Однако в третьем эксперименте, со значениями от 0,001 до 0,01, данная тенденция не сохранилась, и с последующим уменьшением значения параметра p_u значения целевой функции стали расти. Таким образом, было выявлено оптимальное значения параметра p_u , равное 0,01. Стоит сделать оговорку, что данное значение параметра является оптимальным именно для размерности 5×30 .

Далее был проведен эксперимент по подбору максимального значения для количества итераций N_{\max} при заданном значении $p_u = 0,01$.

Так как алгоритм зависит от значений вероятности, которые изменяются и настраиваются от итерации к итерации, то логично предположить, что при увеличении количества итераций, результаты будут улучшаться. Это предположение подтвердилось в двух проведенных экспериментах. Заметим, что при увеличении максимального числа итераций от 10 до 100 происходит заметное улучшение результатов работы алгоритма, но при дальнейшем увеличении этого числа от 100 до 1000 результаты изменились на 2 единицы. При дальнейшем увеличении до 5000 значение целевой функции уменьшилось еще на 1, т.е. стало 1435. Таким образом, можно сделать вывод, что увеличение числа итераций более 100 не приводит к существенному улучшению результатов работы алгоритма.

Итак, по результатам проведенных экспериментов получены следующие обобщенные выводы:

1. Неитеративные жадные алгоритмы работают быстро, но их результаты хуже остальных алгоритмов.

2. Итеративные жадные алгоритмы улучшают результаты неитеративных алгоритмов, но выполняются дольше. Итеративный алгоритм целевых объектов дает среднее значение целевой функции меньше, чем итеративный алгоритм центров. Причем это подтверждается и когда целевых объектов больше центров (т.е. количество итераций алгоритмов разное), и когда число тех и других объектов совпадает (т.е. количество итераций одинаковое).

3. Адаптивный алгоритм дает значение целевой функции меньше других алгоритмов, однако время его работы значительно больше. Это опять же подтверждается для разного числа итераций в адаптивном алгоритме по сравнению с итеративными жадными.

4. Адаптивный алгоритм зависит от параметров, их грамотная настройка позволяет улучшить его работу.

5. Сделано предположение о линейной зависимости значения K от значений целевой функции.

8. Заключение

В данной статье представлена задача маршрутизации транспортных средств с несколькими центрами и с чередованием объектов. Построены математические модели с двумя блоками переменных для задач с единым местом сбора и без. Для задачи с единым местом сбора предложены жадные, итеративные жадные и адаптивный алгоритмы решения. На основе программной реализации алгоритмов проведен вычислительный эксперимент. Главные его результаты приведены в соответствующем разделе. В дальнейшем подробное исследование следует посвятить зависимости значения K от значений целевой функции. Так как адаптивный алгоритм сильно зависит от параметров, то дальнейшие исследования должны быть направлены на поиск их оптимальных значений в зависимости от размерностей задачи. Также необходимо рассмотреть функциональное изменение параметра p_u в зависимости от номера текущей итерации или от расстояния Хэмминга между двумя решениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демиденко В.М. Модели маршрутизации транспортных средств в товаропроводящих сетях // Экономика, моделирование, прогнозирование. 2012. № 6. С. 94–106.
2. Веларде М., Литвинчев И.С., Цедильо Г. Интегрированная модель маршрутизации транспортных средств и построения зон обслуживания// Известия РАН. Теория и системы управления. 2017. № 6. С. 74–79.
3. Косоногова Л.Г., Королёва А.А., Дубасов А.В. Анализ оптимального распределения транспортного потока при маршрутизации количества транспортных средств // Вестник: научный журнал. 2021. № 6 (48). С. 81–85.
4. Юсупова Н.И., Валеев Р.С. Об одной задаче маршрутизации для доставки однородного продукта различным клиентам автомобильными транспортными средствами // Современные наукоемкие технологии. 2020. № 4. С. 84–88.
5. Yi Zhoua, Weidong Lib, Xiaomao Wanga, Yimin Qiua, Weiming Shen Adaptive gradient descent enabled ant colony optimization for routing problems // Swarm and evolutionary computation. 2022. Vol. 70 (3). <https://doi.org/10.1016/j.swevo.2022.101046>
6. Ramalingam A., Vivekanandan K. Genetic algorithm based solution model for multi-depot vehicle routing problem with time windows // International journal of advanced research in computer and communication engineering. 2014. Vol. 3. Issue 11. pp. 8433–8439.
7. Mazidi A., Fakhrahmad M., Sadreddini M. A Meta-heuristic approach to CVRP problem: local search optimization based on GA and ant colony // Journal of advances in computer research. 2016. Vol. 7. No. 1. pp. 1–22.
8. Medvedev S.N., Medvedeva O.A., Zueva Y.R., Chernyshova G.D. Formulation and algorithmization of the interleaved vehicle routing problem // Journal of Physics: Conference Series 1203 012053. 2019. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012053>

9. *Medvedev S., Sorokina A., Medvedeva O.* The vehicle routing problem for several agents among the objects of two types // 2019 XXI International Conference Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP), Samara, Russia. 2019. pp. 535–540.
10. *Медведев С.Н.* Математическая модель и алгоритм решения задачи маршрутизации транспортных средств с несколькими центрами с чередованием и единым местом сбора // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2021. № 1. С. 21–32.
11. *Кензин М.Ю., Бычков И.В., Максимкин Н.Н.* Комплексный многоцелевой мониторинг группой автономных транспортных средств // Известия ЮФУ. Технические науки. 2019. № 7 С. 82–92.
12. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978. 432 с.
13. *Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б.* Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука, 1969. 382 с.
14. *Медведев С.Н., Медведева О.А.* Адаптивный алгоритм решения аксиальной трехиндексной задачи о назначениях // АиТ. 2019. № 4. С. 156–172.
Medvedev S.N., Medvedeva O.A. An adaptive algorithm for solving the axial three-index assignment problem // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 4. P. 718–732.
15. *Медведев С.Н.* Об оптимальном решении задачи маршрутизации транспорта с чередованием с единым местом сбора // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2021): сборник трудов Всероссийской научной конференции, Воронеж. 2021. С. 97–101.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 22.07.2022

После доработки 28.09.2022

Принята к публикации 26.10.2022

СОДЕРЖАНИЕ

Нелинейные системы

- Галяев А.А., Медведев А.И., Насонов И.А.** Нейросетевой алгоритм перехвата машиной Дубинса целей, движущихся по известным траекториям..... 3
- Григорьев И.С., Проскуряков А.И.** Оптимизация перелета КА со сбросом дополнительного топливного бака и разгонного блока в атмосферу земли..... 22
- Евстафьева В.В.** Синтез управления возмущенной системой с неоднозначной нелинейностью..... 44

Робастное, адаптивное и сетевое управление

- Глуценко А.И., Ласточкин К.А.** Адаптивное управление с гарантией экспоненциальной устойчивости. II..... 65

Управление в технических системах

- Антонов А.В., Фомин А.С.** Решение обратной кинематической задачи для пятиподвижного манипулятора гибридной структуры..... 106
- Семаков С.Л., Семакова М.В.** Управление тягой при посадке самолета на корабль..... 126

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

- Медведев С.Н.** Жадные и адаптивный алгоритмы решения задачи маршрутизации транспортных средств с несколькими центрами с чередованием объектов..... 139

C O N T E N T S

Nonlinear Systems

Galyaev A.A., Medvedev A.I., Nasonov I.A. Neural Network Algorithm for Intercepting Targets Moving Along Known Trajectories by a Dubins' Car	3
Grigoriev I.S., Proskuryakov A.I. Optimization of a SC Transfer with the Discharge of an Additional Fuel Tank and an Upper Stage Into the Earth's Atmosphere.	22
Yevstafyeva V.V. Control Design for a Perturbed System with an Ambiguous Nonlinearity	44

Robust, Adaptive and Network Control

Glushchenko A.I., Lastochkin K.A. Exponentially Stable Adaptive Control. II.	65
---	----

Control in Technical Systems

Antonov A.V., Fomin A.S. Inverse Kinematics of a 5-DOF Hybrid Manipulator	106
Semakov S.L., Semakova M.V. Thrust Control When Landing an Aircraft on a Ship.	126

Optimization, System Analysis, and Operations Research

Medvedev S.N. Greedy and Adaptive Algorithms for Solving the Multi-Center Vehicle Routing Problem with Object Alternation.	139
---	-----