

ISSN 0005-2310

А Т ВТОМАТИКА И МЕЛЕМЕХАНИКА



9

2023



А ВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

Журнал основан в 1936 году

Выходит 12 раз в год

9

сентябрь

Москва

2023

Учредители журнала:

Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН),
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН (ИППИ РАН)

Главный редактор:

Галяев А.А.

Заместители главного редактора:

Соболевский А.Н., Рубинович Е.Я., Хлебников М.В.

Ответственный секретарь:

Родионов И.В.

Редакционный совет:

Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Кулешов А.П., Куржанский А.Б.,
Мартынюк А.А. (Украина), Пешехонов В.Г., Попков Ю.С.,
Федосов Е.А., Черноусько Ф.Л.

Редакционная коллегия:

Алескеров Ф.Т., Бахтадзе Н.Н., Бобцов А.А., Виноградов Д.В., Вишневский В.М.,
Воронцов К.В., Глумов В.М., Граничин О.Н., Губко М.В., Каравай М.Ф.,
Кибзун А.И., Краснова С.А., Красносельский А.М., Крищенко А.П.,
Кузнецов Н.В., Кузнецов О.П., Кушнер А.Г., Лазарев А.А., Ляхов А.И.,
Маликов А.И., Матасов А.И., Меерков С.М. (США), Миллер Б.М.,
Михальский А.И., Мунасыпов Р.А., Назин А.В., Немировский А.С. (США),
Новиков Д.А., Олейников А.Я., Пакшин П.В., Пальчунов Д.Е.,
Поляков А.Е. (Франция), Рапопорт Л.Б., Рублев И.В., Степанов О.А.,
Уткин В.И. (США), Фрадков А.Л., Хрусталеv М.М., Цыбаков А.Б. (Франция),
Чеботарев П.Ю., Щербаков П.С.

Адрес редакции: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

Тел./факс: (495) 334-87-70

Электронная почта: redacsia@ipu.ru

Зав. редакцией *Е.А. Мартехина*

Москва

ООО «Тематическая редакция»

© 2023 г. А.С. МАТВЕЕВ, д-р физ.-мат. наук (almat1712@yahoo.com)
(Санкт-Петербургский государственный университет),
А.Л. ФРАДКОВ, д-р техн. наук (fradkov@mail.ru)
(Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург;
Санкт-Петербургский государственный университет),
А.И. ШЕПЕЛЯВЫЙ, канд. физ.-мат. наук (aisher@mail.ru)
(Санкт-Петербургский государственный университет)

ОЧЕРК ИСТОРИИ НАУЧНОЙ ШКОЛЫ В.А. ЯКУБОВИЧА¹

Представлены основные вехи истории научной школы по кибернетике, созданной в 1959 г. выдающимся ученым В.А. Якубовичем в Ленинградском государственном университете (ЛГУ), а также связи этой школы с другими российскими и зарубежными научными школами в смежных областях.

Ключевые слова: история, кибернетика, теория управления, СПбГУ, кафедра теоретической кибернетики.

DOI: 10.31857/S0005231023090015, **EDN:** JRRGQL

В обзоре представлены основные вехи истории научной школы по кибернетике и теории управления, созданной в 1959 г. выдающимся ученым В.А. Якубовичем в Ленинградском государственном университете (ЛГУ), которой в 2024 г. исполняется 65 лет. Очерк частично опирается на материалы публикаций [1–3] по истории кафедры теоретической кибернетики Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ), ее научных направлений и смежным вопросам. Авторы не ставили целью дать полный библиографический обзор результатов школы, касающихся затронутых в статье аспектов ее деятельности, частично ввиду ограничений объема статьи. Приведены либо ключевые работы, либо иллюстративные и местами субъективно выбранные примеры работ определенного тематического цикла. Авторы приносят извинения коллегам, чьи публикации не упомянуты.

Началом истории кибернетики в Санкт-Петербургском (Ленинградском) университете можно считать 1956-й год, когда на математико-механический факультет пришел 30-летний кандидат физико-математических наук Владимир Андреевич Якубович. Это было время больших перемен в обществе и в науке, начало оттепели. Появляются первые электронно-вычислительные машины (ЭВМ), а также публикации, реабилитирующие кибернетику [4, 5]. Ки-

¹ Работа выполнена при частичной поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2021-573).

бернетика набирает популярность, лекции и дискуссии о ней распространяются повсеместно. При Ленинградском доме ученых возникает первая в стране секция кибернетики, которую возглавил академик и будущий нобелевский лауреат Л.В. Канторович. В Ленинградском университете появляется Вычислительный центр (ВЦ ЛГУ), а вместе с ним — научно-исследовательские лаборатории, нацеленные на освоение и использование новых, фантастических, как тогда казалось, возможностей ЭВМ. Не без влияния основополагающей книги Н. Винера [6] кибернетика воспринимается прежде всего как научная основа применения вычислительной техники и автоматических устройств. Поэтому неудивительно, что когда руководство математико-механического факультета предложило В.А. Якубовичу собрать группу исследователей в области перспективных математических методов автоматики и систем управления, «кибернетический флаг» оказался для этой группы самым подходящим. Так, в 1959 г. в ВЦ ЛГУ появилась лаборатория теоретической кибернетики (ЛТК).

Первые годы в фокусе исследований ЛТК были задачи распознавания образов и машинного обучения. В ее активе — развитие и обобщение популярной в те годы концепции перцептрона Розенблатта, несколько подходов к математической теории распознавания образов [7–9]². Была успешно решена целая серия поставленных заказчиками прикладных задач, среди которых распознавание почерков и аэрофотоснимков, выделение полезных сигналов из зашумленного материала, автоматическое описание и анализ сцен [11–14]. Коллективу принадлежит серия оригинальных алгоритмических разработок, касающихся как проблемы в целом, так и ее отдельных аспектов, например, алгоритм Б.Н. Козинца экономного по ресурсам памяти разделения классов [15, § 2.6]; [16, гл. 6], метод алгебраических инвариантов А.А. Шмидта в задачах распознавания изображений [16, гл. 8] и др. Осмысление накопленных на этом этапе идей привело В.А. Якубовича к общей концепции бесконечной априори неизвестной рекуррентной системы неравенств, в которую неравенства добавляются пошагово в режиме реального времени, и конечно-сходящихся алгоритмов решения таких систем в реальном времени [17]. Эта концепция и связанные с ней методы впоследствии неоднократно продемонстрировали свою продуктивность в различных областях. Ключевой подход к решению таких систем, разработанный в ЛТК, был впоследствии назван *методом рекуррентных целевых неравенств* [18].

Появление нового направления — кибернетики — с неизбежностью породило дискуссию о ее взаимоотношениях с традиционной теорией автоматического управления. Плодотворное русло для этой дискуссии проложило, среди прочих, понятие адаптивности, т.е. автономной успешной приспособляемости системы к априори существенно неопределенным условиям функционирования (как внешним, так и внутренним). В те годы в московской школе преобладали статистические подходы к развитию концепций адаптивного управ-

² Статья [7] была фактически первой работой на русском языке, посвященной машинному обучению. Она была перепечатана и переведена на английский язык в 2021 г. [10].

ления. В частности, Я.З. Цыпкин строил теорию адаптивных и обучающихся систем на основе методов статистического оценивания и стохастической аппроксимации [19, 20]. Параллельно В.А. Якубович разработал оригинальный альтернативный подход, который не опирается на теорию вероятностей (и в этом смысле детерминистичен) и ключевым элементом которого является метод рекуррентных целевых неравенств. В.А. Якубовичу принадлежит исторически первое общее математическое определение адаптивной системы [21, 22]. Базовый материал по теории рекуррентных целевых неравенств и адаптивного управления изложен в монографиях [15, 23]; обзор последующих работ имеется в [24–26].

Результаты возглавляемого В.А. Якубовичем коллектива в области адаптивных систем получили естественное продолжение в исследованиях по робототехнике. Первоначально во всем мире ученые старательно избегали слова «робот» и его производных, полагая их несерьезными, пригодными максимум для научной фантастики. Есть основания полагать, что пионером в плане конституирования «робота» как ныне общепризнанного научного понятия выступил В.А. Якубович в статье [21], опубликованной в Докладах Академии наук СССР (ДАН СССР). В ней на основе метода рекуррентных целевых неравенств была решена задача о самообучении робота-манипулятора (робот «глаз–рука») и доказан ряд теорем про «разумность роботов» в смысле введенного в этой статье определения.

Практически во всех индустриально развитых странах конец 60-х и начало 70-х годов ознаменовались бурным ростом интереса к автоматизации производства на основе применения роботов-манипуляторов с элементами искусственного интеллекта. На гребне этой волны в 1973 г. в ЛТК была сформирована группа робототехники, которую возглавили ученики В.А. Якубовича — д-р техн. наук А.В. Тимофеев [27–29], а затем канд. физ.-мат. наук С.В. Гусев [30, 31]. Среди основных «робототехнических» достижений ЛТК этого периода — построение математической теории адаптивных роботов и теории их обучения сложному целесообразному поведению [32–34]. Дееспособность этой теории была вначале продемонстрирована яркими примерами решения прототипических задач, например задачи обучения робота езде на двухколесном велосипеде, а также обучения других адаптивных роботов, которые в качестве питомцев в коллективе получили домашние прозвища «кузнецик», «ястреб», «глаз-рука» и др. Значимость решенных задач подчеркивает тот факт, что соответствующие результаты в 1972 г. были отобраны международным оргкомитетом для представления на Всемирном конгрессе по автоматическому управлению в Париже [35] (шутили, что В.А. Якубович в качестве докладчика съездил в Париж на велосипеде). В дальнейшем эффективность развитой в коллективе теории была продемонстрирована экспериментами (одними из первых в стране) с реальными колесными роботами [30], начатыми в 1974 г.; в 1980 г. они были продолжены с использованием разработанного в ЛТК более продвинутого экспериментального робота [36]. В 1980-х гг. группа робототехники ЛТК принимала участие в разработке си-

стемы управления манипулятором в рамках проекта «Буран» космического шаттла многоразового использования. В 1970–80-х гг. коллективом ЛТК была также развита теория адаптивного управления робототехническими системами, описываемыми общими уравнениями Лагранжа [37–40]; эти исследования были во многом пионерскими и лежат у истоков последующего масштабного развития этого направления в мире.

Бурное развитие кибернетики и теории управления в 1960-х гг. привело к появлению большого числа разнообразных алгоритмов управления, адаптации, распознавания, обучения, оценивания, фильтрации. Возникла потребность обобщения полученных результатов и унификации предложенных алгоритмов, выявления их ключевого идейного ядра. По-видимому, первым эту потребность почувствовал Я.З. Цыпкин [19, 20], предложивший рассматривать различные задачи распознавания, оценивания, управления и т.д. как задачи минимизации среднего определенной функции потерь. В результате хаотическую массу существовавших тогда разрозненных алгоритмов удалось представить в виде систематизированных частных случаев единообразных вероятностных градиентных итеративных процедур минимизации или оценивания параметров. Однако относящиеся к случаю непрерывного времени основные алгоритмы адаптации (самонастройки) и управления в эту схему не укладывались. В результате атак с разных направлений постепенно выяснилось, что унификация упомянутых алгоритмов возможна, если в схеме Я.З. Цыпкина перейти от градиента целевой функции к градиенту скорости ее изменения вдоль траекторий объекта управления. По-видимому, наиболее общий и законченный подход к реализации этой идеи был предложен и разработан А.Л. Фрадковым [41] и назван им *методом скоростного градиента*.

Первоначально метод был в основном ориентирован на задачи адаптивного управления и идентификации. В результате последующих исследований, растянувшихся на многие годы, метод получил развитие и применение как универсальный подход к решению различных задач синтеза непрерывных динамических систем в математических, физических, инженерных, биологических и других науках. На его основе, например, было найдено решение задач управления и синхронизации для широкого класса колебательных, в том числе хаотических, систем. Эти результаты открыли новые перспективы в вибрационной технике, лазерных и химических технологиях, системах передачи информации. Простота применения метода, а также доступность строгого математического обоснования полученных алгоритмов обусловили его признание в качестве инструмента исследований как у нас в стране, так и за рубежом. Число публикаций, где метод в том или ином виде применяется, постоянно растет и ныне достигает нескольких сотен. В последнее время возрос интерес к методу скоростного градиента и в качестве инструмента постижения законов эволюции, позволяющего лучше понять динамику физических, биологических и других систем. В такой ипостаси метод известен как *принцип скоростного градиента* [42, 43].

В начале 70-х гг. в ЛТК была создана группа бионики под руководством доктора психологических наук Р.М. Грановской. Задачей группы было изучение и моделирование феноменов восприятия и узнавания, а также механизмов памяти живых организмов, включая человека [44, 45]. Был проведен большой объем экспериментальных и теоретических исследований, а полученные результаты во многом были мотивированы и активно внедрялись заинтересованными организациями.

В 1970 г. на базе ЛТК возникла кафедра теоретической кибернетики (КТК). Ее первый выпуск был уже в 1971 г. и состоял из трех специалистов: Г.С. Аксенова, Б.Д. Любачевского и А.Л. Фрадкова. ЛТК и КТК фактически были единым коллективом, занимавшимся общим делом и с минимальным влиянием формального распределения сотрудников по ЛТК и КТК. Сотрудники ЛТК занимались преподаванием, а члены КТК вели научные исследования на общие с ЛТК темы и очень часто совместно с коллегами из ЛТК. Обсуждение уместных компонентов этих исследований систематически переводилось из стен лаборатории в учебные аудитории, так что еще в процессе освоения профессиональной базы студенты приобщались к переднему краю области. Например, сотрудники ЛТК-КТК часто рассказывали на лекциях новые, еще не опубликованные результаты. Иногда студенты изучали доказательства теорем, которые были получены только накануне. Возникало чувство живого участия в математическом творчестве, ощущение себя на переднем крае науки. Бывало, что студенты находили неточности в доказательствах или предлагали способы усовершенствовать рассуждения. Таким студентам приносились благодарности в публикациях, что вызывало чувство гордости и желание двигаться дальше. Недаром девиз кафедры с давних лет — *Docendo discimus*, что означает «обучая, учусь».

Помимо чисто кибернетического направления (распознавание, машинное обучение, искусственный интеллект, адаптивные системы, роботы и т.п.), область научных интересов коллектива охватывала и охватывает целый ряд классических разделов математики и теории управления. Они касаются линейных дифференциальных уравнений, динамических систем и параметрического резонанса (В.А. Якубович, В.Н. Фомин, В.И. Дергузов), устойчивости и колебаний в нелинейных динамических системах, включая системы фазовой синхронизации и автоподстройки частоты, устойчивости и колебаний в импульсных системах (Г.А. Леонов, А.И. Шепелявый, А.Х. Гелиг, А.Н. Чурилов), оптимального управления (А.С. Матвеев, А.Е. Барабанов, В.А. Якубович), теории оценивания и фильтрации (В.Н. Фомин, А.Е. Барабанов), и др.

Еще до создания лаборатории и кафедры В.А. Якубович получил фундаментальные результаты, касающиеся устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и параметрического резонанса. Им была доказана гипотеза И.М. Гельфанда о том, что в функциональном пространстве коэффициентов двумерных гамильтоновых систем множество коэффициентов, соответствующее устойчивым си-

стемам, распадается на счетное число связанных областей, и показано, что популярный в те годы в этой тематике критерий Ляпунова относится только к одной из них. В.А. Якубович получил критерии устойчивости для каждой области, которые, как и упомянутый критерий Ляпунова, неумлучшаемы в определенном естественном смысле. Эти результаты были затем перенесены В.Н. Фоминым и В.А. Дергузовым на системы с бесконечномерным фазовым пространством. Фундаментальная монография [46] подвела промежуточные итоги развития этого направления и до сих пор в ранге бестселлера активно цитируется в трудах не только математиков, но физиков и инженеров.

Среди многочисленных научных результатов коллектива, пожалуй, наибольшую известность и влияние приобрели достижения, связанные с так называемой «частотной теоремой», также известной под названиями «Лемма Якубовича–Калмана» и «Лемма Калмана–Якубовича–Попова» (КУР-lemma). Она была доказана В.А. Якубовичем и впервые опубликована в 1962 г. [47]. Эта теорема дает математически красивые, прозрачные и конструктивные условия разрешимости достаточно сложной системы соотношений, которая встречается в самых разных задачах теории устойчивости, автоматического управления, робототехники и других областей и решение которой, в свою очередь, является ключом к решению основной задачи и ее качественному анализу. Значение и авторитет частотной теоремы — производные ее продуктивности применительно к целому спектру разнообразных областей и задач, где она придала второе дыхание методу функций Ляпунова. Например, она позволила получить целую серию новых конструктивных критериев абсолютной устойчивости, неустойчивости, автоколебательности, существования устойчивых в целом периодических и почти периодических режимов в разнообразных нелинейных системах, продвинуть исследования так называемых странных аттракторов таких систем, развить новые методы оптимального и адаптивного управления; часть этих результатов была изложена в 1978 г. в монографии [48]. Эта книга до сих пор актуальна и интересна ученым разных стран, о чем свидетельствует, в частности, издание ее английского перевода в 2004 г. Более того, обсуждаемая лемма позволила получить своего рода исчерпывающие результаты, заведомо охватывающие все условия того или иного поведения системы, которые могут быть получены на основе функций Ляпунова из определенных популярных классов (например, функций вида «квадратичная форма», «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности» и т.д.).

Частотную теорему неслучайно иногда называют «Великой леммой теории систем»: она «официально» признана международным научным сообществом в качестве одного из краеугольных камней современной теории управления. Этот факт, например, отражен присутствием работы В.А. Якубовича по частотной теореме [47] в специальном сборнике *Twenty Five Seminal Papers in Control* (Wiley—IEEE Press, 2000), где приведены 25 статей, оказавших наибольшее влияние на развитие теории управления в XX в. согласно мнению

авторитетной международной комиссии ведущих ученых, созданной Обществом систем управления (Control systems society) международного Института инженеров в области электротехники и электроники (IEEE).

Вначале частотная теорема была доказана для систем управления, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Впоследствии она была распространена в разных направлениях, в частности, перенесена на многие другие классы управляемых систем. Среди них системы с дискретным временем, стохастические системы, адаптивные системы, системы с бесконечномерным фазовым пространством (например, описываемые уравнениями в частных производных, уравнениями с запаздывающим аргументом, дифференциальными уравнениями в бесконечномерном гильбертовом пространстве, интегральными уравнениями и т.п.), системы над упорядоченными полями [49–59]. Эти достижения в подавляющем большинстве были не самоцелью, а дорогой к россыпи новых самодостаточных результатов, раздвигающих границы понимания соответствующих областей, например, к критериям абсолютной устойчивости и неустойчивости для рассматриваемых классов систем. В этом научном развитии школа В.А. Якубовича шла, взаимообогащаясь, рука об руку с другими научными школами, например, с нижегородской (В.А. Брусин, П.В. Пакшин, В.А. Угриновский и др.) [60–64]. История и современное состояние этого направления подробно отражены в обзорах [65, 66] и в коллективной монографии [3].

Отметим, что в [55, 56] были получены необходимые и достаточные условия существования линейной обратной связи по выходу линейной системы, обеспечивающей существование у нее квадратичной функции Ляпунова. Это свойство системы эквивалентно ее пассивности, означающей выполнение некоторого неравенства типа диссипации на траекториях системы. Поэтому результаты [55, 56] можно назвать теоремами о пассивации линейных систем. Эти утверждения легли в основу общего подхода к синтезу систем, названного методом пассивации (passification, passivation). Впоследствии метод пассивации был распространен на широкий класс задач управления и оценивания для нелинейных и адаптивных систем [67–70]. Метод пассивации сейчас применяют исследователи из различных стран [71–73]. В России он активно используется, в частности, в научной школе университета ИТМО (В.О. Никифоров, А.А. Бобцов и др.) [74, 75, 141].

Широта применимости частотной теоремы стимулировала В.А. Якубовича к построению абстрактной теории абсолютной устойчивости, которая, используя аппарат функционального анализа, не только обобщает массу известных результатов, но и создает комфортную базу их распространения на все новые типы уравнений. Отметим также, что исследования по частотной теореме связаны с ныне ультрапопулярным методом линейных матричных неравенств, что позволило авторам книги [77] назвать В.А. Якубовича «отцом» основанного на этом методе научного направления (в почетной компании с А.М. Ляпуновым в качестве «дедушки»). В мире масса адептов этого

направления, которые давно и успешно развивают его применительно к удивительно широкому спектру областей.

Частотная теорема родилась в исследованиях по устойчивости положений равновесия нелинейных динамических систем как ответ на вопрос об условиях существования квадратичной функции Ляпунова, общей для целого класса таких систем, описываемого определенным образом с использованием квадратичной формы. Впоследствии ее фундаментальный характер проявился в открытии и эффективном использовании ее связей с целым рядом других областей. Среди исторически первых из них — теория оптимального управления. Здесь частотная теорема оказалась мощным конструктивным средством проверки разрешимости так называемых линейно-квадратичных задач (сочетание линейной системы управления и квадратичного функционала качества) и синтеза их решений в инженерно привлекательной форме оптимального регулятора.

Основы линейно-квадратичной теории оптимального управления были заложены классическими работами Р. Калмана [78], Н.Н. Красовского [79] и А.М. Летова [80] (а в части, касающейся стохастических объектов, исследованиями А.Н. Колмогорова [81], Н. Винера [82], С. Бьюси [83]); значительный вклад в ее развитие внесли Я.К. Виллемс, В.И. Zubov, В.М. Кунцевич, А.Б. Куржанский, Ж.Л. Лионс, А.И. Лурье, В.И. Уткин, В.А. Якубович и многие другие ученые (о истории линейно-квадратичной теории оптимального управления см. обзоры в [84, 85]). Методически эта область имеет важные связи с комплексным анализом, теорией устойчивости и стабилизации нелинейных динамических систем ([77, 86–88] и др.). В первую очередь это касается так называемых неопределенных систем (uncertain systems), где эпитет отражает типичную для приложений ситуацию, когда полная информация о системе отсутствует. Начиная с конца 60-х гг. поток научных публикаций, относящихся к обсуждаемой области, принял лавинообразный характер; заметный интерес к ней сохранился до настоящего времени. Среди причин этого — общепризнанный практический эффект линейно-квадратичной теории оптимального управления. Например, по данным, приведенным в пленарном докладе профессора М. Morari [89] на второй европейской конференции по управлению (the Second European Control Conference, Groningen, the Netherlands, 1993), среди различных разделов современной математической теории управления линейно-квадратичная теория занимает почетное второе место по интенсивности применения в промышленных разработках гражданского профиля. (Первое занимает теория ПИД-регулирования.)

В теории линейно-квадратичной оптимизации школа В.А. Якубовича системно развивала подход, основанный на частотной теореме. В работах В.А. Якубовича, А.И. Шепелявого, А.Л. Лихтарникова, А.В. Мегрецкого, С.Г. Семенова, Д.В. Пляко, А.В. Савкина и др. указанный подход был, в частности, распространен на широкий класс разнообразных важных задач и систем, который включает, помимо прочего, системы с непрерывным

и дискретным временем, с бесконечномерным фазовым пространством, задачи, возникающие в конфликтной ситуации (дифференциальные игры), и с эффектом сингулярности [85], который может приводить к отсутствию решения в традиционном смысле.

Частотная теорема как критерий существования квадратичной функции Ляпунова традиционно и часто дополняется специальным приемом построения такой функции — так называемой S -процедурой [90]. В [91] последнее понятие было абстрагировано от функций Ляпунова и ему был придан смысл замены (в определенном смысле) системы нескольких неравенств одним неравенством со свободным параметром. Ключевой вопрос — “Эквивалентна ли замена?”; при утвердительном ответе говорят о неущербности S -процедуры, а соответствующее утверждение называют также “ S -леммой”. Этот вопрос имеет отношение к целому ряду областей математики [77], например к двойственности в экстремальных задачах, теории матриц и операторов. Особо продуктивной для теории управления оказалась ситуация квадратичных неравенств, в которой неущербность S -процедуры смыкается с эффектом скрытой (в смысле неочевидности) выпуклости образов квадратичных отображений [66]. Классические результаты такого рода — теорема Дайнса (две квадратичные формы трансформируют вещественное линейное пространство в выпуклое множество) и теорема Теплица–Хаусдорфа (две непрерывные эрмитовы формы трансформируют сферу комплексного гильбертова пространства в выпуклое множество).

Первые исследования школы по неущербности S -процедуры [92, 93] стартовали на рубеже 1970-х гг. и касались не более трех неравенств. В основном они не покидали идейного поля теорем Дайнса и Теплица–Хаусдорфа, в котором, согласно П. Халмошу [94] “все известные доказательства основаны на вычислениях, хотя хотелось бы иметь идейное доказательство, пусть даже (или особенно?) с использованием менее элементарных понятий”. Дальнейшие исследования школы по обсуждаемой тематике можно трактовать как движение в указанном русле, где основной целью было обобщение на произвольное число форм (недостижимое в общем случае). Заметный импульс этим исследованиям был придан работой [95] учеников В.А. Якубовича и Н.К. Никольского, где выпуклость совместного образа была установлена для произвольного числа форм, но в очень специальной ситуации, мотивированной теорией управления. Эта специализация была довольно быстро преодолена В.А. Якубовичем совместно с чуть позже присоединившимся к этой тематике А.С. Матвеевым, которые получили серию общих результатов по неущербности S -процедуры и скрытой выпуклости квадратичных функционалов. В этих работах в качестве менее элементарной общей причины выпуклости фигурировали инвариантность форм относительно операторов сдвига и слабая сходимости к нулю сдвинутых элементов пространства (как, например, в $L_2(0, \infty)$ при сдвиге на $T \rightarrow \infty$) [96]. Эти результаты касались важных задач теории управления, но не охватывали классические теоремы Дайнса и Теплица–Хаусдорфа. Впоследствии А.С. Матвеевым были получе-

ны еще более общие критерии выпуклости совместного образа произвольного числа форм, которые уже «автоматически» охватывали указанные классические результаты и в качестве «менее элементарной» причины выпуклости предъявляли определенные свойства (заведомо выполненные в классическом случае) периферийной части спектра пучка операторов, порожденного формами [97–99]. В этом цикле работ была также развита теория приближенной выпуклости образов квадратичных отображений с оценками дефекта, открыто и исследовано свойство гипер-овыпукления, а результаты распространены на отображения более общие, чем квадратичные. Ряд результатов в этом направлении был получен также выдающимся ученым Б.Т. Поляком [100, 101]. Черпая мотивацию в стохастической теории управления, Н.Г. Докучаев (при участии В.А. Якубовича) развивал параллельную идеологию, связанную с эффектом А.А. Ляпунова (выпуклость образа безатомной векторной меры).

На рубеже 2000-х гг. было сделано важное открытие, которое представило в совершенно новом свете взаимоотношения и взаимодействие S -процедуры и частотной теоремы. А именно, в [102] было дано новое доказательство частотной теоремы, основанное на теореме о неущербности S -процедуры (S -леммы). В результате можно сказать (цитируя [66]), что “частотная теорема и S -процедура долгое время жили, образно выражаясь, как дружные соседи, и вот, спустя столько лет, все узнали, что они еще и родственники”.

Работа [102] дала толчок исследованиям, связанным с так называемой обобщенной частотной теоремой (обобщенной КУР-леммой), устанавливающей важные для дальнейших приложений свойства, эквивалентные выполнению частотных неравенств в некотором ограниченном частотном диапазоне. Соответствующие результаты дают новые инструменты анализа и синтеза систем, связанные с частотными неравенствами, выполненными в конечном диапазоне частот [102, 103]. Оказалось, что выполнение стандартного частотного неравенства в конечном диапазоне частот эквивалентно справедливости некоторых неклассических линейных матричных неравенств для пары матриц P, Q ; эти неравенства в определенном смысле аналогичны и “заменяют” неравенства для единственной матрицы P в классической формулировке КУР-леммы. В [104] было показано, что выполнение частотных неравенств в конечном диапазоне частот, в свою очередь, эквивалентно выполнению определенного неравенства (типа неравенства диссипации) только на части траекторий системы, определяемой дополнительным интегральным матричным неравенством (так называемая, ограниченная диссипативность [104]). Таким образом, было получено полное распространение классических КУР-результатов на “конечно-частотный” случай. В [105] получено дальнейшее обобщение указанных результатов на случай “конической” S -процедуры, позволяющее работать в ситуации бесконечного числа ограничений. Конечно-частотная версия частотной теоремы уже нашла применение при решении целого ряда практических задач [106–108].

Три магистральных научных направления школы — частотная теорема, S -процедура, линейно-квадратичная оптимизация — в 1990-х слились в исследованиях по методам невыпуклой глобальной оптимизации. Точнее, речь идет о разработке общего подхода, позволяющего на базе этих направлений стандартным образом строить эффективные алгоритмы решения специальных задач, относящихся к области невыпуклой глобальной оптимизации. В отличие от большинства методов данной области, которые в основной массе являются вычислительными, часто основаны на эвристических идеях и не всегда сопровождаются гарантией сходимости, упомянутые алгоритмы основаны на математической теории, являются в наиболее существенной части аналитическими и гарантированно приводят к нахождению глобального оптимума. Упомянутый подход был предложен В.А. Якубовичем в 1992 г. [109, 110], его дальнейшему развитию посвящены работы В.А. Якубовича, А.С. Матвеева, Н.Г. Докучаева. Подход предусматривает обоснование основных соотношений теории выпуклой двойственности для рассматриваемых невыпуклых задач оптимизации и применение основанного на них правила (Якубовича) решения задачи. Оно корректно далеко не всегда. Хотя было установлено, что правило верно всякий раз, когда оно результативно (выдает непустое множество ответов), наибольший интерес представляют критерии, которые позволяют убедиться в применимости правила априори, т.е. до начала его применения, на основе (обычно несложной) проверки определенных свойств исходных данных задачи. Был установлен ряд таких критериев, причем именно они во многом служили основной целью охарактеризованных выше исследований образов квадратичных отображений.

В конце 70-х гг. В.А. Якубович инициировал обширный цикл исследований коллектива по построению теории принципа максимума в задачах оптимального управления в рамках абстрактного подхода. Этот подход подразумевает выбор в качестве основного объекта изучения некоторой абстрактной модели, описываемой языком функционального анализа. Полученные для нее результаты предлагается затем интерпретировать применительно к тем конкретным моделям, с которыми сталкивается исследователь. Таким образом, при работе с разнообразными приложениями этот подход позволяет сократить объем рассуждений, так как их значительная часть уже проделана раз и навсегда в рамках абстрактной теории. Достоинство абстрактного подхода состоит и в единообразии процедуры вывода условий оптимальности. Методически он дает возможность изложить основные идеи более доступно и просто, так как они не заслоняются антуражем конкретной модели.

Подобные абстрактные теории были разработаны многими авторами. В.А. Якубович предложил собственный, оригинальный подход к построению абстрактной теории оптимального управления. Характеристическая черта подхода состоит в разработке аппарата исчисления дифференциалов по пучкам кривых в условиях, когда кривые, вообще говоря, недифференцируемы. На этой основе для абстрактной модели задачи оптимального управления устанавливается абстрактный принцип максимума. Он, в частности, поясняя-

ет, почему принципы максимума, аналогичные понತ್ರягинскому, естественно возникают как необходимые условия оптимальности в очень, на первый взгляд, разных задачах, выделяя общие свойства задачи, предопределяющие указанную форму ответа. Обсуждаемый подход также позволил единообразно строить теорию необходимых условий как первого, так и высших порядков в задачах с ограничениями: все они оказываются частями некоторого единого условия [111]. Обсуждаемый подход был развит в разных направлениях в обширном цикле работ В.А. Якубовича и его учеников, на его основе был получен целый ряд самодостаточных новых результатов; некоторые из них (например, касающиеся оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных) существенно опередили аналогичные разработки в мире. Некоторые итоги этого развития систематизированы в книгах А.С. Матвеева и В.А. Якубовича [111, 112]. По замыслу цель учебного пособия [112] состояла в том, чтобы научить читателя самостоятельно применять абстрактную теорию к новым задачам. Книга содержит 75 задач на применение этой теории. Некоторые из них соответствуют уровню научных публикаций недавнего прошлого, вместе с тем с ними успешно справляются студенты четвертого курса математико-механического факультета СПбГУ.

С момента возникновения ЛТК и КТК на их командном мостике было два помощника капитана: А.Х. Гелиг и В.Н. Фомин. В фокусе основных интересов А.Х. Гелига был анализ динамики импульсных систем с различными видами импульсной модуляции. В этой области им был разработан новый подход, основанный на потактовом усреднении импульсного сигнала и теории абсолютной устойчивости непрерывных нелинейных систем. В отличие от классического метода усреднения, усреднение по Гелигу не асимптотично по своему характеру и позволяет получить явную оценку требуемой частоты дискретизации. Классические теоремы теории абсолютной устойчивости нелинейных систем (такие как знаменитый круговой критерий и критерий В.М. Попова, а также критерии устойчивости периодических режимов) при этом получаются как предельные случаи при стремлении величины периода дискретизации к нулю, в связи с чем можно говорить о достижении высокой степени унификации построенной теории. Соответствующий цикл работ был подытожен в совместной монографии А.Х. Гелига и А.Н. Чурилова [113], расширенный вариант которой опубликован на английском языке в издательстве Birkhauser. В круг долговременных интересов А.Х. Гелига также входили вопросы аналитического синтеза регуляторов для управления нелинейными системами. В контакте со своими многолетними соавторами И.Е. Зубер и А.Н. Чуриловым им получено решение разнообразных задач устойчивости и стабилизации для непрерывных, импульсных и дискретных систем как в случае управления по состоянию, так и в случае управления по выходу системы [114]. А.Х. Гелиг был среди пионеров исследования нелинейной динамики нейронных сетей в СССР [115], а совместно с В.А. Якубовичем и

Г.А. Леоновым — исследования вопросов устойчивости систем с неединственным положением равновесия [48].

В.Н. Фомин начал свою научную деятельность с исследования параметрического резонанса в гамильтоновых системах, описываемых уравнениями в частных производных. Здесь ему удалось построить достаточно полный аналог конечномерной теории на базе метода Галеркина и разработанного им варианта метода возмущений. После защиты в 1971 г. по этой теме докторской диссертации научные интересы В.Н. Фомина переключились в область математической теории кибернетических систем. Особое внимание он уделял темам, связанным с машинным обучением и адаптивными системами, демонстрируя энциклопедичный охват тематики. Его монография [116] и когерентный ей курс лекций были одними из первых в стране по этим столь актуальным темам и рисовали широкую картину области, не ограниченную рамками какого-то одного коллектива или подхода. Книга [116] в 1976 г. была удостоена первой премии ЛГУ в области научных работ. Постепенно набрало силу и третье основное направление работ В.Н. Фомина: математическая теория фильтрации и теория управления, прежде всего, в ее вероятностном варианте [117–119]. Здесь им получены многочисленные результаты, касающиеся, помимо прочего, стохастической линейно-квадратичной задачи оптимального управления, спектральной факторизации, оптимального оценивания случайных процессов и полей, разработаны методы синтеза оптимальных фильтров при обработке пакета случайных плоских волн на фоне распределенных шумов. Результаты этого цикла имеют важные приложения в теории радарных и коротковолновых средств связи, в подводной акустике, радиоастрономии, сейсмологии, геофизике и в системах телевизионного слежения. Общая для школы В.А. Якубовича тенденция по использованию мощи функционального анализа в теории управления не обошла стороной и В.Н. Фомина. В последние годы перед безвременным уходом он активно и азартно разрабатывал операторный подход к задачам фильтрации и связанным задачам управления. В результате ему, в частности, удалось построить единую теорию оптимальной фильтрации, непринужденно охватывающую теорию Винера–Колмогорова оптимальной фильтрации стационарных процессов и Калмана–Бьюси рекуррентной фильтрации и к тому же имеющую широкую сферу приложимости. Энергия, харизма и искрометный юмор Владимира Николаевича делали его драйвером практически любого мероприятия (семинара, лекции и т.п.), в котором он участвовал, а основная претензия студентов, которым посчастливилось слушать его лекции, на них никак и никогда не удавалось заснуть.

В 1969 г. в ЛТК появился новый аспирант — Г.А. Леонов. В 1971 г. он защитил кандидатскую диссертацию и продолжил работу в лаборатории и на кафедре. Постепенно в рамках традиционных для ЛТК-КТК подходов под его началом формируется индивидуальное научное направление. За фундаментальными результатами по теории устойчивости и синхронизации нелинейных колебаний в фазовых системах [48, 51, 120, 121] последовали пионерские

работы и книги по теории управления и стабилизации линейных управляемых систем [122, 123] и качественному исследованию глобальных аттракторов динамических систем: неустойчивость, бифуркации, синхронизация, оценки размерностей [124, 125]. В 2007 г. Г.А. Леонов возглавил вновь созданную на математико-механическом факультете СПбГУ кафедру прикладной кибернетики и с этого момента стал частью ее истории.

У В.А. Якубовича и старшего поколения его учеников острый интерес к практическим задачам естественно сочетался с (модифицированным авторами) тезисом И. Канта «в каждой... науке столько истины, сколько в ней содержательной математики». Среди следующего поколения ярким адептом этой философии был А.Е. Барабанов, ученик В.Н. Фомина. Коллеги неоднократно восхищались способностью Андрея Евгеньевича к применению глубоко нетривиальных математических ходов в казалось бы вполне рутинных, хотя и важных прикладных задачах. И, что более существенно, это приносило успех, подтверждая приведенный тезис. Спектр интересов А.Е. Барабанова был обширен. В качестве иллюстрации отметим важные работы по оборонной тематике, разработки (совместно с сотрудниками кафедры системного программирования СПбГУ) помехозащищенных dial-up модемов для сильно зашумленных коммутируемых линий, систем обработки радарных сигналов сначала для НПО «Равенство», а затем для одного из крупнейших мировых производителей навигационного программного обеспечения для морского судоходства — компании «Transas» (которая в 1990-х–2010-х гг. по мнению экспертов, например, А.Н. Терехова³ была монополистом рынка бортового программного обеспечения), систем анализа звуковых сигналов дельфинов, систем анализа и синтеза речи (в творческом контакте с кафедрой фонетики СПбГУ). По последней тематике А.Е. Барабанов разработал и читал передовые курсы лекций. В фокусе его теоретических исследований были вопросы синтеза оптимальных и субоптимальных регуляторов [126, 127], где он получил серию важных и подчас неожиданных результатов. В качестве примера укажем, что в 80-х гг. им была решена задача синтеза оптимального регулятора при равномерно ограниченных возмущениях и на этой основе построена новая теория L_1 -оптимального управления. Пионерская работа А.Е. Барабанова и О.Н. Граничина по этой тематике [126] намного опередила аналогичные зарубежные публикации. В дальнейшем О.Н. Граничин (также ученик В.Н. Фомина) систематически развивал подходы, основанные на рандомизации в системах управления, что позволило получить условия работоспособности систем при «почти произвольных» (неизвестных, но ограниченных) помехах [128, 129].

На рубеже тысячелетий в научном сообществе сформировалось понимание, что с одной стороны, непрерывный физический процесс, взаимодействующий с управляющим дискретным (цифровым) вычислительным устройством — неуклонно распространяющееся сочетание, за которым будущее.

³ https://www.rbc.ru/spb_sz/22/03/2018/5ab26f809a7947027cb81160

И что, с другой стороны, имеющиеся инструменты математической теории не готовы, в требуемой мере, к работе с этим сочетанием. Его математической моделью является гибридная динамическая система (ГДС), т.е. система, описываемая как непрерывными, так и дискретными фазовыми переменными, оказывающими двустороннее влияние на эволюцию друг друга. В конце 1990-х интерес к математическому моделированию и построению теории таких систем можно было охарактеризовать как своего рода бум.

Начиная с 1997 г. ученики В.А. Якубовича — А.С. Матвеев и А.В. Савкин — проводили совместные исследования по качественной теории ГДС. Ими были заложены основы такой теории для достаточно общего класса ГДС и получены одни из первых общих доказательных результатов в этой области. Эти результаты опубликованы в ведущих международных журналах, а также в монографии [130], по-видимому, первой в мире по этой тематике. Обсуждаемый цикл работ сфокусирован на общем классе ГДС переключаемого типа, т.е. систем, для которых непрерывные фазовые переменные не претерпевают скачков. Получены, помимо прочего, необходимые и достаточные условия сильной детерминированности системы, инвариантности заданной области, критерии существования и глобальной устойчивости предельных циклов, аналоги классической теоремы Пуанкаре–Бендиксона, разработан метод синтеза распределенных алгоритмов переключения процессоров, обеспечивающих возбуждение и глобальную устойчивость заданных (оптимальных) колебательных процессов в крупномасштабных потоковых сетях, и др. Работоспособность разработанной общей теории продемонстрирована продуктивным исследованием целого ряда представляющих самостоятельный интерес моделей информационных, компьютерных, транспортных и других сетей, гибких производственных систем, биотехнологических и других процессов.

Различными аспектами задачи дискретизации непрерывных систем в общем контексте построения теории ГДС активно занимался В.А. Бондарко [131, 132]. Например, для линейных стационарных объектов им было проведено сравнение различных методов дискретизации в плане их адекватности, связи между собой и асимптотики свойств дискретных моделей при увеличении частоты квантования по времени. Занимаясь параллельно развитием теории конечно-сходящихся алгоритмов решения счетных систем неравенств, В.А. Бондарко получил важные результаты в области адаптивного управления, включая управление нелинейными системами и системами с бесконечномерным фазовым пространством.

Начиная с середины 1990-х гг. В.А. Якубович со своими учениками, среди которых особую роль сыграл А.В. Проскурников, вдохнул новую жизнь в традиционную для школы тематику, связанную с линейно-квадратичной оптимизацией и частотной теоремой, опубликовав цикл из примерно 20 работ по оптимальному гашению колебаний, оптимальному отслеживанию сигналов и теории инвариантности [133–138]. В рамках этого цикла во вполне классические для теории управления темы был привнесен ряд пионерских моментов,

в том числе разработана концепция «универсального регулятора», обеспечивающего оптимальность при всех заранее неизвестных помехах и отслеживаемых сигналах, а также инвариантность выхода системы относительно внешнего возмущения. основополагающая работа [133] цикла получила премию Международной академической издательской компании «Наука» за лучшую публикацию 1995 г., а на Европейской конференции по управлению 1995 г. В.А. Якубович выступал на эту тему с пленарным докладом [134]. За обсуждаемый цикл работ А.В. Проскурников был награжден в 2008 г. медалью и премией РАН для молодых ученых.

Начиная примерно с начала 2000-х в мире значительный интерес специалистов в области физики, математики и информатики привлекает феномен формирования, как сейчас принято говорить, роевого интеллекта в сложных сетевых системах. Здесь основная интрига заключается в том, как из локальных взаимодействий малоосведомленных и маловлиятельных элементов рождается целесообразное и осмысленное поведение сети в целом. Мотивация этой тематики разнообразна и включает исследование динамики ансамблей физических частиц, биологических популяций, а также мнений в социальных группах, систем искусственного интеллекта, сетевых систем управления и др. Предметом одного из наиболее математически содержательных (к настоящему времени) разделов этой области служат распределенные алгоритмы достижения консенсуса. Существенные результаты школы В.А. Якубовича в этой области, к сожалению, пока слабо представленной в РФ, принадлежат А.В. Проскурникову (при начальном участии А.С. Матвеева); в 2022 г. он защитил в СПбГУ докторскую диссертацию по этой теме. Она венчает цикл исследований, где, в частности, было сделано заметное продвижение к целостной теории распределенных усредняющих алгоритмов достижения консенсуса, а также предложен и разработан продуктивный оригинальный метод дифференциальных и рекуррентных усредняющих неравенств. Вклад А.В. Проскурникова в связанное с обсуждаемой темой развитие математической социологии был отмечен совместной публикацией в журнале *Science* [139].

Среди примеров инициативных работ учеников В.А. Якубовича нельзя не упомянуть разработку и продвижение нового и в значительной мере пионерского направления, лежащего на стыке физики и кибернетики. Оно возникло не произвольно; напротив, на рубеже 1990-х гг. в мире произошел взрыв интереса к применению методов кибернетики, теории информации и управления в физике. Среди его триггеров была, например, обнаруженная в те годы интригующая возможность существенно изменить свойства системы, например, подавить или создать хаос в ее поведении, изменить резонансные характеристики и др., с помощью (теоретически сколь угодно) малого воздействия. Опубликованные в 1998–1999 гг. книги [140, 141] были первыми в мире монографиями по обсуждаемому направлению, а сама область наук на границе кибернетики и физики была названа (со-)автором указанных монографий А.Л. Фрадковым кибернетической физикой. К ней, в част-

ности, относят вопросы управления молекулярными и квантовыми системами (А.Л. Фрадков, М.С. Ананьевский), которые играют важную роль в создании перспективных нанотехнологий. Статья [142] с обзором исследований по управлению хаосом получила премию Международной академической издательской компании «Наука» за лучшую публикацию 2003 г.⁴ Основные принципы кибернетической физики изложены в книгах [42, 143]. Знаками ее международного признания явилось проведение в 2003–2005 гг. в Санкт-Петербурге первых в мире международных конференций по физике и управлению, а также образование международного Общества по физике и управлению (IPACS) со штаб-квартирой в Санкт-Петербурге. Под эгидой этого общества в Санкт-Петербурге издается индексируемый в Scopus международный журнал «Cybernetics and Physics».

Еще одно важное, а возможно, и решающее для самой кибернетики направление отражает оформившуюся на рубеже тысячелетий тенденцию к конвергенции теорий управления, вычислений и связи в направлении их единства. Все больше задач требуют тесного взаимодействия методов указанных трех теорий; возникла даже афористичная формула $\text{Control} \times \text{Computation} \times \text{Communication} = C^3$, выражающая стремление к возврату целостного восприятия информационных, вычислительных и управляющих процессов, так много значившего для успехов «романтической» кибернетики 1960-х гг. Часть пионерских результатов в этом направлении была получена в начале 2000-х гг. А.С. Матвеевым совместно с выпускником КТК профессором университета Нового Южного Уэльса (Австралия) А.В. Савкиным. Соответствующий цикл работ посвящен управлению и оцениванию при ограничениях на пропускную способность (емкость) каналов связи [144–147] и частично подытожен в монографии [148]. В частности, было показано, что стабилизировать неустойчивую линейную управляемую систему можно тогда и только тогда, когда битовая скорость поступления информации через канал связи превышает скорость производства информации системой, а также сделано принципиальное продвижение к определению места основных концепций теории информации К. Шеннона (в частности, емкости зашумленного канала связи) в обсуждаемой тематике. Впоследствии исследования переключились на нелинейные системы и проводился А.С. Матвеевым в соавторстве с профессором Технического университета Эйндховена А.Ю. Погромским, при этом использовались методы А.М. Ляпунова и Г.А. Леонова анализа нелинейной динамики. В частности, было разработано новое понятие энтропии восстановления нелинейной системы и показано (в соавторстве с сотрудником университета Людвиг-Максимилиана С. Kawan), что в определенном смысле и в рассматриваемых вопросах эта энтропия является адекватной характеристикой скорости производства информации системой [149, 150]. Достаточные условия работоспособности нелинейных и адаптивных систем при коммуникационных ограничениях получал также А.Л. Фрадков с соавтора-

⁴ Обзор является наиболее цитируемой статьей журнала АиТ, а ее второй соавтор — наиболее цитируемым автором АиТ.

ми [151–156]. Обзор некоторых результатов, полученных коллективом в целом, представлен в [157].

Уже стало своего рода традицией подразделять (при всей условности любой рубрикации) современную робототехнику на индустриальную и мобильную. В фокусе первого и более развитого раздела — оркестр систем промышленного назначения, в котором главную скрипку играют манипуляционные системы (механические руки). В настоящее время подавляющее большинство таких систем следует парадигме жесткого, удерживающего захвата объекта и фиксированной операционной локации. Вместе с тем систематически в повестку дня внедряются практические задачи, где необходим мягкий, неударивающий захват и/или объект манипулирования податлив, а также оперативная интеракция мобильных и манипуляционных функций. Такие задачи сейчас попадают в практически малоисследованную область, разработка которой требует решения ряда фундаментальных проблем, в том числе в области теории. В этом направлении с 2010-х гг. систематически работает группа выпускников КТК (А.С. Ширяев, С.В. Гусев). В ее активе — разработка во многом пионерских математических методов анализа динамики и синтеза регуляторов для решения соответствующих задач, в частности метод подвижных площадок Пуанкаре и трансверсальной линеаризации, скоростные методы решения специальных матричных дифференциальных уравнений Риккати, общие методы поиска периодических движений, реализуемых в сложных неполноприводных механических системах, и др. [158–160]. Эффективность этих разработок была в частности продемонстрирована в 2015 г. первым в мире решением (доведенным до практического эксперимента) поставленной в 1998 г. К. Линчем сложной прототипической задачи стабилизации кругового движения шарика по вращающейся направляющей, имеющей форму бабочки [160]⁵.

В фокусе раздела, именуемого мобильной робототехникой, — автономная навигация подвижных роботов и управление их движением в априори неизвестных средах с препятствиями. Это направление с 2010-х гг. системно разрабатывает группа мобильной роботики КТК (А.С. Матвеев, А.А. Семакова, П.А. Коновалов) при участии (до 2017 г.) А.В. Савкина. Здесь был получен целый ряд фундаментальных результатов по алгоритмам навигации роботов, в том числе распределенному управлению их многоагентными ансамблями, в сложных, в том числе подвижных и непредсказуемых средах; частично они систематизированы в двух монографиях [161, 162], выпущенных в 2015 и 2016 гг. ведущими мировыми издателями научной литературы. Специфика работ группы — экономные с точки зрения используемых (вычислительных, энергетических и др.) ресурсов и сенсорных данных о среде алгоритмы, рефлексоподобным образом конвертирующие текущее наблюдение в текущее управление (как следствие, с минималистскими требованиями к бортовым процессорам) и тем не менее снабженные математически строгими гаран-

⁵ <https://www.youtube.com/watch?v=kyvW5sOcZHU>

тиями достижения результата. По данным WoS за 2022 г., из пяти наиболее цитируемых публикаций по робототехнике аффилированных к РФ, четыре относятся к КТК, в том числе наиболее цитируемая статья [163] (279 цитирований).

Математические методы уже давно применяются для количественного и качественного изучения процессов и систем, в той или иной мере относящихся к сфере биологии и медицины. В этом направлении в начале 2000-х А.С. Матвеевым и А.В. Савкиным был выполнен цикл работ по изучению оптимальных протоколов химиотерапевтического лечения онкологических заболеваний [164]. Начиная с середины 2000-х гг. сотрудниками КТК (А.Н. Чурилов, А.И. Шепелявый) совместно с Упсальским университетом (Швеция) велись систематические исследования по моделированию и анализу биологических ритмов и хаотической динамики в нейрогормональных системах [165, 166]. Начиная с 2010-х гг. научные направления школы включают работы по нейроуправлению и нейророботике, которые опираются на математическое исследование сетей биологических нейронов. Эти разработки лежат на стыке кибернетики и нейронаук, от которого во всем мире ожидают прорывов в медицинской диагностике, а также в управлении роботами и другими устройствами силой мысли (без участия мышц человека). В настоящее время под руководством А.Л.Фрадкова в СПбГУ выполняется грант по этой тематике. Эти работы ведутся совместно с биофаком СПбГУ, Институтом мозга человека РАН, Институтом проблем машиноведения РАН, Балтийским федеральным университетом им И. Канта. В работах активно участвуют молодые представители школы М. Липкович, С.А. Плотников.

Представители научной школы преподавали и преподают в различных вузах страны. Только в Санкт-Петербурге среди них (как ныне действующих, так и ушедших) декан математико-механического факультета СПбГУ, лауреат Государственной премии СССР, член корреспондент Российской академии наук Г.А. Леонов, заведующий кафедрой прикладной кибернетики СПбГУ, член корреспондент Российской академии наук Н.В. Кузнецов, профессор кафедры системного программирования О.Н. Граничин, профессора А.В. Тимофеев (СПбГУАП), А.Н. Чурилов (СПбГМТУ), В.Б. Смирнова (СПбГАСУ), Н.Е. Барабанов (СПбГЭТУ), заведующие лабораториями академических институтов А.В. Тимофеев (СПИИРАН), А.Л. Фрадков (ИПМаш РАН). В 1970-е и в 1990-е гг. ряд талантливых выпускников кафедры уехали из страны, среди них Б.Г. Питтель, М.В. Левит, Б.Д. Любачевский. Некоторые из них стали профессорами в зарубежных университетах: А. Мегрецкий (Массачусетский технологический институт, США), Н. Барабанов (университет Северной Дакоты, США), А. Савкин (университет Нового Южного Уэльса, Австралия), А. Ширяев (университет г. Умеа, Швеция и Норвежский университет наук и технологий г. Трондхейм).

Значительное место в деятельности школы занимает научно-организационная работа. В качестве примеров укажем, что с 1967 г. В.А. Якубович был заместителем председателя (ректора Ленинградского электротехниче-

ского университета А.А. Вавилова) и по совместительству председателем секции “Теория адаптивных систем управления” Ленинградской территориальной группы Национального комитета по автоматическому управлению. Заметное место в научно-организационном пейзаже страны занимала серия из шести Ленинградских симпозиумов и одной Всесоюзной конференции по теории адаптивных систем, проводившаяся по инициативе В.А. Якубовича и под его руководством в период с 1972 по 1999 гг. Эта серия явилась знаком признания заслуг научной школы В.А. Якубовича в области адаптивных систем, а ее события были важными вехами в развитии этой области, которая в те годы была одной из главных точек роста математической теории управления и кибернетики и привлекала интерес как талантливой молодежи, так и маститых ученых: количество докладов и участников обычно исчислялись сотнями. На симпозиумах выступали лидеры отечественной, а начиная с 1990-х гг., и зарубежной науки. Среди них — академики Я.З. Цыпкин, А.А. Красовский, Е.П. Попов, Н.Н. Моисеев, доктора наук Д.А. Поспелов, В.Ю. Рутковский, Ю.И. Неймарк, А.А. Первозванский, Р.М. Юсупов, а также Дж. Бартолини (Италия), С. Биттанци (Италия), В. Резван (Румыния), А. Халанай (Румыния), Л. Льюнг (Швеция), Я. Ландо (Франция), А. Линдквист (Швеция), Д. Шильяк (США), К. Фурута (Япония) и др. В 1972 г. с пленарным докладом выступил доктор технических наук, экс-чемпион мира по шахматам М.М. Ботвинник, рассказавший о разработке компьютерного алгоритма шахматной игры. Ученым секретарем мероприятий серии вначале был доцент кафедры систем автоматического управления Ленинградского механического института Д.П. Деревницкий, а впоследствии А.Л. Фрадков. В научно-организационной работе КТК традиционно и тесно сотрудничает с лабораторией управления сложными системами Института проблем машиноведения РАН, созданной в 1990 г. А.Л. Фрадковым и возглавляемой им по настоящее время. Эта лаборатория тесно связана с кафедрой как научными интересами, так и по учебной работе.

Коллектив ведет профориентационную работу с молодежью в области кибернетики. В 1999 г. группа специалистов в области автоматики и систем управления из нескольких вузов города предложила проводить школьные олимпиады по кибернетике. Идея была поддержана заведующим отделом науки и техники Санкт-Петербургского городского Дворца творчества юных (Аничков дворец) В.П. Тарасовым, и дело пошло: в 1999–2013 гг. было проведено 14 олимпиад. В их организации и проведении с самого начала активное участие принимали представители школы М.С. Ананьевский, А.Л. Фрадков, А.С. Матвеев. Материалы олимпиад и некоторые методические выводы были суммированы в серии выпущенных (во многом благодаря труду и энергии М.С. Ананьевского) по их итогам сборников.

В 2008 г. на кафедре теретической кибернетики был организован кружок по кибернетике для студентов младших курсов на базе кибернетического конструктора LEGO Mindstorms NXT. Одновременно с изучением теории управления студенты получили возможность реализовать алгоритмы управ-

ления на физических объектах, связать теоретические знания с практикой. На занятиях кружка студенты самостоятельно разрабатывали оригинальные конструкции: робот-велосипедист, сигвей, ползающий робот, робот-хищник и др. Лучшие работы представлялись на Шоу роботов на Неделе математико-механического факультета СПбГУ. Тогда же завязалось творческое сотрудничество с руководимым С.А. Филипповым Центром робототехники Президентского физ.-мат. лицея (ПФМЛ) № 239. Опыт сотрудничества был представлен на нескольких международных конференциях [167, 168]. В организации и руководстве кружком важную роль сыграл энтузиазм сотрудника и преподавателя КТК Р.М. Лучина. Одним из направлений его работы стал футбол роботов. Первые городские соревнования радиоуправляемых роботов были проведены в 2012 г., а через год на поле выходили уже автономные роботы.

Опыт работы с ЛЕГО привел группу энтузиастов (Р.М. Лучин, С.А. Филиппов, А.Н. Терехов) к идее разработать собственный конструктор, более передовой, чем ЛЕГО. Было основано ООО “Кибернетические технологии”, где были разработаны Универсальный кибернетический конструктор ТРИК и необходимое программное обеспечение, позволяющие реализовать массу разнообразных проектов, начиная с базовых образовательных и до современных исследовательских, которые стали использоваться в школах и вузах России. В 2018 г. в ежегодном аналитическом обзоре мирового рынка робототехники, выполненном лабораторией робототехники Сбербанка, указанная компания упомянута в качестве одного из пока немногих безусловных успехов России на этом рынке. К сожалению, Р.М. Лучин безвременно ушел в молодом возрасте вследствие пандемии COVID-19. Его дело продолжает его ученик, сотрудник КТК И.Ю. Широколов. В 2019 г. созданная совместными усилиями команда роботов-футболистов URoboRus первой из российских команд прошла квалификационный этап на соревнованиях RoboCup SSL — своего рода чемпионате мира. В 2020 г. URoboRus снова прошла квалификационный этап, но соревнования отменили из-за пандемии. В 2021 г. соревнования проводились в онлайн формате и команде URoboRus впервые удалось поучаствовать в основном турнире, заняв в групповом турнире первое место в своей группе. 2022 г. — снова успешная квалификация на чемпионат мира RoboCup SSL, а также первое очное участие: оно произошло в г. Сан-Паоло в университете FEI на открытом чемпионате Бразилии RoboCup Brazil Open.

В значительной степени благодаря усилиям коллектива КТК, а также поддержке ПФМЛ № 239 в 2019 г. в СПбГУ был создан Научно-образовательный Центр (НОЦ) “Математическая робототехника и искусственный интеллект”. Его директором с момента основания является К.С. Амелин (ученик О.Н. Граничина), а научным руководителем — А.Л. Фрадков. Центр призван интегрировать усилия СПбГУ в фундаментальных исследованиях по математической и образовательной робототехнике и интеллектуальному управлению. Среди направлений работы НОЦ — вопросы навигации мобильных

роботов и их многоагентных сетевых ансамблей, управления неполноприводными манипуляторами, компьютерного зрения, искусственного интеллекта, машинного обучения и обработки больших данных, нейросетевого управления, методы и средства программирования и отладки роботов, образовательная и практическая робототехника. В 2022 г. экспериментальный парк НОЦ включал квадрокоптеры Геоскан Пионер и комплекты универсального кибернетического конструктора ТРИК. При активном участии студентов СПбГУ и частично с использованием указанного парка в НОЦ уже выполнен целый ряд прикладных проектов, в частности, по инвентаризации лесоматериалов роботизированными квадрокоптерами, поиску человека, заблудившегося в лесу, полуавтоматическому сбросу GPS маячков на ледники для мониторинга их передвижения, автоматическому облету территорий заповедников, контролю опор мостов, увеличению скорости передачи данных в больших беспроводных сетях и др.

Дополнительная информация о кафедре доступна в тематических выпусках российских и международных научных журналов [169–171], посвященных юбилеям сотрудников КТК, и в сборнике статей [3]. Научная продукция школы исчисляется многими сотнями публикаций, среди которых более шести десятков книг. «Птенцы гнезда» В.А. Якубовича плодотворно работают во многих российских и зарубежных научно-педагогических учреждениях, ими защищено свыше сотни диссертаций по физико-математическим и техническим наукам, в том числе 19 докторских.

Влияние достижений кафедры и школы заметно при распределении мест университетов в мировых рейтингах. Например, по данным предметного Шанхайского рейтинга университетов ARWU (Academic Ranking of World Universities) в 2018 г. СПбГУ занял 32-е место по направлению «Автоматизация и управление» (Automation and Control). При этом число публикаций сотрудников КТК в топовых журналах по направлению “Автоматизация и управление”, учитывавшихся при составлении рейтинга ARWU примерно равно 28% (24 из 85) от всех российских публикаций в таких журналах за 2012–2016 гг.

Представителям школы неоднократно присуждались престижные российские и международные премии и звания. В 1998 г. В.А. Якубовичу присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки Российской Федерации», а в 2005 г. он награжден «Орденом Почета». В.А. Якубович был членом-корреспондентом РАН и академиком РАЕН, в 2006 г. был избран почетным профессором СПбГУ. А.Л. Фрадков был удостоен международных почетных званий IFAC Fellow, IEEE Life Fellow, AAIA Fellow. В 2015 г. выпускник КТК 1998 г. Алексей Павлов с коллегами из технического ун-та Эйндрховена получил престижную международную премию IEEE Control Systems Technology award, а в 2020 г. выпускник КТК А.В. Проскурников с соавторами — IFAC and Elsevier paper prize award for the best paper published in Annual Reviews in Control in 2017–2020 (AV Proskurnikov, R Tempo, A Tutorial on Modeling and Analysis of Dynamic Social Networks. Part I, Annual Reviews

in Control 43, 65–79. Аналогичная награда за лучшую статью 2020–2022 гг. присуждена за обзор [76]. В 2018 г. А.Л. Фрадкову присуждена Премия РАН им. А.А. Андропова за цикл работ «Синхронизация и управление нелинейными колебаниями» (совместно с И.И. Блехманом).

После ухода в 2012 г. основателя и многолетнего руководителя КТК, основателя научной школы кибернетики и искусственного интеллекта в Санкт-Петербурге Владимира Андреевича Якубовича кафедрой последовательно руководили его ближайшие коллеги и ученики — А.Х. Гелиг, А.Л. Фрадков и с 2021 г. А.С. Матвеев. Творческой биографии и научным достижениям В.А. Якубовича посвящено несколько тематических сборников, публикаций и выступлений, а также проводившаяся в Санкт-Петербурге в 2015 г. 1-я международная конференция Международной Федерации Автоматического Управления «Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems» (MICNON 2015) [172–174]. Сотрудниками КТК подготовлен и выпущен CD-ROM, содержащий более трехсот основных трудов В.А. Якубовича.

Авторы статьи выражают признательность К.С. Амелину, В.А. Бондарко, С.В. Гусеву, П.А. Коновалову, А.Н. Чурилову и И.Ю. Широколову, любезно предоставившими свои материалы и воспоминания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шепелявый А.И.* Кафедра теоретической кибернетики на математико-механическом факультете СПбГУ // Вестник Санкт-Петербургского университета. 2000. Сер. 1. Вып. 1. С. 3–15.
2. *Фрадков А.Л.* Научная школа по теоретической кибернетике В.А. Якубовича в Санкт-Петербургском (Ленинградском) университете / История информатики и кибернетики в Санкт-Петербурге (Ленинграде). Под. ред. Юсупова Р.М. 2008, С. 79–83.
3. Нелинейные системы. Частотные и матричные неравенства. К 80-летию со дня рождения В.А. Якубовича / Под ред. Гелига А.Х., Леонова Г.А., Фрадкова А.Л. М.: Физматлит, 2008.
4. *Соболев С.Л., Китов А.И., Ляпунов А.А.* Основные черты кибернетики // Вопросы философии. 1955. № 4. С. 136–148.
5. *Колмогоров А.Н.* Кибернетика // Большая советская энциклопедия, 2-е изд., т. 51. М.: Большая советская энциклопедия. 1958. С. 149–151.
6. *Винер Н.* Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. М.: Сов. радио, 1958. (Wiener N. Cybernetics: or Control and Communication in the Animal and the Machine, Cambridge: MIT Press, 1948).
7. *Якубович В.А.* Машины, обучающиеся распознаванию образов // Сб. ВЦ ЛГУ. 1963. Вып. 2. С. 95–131.
8. *Якубович В.А.* Некоторые общие принципы построения обучаемых опознающих систем. I / Вычислительная техника и вопросы программирования. Л.: Изд-во ЛГУ, 1965. С. 3–71.

9. *Якубович В.А.* Три теоретические схемы обучающихся систем / Самообучающиеся автоматические системы. М.: Наука, 1966.
10. *Якубович В.А.* Машины, обучающиеся распознаванию образов // Вестник СПб универ-та. Математика. Механика. Астрономия. (I): 2021. Т. 8(66). Вып. 4. С. 625–638. (II): 2022. 9(1). Вып. 1. С. 94–112.
11. *Козинец Б.Н., Ланцман Р.М., Якубович В.А.* Криминалистическая экспертиза близких почерков при помощи электронно-вычислительных машин // ДАН СССР. 1966. Т. 167. № 8. С. 1008–1011.
12. *Гелиг А.Х., Якубович В.А.* Применение обучаемых опознающих систем для выделения сигнала из шума / Вычислительная техника и вопросы кибернетики. № 5. Л.: Изд-во ЛГУ, 1968. С. 95–100.
13. *Шмидт А.А., Харичев В.В., Якубович В.А.* Об одной новой задаче распознавания образов // АиТ. 1973. № 1. С. 109–122.
14. *Козинец Б.Н., Ланцман Р.М., Якубович В.А.* К задаче распознавания и описания сложных изображений // Тр. Междунар. симпозиума ИФАК. Тбилиси, 1975. С. 207–250.
15. *Фомин В.Н.* Математическая теория обучающихся опознающих систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.
16. *Гелиг А.Х., Матвеев А.С.* Введение в математическую теорию обучаемых распознающих систем и нейронных сетей. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2014.
17. *Якубович В.А.* Рекуррентные конечно-сходящиеся алгоритмы решения систем неравенств // ДАН СССР. 1966. Т. 166. № 6. С. 1308–1312.
18. *Якубович В.А.* Метод рекуррентных целевых неравенств в теории адаптивных систем // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М.;Л.: Изд-во АН СССР, Науч. совет по комплексной проблеме «Кибернетика», 1976. С. 32–64.
19. *Цыпкин Я.З.* Адаптация, обучение и самообучение в автоматических системах // АиТ. 1966. № 1. С. 23–61.
20. *Цыпкин Я.З.* Адаптация и обучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968.
21. *Якубович В.А.* К теории адаптивных систем // ДАН СССР. 1968. № 3. С. 518–522.
22. *Якубович В.А.* Адаптивные системы с многошаговыми целевыми условиями // ДАН СССР. 1968. Т. 183. № 2. С. 303–306.
23. *Фомин В.Н., Фраджов А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
24. *Якубович В.А.* Метод рекуррентных целевых неравенств в адаптивном управлении / Гл. 11 в книге “Справочник по теории автоматического управления”. М.: Наука, 1987. С. 501–526.
25. *Bondarko V.A., Yakubovich V.A.* The method of recursive aim inequalities in adaptive control theory // Int. J. Adaptive Control and Signal Proc. 1992. V. 6. P. 141–160.
26. *Бондарко В.А.* Адаптивные субоптимальные системы с переменной размерностью вектора настраиваемых параметров // АиТ. 2006. № 11. С. 38–59.

27. Тимофеев А.В. Роботы и искусственный интеллект. М.: Наука, 1978.
28. Тимофеев А.В. Адаптивные робототехнические комплексы. М.: Машиностроение. 1988.
29. Тимофеев А.В. Управление роботами. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1986.
30. Gusev S.V., Timofeev A.V., Yakubovich V.A. On a hierarchical system of integral robot control / In Proc. of the 4th International Joint Conference on Artificial Intelligence (Moscow). 1975. V. 9. P. 53–61.
31. Гусев С.В., Якубович В.А. Алгоритм адаптивного управления роботом-манипулятором // АИТ. 1980. № 9. С. 101–111.
32. Якубович В.А. Об одной задаче самообучения целесообразному поведению // АИТ. 1969. № 8. С. 119–139.
33. Любачевский Б.Д., Якубович В.А. Адаптивное управление устойчивыми динамическими объектами // АИТ. 1974. № 4. С. 116–127.
34. Якубович В.А. Об организации «мозга» адаптивных систем с одношаговым целевым условием / Проблемы бионики. М.: Наука, 1973. С. 355–360.
35. Yakubovich V.A. On a method of adaptive control under conditions of great uncertainty // Preprints of the 5th World Congress IFAC (Paris). 1972. V. 37. No. 3. P. 1–6.
36. Grigor'ev G.G., Gusev S.V., Nesterov V.V., Yakubovich V.A. Mobile robot-manipulator adaptive control / In Proc. of the Soviet Conference "Adaptive Robots", 1982. P. 89–91. Moscow. (In Russian).
37. Беленков Б.А., Гусев С.В., Зотов Ю.К., Ружанский В.И., Тимофеев А.В., Фролов Р.Б., Якубович В.А. Адаптивная система управления автономным подвижным роботом // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1978. № 6. С. 52–63.
38. Тимофеев А.В., Якубович В.А. Адаптивное управление программным движением робота-манипулятора / Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М.-Л.: Изд-во АН СССР, Науч. совет по комплексной проблеме «Кибернетика». 1976. С. 170–174.
39. Гелиг А.Х. Адаптивная система управления роботом «глаз-рука» / Вопросы кибернетики: Адаптивные системы. М.: Научный совет по комплексн. проблеме «Кибернетика» АН СССР. 1976. С. 162–163.
40. Аксенов Г.С., Фомин В.Н. К задаче адаптивного управления манипулятором. Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М.;Л.: Изд-во АН СССР, Науч. совет по по комплексной проблеме «Кибернетика». 1976. С. 165–168.
41. Фрадков А.Л. Схема скоростного градиента и ее применение в задачах адаптивного управления // АИТ. 1979. № 9. С. 90–101.
42. Фрадков А.Л. Кибернетическая физика: принципы и примеры. СПб.: Наука, 2003.
43. Fradkov A.L., Shalymov D.S. Speed Gradient and MaxEnt Principles for Shannon and Tsallis Entropies // Entropy. 2015. 17(3). P. 1090–1102.
44. Granovskaya R.M., Bereznaya I.Y. Experiments on human pattern recognition: a hierarchical sign-system approach // Pattern Recognition. 1980. V. 12. I. 1. P. 17–26.

45. *Granovskaya R.M., Bereznaia I.Y.* Consciousness as the unity of higher psychic processes // *Kybernetes*. 1988. V. 17. I. 2. P. 35–43.
46. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
47. *Якубович В.А.* Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования // *ДАН СССР*. 1962. Т. 143. № 6. С. 1304–1307.
48. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
Yakubovich V.A., Leonov G.A., Gelig A.Kh. Stability of Stationary Sets in Control Systems with Discontinuous Nonlinearities. World Scientific, Singapore, 2004.
49. *Якубович В.А.* Частотная теорема в теории управления // *Сиб. мат. журн.* 1973. Т. 14. № 2. С. 384–420.
50. *Лихтарников А.Л., Якубович В.А.* Частотная теорема для уравнений эволюционного типа // *Сиб. мат. журн.* 1976. Т. 17. № 5. С. 1069–1085.
51. *Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И.* Частотные методы в теории колебаний. Часть I. Многомерные аналоги уравнения Ван-дер-Поля и динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. Часть 2. Проблема Айзермана и частотные оценки хаусдорфовой размерности аттракторов. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992.
Leonov G.A., Burkin I.M., Shepeljavyi A.I. Frequency Methods in Oscillations Theory. Dordrecht: Kluwer, 1996.
52. *Левит М.В.* Частотный критерий абсолютной стохастической устойчивости нелинейных систем дифференциальных уравнений Ито // *Успехи математических наук*. 1972. Том XXVII. Вып. 4(166). С. 215–216.
53. *Левит М.В., Якубович В.А.* Алгебраические критерии стохастической устойчивости линейных систем с параметрическим воздействием типа белый шум // *ПММ*. 1972. Вып. 1. С. 142–148.
54. *Антонов В.Г., Лихтарников А.Л., Якубович В.А.* Дискретная частотная теорема для случая гильбертовых пространств состояний и управлений // *Вестник ЛГУ. Сер. мат., мех., астр.* 1975. Вып. 1. С. 22–31.
Antonov V.G., Likhtarnikov A.L., Yakubovich V.A. A discrete frequency theorem for the case of Hilbert spaces of states and controls. I // *Vestnik Leningr. Univ. Math.* 1980. V. 8. P. 1–11.
55. *Фрадков А.Л.* Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта // *АиТ*. 1974. № 12. С. 96–103.
Fradkov A.L. Synthesis of adaptive system of stabilization for linear dynamic plants // *Autom. Remote Control*. 1974. P. 1960–1966.
56. *Фрадков А.Л.* Квадратичные функции Ляпунова в задаче адаптивной стабилизации линейного динамического объекта // *Сиб. мат. журн.* 1976. № 2. С. 436–446.
Fradkov A.L. Quadratic Lyapunov functions in adaptive stabilization problem of a linear dynamic plant // *Sib. Math. J.* 1976. № 17 (2). P. 341–348.

57. Бондарко В.А., Лихтарников А.Л., Фрадков А.Л. Синтез адаптивной системы стабилизации линейного объекта с распределенными параметрами // *АиТ*. 1979. № 12. Р. 95–103.
Bondarko V.A., Likhtarnikov A.L., Fradkov A.L. Design of an adaptive system for stabilizing a linear object with distributed parameters // *Autom. Remote Control*. 1979. V. 40. No. 12. P. 1785–1792.
58. Лихтарников А.Л., Якубович В.А. Частотная теорема для непрерывных однопараметрических полугрупп // *Известия АН СССР. Сер. мат. Т. 41. № 4. С. 895–911.*
Lihtarnikov A.L., Jakubovic V.A. The frequency theorem for continuous one-parameter semigroups // *Izvestiya: Mathematics*, 1977. V. 11. No. 4. P. 849–864.
59. Гусев С.В. Лемма Калмана–Попова–Якубовича для упорядоченных полей // *АиТ*. 2014. № 1. С. 23–41.
Gusev S.V. Kalman–Popov–Yakubovich lemma for ordered fields // *Autom. Remote Control*. 2014. 75 (1). P. 18–33.
60. Пакишин П.В. Устойчивость одного класса нелинейных стохастических систем // *АиТ*. 1977. № 4. С. 27–36.
61. Брусин В.А. Глобальная устойчивость и дихотомия класса нелинейных систем со случайными параметрами // *Сиб. мат. журн.* 1981. Т. 22. № 2. С. 57–73.
62. Брусин В.А., Угриновский В.А. Исследование стохастической устойчивости некоторого класса нелинейных дифференциальных уравнений типа Ито // *Сиб. мат. журн.* 1987. Т. 28. № 3. С. 35–50.
63. Угриновский В.А. Стохастический аналог частотной теоремы // *Изв. ВУЗов. Математика*. 1987. № 10. С. 37–43.
64. Brusin V.A., Ugrinovskii V.A. Absolute stability approach to stochastic stability of infinite-dimensional nonlinear systems // *Automatica*. 1995. V. 31. № 10. P. 1453–1458.
65. Барабанов А.Е., Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Лихтарников А.Л., Матвеев А.С., Смирнова В.Б., Фрадков А.Л. Частотная теорема (лемма Якубовича–Калмана) в теории управления // *АиТ*. 1996. № 10. С. 3–40.
66. Гусев С.В., Лихтарников А.Л. Очерк истории леммы Калмана–Попова–Якубовича и S-процедуры // *АиТ*. 2006. № 11. С. 77–121.
67. Seron M.M., Hill D.J., Fradkov A.L. Adaptive passification of nonlinear systems *Proc. 33rd IEEE Conf. Dec. Contr.*, 1994. P. 190–195.
68. Jiang Z.P., Hill D.J., Fradkov A.L. A passification approach to adaptive nonlinear stabilization // *Syst. Control. Lett.* 1996. V. 28. P. 73–84.
69. Fradkov A.L. Passification of nonsquare linear systems and feedback Yakubovich–Kalman–Popov Lemma // *Europ. J. Contr.* 2003. № 6. P. 573–582.
70. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Метод пассивации в задачах адаптивного управления, оценивания и синхронизации // *АиТ*. 2006. № 11. С. 3–37.
Andrievskii B.R., Fradkov A.L. Method of Passification in Adaptive Control, Estimation, and Synchronization. // *Autom. Remote Control*. 2006. Vol. 67. No. 11. P. 1699–1731.

71. *Xie L.H., Fu M.Y., Li H.Z.* Passivity analysis and passification for uncertain signal processing systems // *IEEE Transactions On Signal Processing*. 1998. V. 46. Is. 9. P. 2394–2403.
72. *Mahmoud M.S., Ismail A.* Passivity and passification of time-delay systems // *Journal Of Mathematical Analysis And Applications*. 2004. V. 292. Is. 1. P. 247–258.
73. *Xia M., Rahnama A., Wang A., Antsaklis P.J.* Control Design Using Passivation for Stability and Performance // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2018. V. 63. No. 9. P. 2987–2993.
74. *Пыркин А.А., Арановский С.В., Бобцов А.А., Колюбин С.А., Николаев Н.А.* Управление многоканальными нелинейными системами вида Лурье на основе теоремы Фрадкова // *АиТ*. 2018. № 6. P. 140–154.
Pyrkin A.A., Aranovskiy S.V., Bobtsov A.A., Kolyubin S.A., Nikolaev N.A. Fradkov theorem-based control of MIMO nonlinear Lurie systems // *Autom. Remote Control*. 2018. V. 79. No. 6. P. 1074–1085.
75. *Tomashevich S., Belyavskiy A.* Passification based simple adaptive control of quadrotor // *IFAC-PapersOnLine*. 2016. V. 49. No. 13. P. 281–286.
76. *Annaswamy Anuradha M., Fradkov Alexander L.* A Historical Perspective of Adaptive Control and Learning // *Annual Reviews in Control*. 2021. No. 52. P. 18–41.
77. *Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., Balakrishnan A.V.* Linear matrix inequalities in systems and control theory /Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA. 1994.
78. *Kalman R.E.* Contributions to the theory of optimal control // *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*. 1960. Vol. 2. Is. 2. P. 102–119.
79. *Красовский Н.Н.* Задача стабилизации управляемого движения, Добавление 4 в кн. “Теория устойчивости движения Малкин И.” М: Наука, 1976.
80. *Летов А.М.* Аналитический синтез регуляторов // *АиТ*. 1960. Т. 4. С. 436–446; Т. 5. С. 561–571.
81. *Колмогоров А.Н.* Интерполирование и экстраполирование случайных последовательностей // *Изв. АН СССР, Матем.* 1941. Т. 5. С. 3–14.
82. *Wiener N.* Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. Cambridge, 1949.
83. *Busy R.S., Joseph P.D.* Filtering of stochastic processes with application to guidance. N.Y., London, 1968.
84. *Trentelman H.* Linear Quadratic Optimal Control. In: Baillieul, J., Samad, T. (eds) *Encyclopedia of Systems and Control*. 2013, Springer, London.
85. *Megretski A.V., Yakubovich V.A.* Singular stationary nonhomogeneous linear-quadratic optimal control // *Transactions of the American Mathematical Society*. 1993. Vol. 155. P. 129–167.
86. *Якубович В.А.* Минимизация квадратичных функционалов при квадратичных ограничениях и необходимость частотного условия абсолютной устойчивости нелинейных систем управления // *ДАН СССР*. 1973. Т. 209. С. 1039–1042.
87. *Megretsky A.* Necessary and sufficient conditions of stability: A multiloop generalization of the circle criterion // *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-38. 1993. Vol. 5. P. 753–756.

88. *Savkin A.V., Petersen I.R.* Minimax optimal control of uncertain systems with structured uncertainty // Int. J. of Robust and Nonlinear Control. 1995. Vol. 5. P. 119–138.
89. *Morari M.* Some control problems in the process industries, in Essays on Control: Perspectives in Theory and Applications, ed. H.L. Trentelman and J.C. and Willems / Progress in System and Control Theory. 1993. Vol. 14. P. 55–77.
90. *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
91. *Гантмахер Ф.Р., Якубович В.А.* Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем Тр. II Всесоюз. съезда по теоретической и прикладной механике. М.: Наука, 1965.
92. *Якубович В.А.* S-процедура в нелинейной теории регулирования // Вестник ЛГУ. Серия Математика, механика, астрономия. 1971. № 1. С. 62–77.
93. *Фрадков А.Л., Якубович В.А.* S-процедура и соотношение двойственности в невыпуклых задачах квадратичного программирования // Вестн. Ленингр. ун-та. 1973. № 1. С. 71–76.
94. *Halmos P.R.* A Hilbert Space Problem Book, D. Van Nostrand Company Inc., Princeton, New Jersey, Toronto, London, 1982.
95. *Megretsky A., Treil S., Fradkov A.L.* Power distribution inequalities in optimization and robustness of uncertain systems // J. Math. Systems, Estimation, Control. 1993. Vol. 3. No. 3. P. 301–319.
96. *Матвеев А.С., Якубович В.А.* Невыпуклые задачи глобальной оптимизации // Алгебра и Анализ. 1992. Т. 4. С. 189–219.
97. *Матвеев А.С.* Лагранжева двойственность в теории невыпуклой оптимизации и модификации теоремы Теплица–Хаусдорфа // Алгебра и Анализ. 1995. Т. 7. Вып. 5. С. 126–159.
98. *Матвеев А.С.* О выпуклости образов квадратичных отображений // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. № 2. С. 159–196.
99. *Matveev A.S.* Spectral approach to duality in nonconvex global optimization // SIAM J. Control and Optim. 1998. V. 36. No. 1. P. 336–378.
100. *Polyak B.T.*, Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization // J. Optimizat. Theor. and Appl. 1998. 99:3. P. 553–583.
101. *Поляк Б.Т.* Локальное программирование // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. 41:9. С. 1324–1331.
102. *Iwasaki T., Meinsma G., Fu M.* Generalized S-procedure and finite frequency KYP lemma // Mathematical Problems in Engineering. 2000. No. 6. P. 305–320.
103. *Iwasaki T., Hara S.* Generalized KYP lemma: unified frequency domain inequalities with design applications // IEEE Transactions on Automatic Control. 2005. No. 50(1). P. 41–59.
104. *Iwasaki T., Hara S., Fradkov A.* Time domain interpretations of frequency domain inequalities on (semi)finite ranges // Systems & Control Letters. 2005. No. 54(7). P. 681–691.
105. *Fradkov A.L.* Conic S-procedure and constrained dissipativity for linear systems // Intern. J. of Robust and Nonlinear Control. 2007. Volume 17. Issue 5–6. P. 405–413.

106. *Sun W., Gao H., Kaynak O.* Finite Frequency H_∞ Control for Vehicle Active Suspension Systems // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2011. vol. 19. No. 2. P. 416–422.
107. *Tan Y.Z., Pang C.K., Hong F., et al.* Integrated servo-mechanical design of high-performance mechatronics using generalized KYP Lemma // Microsyst Technol. 2013. 19. P. 1549–1557.
108. *Paszke W., Rogers E., Galkowski K.* Experimentally verified generalized KYP lemma based iterative learning control design // Control Engineering Practice. 2016. No. 53. P. 57–67.
109. *Yakubovich V.A.* Nonconvex optimization problem // Systems & Control Letters. 1992. V. 19. P. 13–22.
110. *Якубович В.А.* Об одном методе решения специальных задач глобальной оптимизации // Вест. СПбУ, сер. 1. 1992. С. 58–68.
111. *Матвеев А.С., Якубович В.А.* Абстрактная теория оптимального управления. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1994.
112. *Матвеев А.С., Якубович В.А.* Оптимальные системы управления: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи Учеб. пособие. Изд-во СПбГУ, 2003.
113. *Гелиг А.Х., Чурилов А.Н.* Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1993.
Gelig A.Kh., Churilov A.N. Stability and Oscillations of Nonlinear Pulse-Modulated Systems. Boston/Basel/Berlin: Birkhauser, 1998.
114. *Гелиг А.Х., Зубер И.Е., Чурилов А.Н.* Чурилов А.Н. Устойчивость и стабилизация нелинейных систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2006.
115. *Гелиг А.Х.* Динамика импульсных систем и нейронных сетей. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982.
116. *Фомин В.Н.* Математическая теория обучаемых опознающих систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.
117. *Фомин В.Н.* Методы управления линейными дискретными объектами. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1984.
Fomin V.N. Discrete Linear Control Systems. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1991.
118. *Fomin V.* Optimal Filtering. V.1: Filtering of Stochastic Processes. Kluwer Acad. Publ., V. 481, 1998, V. 2: Spatio-Temporal Fields. Kluwer Acad. Publ., V. 481, 1999.
119. *Фомин В.Н.* Оптимальная и адаптивная фильтрация. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2001.
120. *Леонов Г.А., Смирнова В.Б.* Математические проблемы теории фазовой синхронизации, СПб.: Наука, 2000.
121. *Leonov G.A., Ponomarenko D.V., Smirnova V.B.* Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis. Theory and Application. World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A. Vol. 9, 1996.
122. *Леонов Г.А., Шумафов М.М.* Методы стабилизации линейных управляемых систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005.

123. *Leonov G.A.* Mathematical problems of control theory, World Scientific, 2002.
124. *Леонов Г.А.* Теория управления, СПб.: Изд-во СПбГУ, 2006.
125. *Леонов Г.А.* Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. Москва–Ижевск, 2006.
126. *Барабанов А.Е., Граничин О.Н.* Оптимальное управление линейным объектом с ограниченной помехой // *АиТ.* 1984. № 5. С. 39–46.
127. *Барабанов А.Е.* Синтез оптимальных регуляторов. СПб.: Изд-во СПбГУ. 1996.
128. *Граничин О.Н., Поляк Б.Т.* Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. М.: Наука, 2003.
129. *Granichin O., Amelina N.* Simultaneous perturbation stochastic approximation for tracking under unknown but bounded disturbances // *IEEE Transactions on Automatic Control.* 2015. 60 (6). P. 1653–1658.
130. *Matveev A.S., Savkin A.V.* Qualitative Theory of Hybrid Dynamical Systems, Birkhauser, Boston, 2000.
131. *Bondarko V.A.* Discretization of continuous linear dynamic systems. Analysis of the methods // *Systems & Control Letters.* November 1984. V. 5, Issue 2. P. 97–101.
132. *Бондарко В.А.* Асимптотика нулей дискретной модели линейной непрерывной системы с запаздыванием // *АиТ.* 2015. № 8. С. 3–26.
Bondarko V.A. Asymptotic behavior of the zeros of a discrete model of a linear continuous system with delay // *Autom. Remote Control.* 2015. V. 76. No. 8. P. 1327–1346.
133. *Якубович В.А.* Универсальные регуляторы в задачах инвариантности и отслеживания // *Докл. РАН.* 1995. Т. 343. № 2. С. 172–175.
134. *Yakubovich V.A.* Universal Regulators in Linear-Quadratic Optimization Problem // *Trends in Control: European Perspective.* Alberto Isidori (Ed.). 1995. P. 53–67.
135. *Проскурников А.В., Якубович В.А.* Задача об инвариантности системы управления // *Доклады РАН.* 2003. Т. 389. № 6. С. 742–746.
136. *Проскурников А.В., Якубович В.А.* Задача об абсолютной инвариантности для систем управления с запаздыванием // *Доклады РАН.* 2004. Т. 397. № 5. С. 610–614.
137. *Проскурников А.В., Якубович В.А.* Универсальные регуляторы для оптимального отслеживания полигармонических сигналов в системах с запаздыванием // *Доклады РАН.* 2006. Т. 406. № 2. С. 109–174.
138. *Проскурников А.В., Якубович В.А.* Универсальный регулятор для отслеживания стохастических сигналов с неизвестной спектральной плотностью // *Доклады РАН.* 2006. Т. 409. № 4. С. 461–466.
139. *Proskurnikov A., Tempo R., Parsegov S.* Network science on belief system dynamics under logic constraints // *Science.* 2016. Vol. 354. No. 6310. P. 321–326.
140. *Fradkov A.L., Pogromsky A.Yu.* Introduction to control of oscillations and chaos. World Scientific Publishers, Singapore, 1998.
141. *Fradkov A.L., Miroshnik I.V., Nikiforov V.O.* Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1999.

142. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Управление хаосом: Методы и приложения. I. Методы // *АиТ*. 2003. № 5. С. 3–45.
143. *Fradkov A.L.* Cybernetical physics: from control of chaos to quantum control. Springer-Verlag, 2007.
144. *Matveev A.S., Savkin A.V.* The problem of state estimation via asynchronous communication channels with irregular transmission times // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2003. 48(4). P. 670–676.
145. *Matveev A.S., Savkin A.V.* An analogue of Shannon information theory for networked control systems. Stabilization via a noisy discrete channel / In *Proc. 43th IEEE Conference on Decision and Control*. December 2004. Atlantis, Paradise Island, Bahamas. P. 4491–4496.
146. *Matveev A.S., Savkin A.V.* Optimal control via asynchronous communication channels // *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2004. 122(3). P. 539–572.
147. *Matveev A.S., Savkin A.V.* An analogue of Shannon information theory for detection and stabilization via noisy discrete communication channels // *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2007. 46(4). P. 1323–1361, 2007.
148. *Matveev A.S., Savkin A.V.* Estimation and Control over Communication Networks. Springer-Verlag, 2008.
149. *Matveev A.S., Pogromskii A.Y.* Observation of nonlinear systems via finite capacity channels, Part II: Restoration entropy and its estimates // *Automatica*. 2019. Vol. 103 (2019). P. 189–199.
<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.01.019>
150. *Kawan C., Matveev A.S., Pogromsky A.Y.* Remote state estimation problem: Towards the data-rate limit along the avenue of the second Lyapunov method // *Automatica*. 2021. Volume 125. paper number 109467.
<https://doi.org/10.1016/j.automatica.2020.109467>
151. *Fradkov A.L., Andrievsky B., Evans R.J.* Chaotic observer-based synchronization under information constraints // *Phys Rev. E*. 2006. V. 73. 066209.
152. *Fradkov A.L., Andrievsky B., Evans R.J.* Synchronization of nonlinear systems under information constraints // *Chaos*. 2008. Vol. 18. Is. 3, 037109, 1–6.
<https://doi.org/10.1063/1.2977459>
153. *Fradkov A.L., Andrievsky B., Evans R.J.* Adaptive Observer-Based Synchronization of Chaotic Systems With First-Order Coder in the Presence of Information Constraints // *IEEE Trans. Circuits and Systems I*. July 2008. V. 55 (6). P. 1685–1694.
154. *Fradkov A.L., Andrievsky B., Ananyevskiy M.S.* Passification based synchronization of nonlinear systems under communication constraints and bounded disturbances // *Automatica*. 2015. V. 55 (5). P. 287–293.
155. *Andrievsky B., Fradkov A.L., Liberzon D.* Robustness of Pecora-Carroll synchronization under communication constraints // *Systems & Control Letters*. 2018. 111. P. 27–33.
156. *Andrievsky B., Orlov Y., Fradkov A.L.* Output Feedback Control of Sine-Gordon Chain over the Limited Capacity Digital Communication Channel // *Electronics*. 2023. 12. P. 2269.

157. Андреевский Б.Р., Матвеев А.С., Фрадков А.Л. Управление и оценивание при информационных ограничениях: к единой теории управления, вычислений и связи // АИТ. 2010. вып. 4. С. 34–99.
158. Shiriaev A.S., Freidovich L.B., Spong M.W. Controlled invariants and trajectory planning for underactuated mechanical systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2014. 59(9). P. 2555–2561.
159. Shiriaev A.S., Perram J.W., Canudas de Wit C. Constructive tool for orbital stabilization of underactuated nonlinear systems: Virtual constraints approach // IEEE Transactions on Automatic Control. 2005. 50(8). P. 1164–1176.
160. Surov M.O., Shiriaev A.S., Freidovich L.B., Gusev S.V., Paramonov L. Case study in non-prehensile manipulation: Planning and orbital stabilization of one-directional rollings for the «Butterfly» robot / In Proceedings of the International Conference on Robotics and Automation. May 2015. P. 1484–1489, Washington, DC.
161. Savkin A.V., Cheng T.M., Xi Z., Javed F., Matveev A.S., Hguyen H. Decentralized Coverage Control Problems for Mobile Robotic Sensor and Actuator Networks. IEEE Press and John Wiley and Sons, 2015, Hoboken, NJ.
162. Matveev A.S., Savkin A.V., Hoy M.C., Wang C. Safe Robot Navigation among Moving and Steady Obstacles, Elsevier and Butterworth Heinemann, 2016, Oxford, UK.
163. Hoy M., Matveev A.S., Savkin A.V. Algorithms for collision-free navigation of mobile robots in complex cluttered environments: a survey // Robotica. 2015. Vol. 33. Is. 03. P. 463–497.
164. Matveev A.S., Savkin A.V. Optimal Chemotherapy Regimens: Influence of Tumors on Normal Cells and Several Toxicity Constraints // IMA Journal of Mathematics Applied in Medicine and Biology. 2001. Vol. 18. P. 25–40.
165. Churilov A., Medvedev A., Shepeljavyi A. Mathematical model of non-basal testosterone regulation in the male by pulse modulated feedback // Automatica. 2009. V. 45. № 1. P. 78–85.
166. Churilov A., Medvedev A., Shepeljavyi A. A state observer for continuous oscillating systems under intrinsic pulse-modulated feedback // Automatica. 2012. V. 48. P. 1117–1122.
167. Filippov S.A., Fradkov A.L. Control Engineering at School: Learning by Examples / IFAC Proceedings Volumes. 2012. Vol. 45. Is. 11. P. 118–123.
168. Filippov Sergey, Ten Natalia, Shirokolobov Ilya, Fradkov Alexander. Teaching Robotics in Secondary School // IFAC-PapersOnLine. July 2017. Vol. 50. Is. 1. P. 12155–12160.
169. Автоматика и Телемеханика. 2006. № 10. 2006. № 11. Тематические выпуски: Владимир Андреевич Якубович (к 80-летию со дня рождения).
170. Вестник С.-Петербург. ун-та. Математика, механика, астрономия. 2006, Вып. 4. Специальный выпуск: Владимир Андреевич Якубович (к 80-летию со дня рождения).
171. International Journal of Robust and Nonlinear Control. Special Issue: Frequency-domain and Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. Dedicated to the 80th Birthday of V.A. Yakubovich. 2007. V. 17. Is. 5–6.

172. *Фрадков А.Л.* Научная биография В.А. Якубовича и его школа в Санкт-Петербургском (Ленинградском) университете. Специальная сессия “Владимир Андреевич Якубович и его научная школа”. XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014). М.: 16–19 июня 2014 г.
173. *Fradkov A., Gelig A., Leonov G.* Vladimir Andreevich Yakubovich. Obituary // IEEE Control Systems Magazine. 2013. Vol. 33. Is. 2. P. 89–91.
174. *Fradkov A.L.* Scientific School of Vladimir Yakubovich in the 20th century // IFAC-PapersOnLine. July 2017. Vol. 50. Is. 1. P. 5231–5237.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 15.06.2023

После доработки 16.07.2023

Принята к публикации 20.07.2023

© 2023 г. Д.Н. ИБРАГИМОВ, канд. физ.-мат. наук (rikk.dan@gmail.ru),
В.М. ПОДГОРНАЯ (vita1401@outlook.com)
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет))

ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ОГРАНИЧЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ МЕТОДА СУПЕРЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ¹

Рассматривается задача быстродействия для линейной дискретной системы с ограниченным управлением. В случае суперэллипсоидальных ограничений на управление оптимальный процесс построен в явном виде на основе дискретного принципа максимума. Задача вычисления начальных условий сопряженной системы сведена к решению системы алгебраических уравнений. Для систем с произвольными выпуклыми ограничениями на управление предложен метод формирования гарантирующего решения на основе метода суперэллипсоидальной аппроксимации. Процедура суперэллипсоидальной аппроксимации сведена к решению ряда задач выпуклого программирования. Приведены примеры.

Ключевые слова: линейные дискретные системы, задача быстродействия, принцип максимума, суперэллипс, эллипсоидальные аппроксимации.

DOI: 10.31857/S0005231023090027, **EDN:** JSPHNN

1. Введение

Одним из естественных функционалов качества управления является время, затрачиваемое системой на достижение заданного терминального состояния. На практике полученная задача оптимального управления называется задачей быстродействия. Существенно, что задача быстродействия для линейных дискретных систем обладает рядом серьезных отличий от аналогичной задачи для непрерывных систем. В то время как в случае непрерывного времени решение, полученное на основе принципа максимума Понтрягина [1] для линейной системы, гарантирует релейный характер оптимального по быстродействию управления, аналогичный результат для системы с дискретным временем [2, 3] некорректен. Данный факт обусловлен дискретным функционалом качества, который предполагает иные критерии формирования траектории и управления.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-21-00293).

Прямой подход, основанный на минимизации нормы терминального состояния по всем управляющим воздействиям, оказывается трудноприменимым для систем высокой размерности с большим временным горизонтом и векторным управлением. Это обусловлено тем, что результирующая задача математического программирования характеризуется быстрым ростом числа ограничений и переменных оптимизации при увеличении числа шагов, необходимых для достижения системой нуля. При этом почти для всех начальных состояний экстремум в задаче быстрогодействия является нерегулярным [4], что также осложняет использование известных численных методов.

Рассмотрение условий оптимальности процесса при использовании различных классических подходов приводит к двум принципиально отличающимся методам решения задачи быстрогодействия. Метод динамического программирования Беллмана [5] позволяет построить оптимальное управление в позиционной форме. В случае, когда множество допустимых значений управлений представляет собой многогранник, вычисление каждого управляющего воздействия сводится к решению задачи линейного программирования [6]. Также в [6] продемонстрирован метод формирования оптимального управления в случае произвольных выпуклых ограничений на управление, основанный на проведении полиэдральной аппроксимации [7]. Такой подход обладает рядом недостатков, связанных в основном с вычислительными сложностями. Повышение точности гарантирующего решения в задаче быстрогодействия достигается за счет наращивания числа вершин полиэдральной аппроксимации, что в итоге приводит к экспоненциальному росту сложности соответствующих задач линейного программирования. По этой причине данный подход при реализации на стандартных вычислительных устройствах отличается либо малой точностью решения, либо сравнительно небольшим временным горизонтом особенно для систем большой размерности.

Напротив, сочетание условий оптимальности в задаче быстрогодействия с дискретным принципом максимума [1–3] позволяет формировать оптимальное программное управление [4]. Существенным условием применимости данных методов является строгая выпуклость множества допустимых значений управлений. Такое соотношение для вычисления начального состояния сопряженной системы в случае произвольной структуры ограничений на управление довольно трудно разрешить. В [8] представлен частный случай эллипсоидальной структуры множества допустимых значений управления, а также аналитическое решение задачи быстрогодействия для такой системы на основе необходимых и достаточных условий оптимальности, представленных в [4].

Естественным подходом является объединение идей построения гарантирующего решения из [6] на основе проведения эллипсоидальной аппроксимации множества допустимых значений управлений в сочетании с методами формирования программного управления согласно дискретному принципу максимума [4, 8]. Методика эллипсоидальной аппроксимации широко распространена в теории оптимального управления [9, 10]. Однако класс эллипсоидов не позволяет добиться произвольной точности аппроксимации исход-

ного множества, а следовательно, и точности решения задачи оптимального управления. В статье рассматривается класс суперэллипсоидальных множеств (точное определение приведено в разделе 2), которые допускают больший порядок точности при сохранении условий строгой выпуклости, что гарантирует простоту решения задачи быстрогодействия аналогично [8].

Суперэллипсы на плоскости известны достаточно давно как кривые Ламе [11] и имеют большое количество различных приложений в естественнонаучных и технических дисциплинах. Их активно применяют, например, в задачах геодезии и картографирования [12], в ботанике для моделирования роста растений [13] и описания естественных фигур [14], проектирования волноводов для антенных решеток [15, 16] или для моделирования сгибов различных конструкций [17]. Однако общее изучение свойств данных фигур с точки зрения их математических свойств, как правило, ограничивается двумерным случаем [12, 18]. Данный факт делает актуальным изучение свойств данного класса геометрических тел в пространстве произвольной размерности в терминах выпуклого анализа: описание их опорной функции, опорной точки и нормального конуса, решение различных аппроксимационных задач.

Целью данной работы является разработка метода формирования оптимального управления в явном виде для случая суперэллипсоидальной структуры множества допустимых значений управления, а также описание подхода построения суперэллипсоидальной аппроксимации произвольного выпуклого тела с максимально возможной точностью. Принципиальным отличием от результатов по данной тематике как классических [19–21], так и современных [22, 23] является рассмотрение произвольного векторного управления, на значения которого наложены выпуклые ограничения, и отсутствие ограничения на размерность фазового пространства, что является более общей постановкой задачи, расширяющей спектр возможных приложений.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 представлены нестандартные обозначения и предположения, которые используются в статье. В разделе 3 рассматривается задача быстрогодействия, описывается принцип максимума как основной инструмент ее решения и формулируется постановка задачи о суперэллипсоидальной аппроксимации множества допустимых значений управлений с целью формирования гарантирующего процесса. В разделе 4 представлено точное решение задачи быстрогодействия в случае суперэллипсоидальной структуры множества допустимых значений управлений. В разделе 5 описан метод сведения задачи об оптимальной в смысле меры Лебега суперэллипсоидальной аппроксимации выпуклого тела к ряду задач выпуклого программирования. В разделе 6 продемонстрированы примеры построения гарантирующего процесса в задаче быстрогодействия для систем различной размерности на основе полученных теоретических результатов. Даны оценки точности построенных процессов в сравнении с оптимальным решением.

2. Обозначения

Будем полагать, что фазовое пространство является евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением, определяемым соотношением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Для произвольного $r \in [1; +\infty)$ введем на $\mathbb{R}^n$ норму

$$\|x\|_r = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

При $r = 2$ норма $\|\cdot\|_2$ оказывается согласованной со скалярным произведением. Значение $r = 1$ с точки зрения теории является допустимым, но в рамках данной статьи рассматриваться не будет, что позволяет определить число $q > 1$ как двойственное по Гельдеру числу r :

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1.$$

Для произвольных множеств $\mathcal{X}, \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ и матрицы $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ через $\mathcal{X} + \mathcal{U}$ будем обозначать сумму по Минковскому

$$\mathcal{X} + \mathcal{U} = \{x + u : x \in \mathcal{X}, u \in \mathcal{U}\},$$

а через $D\mathcal{U}$ – образ множества $\mathcal{U}$ при воздействии на него отображения D

$$D\mathcal{U} = \{Du : u \in \mathcal{U}\}.$$

Через $\partial\mathcal{U}$ и $\text{int } \mathcal{U}$ обозначим множества граничных и внутренних точек $\mathcal{U}$ соответственно. Под $\text{cone } \{\mathcal{U}\}$ будем понимать коническую оболочку множества $\mathcal{U}$ [24, § 2 гл. I].

Если множество $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ является выпуклым компактом, то для произвольной точки $u \in \mathcal{U}$ через $\mathcal{N}(u, \mathcal{U})$ обозначим нормальный конус множества $\mathcal{U}$ в точке u [24, § 2 гл. I]:

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = \left\{ p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : (p, u) = \max_{\tilde{u} \in \mathcal{U}} (p, \tilde{u}) \right\}.$$

Элементы нормального конуса $\mathcal{N}(u, \mathcal{U})$ называются векторами, опорными к $\mathcal{U}$ в точке u . Заметим, что по построению $\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $u \in \text{int } \mathcal{U}$. Если также верно включение $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, то $\mathcal{U}$ будем называть выпуклым телом [25, раздел 3 § 1 гл. IV] и для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ введем функционал Минковского [25, раздел 3 § 2 гл. III] или калибровочную функцию [24, § 4 гл. I]:

$$M(x, \mathcal{U}) = \inf \{ t > 0 : x \in t\mathcal{U} \} = \inf \left\{ t > 0 : \frac{x}{t} \in \mathcal{U} \right\}.$$

Под строго выпуклым множеством $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ будем понимать такое множество, что для любых $u^1, u^2 \in \mathcal{U}$, $\lambda \in (0; 1)$ верно включение $\lambda u^1 + (1 - \lambda)u^2 \in \text{int } \mathcal{U}$.

Будем называть суперэллипсом или суперэллипсоидальным множеством для некоторых $a_1 > 0, \dots, a_n > 0$, $r > 1$ множество вида

$$(1) \quad \mathcal{E}_r(a_1, \dots, a_n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \leq 1 \right\}.$$

Для краткости будем полагать $a = (a_1, \dots, a_n)^T$ и обозначать соответствующий суперэллипс через $\mathcal{E}_r(a)$. Под $\text{diag}(a) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ будем полагать диагональную матрицу, построенную из вектора $a \in \mathbb{R}^n$:

$$\text{diag}(a) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

3. Постановка задачи

Рассматривается линейная дискретная система с ограниченным управлением $(A, \mathcal{U})$:

$$(2) \quad \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + u(k), \\ x(0) &= x_0, \quad u(k) \in \mathcal{U}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы, $u(k) \in \mathbb{R}^n$ – управляющее воздействие, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица системы, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – множество допустимых значений управлений. Предполагается, что $\det A \neq 0$, $\mathcal{U}$ – выпуклый компакт, $0 \in \text{int } \mathcal{U}$.

Для системы (2) решается задача быстродействия, т.е. требуется перевести систему $(A, \mathcal{U})$ из заданного начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в начало координат за минимальное число шагов $N_{\min}$:

$$N_{\min} = \min \{N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\}.$$

Процесс управления $\{x^*(k), u^*(k-1), x^*(0)\}_{k=1}^{N_{\min}}$, удовлетворяющий условию $x^*(N_{\min}) = 0$, будем называть оптимальным. Предполагается, что задача быстродействия для системы $(A, \mathcal{U})$ разрешима, т.е. $N_{\min} < \infty$. Подробно вопросы разрешимости задачи быстродействия для системы (2) рассмотрены в [26].

Построение оптимальных по быстродействию процессов тесно связано с аппаратом множеств 0-управляемости [4, 6]. Для произвольного $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ обозначим через $\mathcal{X}(N) \subset \mathbb{R}^n$ множество 0-управляемости системы (2) за N шагов, т.е. множество тех начальных состояний, из которых

систему (2) можно перевести в 0 за N шагов посредством выбора допустимых управляющих воздействий:

$$(3) \quad \mathcal{X}(N) = \begin{cases} \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \exists u(0), \dots, u(N-1) \in \mathcal{U} : x(N) = 0\}, & N \in \mathbb{N}, \\ \{0\}, & N = 0. \end{cases}$$

Тогда согласно определению $N_{\min}$ также справедливо представление:

$$(4) \quad N_{\min} = \min\{N \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_0 \in \mathcal{X}(N)\}.$$

При этом управление, как продемонстрировано в [4, 6], оптимально тогда и только тогда, когда для всех $k = \overline{0, N_{\min} - 1}$ верно включение

$$x^*(k+1) = Ax^*(k) + u^*(k) \in \mathcal{X}(N_{\min} - k - 1).$$

В [4] получен ряд результатов для задачи быстродействия, которые можно представить в форме принципа максимума для строго выпуклого $\mathcal{U}$.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – строго выпуклое и компактное множество, $0 \in \text{int } \mathcal{U}$, $\det A \neq 0$, класс множеств $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^{\infty}$ определяется согласно (3), процесс управления $\{x^*(k), u^*(k-1), x^*(0)\}_{k=1}^{N_{\min}}$ и траектория сопряженной системы $\{\psi(k)\}_{k=0}^{N_{\min}-1}$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} x^*(k+1) &= Ax^*(k) + u^*(k), \\ u^*(k) &= \alpha \arg \max_{u \in \mathcal{U}} ((A^{-1})^T \psi(k), u), \\ \psi(k+1) &= (A^{-1})^T \psi(k), \\ x^*(0) &= x_0, \\ -\psi(0) &\in \mathcal{N}(x_0, \alpha \mathcal{X}(N_{\min})), \\ \alpha &= M(x_0, \mathcal{X}(N_{\min})). \end{aligned}$$

Тогда

- 1) $\{x^*(k), u^*(k-1), x^*(0)\}_{k=1}^{N_{\min}}$ – оптимальный по быстродействию процесс системы $(A, \mathcal{U})$;
- 2) если $\alpha = 1$, то оптимальный процесс единственный;
- 3) $-\psi(k) \in \mathcal{N}(x^*(k), \alpha \mathcal{X}(N_{\min} - k))$, $k = \overline{0, N_{\min} - 1}$.

С вычислительной точки зрения вопрос применения теоремы 1 сводится к определению α и $\psi(0)$ из условий

$$(5) \quad \begin{aligned} -\psi(0) &\in \mathcal{N}(x_0, \alpha \mathcal{X}(N_{\min})), \\ \alpha &= M(x_0, \mathcal{X}(N_{\min})), \end{aligned}$$

что в случае произвольного строго выпуклого тела $\mathcal{U}$ может быть нетривиальной задачей.

Основной целью данной статьи является построение эффективных методов разрешения условий (5) относительно $\psi(0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $\alpha > 0$ для частного случая, когда $\mathcal{U}$ допускает представление

$$(6) \quad \mathcal{U} = B\mathcal{E}_r(a), \quad B \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \det B \neq 0, \quad a_1, \dots, a_n > 0, \quad r > 1.$$

Другой целью статьи является разработка метода аппроксимации произвольного выпуклого тела $\mathcal{U}$ вложенным в него множеством $\hat{\mathcal{U}}$ вида (6), минимизирующим меру Лебега разности двух множеств $\mu(\mathcal{U} \setminus \hat{\mathcal{U}})$, с целью построения гарантирующего решения в задаче быстрогодействия для системы $(A, \mathcal{U})$.

4. Оптимальный процесс в случае суперэллипсоидальной структуры ограничений на управление

Покажем, что условия (5) можно свести к эквивалентной системе алгебраических уравнений в случае (6). Для этого приведем аналитическое описание множеств 0-управляемости и некоторые свойства строго выпуклых и суперэллипсоидальных множеств.

Лемма 1 [4, лемма 1]. Пусть $\det A \neq 0$, класс множеств $\{\mathcal{X}(N)\}_{N=0}^\infty$ определяется соотношениями (3). Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$ верно представление

$$\mathcal{X}(N) = - \sum_{k=1}^N A^{-k} \mathcal{U}.$$

Лемма 2 [27, лемма 3]. Пусть $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ – строго выпуклый компакт, $0 \in \text{int } \mathcal{U}$. Тогда для любых различных $u^1, u^2 \in \mathcal{U}$ верно

$$\mathcal{N}(u^1, \mathcal{U}) \cap \mathcal{N}(u^2, \mathcal{U}) = \emptyset.$$

Также из [27, леммы 5, 6] вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть $\mathcal{U}, \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклые компакты, $u \in \mathcal{U}$, $x \in \mathcal{X}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det A \neq 0$.

Тогда

- 1) $\mathcal{N}(u + x, \mathcal{U} + \mathcal{X}) = \mathcal{N}(u, \mathcal{U}) \cap \mathcal{N}(x, \mathcal{X})$;
- 2) $\mathcal{N}(Ax, A\mathcal{X}) = (A^{-1})^T \mathcal{N}(x, \mathcal{X})$.

Лемма 3 определяет преобразование нормального конуса выпуклых множеств при невырожденном линейном преобразовании и сложении по Минковскому. С учетом леммы 1 это позволяет описать произвольный нормальный конус любого множества 0-управляемости в терминах нормальных конусов множества $\mathcal{U}$ или $\mathcal{E}_r(a_1, \dots, a_n)$ в случае (6). С другой стороны, лемма 2 устанавливает взаимнооднозначное соответствие между граничной точкой и ее нормальным конусом для строго выпуклого множества. Если данную зависимость описать в явном виде, то можно получить алгебраические уравнения, эквивалентные условиям (5).

Введем для произвольного $r > 1$ биективный оператор $I_r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, действующий по правилу

$$I_r(x) = (\text{sign}(x_1)|x_1|^{r-1}, \dots, \text{sign}(x_n)|x_n|^{r-1}).$$

Лемма 4. Пусть множество $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1). Тогда

1) для любого $x \in \partial\mathcal{E}_r(a)$

$$\mathcal{N}(x, \mathcal{E}_r(a)) = \{\gamma \text{diag}(a)^{-1} I_r(\text{diag}(a)^{-1} x) \in \mathbb{R}^n : \gamma > 0\};$$

2) для любого $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ существует единственная

$$x^*(p) = \arg \max_{x \in \mathcal{E}_r(a)} (p, x) = \frac{\text{diag}(a) I_q(\text{diag}(a)p)}{\|\text{diag}(a)p\|_q^{q-1}}.$$

Доказательство леммы 4 и всех последующих утверждений приведено в Приложении.

Лемма 5. Пусть $\mathcal{U} = D\mathcal{E}_r(a)$, где $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1), $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det D \neq 0$. Тогда

1) для любого $u \in \partial\mathcal{U}$

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = \{\gamma (D^{-1})^T \text{diag}(a)^{-1} I_r(\text{diag}(a)^{-1} D^{-1} u) \in \mathbb{R}^n : \gamma > 0\};$$

2) для любого $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ существует единственная

$$u^*(p) = \arg \max_{u \in \mathcal{U}} (p, u) = \frac{D \text{diag}(a) I_q(\text{diag}(a) D^T p)}{\|\text{diag}(a) D^T p\|_q^{q-1}}.$$

Лемма 5, с одной стороны, позволяет вычислить оптимальное управление согласно теореме 1 в случае (6) при выборе $D = B$. С другой стороны, лемма 5 в сочетании с леммами 1 и 2 связывает точку на границе множества 0-управляемости с элементом ее нормального конуса при выборе $D = -A^{-k}B$, что делает возможным свести условия (5) к эквивалентным алгебраическим уравнениям. Сформулируем данный факт в виде теоремы.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{U}$ определяется согласно (6), $x_0 \neq 0$, $\psi(0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\alpha > 0$. В таком случае $\psi(0)$ и α удовлетворяют условиям (5) тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$-x_0 = \alpha \sum_{k=1}^{N_{\min}} \frac{A^{-k} B \text{diag}(a) I_q(\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0))}{\|\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0)\|_q^{q-1}}.$$

Система уравнений, представленная в теореме 2, имеет не единственное решение, поскольку правая часть инвариантна к домножению вектора $\psi(0)$ на любое положительное число. Для использования численных методов можно предложить модификацию данной системы, которая имеет единственное решение.

Следствие 1. Пусть $\mathcal{U}$ определяется согласно (6), $\psi(0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\alpha > 0$. Тогда для любого $x_0 \neq 0$ существует единственное решение системы уравнений

$$\begin{cases} -x_0 = \alpha \sum_{k=1}^{N_{\min}} \frac{A^{-k} B \text{diag}(a) I_q (\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0))}{\|\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0)\|_q^{q-1}}, \\ (\psi(0), \psi(0)) = 1, \end{cases}$$

которое также удовлетворяет условиям (5).

Пример 1. Рассмотрим процедуру вычисления $\psi(0)$, α , $N_{\min}$ на основе следствия 1. Пусть параметры системы (2) в предположении (6) имеют следующие значения:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \\ r = \frac{4}{3}, \quad q = 4, \quad x_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right)^T.$$

Предположим, что $N_{\min} = 2$, и составим систему уравнений, представленную в теореме 1:

$$\begin{aligned} & \frac{0,20(0,20\psi_1(0) + 0,81\psi_2(0))^3 + 0,91(0,91\psi_1(0) - 0,61\psi_2(0))^3}{((0,20\psi_1(0) + 0,81\psi_2(0))^4 + (0,91\psi_1(0) - 0,61\psi_2(0))^4)^{\frac{3}{4}}} + \\ & + \frac{0,17(0,17\psi_1(0) - 0,32\psi_2(0))^3 + 0,17(0,17\psi_1(0) + 0,39\psi_2(0))^3}{((0,17\psi_1(0) - 0,32\psi_2(0))^4 + (0,17\psi_1(0) + 0,39\psi_2(0))^4)^{\frac{3}{4}}} = -\frac{1}{3\alpha}, \\ & \frac{0,81(0,20\psi_1(0) + 0,81\psi_2(0))^3 - 0,61(0,91\psi_1(0) - 0,61\psi_2(0))^3}{((0,20\psi_1(0) + 0,81\psi_2(0))^4 + (0,91\psi_1(0) - 0,61\psi_2(0))^4)^{\frac{3}{4}}} + \\ & + \frac{-0,32(0,17\psi_1(0) - 0,32\psi_2(0))^3 + 0,39(0,17\psi_1(0) + 0,39\psi_2(0))^3}{((0,17\psi_1(0) - 0,32\psi_2(0))^4 + (0,17\psi_1(0) + 0,39\psi_2(0))^4)^{\frac{3}{4}}} = -\frac{4}{3\alpha}. \end{aligned}$$

Дополнив данную систему соотношением $\psi_1(0)^2 + \psi_2(0)^2 = 1$ согласно следствию 1, получим следующее решение:

$$\psi_1(0) = -0,35, \quad \psi_2(0) = -0,94, \quad \alpha = 1,08.$$

Согласно (5) $\alpha = M(x_0, \mathcal{X}(2))$. Так как $\alpha > 1$, то по определению функционала Минковского $x_0 \notin \mathcal{X}(2)$. Получили противоречие, из которого следует, что $N_{\min} > 2$.

Предположим, что $N_{\min} = 3$, и составим систему уравнений, представленную в теореме 1:

$$\begin{aligned}
& \frac{0,20(0,20\psi_1(0) + 0,81\psi_2(0))^3 + 0,91(0,91\psi_1(0) - 0,61\psi_2(0))^3}{((0,20\psi_1(0) + 0,81\psi_2(0))^4 + (0,91\psi_1(0) - 0,61\psi_2(0))^4)^{\frac{3}{4}}} + \\
& + \frac{0,17(0,17\psi_1(0) - 0,32\psi_2(0))^3 + 0,17(0,17\psi_1(0) + 0,39\psi_2(0))^3}{((0,17\psi_1(0) - 0,32\psi_2(0))^4 + (0,17\psi_1(0) + 0,39\psi_2(0))^4)^{\frac{3}{4}}} + \\
& + \frac{0,004(0,004\psi_1(0) + 0,16\psi_2(0))^3 + 0,11(0,11\psi_1(0) - 0,14\psi_2(0))^3}{((0,004\psi_1(0) - 0,16\psi_2(0))^4 + (0,11\psi_1(0) - 0,14\psi_2(0))^4)^{\frac{3}{4}}} = -\frac{1}{3\alpha}, \\
& \frac{0,81(0,20\psi_1(0) + 0,81\psi_2(0))^3 - 0,61(0,91\psi_1(0) - 0,61\psi_2(0))^3}{((0,20\psi_1(0) + 0,81\psi_2(0))^4 + (0,91\psi_1(0) - 0,61\psi_2(0))^4)^{\frac{3}{4}}} + \\
& + \frac{-0,32(0,17\psi_1(0) - 0,32\psi_2(0))^3 + 0,39(0,17\psi_1(0) + 0,39\psi_2(0))^3}{((0,17\psi_1(0) - 0,32\psi_2(0))^4 + (0,17\psi_1(0) + 0,39\psi_2(0))^4)^{\frac{3}{4}}} + \\
& + \frac{0,17(0,004\psi_1(0) + 0,16\psi_2(0))^3 - 0,14(0,11\psi_1(0) - 0,14\psi_2(0))^3}{((0,004\psi_1(0) + 0,16\psi_2(0))^4 + (0,11\psi_1(0) - 0,14\psi_2(0))^4)^{\frac{3}{4}}} = -\frac{4}{3\alpha}.
\end{aligned}$$

Дополнив данную систему соотношением $\psi_1(0)^2 + \psi_2(0)^2 = 1$ согласно следствию 1, получим следующее решение:

$$\psi_1(0) = -0,50, \quad \psi_2(0) = -0,87, \quad \alpha = 0,96.$$

Тогда $\alpha = M(x_0, \mathcal{X}(3)) < 1$, т.е. по определению функционала Минковского $x_0 \in \mathcal{X}(3)$. В силу (4) $N_{\min} = 3$.

Замечание 1. В примере 1 и везде далее численное решение систем алгебраических уравнений, построенных согласно следствию 1, осуществляется в программной среде Maple посредством встроенных процедур, основанных на методе Ньютона и его модификациях [28].

Теорема 2 и следствие 1 в совокупности с теоремой 1 позволяют полностью решить задачу быстродействия для линейной дискретной системы в случае суперэллипсоидальной структуры множества допустимых значений управлений (6). Разрешение условий (5) согласно следствию 1 эквивалентно численному решению системы алгебраических уравнений. Одновременно оптимальный процесс и траектория сопряженной системы могут быть вычислены по рекуррентным соотношениям, представленным в теореме 1. Оптимальное управление явным образом определяется п. 2 леммы 5.

5. Внутренняя суперэллипсоидальная аппроксимация выпуклого тела

Случай (6) является достаточно частным. Зачастую невозможно гарантировать даже строгую выпуклость множества $\mathcal{U}$. В связи с чем оказывается ак-

туальным проведение внутренней аппроксимации $\mathcal{U}$ множеством $\hat{\mathcal{U}}$ вида (6). Переход в задаче быстрогодействия от исходной системы $(A, \mathcal{U})$ к вспомогательной системе $(A, \hat{\mathcal{U}})$ позволяет построить гарантирующее управление в исходной системе на основе методов, представленных в разделе 4 применительно к системе вспомогательной.

При этом погрешность гарантирующего решения в сравнении с оптимальным будет тем меньше, чем больше по включению аппроксимирующее множество $\hat{\mathcal{U}}$. Данный факт приводит к необходимости решения задачи оптимальной суперэллипсоидальной аппроксимации выпуклого компактного тела $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ множеством вида (6). В качестве критерия качества аппроксимации рассмотрим меру Лебега n -мерного множества $\mu(\cdot)$ [25, раздел 1 § 3 гл. V]. Результирующая оптимизационная задача примет вид

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{U} \setminus B\mathcal{E}_r(a_1, \dots, a_n)) &\rightarrow \min_{a_1, \dots, a_n, r, B}, \\ a_i &> 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ r &> 1, \\ B &\in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \det B \neq 0, \\ \mathcal{E}_r(a_1, \dots, a_n) &\subset \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Данную задачу можно разбить на два отдельных этапа: подбор матрицы ориентации суперэллипса $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и подбор чисел $a_1, \dots, a_n > 0, r > 1$, параметризующих множество (1).

5.1. Подбор матрицы ориентации суперэллипсоидального множества

В общем случае поиск оптимального значения матрицы B может быть довольно трудоемкой оптимизационной задачей, условия разрешимости которой неизвестны в силу ее невыпуклости. Предложим эвристический метод выбора B в виде ортогональной матрицы. Поскольку преобразование поворота сохраняет меру Лебега, то справедливы равенства

$$\mu(\mathcal{U} \setminus B\mathcal{E}_r(a)) = \mu(B^{-1}(\mathcal{U} \setminus B\mathcal{E}_r(a))) = \mu(B^{-1}\mathcal{U} \setminus \mathcal{E}_r(a)),$$

которые позволяют свести исходную аппроксимационную задачу к задаче оптимальной внутренней аппроксимации произвольного выпуклого компактного тела $B^{-1}\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ суперэллипсом $\mathcal{E}_r(a)$. Учитывая симметрию множества $\mathcal{E}_r(a)$, допустимо предположить, что B^{-1} должна обеспечивать такой поворот множества $\mathcal{U}$, чтобы координатные оси совпали с какими-либо осями «симметрии» $\mathcal{U}$, например с главными осями инерции выпуклого тела $\mathcal{U}$ [29, § 32 гл. VI].

В таком случае B должна удовлетворять условию

$$I_{\mathcal{U}} = B \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) B^{-1},$$

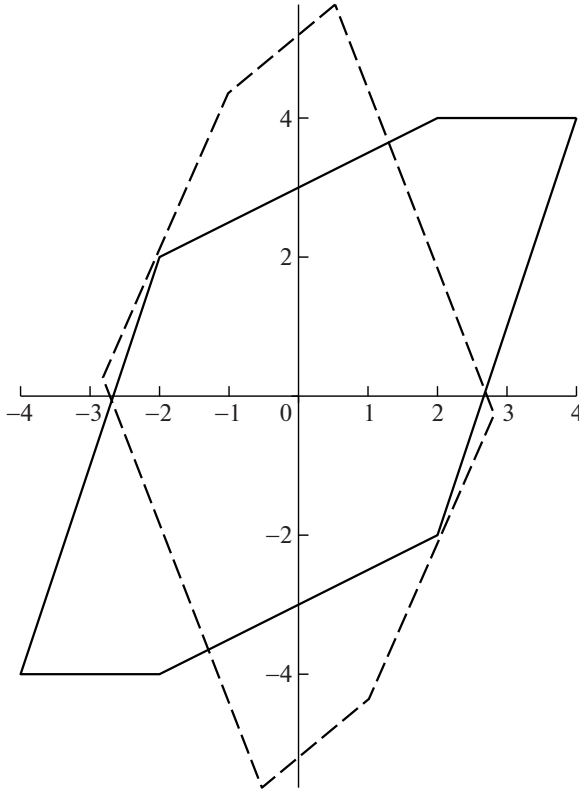


Рис. 1. Исходное множество $\mathcal{U}$ (сплошная линия) и ориентированное вдоль осей инерции множество $B^{-1}\mathcal{U}$ (пунктирная линия).

где $I_{\mathcal{U}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – тензор инерции выпуклого тела $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$:

$$I_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} I_{11} & \dots & I_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{n1} & \dots & I_{nn} \end{pmatrix}, \quad I_{ij} = \begin{cases} \int_{\mathcal{U}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n x_k^2 dx_1 \dots dx_n, & i = j, \\ - \int_{\mathcal{U}} x_i x_j dx_1 \dots dx_n, & i \neq j. \end{cases}$$

Тогда согласно [30, теорема 3.1.11] B определяется единственным образом с точностью до перестановки своих столбцов и ее построение сводится к вычислению собственных векторов матрицы $I_{\mathcal{U}}$.

Пример 2. Вычислим матрицу B для многогранника $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{U} = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Тензор инерции $I_{\mathcal{U}}$ и матрица B имеют следующие численные значения:

$$I_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 153,28 & -85,03 \\ -85,03 & 121,20 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,64 & -0,77 \\ 0,77 & 0,64 \end{pmatrix}.$$

Тогда ориентированное множество $B^{-1}\mathcal{U}$, для которого необходимо проводить дальнейшую суперэллипсоидальную аппроксимацию, имеет следующий вид:

$$B^{-1}\mathcal{U} = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0,53 \\ 5,63 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1,01 \\ 4,36 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2,82 \\ 0,26 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,53 \\ -5,63 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,01 \\ -4,36 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2,82 \\ -0,26 \end{pmatrix} \right\}.$$

Исходное множество $\mathcal{U}$ и ориентированное множество $B^{-1}\mathcal{U}$ представлены на рис. 1.

5.2. Подбор параметров суперэллипсоидального множества

Далее будем полагать, что матрица B ориентации суперэллипса подобрана в форме матрицы поворота. Тогда исходная аппроксимационная задача сводится к следующей оптимизационной:

$$(7) \quad \begin{aligned} \mu(\mathcal{U} \setminus \mathcal{E}_r(a_1, \dots, a_n)) &\rightarrow \min_{a_1, \dots, a_n, r}, \\ a_i &> 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ r &> 1, \\ \mathcal{E}_r(a_1, \dots, a_n) &\subset \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Сформулируем ряд утверждений, позволяющих свести задачу (7) к эквивалентной задаче выпуклого программирования, которая может быть решена численно.

Лемма 6. Пусть $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1). Тогда

$$\mu(\mathcal{E}_r(a)) = a_1 \cdot \dots \cdot a_n \frac{(2\Gamma(\frac{1}{r} + 1))^n}{\Gamma(\frac{n}{r} + 1)}.$$

Лемма 7. Пусть $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1), $\mathcal{U}$ – выпуклое тело.

В таком случае включение $\mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U}$ справедливо тогда и только тогда, когда для любых $x \in \mathbb{R}^n$ верно неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \geq M(x, \mathcal{U}).$$

На основе лемм 6 и 7 представим задачу (7) в эквивалентном виде.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1), $\mathcal{U}$ – выпуклое тело. Тогда оптимизационная задача (7) эквивалентна следующей

задаче:

$$\begin{aligned}
 & a_1 \cdot \dots \cdot a_n \frac{(2\Gamma(\frac{1}{r} + 1))^n}{\Gamma(\frac{n}{r} + 1)} \rightarrow \max_{a_1, \dots, a_n, r}, \\
 (8) \quad & \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \geq M(x, \mathcal{U}), \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^n, \\
 & a_i > 0, \quad i = \overline{1, n}, \\
 & r > 1.
 \end{aligned}$$

Вообще говоря, (8) не является задачей выпуклого программирования, а значит, в общем случае она не может быть решена стандартными оптимизационными методами [31]. Проведем ряд преобразований, которые позволят решить (8) численно. Также отдельно рассмотрим случай, когда $\mathcal{U}$ представляет собой многогранник, что позволит в явном виде построить функционал Минковского $M(x, \mathcal{U})$.

Лемма 8. Пусть $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1), $\mathcal{U}$ – ограниченный полиэдр, т.е. существуют такие $K \in \mathbb{N}$, $p^1, \dots, p^K \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$, что справедливо представление

$$\mathcal{U} = \bigcap_{k=1}^K \{x \in \mathbb{R}^n : (p^k, x) \leq \alpha_k\}.$$

Тогда включение $\mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U}$ эквивалентно условию

$$\left\| \text{diag}(a) p^k \right\|_q \leq \alpha_k, \quad k = \overline{1, K}.$$

Сложность решения задачи (8) заключается в том, что множество допустимых значений вектора переменных оптимизации $(r, a_1, \dots, a_n)^T$ не является выпуклым в $\mathbb{R}^{n+1}$. Тем не менее при фиксированном значении $r > 1$ соответствующее множество допустимых значений вектора $(a_1, \dots, a_n)^T$ уже является выпуклым. Сформулируем данный факт в виде леммы.

Лемма 9. Пусть $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1), $\mathcal{U}$ – выпуклое и компактное тело, для произвольного $r > 1$ через $\mathcal{P}_r(\mathcal{U}) = \{a \in \mathbb{R}^n : \mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U}, a_i > 0, i = \overline{1, n}\}$ обозначено множество всех допустимых значений $a_1, \dots, a_n$ в задачах (7) и (8).

Тогда $\mathcal{P}_r(\mathcal{U})$ – выпуклое и компактное множество.

Лемма 9 позволяет аппроксимировать эквивалентные задачи (7) и (8) аналогичной оптимизационной задачей, в которой область определения параметра r сужена до конечного множества:

$$r \in \{r_1, \dots, r_M\} \subset (1; +\infty).$$

Тогда аппроксимационная задача сводится к решению N задач выпуклого программирования следующего вида:

$$(9) \quad \begin{aligned} a_1 \cdot \dots \cdot a_n &\rightarrow \max_{a_1, \dots, a_n}, \\ (a_1, \dots, a_n)^T &\in \mathcal{P}_r(\mathcal{U}). \end{aligned}$$

Выбор результирующей суперэллипсоидальной аппроксимации, соответствующей конкретному значению $r^* \in \{r_1, \dots, r_M\}$, осуществляется в соответствии с леммой 6 и идеей о максимизации меры вложенного суперэллипса:

$$(10) \quad r^* = \arg \max_{r \in \{r_1, \dots, r_M\}} \mu(\mathcal{E}_r(a^*(r))),$$

где $a^*(r) \in \mathbb{R}^n$ – точка максимума в задаче (9).

Пример 3. Построим суперэллипсоидальную аппроксимацию для множества $B^{-1}\mathcal{U}$, вычисленного в примере 2. Для использования леммы 8 представим $B^{-1}\mathcal{U}$ в виде ограниченного полиэдра:

$$\begin{aligned} B^{-1}\mathcal{U} &= \bigcap_{k=1}^6 \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : (p^k, x) \leq \alpha_k \right\}, \\ (p^1, \dots, p^6) &= \begin{pmatrix} -1,28 & -4,09 & -5,90 & -1,28 & -4,09 & -5,90 \\ 1,54 & 1,80 & -2,29 & -1,54 & -1,80 & 2,29 \end{pmatrix}, \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_6) &= (8, 12, 16, 8, 12, 16). \end{aligned}$$

Опишем множество $\mathcal{P}_r(\mathcal{U})$ для $r \in \{\frac{4}{3}, 2, 4\}$ и решим соответствующие оптимизационные задачи (9).

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\frac{4}{3}}(\mathcal{U}): \quad & \begin{cases} (2,65a_1^4 + 5,62a_2^4)^{\frac{1}{4}} \leq 8, \\ (280,53a_1^4 + 10,57a_2^4)^{\frac{1}{4}} \leq 12, \\ (1208,13a_1^4 + 27,48a_2^4)^{\frac{1}{4}} \leq 16, \end{cases} & \begin{cases} a_1^*\left(\frac{3}{4}\right) = 2,48, \\ a_2^*\left(\frac{3}{4}\right) = 5,16. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(\mathcal{U}): \quad & \begin{cases} (1,63a_1^2 + 2,37a_2^2)^{\frac{1}{2}} \leq 8, \\ (16,75a_1^2 + 3,25a_2^2)^{\frac{1}{2}} \leq 12, \\ (34,76a_1^2 + 5,24a_2^2)^{\frac{1}{2}} \leq 16, \end{cases} & \begin{cases} a_1^*(2) = 1,92, \\ a_2^*(2) = 4,94. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_4(\mathcal{U}): \quad & \begin{cases} \left(\sqrt[3]{2,65a_1^4} + \sqrt[3]{5,62a_2^4} \right)^{\frac{3}{4}} \leq 8, \\ \left(\sqrt[3]{280,53a_1^4} + \sqrt[3]{10,57a_2^4} \right)^{\frac{3}{4}} \leq 12, \\ \left(\sqrt[3]{1208,13a_1^4} + \sqrt[3]{27,48a_2^4} \right)^{\frac{3}{4}} \leq 16. \end{cases} & \begin{cases} a_1^*(4) = 1,61, \\ a_2^*(4) = 4,16. \end{cases} \end{aligned}$$

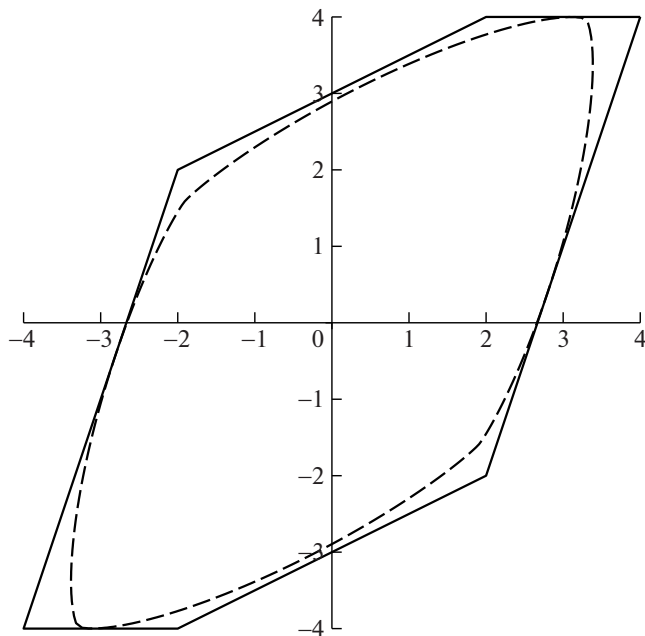


Рис. 2. Исходное множество $\mathcal{U}$ (сплошная линия) и его суперэллипсоидальная аппроксимация $B\mathcal{E}_{\frac{4}{3}}\left(a^*\left(\frac{4}{3}\right)\right)$ (пунктирная линия).

Сопоставим полученные решения в смысле меры Лебега аппроксимирующего суперэллипса в соответствии с леммой 6:

$$\mu\left(\mathcal{E}_{\frac{4}{3}}\left(a^*\left(\frac{4}{3}\right)\right)\right) = 32,60, \quad \mu(\mathcal{E}_2(a^*(2))) = 29,79, \quad \mu(\mathcal{E}_4(a^*(4))) = 24,86.$$

Отсюда следует, что наиболее качественной аппроксимацией $B^{-1}\mathcal{U}$ является $\mathcal{E}_{\frac{4}{3}}\left(a^*\left(\frac{4}{3}\right)\right)$. Следовательно, для исходного множества $\mathcal{U}$ наиболее качественной аппроксимацией из рассмотренных является множество $B\mathcal{E}_{\frac{4}{3}}\left(a^*\left(\frac{4}{3}\right)\right)$. Результаты аппроксимации представлены на рис. 2.

6. Примеры формирования оптимального управления

Построим решение задачи быстрогодействия для систем (2) различной размерности на основе разработанных методов. Для этого будем использовать следующий

Алгоритм 1.

1. Для заданного множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ построить тензор инерции $I_{\mathcal{U}}$ и вычислить матрицу ориентации суперэллипсоидального множества $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ согласно подразделу 5.1.

2. Выбрать множество значений параметра суперэллипсоидальной аппроксимации $\{r_1, \dots, r_M\} \subset (1; +\infty)$.

3. Для всех $r \in \{r_1, \dots, r_M\}$ составить оптимизационные задачи (9) для множества $B^{-1}\mathcal{U}$ и вычислить соответствующие точки максимума $a^*(r)$.

4. При помощи леммы 10 определить оптимальный параметр суперэллипсоидальной аппроксимации r^* согласно (10).

5. Для заданного начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и различных $N \in \mathbb{N}$ составить системы уравнений, представленные в следствии 1.

6. Определить величину $N_{\min}$ как наименьшее значение $N \in \mathbb{N}$, при котором решение составленной на шаге 5 системы уравнений удовлетворяет условию $\alpha \leq 1$.

7. Для вычисленной на шаге 6 величины $N_{\min}$ и соответствующих ей $\alpha > 0$ и $\psi(0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ построить оптимальное управление $\{u^*(k)\}_{k=0}^{N_{\min}-1}$ для системы $(A, B\mathcal{E}_{r^*}(a^*(r^*)))$ согласно теореме 1 и лемме 5.

8. Построить траекторию $\{x^*(k)\}_{k=0}^{N_{\min}}$ в соответствии с рекуррентными соотношениями (2).

Пример 4. Пусть $n = 2$. В качестве $\mathcal{U}$ выберем многогранник, рассмотренный в примерах 2 и 3, матрицу системы и начальное состояние определим следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} -4,5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Можно полагать, что множество $\mathcal{U}$ аппроксимировано $B\mathcal{E}_{\frac{4}{3}}(a^*(\frac{4}{3}))$ в соответствии с примером 3. Тогда решение системы уравнений, представленной в следствии 1, для $N = 9$ имеет вид

$$\alpha = 1,019, \quad \psi_1(0) = 0,775, \quad \psi_2(0) = -0,632.$$

Решение, полученное для $N = 10$, имеет вид

$$\alpha = 0,998, \quad \psi_1(0) = 0,792, \quad \psi_2(0) = -0,610.$$

Откуда следует, что для вспомогательной системы $(A, B\mathcal{E}_{\frac{4}{3}}(a^*(\frac{4}{3})))$ в силу (4) $N_{\min} = 10$.

Оптимальная траектория системы и оптимальное управление, вычисленные на основе теоремы 1, представлены в табл. 1.

Таблица 1. Оптимальный процесс управления для двухмерной системы

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_1(k)$	-4,5	2,19	-3,86	3,01	-3,36	2,95	-2,82	2,54	-1,94	1,97	0
$x_2(k)$	8	-8,51	7,96	-7,86	7,28	-6,76	5,96	-4,95	3,70	-1,83	0
$u_1(k)$	3,19	0,27	2,77	-1,51	2,38	-1,95	2,21	-2,07	2,15	-2,11	-
$u_2(k)$	3,99	-2,74	3,96	-3,59	3,88	-3,75	3,83	-3,79	3,81	-3,80	-

На основе точных методов, изложенных в [6], для исходной системы $(A, \mathcal{U})$ вычислено $N_{\min} = 9$. Таким образом, с точки зрения качества управления погрешность гарантирующего решения составляет один шаг.

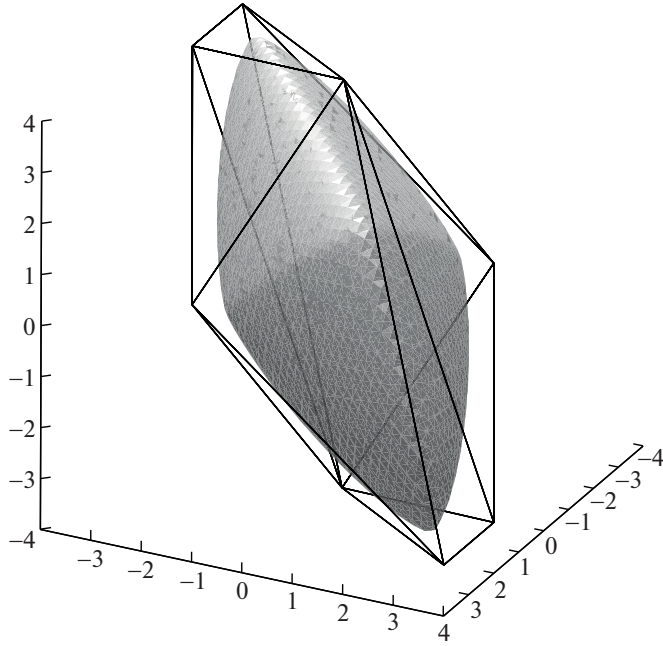


Рис. 3. Исходное множество $\mathcal{U}$ и его суперэллипсоидальная аппроксимация $BE_{\frac{4}{3}}(a^*(\frac{4}{3}))$.

Пример 5. Пусть $n = 3$. Множество допустимых значений управлений, матрицу системы и начальное состояние определим следующим образом:

$$\mathcal{U} = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0,486 & -0,315 & 0,689 \\ -0,757 & -0,202 & 0,442 \\ 0 & -0,818 & -0,375 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 26 \\ 24 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Тензор инерции $I_{\mathcal{U}}$ и матрица ориентации B имеют вид

$$I_{\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 526,73 & -135,75 & 132,41 \\ -135,75 & 474,79 & 164,87 \\ 132,41 & 164,87 & 439,35 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0,49 & 0,73 & 0,48 \\ 0,59 & -0,68 & 0,43 \\ -0,64 & -0,08 & 0,76 \end{pmatrix}.$$

Суперэллипсоидальная аппроксимация множества $B^{-1}\mathcal{U}$ проведена для $r \in \{\frac{6}{5}, \frac{4}{3}, 2, 4, 6\}$. Решения задач вида (9) представлены в табл. 2. Отсюда следует, что наиболее качественной является аппроксимация $\mathcal{E}_{\frac{4}{3}}(a^*(\frac{4}{3}))$. Графически результат суперэллипсоидальной аппроксимации $\mathcal{U}$ множеством $BE_{\frac{4}{3}}(a^*(\frac{4}{3}))$ представлен на рис. 3. Решение системы уравнений, представленной в следствии 1, для $N = 9$ имеет вид

$$\alpha = 1,038, \quad \psi_1(0) = -0,827, \quad \psi_2(0) = -0,012, \quad \psi_3(0) = -0,563.$$

Таблица 2. Результаты суперэллипсоидальной аппроксимации для трехмерной системы

r	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	2	4	6
$\mu(\mathcal{E}_r(a^*(r)))$	57,58	61,11	57,64	41,91	35,90
$a_1^*(r)$	5,06	5,04	4,53	3,71	3,45
$a_2^*(r)$	2,48	2,24	1,58	1,20	1,10
$a_3^*(r)$	2,29	2,22	1,98	1,45	1,32

Таблица 3. Оптимальный процесс управления для трехмерной системы

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_1(k)$	26	23,64	-3,16	17,65	11,14	-0,59	9,51	3,71	1,01	2,11	0
$x_2(k)$	24	-11,76	-25,76	14,85	-10,19	-10,80	6,71	-5,75	-1,86	-0,03	0
$x_3(k)$	30	-29,28	17,93	13,24	-16,11	11,64	4,12	-6,56	4,39	0,65	0
$u_1(k)$	-2,10	1,80	-1,28	-1,88	1,88	-1,62	-1,64	1,91	-1,99	-1,48	-
$u_2(k)$	-0,48	2,70	-0,68	0,33	2,70	-1,06	0,99	2,68	-1,59	1,30	-
$u_3(k)$	1,60	-2,67	-1,13	1,01	-2,73	-0,36	0,48	-2,77	0,77	0,21	-

Решение, полученное для $N = 10$, имеет вид

$$\alpha = 0,890, \quad \psi_1(0) = -0,805, \quad \psi_2(0) = -0,075, \quad \psi_3(0) = -0,589.$$

Отсюда следует, что для вспомогательной системы $\left(A, B\mathcal{E}_{\frac{4}{3}}\left(a^*\left(\frac{4}{3}\right)\right)\right)$ в силу (4) $N_{\min} = 10$.

Оптимальная траектория системы и оптимальное управление, вычисленные на основе теоремы 1, представлены в табл. 3.

На основе точных методов, изложенных в [6], для исходной системы $(A, \mathcal{U})$ вычислено $N_{\min} = 8$. Таким образом, с точки зрения качества управления погрешность гарантирующего решения составляет 2 шага.

7. Заключение

В статье рассмотрено решение задачи быстрогодействия для линейных дискретных систем с ограниченным управлением. Предполагается, что множество допустимых значений управлений является выпуклым компактным телом, содержащим начало координат, матрица системы обратима. Для случая строго выпуклых ограничений на управление достаточные условия оптимальности процесса управления сформулированы в виде дискретного принципа максимума. При этом с практической точки зрения процедура построения оптимального управления сводится к вычислению начальных условий сопряженной системы.

Подробно изучен класс суперэллипсоидальных множеств — множеств, являющихся обобщением понятия эллипсоида для нормированных пространств. В частности, в явном виде описана зависимость нормального конуса от опорной точки, вычислена мера Лебега суперэллипса в n -мерном пространстве.

В случае, когда множество допустимых значений управлений системы представляет собой суперэллипсоидальное множество, определение начальных условий сопряженной системы в принципе максимума сведено к системе алгебраических уравнений, обладающей единственным решением. Существенно, что размерность и, следовательно, сложность решения данной системы не зависят от оптимального значения критерия в задаче быстрогодействия, а определяются только числом фазовых переменных, что обеспечивает эффективность такого метода в сравнении с другими подходами к решению.

Для систем с множеством допустимых значений управлений общего вида разработан метод суперэллипсоидальной аппроксимации, заключающийся в построении для произвольного выпуклого тела вписанного в него суперэллипса максимальной меры. Процедура аппроксимации разделена на два этапа: подбор матрицы ориентации суперэллипса в пространстве и вычисление параметров суперэллипсоидального множества. Первый этап заключается в вычислении тензора инерции аппроксимируемого тела, второй этап удастся свести к решению ряда задач выпуклого программирования.

Разработанная методика позволяет строить оптимальные процессы управления для различных дискретных систем. За счет общей постановки задачи суперэллипсоидальной аппроксимации удастся обобщить дискретный принцип максимума в том числе и на системы с ограничениями на управление, которые изначально не являются строго выпуклыми, например системы с линейными ограничениями.

На численных примерах опробованы полученные теоретические результаты.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 4. Поскольку функционал Минковского множества (1) является гладкой функцией на всем $\mathbb{R}^n$:

$$M(x, \mathcal{E}_r(a)) = \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}},$$

то согласно [24, теорема 26.1] для произвольного $x \in \partial \mathcal{E}_r(a)$ верно представление

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x, \mathcal{E}_r(a)) &= \text{cone}\{\nabla_x M(x, \mathcal{E}_r(a))\} \setminus \{0\} = \\ &= \text{cone} \left\{ \frac{1}{r} \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}-1} \left(\frac{r|x_1|^{r-1}\text{sign}(x_1)}{|a_1|^r}, \dots, \frac{r|x_n|^{r-1}\text{sign}(x_n)}{|a_n|^r} \right)^T \right\} \setminus \{0\} = \\ &= \text{cone} \left\{ \left(\frac{|x_1|^{r-1}\text{sign}(x_1)}{|a_1|^r}, \dots, \frac{|x_n|^{r-1}\text{sign}(x_n)}{|a_n|^r} \right)^T \right\} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует п. 1 леммы 4.

Согласно определению нормального конуса верно включение

$$p \in \mathcal{N}(x^*(p), \mathcal{E}_r(a)).$$

Тогда с учетом п. 1 леммы 4 найдется $\alpha > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} p &= \alpha \left(\frac{|x_1^*(p)|^{r-1} \text{sign}(x_1^*(p))}{|a_1|^r}, \dots, \frac{|x_n^*(p)|^{r-1} \text{sign}(x_n^*(p))}{|a_n|^r} \right)^T, \\ x^*(p) &= \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r-1}}} \left(|p_1 a_1^r|^{\frac{1}{r-1}} \text{sign}(p_1), \dots, |p_n a_n^r|^{\frac{1}{r-1}} \text{sign}(p_n) \right)^T = \\ &= \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r-1}}} (|p_1|^{q-1} a_1^q \text{sign}(p_1), \dots, |p_n|^{q-1} a_n^q \text{sign}(p_n))^T = \\ &= \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r-1}}} \text{diag}(a) I_q (\text{diag}(a) p). \end{aligned}$$

Величину α можно вычислить из условия $x^*(p) \in \partial \mathcal{E}_r(a)$, которое эквивалентно равенству

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i^*(p)}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} &= 1, \\ 1 &= \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r-1}}} \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{|p_i|^{q-1} a_i^q}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{r-1}}} \left(\sum_{i=1}^n |p_i a_i|^q \right)^{\frac{1}{r}}, \\ \alpha^{\frac{1}{r-1}} &= \left(\sum_{i=1}^n |p_i a_i|^q \right)^{\frac{1}{r}} = \|\text{diag}(a) p\|_q^{q-1}. \end{aligned}$$

Второй пункт леммы 4 полностью доказан.

Доказательство леммы 5. Пункт 1 следует из п. 1 леммы 4, п. 2 леммы 3 и представления

$$\mathcal{N}(u, \mathcal{U}) = \mathcal{N}(DD^{-1}u, D\mathcal{E}_r(a)).$$

Пункт 2 следует из п. 2 леммы 4 и цепочки равенств

$$\arg \max_{u \in \mathcal{U}} (p, u) = D \arg \max_{x \in \mathcal{E}_r(a)} (p, Dx) = D \arg \max_{x \in \mathcal{E}_r(a)} (D^T p, x).$$

Лемма 5 полностью доказана.

Доказательство теоремы 2. Поскольку $x_0 \neq 0$, то согласно определениям функционала Минковского и нормального конуса условия (5) экви-

валентны условиям

$$(П.1) \quad -\psi(0) \in \mathcal{N} \left(\frac{x_0}{\alpha}, \mathcal{X}(N_{\min}) \right),$$

$$(П.2) \quad \frac{x_0}{\alpha} \in \partial \mathcal{X}(N_{\min}).$$

Включение (П.2) в силу леммы 1 и представления (6) равносильно условию

$$\frac{x_0}{\alpha} \in \partial \left(- \sum_{k=1}^{N_{\min}} A^{-k} \mathcal{U} \right) = \partial \sum_{k=1}^{N_{\min}} A^{-k} B \mathcal{E}_r(a).$$

Тогда с учетом п. 1 леммы 3 и определения алгебраической суммы множеств (П.1) эквивалентно тому, что найдутся $x^1 \in A^{-1} B \mathcal{E}_r(a), \dots, x^{N_{\min}} \in A^{-N_{\min}} B \mathcal{E}_r(a)$, для которых верны соотношения

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{\alpha} &= \sum_{k=1}^{N_{\min}} x^k, \\ -\psi(0) \in \mathcal{N} \left(\frac{x_0}{\alpha}, \mathcal{X}(N_{\min}) \right) &= \mathcal{N} \left(\sum_{k=1}^{N_{\min}} x^k, \sum_{k=1}^{N_{\min}} A^{-k} B \mathcal{E}_r(a) \right) = \\ &= \bigcap_{k=1}^{N_{\min}} \mathcal{N} \left(x^k, A^{-k} B \mathcal{E}_r(a) \right), \end{aligned}$$

что в силу п. 2 леммы 5 возможно в том и только в том случае, когда

$$x^k = \frac{A^{-k} B \text{diag}(a) I_q (-\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0))}{\|\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0)\|_q^{q-1}}.$$

Поскольку $I_q(-x) = -I_q(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$, получим эквивалентные соотношения

$$\frac{x_0}{\alpha} = \sum_{k=1}^{N_{\min}} x^k = - \sum_{k=1}^{N_{\min}} \frac{A^{-k} B \text{diag}(a) I_q (\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0))}{\|\text{diag}(a) (A^{-k} B)^T \psi(0)\|_q^{q-1}}.$$

То есть условия (5) равносильны указанному в условии теоремы 2 равенству.

Доказательство следствия 1. В силу теоремы 2 решение системы существует и удовлетворяет условиям (5). Тогда в силу леммы 1 и симметрии множеств вида (1) найдутся такие $x^1 \in \alpha A^{-1} B \mathcal{E}_r(a), \dots, x^{N_{\min}} \in \alpha A^{-N_{\min}} B \mathcal{E}_r(a)$, что справедливо равенство $x_0 = x^1 + \dots + x^{N_{\min}}$. Откуда в силу п. 1 леммы 3 следует, что любое решение $(\psi(0), \alpha)$ удовлетворяет включению

$$-\psi(0) \in \mathcal{N}(x_0, \alpha \mathcal{X}(N_{\min})) = \bigcap_{k=1}^{N_{\min}} \mathcal{N} \left(x^k, A^{-k} B \mathcal{E}_r(a) \right).$$

Но согласно п. 1 леммы 5 для всех $k = \overline{1, N_{\min}}$ множества $\mathcal{N}(x^k, A^{-k}B\mathcal{E}_r(a))$ являются одномерными лучами с началом в 0, т.е. содержат единственный вектор $-\psi(0)$, удовлетворяющий равенству $(\psi(0), \psi(0)) = 1$. Единственность величины $\alpha > 0$ следует из определения функционала Минковского и условий (5).

Следствие 1 доказано.

Лемма 10. Пусть $\mathcal{E}_r(a)$ определяется соотношениями (1). Тогда

$$\mu(\mathcal{E}_r(a)) = a_1 \cdot \dots \cdot a_n \mu(\mathcal{E}_r(1, \dots, 1)).$$

Доказательство леммы 10. Рассмотрим замену переменных

$$\begin{cases} x_1 = a_1 y_1, \\ \vdots \\ x_n = a_n y_n, \end{cases}$$

якобиан которой имеет вид $J = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$. Тогда

$$\mu(\mathcal{E}_r(a)) = \int_{\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \leq 1} 1 dx = \int_{\sum_{i=1}^n |y_i|^r \leq 1} |J| dy = a_1 \cdot \dots \cdot a_n \mu(\mathcal{E}_r(1, \dots, 1)).$$

Лемма 10 доказана.

Доказательство леммы 6. В части пространства $x_i \geq 0, i = \overline{1, n}$ рассмотрим замену переменных

$$(П.3) \quad \begin{cases} x_1 = R(\cos \phi_2 \cdot \cos \phi_3 \dots \cos \phi_n)^{\frac{2}{r}}, \\ x_2 = R(\sin \phi_2 \cdot \cos \phi_3 \dots \cos \phi_n)^{\frac{2}{r}}, \\ x_3 = R(\sin \phi_3 \cdot \cos \phi_4 \dots \cos \phi_n)^{\frac{2}{r}}, \\ \vdots \\ x_n = R(\sin \phi_n)^{\frac{2}{r}}. \end{cases}$$

$$R \geq 0, \quad \phi_j \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \quad j = \overline{2, n}.$$

Построим якобиан замены (П.3).

$$\frac{\partial x_i}{\partial \phi_j} = \begin{cases} \frac{\partial x_i}{\partial R} = \frac{x_i}{R}, & i = \overline{1, n}, \\ \frac{2 \cos \phi_j}{r \sin \phi_j} x_i, & i = \overline{2, n}, \quad j = i, \\ -\frac{2 \sin \phi_j}{r \cos \phi_j} x_i, & i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{i+1, n}, \\ 0, & i = \overline{3, n}, \quad j = \overline{2, i-1}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
J &= \begin{vmatrix} \frac{x_1}{R} & \frac{x_2}{R} & \frac{x_3}{R} & \cdots & \frac{x_n}{R} \\ -\frac{2x_1}{r} \operatorname{tg} \phi_2 & \frac{2x_2}{r} \operatorname{ctg} \phi_2 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{2x_1}{r} \operatorname{tg} \phi_3 & -\frac{2x_2}{r} \operatorname{tg} \phi_2 & \frac{2x_3}{r} \operatorname{ctg} \phi_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{2x_1}{r} \operatorname{tg} \phi_n & -\frac{2x_2}{r} \operatorname{tg} \phi_n & -\frac{2x_3}{r} \operatorname{tg} \phi_n & \dots & \frac{2x_n}{r} \operatorname{ctg} \phi_n \end{vmatrix} = \\
&= \frac{1}{R} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \left(\prod_{j=2}^n \operatorname{tg} \phi_j \right) \left(\frac{2}{r} \right)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \operatorname{ctg}^2 \phi_2 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & \operatorname{ctg}^2 \phi_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & \operatorname{ctg}^2 \phi_n \end{vmatrix} = \\
&= \frac{1}{R} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \left(\prod_{j=2}^n \operatorname{tg} \phi_j \right) \left(\frac{2}{r} \right)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \operatorname{ctg}^2 \phi_2 + 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \operatorname{ctg}^2 \phi_3 + 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \operatorname{ctg}^2 \phi_n + 1 \end{vmatrix} = \\
&= \frac{1}{R} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \left(\prod_{j=2}^n (\operatorname{tg} \phi_j + \operatorname{ctg} \phi_j) \right) \left(\frac{2}{r} \right)^{n-1} = \\
&= \frac{1}{R} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \left(\prod_{j=2}^n \frac{1}{\sin \phi_j \cos \phi_j} \right) \left(\frac{2}{r} \right)^{n-1} = \\
&= R^{n-1} \left(\frac{2}{r} \right)^{n-1} \prod_{j=2}^n (\sin \phi_j)^{\frac{2}{r}-1} (\cos \phi_j)^{\frac{2}{r}(j-1)-1}.
\end{aligned}$$

Тогда можно вычислить меру Лебега суперэллипса $\mathcal{E}_r(1, \dots, 1)$ через интеграл Лебега:

$$\begin{aligned}
\mu(\mathcal{E}_r(1, \dots, 1)) &= \int_{\sum_{i=1}^n |x_i|^r \leq 1} 1 dx = \\
&= 2^n \int_0^1 R^{n-1} \left(\frac{2}{r} \right)^{n-1} dR \prod_{j=2}^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \phi_j)^{\frac{2}{r}-1} (\cos \phi_j)^{\frac{2}{r}(j-1)-1} d\phi_j.
\end{aligned}$$

Для каждого $j = \overline{2, n}$ вычислим вспомогательные интегралы:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \phi_j)^{\frac{2}{r}-1} (\cos \phi_j)^{\frac{2}{r}(j-1)-1} d\phi_j = \\
& = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \phi_j)^{\frac{2}{r}-1} (\cos \phi_j)^{\frac{2}{r}(j-1)-2} d \sin \phi_j = \\
& = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \phi_j)^{\frac{2}{r}-1} (1 - \sin^2 \phi_j)^{\frac{j-1}{r}-1} d \sin \phi_j = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \phi_j)^{\frac{1}{r}-1} (1 - \sin^2 \phi_j)^{\frac{j-1}{r}-1} d \sin^2 \phi_j = \\
& = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{r}-1} (1-t)^{\frac{j-1}{r}-1} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{r}, \frac{j-1}{r}\right),
\end{aligned}$$

где через $B(x, y)$ обозначена бета-функция Эйлера.

Тогда исходный интеграл имеет вид

$$\begin{aligned}
\mu(\mathcal{E}_r(1, \dots, 1)) &= \frac{2^n}{n} \left(\frac{2}{r}\right)^{n-1} \prod_{j=2}^n \left(\frac{1}{2} B\left(\frac{1}{r}, \frac{j-1}{r}\right)\right) = \\
&= \frac{2}{n} \left(\frac{2}{r}\right)^{n-1} \prod_{j=2}^n \frac{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right) \Gamma\left(\frac{j-1}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{r} + \frac{j-1}{r}\right)} = \\
&= \frac{2}{n} \left(\frac{2}{r} \Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\right)^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{j}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+1}{r}\right)} = \\
&= \frac{2}{n} \left(\frac{2}{r} \Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\right)^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{r}\right)} = \frac{\left(\frac{2}{r} \Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\right)^n}{\frac{n}{r} \Gamma\left(\frac{n}{r}\right)} = \\
&= \frac{\left(2 \Gamma\left(\frac{1}{r} + 1\right)\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{r} + 1\right)}.
\end{aligned}$$

С учетом леммы 10 окончательно получим равенство

$$\mu(\mathcal{E}_r(a)) = a_1 \cdot \dots \cdot a_n \frac{\left(2 \Gamma\left(\frac{1}{r} + 1\right)\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{r} + 1\right)}.$$

Лемма 6 доказана.

Лемма 11. Пусть $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклые и компактные тела, содержащие 0 в качестве внутренней точки. В таком случае включение $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$ верно тогда и только тогда, когда для любого $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$M(x, \mathcal{U}_1) \geq M(x, \mathcal{U}_2).$$

Доказательство леммы 11. Пусть $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2$, $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда по определению функционала Минковского

$$\begin{aligned} x \in M(x, \mathcal{U}_1)\mathcal{U}_1 &\subset M(x, \mathcal{U}_1)\mathcal{U}_2, \\ M(x, \mathcal{U}_1) &\geq \inf\{t > 0: x \in t\mathcal{U}_2\} = M(x, \mathcal{U}_2). \end{aligned}$$

Пусть для всех $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$M(x, \mathcal{U}_1) \geq M(x, \mathcal{U}_2).$$

Тогда по определению функционала Минковского

$$\mathcal{U}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n: M(x, \mathcal{U}_1) \leq 1\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n: M(x, \mathcal{U}_2) \leq 1\} = \mathcal{U}_2.$$

Лемма 11 доказана.

Доказательство леммы 7. Лемма 7 следует непосредственно из леммы 11 и того факта, что

$$M(x, \mathcal{E}_r(a)) = \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Лемма 7 доказана.

Доказательство теоремы 3. В силу леммы 7 включение $\mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U}$ эквивалентно условию

$$\left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \geq M(x, \mathcal{U}) \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^n.$$

Также в силу данного ограничения верно, что

$$\mu(\mathcal{U} \setminus \mathcal{E}_r(a)) = \mu(\mathcal{U}) - \mu(\mathcal{E}_r(a)).$$

Откуда с учетом того, что величина $\mu(\mathcal{U})$ не зависит от переменных оптимизации, следует утверждение теоремы 3.

Лемма 12. Пусть существуют $p^1, \dots, p^K \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_K > 0$ такие, что

$$\mathcal{U} = \bigcap_{k=1}^K \left\{ u \in \mathbb{R}^n: (p^k, u) \leq \alpha_k \right\}, \quad 0 \in \text{int } \mathcal{U}.$$

Тогда

$$M(x, \mathcal{U}) = \max_{k=\overline{1, K}} \frac{(p^k, x)}{\alpha_k}.$$

Доказательство леммы 12. Поскольку для любого $t > 0$

$$\begin{aligned} t\mathcal{U} &= \left\{ u \in \mathbb{R}^n : u = tx, \ x \in \mathcal{U} \right\} = \\ &= \left\{ u \in \mathbb{R}^n : u = tx, \ (p^k, x) \leq \alpha_k, \ k = \overline{1, K} \right\} = \\ &= \left\{ u \in \mathbb{R}^n : \left(p^k, \frac{u}{t} \right) \leq \alpha_k, \ k = \overline{1, K} \right\} = \\ &= \left\{ u \in \mathbb{R}^n : (p^k, u) \leq t\alpha_k, \ k = \overline{1, K} \right\} = \\ &= \bigcap_{k=1}^K \left\{ u \in \mathbb{R}^n : (p^k, u) \leq t\alpha_k \right\}, \end{aligned}$$

то согласно определению функционала Минковского

$$\begin{aligned} M(x, \mathcal{U}) &= \inf \{ t > 0 : x \in t\mathcal{U} \} = \\ &= \inf \left\{ t > 0 : (p^k, x) \leq t\alpha_k, \ k = \overline{1, K} \right\} = \\ &= \inf \left\{ t > 0 : t \geq \frac{(p^k, x)}{\alpha_k}, \ k = \overline{1, K} \right\} = \max_{k=\overline{1, K}} \frac{(p^k, x)}{\alpha_k}. \end{aligned}$$

Лемма 12 доказана.

Доказательство леммы 8. Согласно леммам 7 и 12 включение $\mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U}$ эквивалентно тому, что для всех $x \in \mathbb{R}^n$ будет справедливо неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} \geq \max_{k=\overline{1, K}} \frac{(p^k, x)}{\alpha_k}.$$

Для $x = 0$ данное неравенство выполняется тривиально. Рассмотрим случай $x \neq 0$ и перейдем к эквивалентным неравенствам. Для всех $k = \overline{1, K}$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}} &\geq \frac{(p^k, x)}{\alpha_k}, \\ \alpha_k &\geq \frac{(p^k, x)}{\left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}}. \end{aligned}$$

Поскольку данные неравенства должны выполняться при любом $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, можно с учетом леммы 4 перейти к равносильному соотношению

$$\begin{aligned} \alpha_k &\geq \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{(p^k, x)}{\left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}} = \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \left(p^k, \frac{x}{\left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{a_i} \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}} \right) = \\ &= \max_{y \in \partial \mathcal{E}_r(a)} (p^k, y) = (p^k, x^*(p^k)) = \\ &= \frac{(p^k, \text{diag}(a) I_q (\text{diag}(a) p^k))}{\|\text{diag}(a) p^k\|_q^{q-1}} = \|\text{diag}(a) p^k\|_q. \end{aligned}$$

Лемма 8 полностью доказана.

Доказательство леммы 9. Обозначим для произвольных выпуклого множества $\mathcal{U}$ и $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ через $s(p, \mathcal{U})$ опорную функцию $\mathcal{U}$:

$$s(p, \mathcal{U}) = \sup_{x \in \mathcal{U}} (p, x).$$

Как продемонстрировано в [24, теорема 11.5], произвольное выпуклое компактное множество $\mathcal{U}$ представляет собой пересечение всех опорных полупространств:

$$\mathcal{U} = \bigcap_{p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \{x \in \mathbb{R}^n : (p, x) \leq s(p, \mathcal{U})\}.$$

Тогда вложение $\mathcal{E}_r(a) \subset \mathcal{U}$ эквивалентно тому, что для каждого $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ будет выполнено неравенство

$$(II.4) \quad s(p, \mathcal{E}_r(a)) \leq s(p, \mathcal{U}).$$

Пусть $a, b \in \mathcal{P}_r(\mathcal{U})$, $\lambda \in (0; 1)$, $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Тогда в силу п. 2 леммы 4 и неравенства Минковского [25, раздел 1 §1 гл. II] верны соотношения

$$\begin{aligned} s(p, \mathcal{E}_r(\lambda a + (1 - \lambda)b)) &= \max_{x \in \mathcal{E}_r(\lambda a + (1 - \lambda)b)} (p, x) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n |(\lambda a_i + (1 - \lambda)b_i) p_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\leq \lambda \left(\sum_{i=1}^n |a_i p_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} + (1 - \lambda) \left(\sum_{i=1}^n |b_i p_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \\ &= \lambda s(p, \mathcal{E}_r(a)) + (1 - \lambda) s(p, \mathcal{E}_r(b)) \leq s(p, \mathcal{U}). \end{aligned}$$

Тогда $\mathcal{E}_r(\lambda a + (1 - \lambda)b) \subset \mathcal{U}$, что по определению эквивалентно включению $\lambda a + (1 - \lambda)b \in \mathcal{P}_r(\mathcal{U})$. Отсюда следует выпуклость $\mathcal{P}_r(\mathcal{U})$.

Выберем в качестве $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ i -й координатный вектор:

$$p = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, 0, \dots, 0)^T.$$

Тогда по построению

$$s(\pm p, \mathcal{E}_r(a)) = a_i.$$

С учетом условия (П.4) получим, что для любого $a \in \mathcal{P}_r(\mathcal{U})$ верно неравенство

$$0 \leq a_i \leq \min\{s(p, \mathcal{U}), s(-p, \mathcal{U})\}.$$

Поскольку $\mathcal{U}$ ограничено, то для любого $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ значение опорной функции $s(p, \mathcal{U})$ конечно. Тогда $\mathcal{P}_r(\mathcal{U})$ ограничено.

Замкнутость $\mathcal{P}_r(\mathcal{U})$ следует из замкнутости $\mathcal{U}$.

Лемма 9 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Б.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
2. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
3. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973.
4. Ибрагимов Д.Н., Сиротин А.Н. О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем и ограниченным управлением // АиТ. 2017. № 10. С. 3–32.
<https://doi.org/10.1134/S0005117917100010>
Ibragimov D.N., Sirotnin A.N. On the Problem of Operation Speed for the Class of Linear Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 10. P. 1731–1756.
<https://doi.org/10.1134/S0005117917100010>
5. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИИЛ, 1960.
6. Ибрагимов Д.Н., Новожилкин Н.М., Порцева Е.Ю. О достаточных условиях оптимальности гарантирующего управления в задаче быстродействия для линейной нестационарной дискретной системы с ограниченным управлением // АиТ. 2021. № 12. С. 48–72. <https://doi.org/10.31857/S0005231021120047>
Ibragimov D.N., Novozhilin N.M., Portseva E.Yu. On Sufficient Optimality Conditions for a Guaranteed Control in the Speed Problem for a Linear Time-Varying Discrete-Time System with Bounded Control // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 12. P. 2076–2096. <https://doi.org/10.1134/S000511792112002X>
7. Каменев Г.К. Численное исследование эффективности методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М.: Вычислительный центр РАН, 2010.
8. Ибрагимов Д.Н. Оптимальная по быстродействию коррекция орбиты спутника // Электрон. журн. Тр. МАИ. 2017. № 94. Доступ в журн.
<http://trudymai.ru/published.php>

9. *Kurzanskiy A., Varaiya P.* Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis of Discrete-Time Linear Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2007. V. 52, No.1. P. 26–38. <https://doi.org/10.1109/TAC.2006.887900>
10. *Чернуоусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.
11. *Gridgeman N.T.* Lamé Ovals // The Mathematical Gazette. 1970. V. 54. No. 387. P. 31–37. <https://doi.org/10.2307/3613154>
12. *Tobler W.R.* The Hyperelliptical and Other New Pseudo Cylindrical Equal Area Map Projections // J. Geophys. Res. 1973. V. 78. No. 11. P. 1753–1759. <https://doi.org/10.1029/JB078i011p01753>
13. *Shi P.J., Huang J.G., Hui C., Grissino-Mayer H.D., Tardif J.C., Zhai L.H., Wang F.S., Li B.L.* Capturing Spiral Radial Growth of Conifers Using the Superellipse to Model Tree-Ring Geometric Shape // Frontiers in Plant Science. 2015. V. 6. No. 856. P. 1–13. <https://doi.org/10.3389/fpls.2015.00856>
14. *Gielis J.* A Generic Geometric Transformation That Unifies a Wide Range of Natural and Abstract Shapes // Amer. J. Botany. 2003. V. 90. No. 3. P. 333–338. <https://doi.org/10.3732/ajb.90.3.333>
15. *Максимидис П.Т., Карателли Д., Тосо Дж., Смолдерс Б.* Анализ нового класса волноводных структур для проектирования реактивно нагруженных антенных решеток // Докл. ТУСУР. 2017. №1. С. 10–13. <https://doi.org/10.21293/1818-0442-2017-20-1-09-13>
16. *Zolotenkova M.K., Egorov V.V.* Development and Analysis of Ultrasound Registrating and Performing Rodent Vocalization Device // IEEE-EDM. 2022. P. 506–509. <https://doi.org/10.1109/EDM55285.2022.9855056>
17. *Sadowski A.J.* Geometric Properties for the Design of Unusual Member Cross-Sections in Bending // Engineering Structures. 2011. V. 33. No. 5. P. 1850–1854. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2011.01.026>
18. *Tobler W.R.* Superquadrics and Angle-Preserving Transformations // IEEE-CGA. 1981. V. 1. No. 1. P. 11–23. <https://doi.org/10.1109/MCG.1981.1673799>
19. *Desoer C.A., Wing J.* The Minimal Time Regulator Problem for Linear Sampled-Data Systems: General Theory // J. Franklin Inst. 1961. V. 272. No. 3. P. 208–228. [https://doi.org/10.1016/0016-0032\(61\)90784-0](https://doi.org/10.1016/0016-0032(61)90784-0)
20. *Lin W.-S.* Time-Optimal Control Strategy for Saturating Linear Discrete Systems // Int. J. Control. 1986. V. 43. No. 5. P. 1343–1351. <https://doi.org/10.1080/00207178608933543>
21. *Мороз А.И.* Синтез оптимального по быстродействию управления для линейного дискретного объекта третьего порядка // АИТ. 1965. № 2. С. 193–207.
Moroz A.I. Synthesis of Time-Optimal Control for Linear Discrete Objects of the Third Order // Autom. Remote Control. 1965. V. 25. No. 9. P. 193–206.
22. *Краснощеченко В.И.* Симплекс-метод для решения задачи быстродействия при наличии ограничения на скалярное управление и фазовых ограничений // Инженерный журнал: наука и инновации. 2014. № 6.
Доступ в журн. <http://engjournal.ru/catalog/it/asu/1252.html>
23. *Сазанова Л.А.* Устойчивость оптимального синтеза в задаче быстродействия // Известия вузов. Математика. 2002. № 2. С. 46–57.
24. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

25. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012.
26. Берендакова А.В., Ибрагимов Д.Н. О методе построения внешних оценок предельного множества управляемости для линейной дискретной системы с ограниченным управлением // *АиТ*. 2023. № 2. С. 3–34.
<https://doi.org/10.31857/S0005231023020010>
27. Ибрагимов Д.Н. О задаче быстродействия для класса линейных автономных бесконечномерных систем с дискретным временем, ограниченным управлением и вырожденным оператором // *АиТ*. 2019. № 3. С. 3–25.
<https://doi.org/10.1134/S0005231019030012>
Ibragimov D.N. On the Optimal Speed Problem for the Class of Linear Autonomous Infinite-Dimensional Discrete-Time Systems with Bounded Control and Degenerate Operator // *Autom. Remote Control*. 2019. V. 80. No. 3. P. 393–412.
<https://doi.org/10.1134/S0005117919030019>
28. Островский А.М. Решение уравнений и систем уравнений. М.: Издательство иностранной литературы, 1963.
29. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1988.
30. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
31. Ашманов С.А., Тимохов С.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Маликовым.

Поступила в редакцию 06.04.2023

После доработки 25.06.2023

Принята к публикации 20.07.2023

© 2023 г. В.А. МОЗЖЕЧКОВ, д-р техн. наук (v.a.moz@yandex.ru)
(Тульский государственный университет)

СИНТЕЗ СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ В ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ОБУЧАЮЩИХ ПРИМЕРОВ

Рассматривается задача синтеза статической обратной связи в линейных стационарных системах управления с дискретным временем. Желаемое поведение системы определено набором законов изменения во времени выхода системы, выступающих в качестве обучающих примеров, а также требованием к степени ее устойчивости. Учитываются ограничения на структуру регулятора. Получены соотношения и предложен основанный на их применении итерационный метод, позволяющий находить хорошее начальное приближение искомой матрицы обратной связи и осуществлять его последовательное уточнение. В общем случае решается задача поиска матриц обратной связи, имеющих простую структуру, т.е. таких матриц, в которых отличны от нуля только те компоненты, выбор значений которых, отличных от нуля, необходим и достаточен для придания системе желаемых свойств. Приведены примеры реализации предложенного метода.

Ключевые слова: линейные дискретные системы управления, обратная связь, синтез.

DOI: 10.31857/S0005231023090039, EDN: JRWIYV

1. Введение

Синтезу статической обратной связи в линейных системах управления посвящено значительное число работ. В них желаемое поведение системы определяется, как правило, требованием принадлежности корней ее характеристического полинома к некоторому множеству значений либо требованием минимизации интегрального квадратичного функционала, оценивающего качество переходных процессов. Соответственно рассматриваются задача размещения полюсов передаточной функции замкнутой системы (модального управления) и задача синтеза линейно-квадратичного регулятора (LQR). Для них существуют [1] эффективные методы, обеспечивающие их точное решение, при условии, что в регуляторе могут использоваться все компоненты вектора состояния и на выбор значений коэффициентов обратных связей не наложены явные ограничения. Однако эти задачи оказываются трудноразрешимыми, если в них учитываются ограничения на структуру регулятора [2, 3], в частности состоящие в запрете использовать некоторые переменные состояния, что имеет место, например, при синтезе обратной связи по выходу. Было показано, что в таком случае задача размещения полюсов является

NP-трудной [2, 4] и сводится, как правило, к негладкой и невыпуклой задаче оптимизации в пространстве параметров регулятора [2, 5]. Для нее были найдены необходимые и достаточные условия существования решения [6–9], но не удалось разработать методы получения точного решения [2, 3], вместе с тем были предложены алгоритмы, позволяющие вычислить искомое решение приближенно. Значительная их часть основана на использовании для синтеза стабилизирующих регуляторов функций Ляпунова и сведении исходной задачи к поиску решения нелинейных матричных неравенств путем многократного решения линейных матричных неравенств (LMI) в ходе итерационного уточнения искомого решения [9–13]. В [14–16] исследована возможность использования техники LMI для учета требований синтеза разреженной матрицы обратной связи, ограничивающих свободу выбора структуры регулятора. Наряду с указанными предложены [2, 3] алгоритмы синтеза стабилизирующих регуляторов по выходу, основанные на минимизации спектральной абсциссы замкнутой системы путем ее непосредственного вычисления и решения соответствующей задачи нелинейного программирования на основе методов, учитывающих специфику рассматриваемой задачи синтеза. В [8, 17, 18] представлены алгоритмы, основанные на методах внешней алгебры, позволяющие находить начальное приближение искомой матрицы обратной связи по выходу для задачи модального управления, которое затем итерационно уточняется. Применительно к задаче LQR с обратной связью по выходу получены [19, 20] необходимые условия существования решения в виде системы нелинейных матричных уравнений и предложены использующие их итерационные алгоритмы поиска приближенного решения данной задачи [20–24]. Численные методы решения задачи LQR с разреженной матрицей обратной связи, основанные на технике LMI, рассмотрены в [14–16, 25], впервые такая задача была решена в [26] путем ее сведения к задаче нелинейного дискретного программирования. Указанные выше алгоритмы не гарантируют нахождение точного решения и носят эвристический характер, поскольку отсутствуют строгие доказательства их сходимости.

Существенным отличием задачи, рассматриваемой в данной статье, от классических задач синтеза статической обратной связи является то, что желаемое поведение системы определено набором законов изменения во времени выхода системы, выступающих в качестве обучающих примеров. Ими могут быть траектории, соответствующие, например, закону управления с обратной связью, который необходимо упростить, используя в синтезируемой системе более простой регулятор (в частности, система с обратной связью по состоянию может быть источником обучающих примеров для синтеза обратной связи по выходу), либо закону программного управления или управлению, выполненному человеком, которые необходимо реализовать в синтезируемой системе на основе закона управления с обратной связью. Совместно с условием близости траекторий движения системы к траекториям, заданным в качестве обучающих примеров, учитывается требование обеспечения заданной степени устойчивости системы. Кроме того, учитываются ограничения, накладыва-

ваемые на структуру обратной связи. Они могут быть выражены в форме требования использования обратной связи по выходу, требования равенства нулю некоторых коэффициентов матрицы обратной связи, а также в форме требования исключения избыточности ее структуры, эквивалентного требованию получения матрицы обратной связи с простой структурой [27–31], т.е. матрицы, в которой отличны от нуля только те компоненты, выбор значений которых, отличных от нуля, необходим и достаточен для придания системе желаемых свойств. Целью синтеза является приближение поведения системы к желаемому в результате выбора значений коэффициентов и структуры матрицы обратной связи. Предлагаемая постановка задачи синтеза обратной связи обладает новизной и не рассматривалась в работах, посвященных синтезу регуляторов, включая работы, предполагающие использование методов машинного обучения [32–35].

В статье получены соотношения и предложен основанный на их применении итерационный метод, позволяющий находить хорошее начальное приближение искомой матрицы обратной связи и осуществлять его последовательное уточнение. С использованием предлагаемого метода представляется возможность синтезировать все возможные варианты матриц обратной связи с простой структурой.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему управления, описываемую уравнениями

$$\begin{aligned} (1) \quad & x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \\ (2) \quad & y_k = Cx_k, \\ (3) \quad & u_k = Ky_k, \end{aligned}$$

где k – дискретное время, принимающее значения из множества натуральных чисел; x_k , y_k , u_k – соответственно вектор состояния, выхода и управления; значения компонент векторов x_k , y_k , u_k и элементов постоянных матриц A , B , C , K – действительные числа; матрица регулятора K подлежит определению, остальные матрицы считаем заданными.

Учтем ограничения, накладываемые на структуру регулятора (3). Они обычно сводятся [2, 14, 15, 26] к требованию равенства нулю некоторых коэффициентов в матрице регулятора $K = (k_{i,j})$, поэтому будем учитывать условие

$$(4) \quad k_{i,j} = 0, \quad \forall (i,j) \notin \check{S},$$

где $\check{S}$ – набор пар индексов (i,j) коэффициентов матрицы K , не стесненных требованием их равенства нулю.

Желаемое поведение системы (1)–(4) определим, задав для некоторого набора начальных условий x_k^γ , $\gamma \in \{\overline{1, q}\}$ соответствующие желаемые траектории $Y_\gamma = (y_k^\gamma)$, $k \in \{\overline{1, N}\}$ изменения во времени выхода (2) системы (1)–(4),

т.е. зададим набор

$$(5) \quad Q = \{(x_0^\gamma, Y_\gamma)\}, \quad \gamma \in \{\overline{1, q}\},$$

в котором пары (x_0^γ, Y_γ) являются обучающими примерами.

В системе (1)–(4), идеально соответствующей желаемому поведению, для начальных условий $x(0) = x_0^\gamma$ в каждый момент времени $k \in \{\overline{1, N}\}$ выполняется равенство $y(x_0^\gamma, K)_k = y_k^\gamma$. Потребуем выполнение этого условия для каждой пары $(x_0^\gamma, Y_\gamma) \in Q$, т.е. считаем необходимым выполнение равенств

$$(6) \quad y(x_0^\gamma, K)_k = y_k^\gamma, \quad \forall k \in \{\overline{1, N}\}, \quad \forall \gamma \in \{\overline{1, q}\}.$$

Возможность приближенного выполнения требования (6) опишем условием

$$(7) \quad \varepsilon_k^{\gamma-} \leq y(x_0^\gamma, K)_k - y_k^\gamma \leq \varepsilon_k^{\gamma+}, \quad \forall k \in \{\overline{1, N}\}, \quad \forall \gamma \in \{\overline{1, q}\},$$

где $\varepsilon_k^{\gamma-}, \varepsilon_k^{\gamma+}$ – заданные постоянные векторы.

Выполнение условий (7) в общем случае не гарантирует устойчивость системы (1)–(4). Поэтому совместно с (7) потребуем обеспечить необходимую степень устойчивости по Шуру матрицы $A_c = A + BKC$ замкнутой системы (1)–(4), т.е. требуется выполнить условие

$$(8) \quad \rho(A_c(K)) \leq 1 - \sigma,$$

где $\rho(A_c(K))$ – спектральный радиус матрицы $A_c(K)$, σ – заданная степень устойчивости.

Выбор матрицы K осуществим из условия наилучшего приближения поведения системы (1)–(4) к желаемому в смысле минимизации евклидовой нормы вектора $\Delta y(K)$, составленного из невязок $y(x_0^\gamma, K)_k - y_k^\gamma$ всех уравнений (6), т.е. из условия

$$(9) \quad |\Delta y(K)| \rightarrow \min_K.$$

Рассматриваемая задача в случае, когда структура регулятора задана (указан фиксированный набор $\check{S}$, определяющий структуру регулятора), состоит в нахождении матрицы K в системе (1)–(4), соответствующей требованиям (7)–(9).

В общем случае будем решать задачу структурного синтеза, состоящую в определении всех наборов $\check{S}$ и соответствующих им матриц K , для которых выполняются условия (7)–(9) и структура регулятора (3), (4) является простой, что означает [27–31] отличие от нуля в матрице K только тех ее компонент, выбор значений которых, отличных от нуля, необходим и достаточен для придания системе (1)–(4) желаемых свойств. Формально задача поиска множества Ω простых структур регулятора (3), (4) состоит в нахождении таких приемлемых структур $\check{S} \in \zeta$, для которых нельзя указать менее

сложную приемлемую структуру $\check{S}' \in \zeta$ (структуру $\check{S}'$ считаем проще, чем $\check{S}$, если $\check{S}' \subset \check{S}$), т.е. требуется найти

$$(10) \quad \Omega = \{ \check{S} \in \zeta \mid \{ \check{S}' \in \zeta \mid \check{S}' \subset \check{S} \} = \emptyset \},$$

где ζ – множество приемлемых структур, т.е. структур, для которых существует матрица K , удовлетворяющая условиям (1)–(4), (7)–(9), формула $\{ \check{S}' \in \zeta \mid \check{S}' \subset \check{S} \} = \emptyset$ указывает на отсутствие приемлемой структуры $\check{S}'$, которая проще, чем структура $\check{S} \in \Omega$.

3. Анализ задачи

Решение системы (1)–(3) для заданных x_0^γ , K можно записать [1, с. 20] в следующем виде:

$$(11) \quad y(x_0^\gamma, K)_k = CA^k x_0^\gamma + C \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} BK y(x_0^\gamma, K)_i, \quad \forall k \in \{\overline{1, N}\}.$$

Условие (6) с учетом (11) эквивалентно системе уравнений

$$(12) \quad CA^k x_0^\gamma + C \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} BK y(x_0^\gamma, K)_i = y_k^\gamma, \quad \forall k \in \{\overline{1, N}\}, \quad \forall \gamma \in \{\overline{1, q}\},$$

из которой в результате тождественных преобразований получаем систему

$$(13) \quad CA^k x_0^\gamma + C \sum_{i=0}^{k-1} \left(y(x_0^\gamma, K)_i^T \otimes A^{k-i-1} B \right) \text{vec}(K) = y_k^\gamma, \\ \forall k \in \{\overline{1, N}\}, \quad \forall \gamma \in \{\overline{1, q}\},$$

где $\otimes$ – произведение Кронекера [36, с. 83], $\text{vec}(\cdot)$ – функция векторизации [36], ее результатом является столбец, полученный последовательным соединением всех столбцов матрицы, указанной в качестве аргумента. Систему (13) запишем в виде

$$(14) \quad Y_{0\gamma} + G_\gamma(K) \text{vec}(K) = Y_\gamma, \quad \forall \gamma \in \{\overline{1, q}\},$$

где $Y_{0\gamma}$, Y_γ , $G_\gamma(K)$ – столбцы, составленные соответственно из блоков $CA^k x_0^\gamma$, y_k^γ , $G_{k\gamma}(K) = C \sum_{i=0}^{k-1} (y(x_0^\gamma, K)_i^T \otimes A^{k-i-1} B)$, $k \in \{\overline{1, N}\}$.

Из (14) с учетом (4) получаем:

$$(15) \quad G_\gamma(K)_S \text{vec}(K)_S = \hat{Y}_\gamma, \quad \forall \gamma \in \{\overline{1, q}\},$$

где матрица $G_\gamma(K)_S$ и вектор $\text{vec}(K)_S$ составлены соответственно из столбцов матрицы $G_\gamma(K)$ и координат вектора $\text{vec}(K)$, номера которых указаны в наборе S , определяющем согласно заданному в (4) набору $\check{S}$ номера координат

нат вектора $\text{vec}(K)$, не стесненных требованием равенства их значений нулю, $\hat{Y}_\gamma = Y_\gamma - Y_{0\gamma}$.

Пусть все желаемые траектории $Y_\gamma = (y_k^\gamma)$, $k \in \{\overline{1, N}\}$, $\gamma \in \{\overline{1, q}\}$ принадлежат множеству решений системы (1)–(4), тогда в выражениях (12), (13) можно заменить $y(x_0^\gamma, K)_i$ на y_i^γ , при этом матрица $G_\gamma(K)$ в (15) оказывается постоянной, не зависящей от искомой неизвестной матрицы K . В таком случае систему (15) можно представить в виде

$$(16) \quad \bar{G}_\gamma \text{vec}(K)_S = \hat{Y}_\gamma, \quad \forall \gamma \in \{\overline{1, q}\},$$

где $\bar{G}_\gamma$ – столбец блоков $\bar{G}_{k\gamma} = C \sum_{i=0}^{k-1} (y^{\gamma_i T} \otimes A^{k-i-1} B)$, $k \in \{\overline{1, N}\}$.

Утверждение 1. *Требование (6) точного соответствия системы (1)–(4) желаемому поведению, заданному набором обучающих примеров (5), выполняется тогда и только тогда, когда все желаемые траектории Y_γ , $\gamma \in \{\overline{1, q}\}$ принадлежат множеству решений системы (1)–(4) и матрица K с учетом (4) является решением системы линейных уравнений (16).*

Доказательство утверждения 1 представлено в Приложении.

Из утверждения 1 следует, что совместность системы (16) является необходимым и достаточным условием выполнения равенств (6), т.е. условием точного воспроизведения всех обучающих примеров синтезируемой системой.

Из показанной выше эквивалентности уравнений (6) и (15) следует эквивалентность условий (9), (7) соответственно требованиям

$$(17) \quad \sum_{\gamma=1}^q |G_\gamma(K)_S \text{vec}(K)_S - \hat{Y}_\gamma|^2 \rightarrow \min_K,$$

$$(18) \quad \hat{Y}_\gamma + \varepsilon_\gamma^- \leq G_\gamma(K)_S \text{vec}(K)_S \leq \hat{Y}_\gamma + \varepsilon_\gamma^+, \quad \gamma \in \{\overline{1, q}\}.$$

Утверждение 2. *Для выполнения требований (7)–(9) наилучшего приближения поведения системы (1)–(4) к желаемому, заданному набором обучающих примеров (5), необходимо и достаточно, чтобы матрица K с учетом равенств (4) являлась решением нелинейной задачи о наименьших квадратах (17) с ограничениями (18) и (8).*

Доказательство утверждения 2 представлено в Приложении.

4. Метод решения

4.1. Решение задачи с заданной структурой регулятора

Пусть структура регулятора задана, т.е. указан набор $\check{S}$. Искомую матрицу K , соответствующую условиям (4), (7)–(9), можно определить, решив согласно утверждению 2 задачу (4), (17), (18), (8), которую далее будем называть задачей обучения статического регулятора (задачей ОСР). Успешность ее решения в значительной степени будет зависеть от того, насколько началь-

ные значения искомым неизвестных близки к значениям, соответствующим решению, т.е. от выбора начального приближения.

Хорошим начальным приближением решения задачи ОСР может служить решение системы (16) или, в общем случае, ее приближенное решение – матрица $\underline{K}$, для которой вектор $\text{vec}(\underline{K})_S$ минимизирует евклидову норму разности левой и правой частей системы (16), т.е. является ее нормальным псевдорешением

$$(19) \quad \text{vec}(\underline{K})_S = \bar{G}_S^+ \hat{Y},$$

где $\bar{G}_S^+$ – матрица, псевдообратная к матрице системы (16), $\hat{Y}$ – правая часть системы (16).

Близость матрицы $\underline{K}$ к искомому решению обусловлена следующим. Пусть условия (7)–(8) совместны и $\check{K}$ – решение задачи ОСР. Если желаемые траектории принадлежат множеству траекторий, возможных в системе (1)–(4), то согласно утверждению 1 матрица $\check{K}$ совпадает с решением системы (16), т.е. $\check{K} = \underline{K}$. Небольшое расхождение желаемых и возможных траекторий приводит к небольшому расхождению между матрицами $\check{K}$ и $\underline{K}$, так как малым изменениям параметров системы (1)–(4) соответствуют малые изменения ее решений и наоборот. Совместность условий (7)–(8) означает близость желаемых и возможных в системе (1)–(4) траекторий, поэтому, если искомое решение задачи ОСР существует, оно близко к $\underline{K}$ (здесь и далее имеется в виду близость матриц, оцениваемая нормой Фробениуса).

Матрица $\underline{K}$ в общем случае отличается от искомого решения, так как при ее определении не в полной мере учитываются условия (7)–(9), поэтому, используя ее как отправную точку, будем искать решение, соответствующее всей совокупности предъявляемых требований.

Эффективность поиска решения задачи ОСР можно повысить, если учесть ее специфические особенности. Заметим, что задача ОСР превращается в линейную задачу о наименьших квадратах с линейными ограничениями [37, с. 225] (далее – задача НКЛ), если в (17), (18) заменить $G_\gamma(K)_S$ на неизменную матрицу $G_\gamma(K^*)_S$, соответствующую фиксированной матрице K^* , и в (8) заменить функцию $\rho(A_c(K))$ ее линейной аппроксимацией вблизи K^* . Указанная линеаризация приемлема при поиске решения в малой окрестности матрицы K^* . Поэтому на ее основе можно на каждом очередном шаге поиска, решая задачу НКЛ с матрицей K^* , являющейся матрицей, найденной на предшествующем шаге, последовательно приближаться к решению задачи ОСР.

Предлагаемый алгоритм решения задачи ОСР сводится к следующим действиям.

1. Выбираем в качестве начального приближения искомого вектора $\text{vec}(K)_S$ нормальное псевдорешение системы (16).

2. Выполняем итерационный поиск решения. На нулевой итерации принимаем $\text{vec}(K^{(0)})_S = \text{vec}(\underline{K})_S$ (номер итерации будем указывать в верхнем

индексе в скобках). Далее на каждой j -й итерации решаем следующую задачу НКЛ:

$$(20) \quad \sum_{\gamma=1}^q |G_{\gamma}^{(j-1)} \alpha^{(j)} - \hat{Y}_{\gamma}|^2 \rightarrow \min_K,$$

$$(21) \quad \hat{Y}_{\gamma} + \varepsilon_{\gamma}^{-} \leq G_{\gamma}^{(j-1)} \alpha^{(j)} \leq \hat{Y}_{\gamma} + \varepsilon_{\gamma}^{+}, \quad \gamma \in \{\overline{1, q}\},$$

$$(22) \quad r_0^{(j-1)} + r_1^{(j-1)} \alpha^{(j)} \leq 1 - \sigma,$$

где $\alpha^{(j)} \equiv \text{vec}(K^{(j)})_S$ – вектор неизвестных, $G_{\gamma}^{(j-1)}$ – столбец, составленный из блоков $G_{k\gamma}(K^{(j-1)}) = C \sum_{i=0}^{k-1} \left(y(x_0^{\gamma}, K^{(j-1)})_i^T \otimes A^{k-i-1} B \right)$, $k \in \{\overline{1, N}\}$, $r_0^{(j-1)} + r_1^{(j-1)} \alpha^{(j)}$ – линейное приближение функции $\rho(A_c(K))$ вблизи $K^{(j-1)}$. Если при решении задачи НКЛ (20)–(22) не удастся выполнить условия (21), (22), то поиск решения прекращается и констатируется, что решение задачи ОСР не удалось найти (либо потому что оно не существует, либо по причине недостаточной эффективности рассматриваемого алгоритма).

3. Поиск решения успешно завершается, когда найден вектор неизвестных $\alpha^* = \alpha^{(j)}$, для которого выполняются условия (21), (22) и либо становится достаточно малым значение $|\alpha^{(j)} - \alpha^{(j-1)}|$ или значение целевой функции, представленной в (20), либо исчерпано заданное число итераций. В качестве решения принимаем матрицу $K = \text{vec}_S^{-1}(\alpha^*)$, где $\text{vec}_S^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная функции векторизации, осуществляющая восстановление с учетом (4) матрицы K по вектору, указанному в качестве аргумента.

Представленный метод в значительной мере аналогичен итерационному алгоритму Гаусса–Ньютона, используемому для решения безусловной нелинейной задачи о наименьших квадратах, в котором на каждой итерации, применяя теорему Тейлора, линеаризуют целевую функцию и решают полученную таким образом линейную задачу о наименьших квадратах. Предлагаемый метод отличается тем, что он существенно использует специфику задачи (17), (18), (8), благодаря чему для линеаризации целевой функции не требуется дифференцирование; для этого, как указано выше, достаточно в пределах очередной итерации фиксировать матрицу K . Кроме того, предложенный метод является методом условной оптимизации, т.е. позволяет учитывать ограничения (условия (18), (8)) при решении нелинейной задачи о наименьших квадратах. На каждой итерации предлагаемого метода решается задача НКЛ, относящаяся к классу задач выпуклого программирования [38, 39], для которого разработаны эффективные оптимизационные процедуры, гарантирующие получение решения либо констатацию его отсутствия (в системе Matlab для решения задач НКЛ предназначена функция lsqmin).

4.2. Решение задачи структурного синтеза

Пусть структура регулятора не задана, т.е. набор $\check{S}$ в исходных данных задачи не указан и подлежит определению. В таком случае решаемая задача

является задачей структурного синтеза. Она с учетом принятой формализации (10) состоит в определении таких наборов $\tilde{S}$ и соответствующих им матриц K , для которых выполняются условия (7)–(9) и структура регулятора (3), (4) является простой [27–31]. Ее можно решить, воспользовавшись алгоритмом, предназначенным для задач синтеза простых структур общего вида [31]. В качестве применяемой в нем процедуры оценки приемлемости структуры регулятора и расчета соответствующих ей параметров может выступать процедура, предложенная в 4.1.

5. Примеры

Пример 1. Рассмотрим модель двухмассовой системы [1, с. 52, с. 125]. Будем считать, что вектор выхода составляют все компоненты вектора состояния, кроме второй. Для шага дискретизации по времени 0,01, единичных значений масс и жесткости связывающей их пружины получаем следующие матрицы системы (1), (2) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,01 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,01 \\ -0,01 & 0,01 & 1 & 0 \\ 0,01 & -0,01 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,01 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В (3) искомая матрица K имеет размер 1×3 , допускается возможность отличия от нуля всех ее компонент, поэтому в (4) $\tilde{S} = \{(1, 1) (1, 2) (1, 3)\}$.

Желаемое поведение системы (1)–(4) определим, задав в качестве желаемых траектории движения, соответствующие оптимальному по критерию минимальной энергии управлению, переводящему систему из начальных состояний $x_0^1 = (-1; 1; 1; -1)$ и $x_0^2 = (-10; 10; -1; -1)$ в начало координат за время $k = 250$. Указанные траектории $Y_1 = (y_k^1)$, $Y_2 = (y_k^2)$, $k \in \{1, 500\}$ в паре с соответствующими начальными условиями составляют набор обучающих примеров (5) $Q = \{(x_0^1, Y_1), (x_0^2, Y_2)\}$. Их можно рассчитать, используя известные зависимости [1, с. 128].

Вначале решим задачу синтеза, не используя ограничений (7), (8), т.е. решим задачу безусловной оптимизации целевой функции (9). Воспользовавшись методом, изложенным в разделе 4.1, после трех итераций находим матрицу регулятора $K = (-10,671 \quad -4,124 \quad -13,745)$, ей соответствует $\sigma = 0,964 \cdot 10^{-2}$, значение целевой функции составило 37,25.

Пример 2. С целью повышения степени устойчивости потребуем увеличить значение σ до $1,2 \cdot 10^{-2}$ и уменьшить амплитуду колебаний на заключительном интервале движения (для $k \in \{300, \dots, 500\}$), ограничив допустимое отклонение координат вектора выхода от желаемых траекторий значением $\pm 0,5$ и $\pm 1,5$ соответственно для x_0^1 и x_0^2 (в примере 1 эти отклонения были 0,68 и 2,23), т.е. с учетом указанных требований решим задачу условной оптимизации (9), (7), (8). Методом раздела 4.1 в результате трех итераций

находим $K = (-13,012 \quad -5,310 \quad -16,821)$, при этом $\sigma = 1,2 \cdot 10^{-2}$, условия (7), (8) выполняются, значение целевой функции составило 120,32.

Пример 3. Рассмотрим модель бокового движения самолета, представленную в [26, с. 182]. Из нее для шага дискретизации по времени 0,001 получаем матрицы системы (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1000 & 0 & 1 & 0,044 & 0 \\ -1,215 & 999 & 0,131 & 0 & 0 \\ 0,430 & 0,021 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1000 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0,040 & 1,587 \\ 0,381 & -0,067 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

В уравнении (2) C – единичная матрица размером 5×5 .

Решив для системы (1)–(3) задачу об оптимальном линейно-квадратичном регуляторе (LQR), минимизирующем критерий $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^T x_k$, находим матрицу регулятора (3)

$$K_{\text{LQR}} = - \begin{pmatrix} 2,049 & 0,098 & 3,937 & 0,096 & 0,766 \\ -0,110 & 1,100 & -0,168 & 1,031 & -0,642 \end{pmatrix}.$$

Пусть с целью упрощения регулятора необходимо исключить из набора используемых в нем переменных первую компоненту вектора состояния. Это можно сделать, записав при постановке задачи синтеза условие (4) в виде $k_{1,1} = 0$, $k_{2,1} = 0$, что эквивалентно синтезу обратной связи по выходу, содержащему все компоненты вектора состояния, кроме первой. Соответственно считаем, что в (4) задан набор $\tilde{S}$, содержащий все пары индексов коэффициентов матрицы K , кроме пар (1,1) и (2,1).

Набор обучающих примеров Q составим из траекторий движения $Y_\gamma = (y_k^\gamma)$, $\gamma \in \{\overline{1,5}\}$, $k \in \{\overline{1,10^4}\}$ системы (1)–(3) с LQR регулятором (с матрицей регулятора $K = K_{\text{LQR}}$), соответствующих начальным условиям x_0^γ , в которых в каждом векторе x_0^γ компонента с номером γ равна единице, а остальные – нулю. Назначим компоненты векторов $\varepsilon_k^{\gamma-}$, $\varepsilon_k^{\gamma+}$ в (7) из условия, что допустимое отклонение траекторий движения системы (1)–(3) от желаемых составляет в каждый момент времени k для всех компонент y_k^γ не более $\pm 1\%$ от их максимальных абсолютных значений. Потребуем обеспечить степень устойчивости синтезируемой системы не менее степени устойчивости системы (1)–(3) с LQR, для этого назначаем в (8) $\sigma = 4 \cdot 10^{-5}$.

Воспользовавшись методом, изложенным в разделе 4.1, находим матрицу регулятора

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 6,622 & -13,519 & 8,180 & -8,181 \\ 0 & -1,420 & 0,621 & -1,414 & 1,001 \end{pmatrix}.$$

Решение получено в результате четырех итераций с остановкой по факту выполнения назначенных ограничений и отсутствия прогресса в уменьшении целевой функции.

Пример 4. Изменим постановку задачи примера 3: учтем отсутствие первой компоненты вектора состояния в векторе выхода, определив соответствующим образом матрицу C в уравнении (2) как матрицу 4×5 , полученную удалением первой строки из матрицы C примера 3. Искомая матрица K в таком случае имеет размер 2×4 . Решим задачу структурного синтеза рассматриваемой системы в формулировке, представленной в разделе 4.2. Воспользовавшись предложенным в 4.2 методом, находим наборы $\tilde{S}$ и соответствующие им матрицы K , представленные в таблице, для которых выполняются условия (21), (22) и структура регулятора (3), (4) является простой [27–31].

Таблица

№	Матрица регулятора	№	Матрица регулятора
1	$\begin{pmatrix} 4,819 & -10,920 & 5,898 & -6,696 \\ 0 & -1,444 & 0,403 & -0,184 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} 5,230 & -11,510 & 6,413 & -7,030 \\ -0,318 & -0,984 & 0 & 0,0786 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 6,084 & -12,742 & 7,500 & -7,736 \\ -0,994 & 0 & -0,867 & 0,644 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 5,112 & -11,344 & 6,268 & -6,936 \\ -0,225 & -1,120 & 0,120 & 0 \end{pmatrix}$

6. Заключение

В статье предложен новый подход к синтезу статической обратной связи в линейных стационарных системах управления с дискретным временем, отличающийся тем, что желаемое поведение системы определено набором законов изменения во времени выхода системы, выступающих в качестве обучающих примеров. Рассмотренная постановка задачи и метод ее решения допускают обобщение на случай синтеза динамических регуляторов на основе известной [3] процедуры сведения задачи синтеза системы с динамическим регулятором к эквивалентной задаче синтеза статической обратной связи.

Представленный в разделе 4.1 алгоритм решения задачи обучения статического регулятора носит эвристический характер, поскольку его сходимость подтверждена вычислительными экспериментами, но строго не доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. Пусть матрица K является решением системы (16). При соблюдении указанного в утверждении условия

принадлежности всех желаемых траекторий Y_γ , $\gamma \in \{\overline{1, q}\}$ множеству решений системы (1)–(4) уравнения (16) и (6), как было показано выше, эквивалентны. Следовательно, выбор матрицы K , обеспечивающий выполнение равенств (16), при соблюдении всех прочих условий утверждения гарантирует выполнение требований (6). Это доказывает достаточность условий утверждения. Если матрица K не является решением системы (16), тогда из нарушения уравнений (16) следует нарушение условий (6). Если некоторые из желаемых траекторий Y_γ , $\gamma \in \{\overline{1, q}\}$ не принадлежат множеству решений системы (1)–(4), то для них невозможно в каждый момент времени $k \in \{\overline{1, N}\}$ выполнение равенства $y_k = y_k^\gamma$ и, следовательно, невозможно выполнение условий (6). Это доказывает необходимость условий утверждения.

Доказательство утверждения 2. Справедливость утверждения 2 следует из показанной выше эквивалентности условий (1)–(4), (7)–(9) условиям (4), (8), (17), (18).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. М.: Ленанд, 2019.
2. Sadabadi M.S., Peaucelle D. From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey // Ann. Rev. Control. 2016. V. 42. P. 11–26.
3. Syrmos V.L., Abdallah C.T., Dorato P., Grigoriadis K. Static output feedback — a survey // Automatica. 1997. V. 33. No. 2. P. 125–137.
4. Toker O., Ozbay H. On the NP-hardness of solving bilinear matrix inequalities and simultaneous stabilization with static output feedback // IEEE American Control Conference. Seattle, Washington, USA. 1995. P. 2525–2526.
5. Toscano R. Structured controllers for uncertain systems: A stochastic optimization approach. N.Y.: Springer-Verlag, 2013.
6. Rosinova D., Vesely V., Kucera V. A necessary and sufficient condition for static output feedback stabilizability of linear discrete-time systems // Kybernetika. 2003. V. 39. P. 447–459.
7. Cao Y.Y., Lam J., Sun Y.X. Static output stabilization: an ILMI approach // Automatica. 1998. V. 34. No. 12. P. 1641–1645.
8. Wang X. Pole placement by static output feedback // J. Math. Syst. Estim. Control. 1992. V. 2. No. 2. P. 205–218.
9. Пакшин П.В., Рябов А.В. Синтез управления со статической обратной связью по выходу для линейных систем // АиТ. 2004. № 4. С. 61–69.
Pakshin P.V., Ryabov A.V. A static output feedback control for linear systems // Autom. Remote Control. 2004. V. 65. No. 4. P. 559–566.
10. Agulhari C.M., Oliveira R.C., Peres P.L. LMI relaxations for reduced-order robust H^∞ -control of continuous-time uncertain linear systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2012. V. 57. No. 6. P. 1532–1537.
11. Ebihara Y., Tokuyama K., Hagiwara T. Structured controller synthesis using LMI and alternating projection method // Int. J. Control. 2004. V. 77. No. 12. P. 1137–1147.

12. *Grigoriadis K.M., Beran E.B.* Alternating projection algorithms for linear matrix inequalities problems with rank constraints // *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. SIAM. Philadelphia, USA. 2000. P. 251–267.
13. *Leibfritz F.* An LMI-based algorithm for designing suboptimal static H^2/H^∞ output feedback controllers // *SIAM J. Control Optim.* 2001. V. 39. No. 6. P. 1711–1735.
14. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Разреженная обратная связь в линейных системах управления // *АиТ*. 2014. № 12. С. 13–27.
Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. Sparse feedback in linear control systems // *Autom. Remote Control*. 2014. V. 75. No. 12. P. 2099–2111.
15. *Быков А.В., Щербаков П.С.* Синтез разреженной обратной связи в линейных дискретных системах // *АиТ*. 2018. № 7. С. 3–21.
Bykov A.V., Shcherbakov P.S. Sparse feedback design in discrete-time linear systems // *Autom. Remote Control*. 2018. V. 79. No. 7. P. 1175–1190.
16. *Lin F., Fardad M., Jovanović M.R.* Design of Optimal Sparse Feedback Gains via the Alternating Direction Method // *IEEE Trans. Autom. Control*. 2013. V. 58. No. 9. P. 2426–2431.
17. *Belozorov V.Y.* New solution method of linear static output feedback design problem for linear control systems // *Linear Algebra Appl.* 2016. V. 504. P. 204–227.
18. *Blumthaler I., Oberst U.* Design, parametrization, and pole placement of stabilizing output feedback compensators via injective cogenerator quotient signal modules // *Linear Algebra Appl.* 2012. V. 436. P. 963–1000.
19. *Johnson T., Athans M.* On the design of optimal constrained dynamic compensators for linear constant systems // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1970. V. 15 P. 658–660.
20. *Moerder D., Calise A.* Convergence of a numerical algorithm for calculating optimal output feedback gains // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1985. V. 30 P. 900–903.
21. *Choi S., Sirisena H.* Computation of optimal output feedback gains for linear multivariable systems // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1974. V. 19. P. 254–258.
22. *Kreisselmeier G.* Stabilization of linear systems by constant output feedback using the riccati equation // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1975. V. 20. P. 556–557.
23. *Toivonen H.T.* A globally convergent algorithm for the optimal constant output feedback problem // *Int. J. Control*. 1985. V. 41. No. 6. P. 1589–1599.
24. *Geromel J., Peres P., Souza S.* Convex analysis of output feedback structural constraints // *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*. San Antonio, TX, USA. 1993. P. 1363–1364.
25. *Iwasaki T., Skelton R.* All controllers for the general H^∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas // *Automatica*. 1994. V. 30. P. 1307–1317.
26. *Параев Ю.И., Смагина В.И.* Задачи упрощения структуры оптимальных регуляторов // *АиТ*. 1975. № 6. С. 180–183.
27. *Мозжечков В.А.* Простые структуры в теории управления. Тула: ТулГУ, 2000.
28. *Мозжечков В.А.* Синтез линейных регуляторов с простой структурой // *АиТ*. 2003. № 1. С. 27–41.
Mozzhechkov V.A. Design of Simple-Structure Linear Controllers // *Autom. Remote Control*. 2003. V. 64. No. 1. P. 23–36.

29. *Мозжечков В.А.* Синтез простых робастных регуляторов линейных стационарных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2021. № 3. С. 11–22.
30. *Мозжечков В.А.* Синтез простых релейных регуляторов автоколебательных систем управления // АиТ. 2022. № 9. С. 81–93.
Mozzhechkov V.A. Synthesis of simple relay controllers in self-oscillating control systems // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 9. P. 1393–1403.
31. *Мозжечков В.А.* Простые структуры в задачах теории управления: формализация и синтез // Известия РАН. Теория и системы управления. 2022. № 3. С. 3–20.
32. *Vapnik V.N.* An overview of statistical learning theory // Transactions on Neural Networks. 1999. V. 10. № 5. P. 988–999.
33. *Воронцов К.В.* Комбинаторные оценки качества обучения по прецедентам // Доклады Академии наук. 2004. Т. 394. № 2. С. 175–178.
34. *Mohri M., Rostamizadeh A., Talwalkar A.* Foundations of Machine Learning. Massachusetts: MIT Press, 2012.
35. *Schmidhuber J.* Deep learning in neural networks // Neural Networks. 2015. V. 61. P. 85–117.
36. *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984.
37. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. М.: Мир, 1977.
38. *Bertsekas D.P.* Convex Optimization Algorithms. Belmont, MA.: Athena Scientific, 2015.
39. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакшиным.

Поступила в редакцию 14.11.2022

После доработки 21.06.2023

Принята к публикации 20.07.2023

Нелинейные системы

© 2023 г. А.А. КАБАНОВ, канд. техн. наук (kabanovaleksey@gmail.com)
(Севастопольский государственный университет, Севастополь),
А.В. ЗУЕВ, канд. техн. наук (alvzuev@yandex.ru),
А.Н. ЖИРАБОК, д-р техн. наук (zhirabok@mail.ru)
(Дальневосточный федеральный университет, Владивосток;
Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток),
В.Ф. ФИЛАРЕТОВ, д-р техн. наук (filaretov@inbox.ru)
(Институт автоматике и процессов управления ДВО РАН, Владивосток)

МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЕФЕКТОВ: ПОДХОД НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ¹

Рассматривается задача идентификации (оценивания) дефектов в системах, которые описываются линейными моделями при наличии внешних возмущающих воздействий. Для решения используются методы оптимального управления, которые по сравнению со скользящими наблюдателями позволяют обойтись без наличия высокочастотных переключений. Предлагаемый метод решения использует в качестве основы редуцированную модель исходной системы, чувствительную к дефектам и нечувствительную к возмущению. Изложенная теория иллюстрируется примером.

Ключевые слова: линейные системы, дефекты, идентификация, наблюдатели, оптимальные системы.

DOI: 10.31857/S0005231023090040, EDN: JTFHTK

1. Введение

Последние два десятка лет задача идентификации дефектов решается на основе наблюдателей, работающих в скользящих режимах [1–7]. Характерным для этих работ является то, что на рассматриваемую систему накладываются определенные ограничения, наиболее типичные состоят в следующем: должно выполняться условие согласования, а система должна быть минимально фазовой. Это ограничивает класс систем, для которых могут быть построены такие наблюдатели. Кроме того, реализация таких наблюдателей предполагает наличие высокочастотных переключений, что требует высокой частоты обмена данными в используемой системе управления, а это не всегда удается обеспечить на практике. Предлагаемый в настоящей работе метод на основе теории оптимального управления свободен от указанного недостатка.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-19-00392, <https://rscf.ru/project/22-19-00392/>).

Рассматриваются системы, описываемые линейной моделью

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Dd(t) + L\rho(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^m$ — вектор управления, $y \in \mathbb{R}^l$ — вектор выхода; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times s}$ — известные постоянные матрицы; вектор-функция $d(t) \in \mathbb{R}^q$ описывает дефекты: $d(t) = 0$ соответствует их отсутствию, $d(t)$ становится неизвестной функцией времени при их появлении; $\rho(t) \in \mathbb{R}^s$ — неизвестная функция времени, описывающая действующее на систему возмущение.

В настоящей работе ставится задача построения наблюдателя для оценки функции $d(t)$. В отличие от традиционно используемых для ее решения средств в основу предлагаемого решения положены методы оптимального управления. По аналогии с [5–7] задача решается не для исходной системы, а для ее редуцированной модели, нечувствительной к возмущению. Такая модель имеет меньшую размерность нежели исходная система.

2. Построение редуцированной модели

Редуцированная модель имеет вид

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_*(t) &= A_*x_*(t) + B_*u(t) + J_*y(t) + D_*d(t), \\ y_*(t) &= C_*x_*(t), \end{aligned}$$

где $x_*(t) \in \mathbb{R}^k$ — вектор состояния, A_* , B_* , J_* , C_* и D_* — подлежащие определению матрицы соответствующих размеров. По аналогии с [5–7] матрицы A_* и C_* ищутся в канонической форме

$$(2.2) \quad A_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad C_* = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0).$$

Также по аналогии с [5–7] полагаем, что существуют матрицы Φ и R_* такие, что $x_*(t) = \Phi x(t)$ и $y_*(t) = R_*y(t)$, и удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$(2.3) \quad \Phi A = A_*\Phi + J_*C, \quad R_*C = C_*\Phi, \quad \Phi B = B_*, \quad \Phi D = D_*.$$

Из (2.3) с учетом канонической формы (2.2) следуют уравнения [5–7]

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \Phi_1 &= R_*C, \quad \Phi_i A = \Phi_{i+1} + J_*C, \quad i = 2, \dots, k-1, \\ \Phi_k A &= J_*C, \end{aligned}$$

где Φ_i и J_{*i} — i -е строки матриц Φ и J_* , $i = 1, \dots, k$. Матрица R_* должна выбираться так, чтобы гарантировать $D_* \neq 0$, соответствующая процедура приведена ниже.

Допущение 1. Справедливо отношение $\text{Im}(D) \not\subset \text{Ker}(V^{(n)})$, где $V^{(n)}$ — матрица наблюдаемости:

$$V^{(n)} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-l} \end{pmatrix}.$$

Это допущение выполняется, если система (1.1) наблюдаема, так как в этом случае $\text{Ker}(V^{(n)}) = 0$, а тогда $V^{(n)}D \neq 0$. Пусть p — наименьшее целое с условием $CA^pD \neq 0$, а j — целое, для которого $C_jA^pD \neq 0$. Можно показать, что из (2.4) следует $\Phi = QV^{(n)}$ для некоторой матрицы Q , а тогда из $C_jA^pD \neq 0$ получаем $D_* = \Phi D \neq 0$. Из сказанного выше следует чувствительность к дефектам p -й производной переменной y_j в том смысле, что появление дефекта изменяет величину этой производной. Ясно также, что если j -я позиция матрицы R_* не равна нулю, модель (2.1) с этой матрицей будет чувствительна к дефекту.

В [5–7] показано, что нечувствительность к возмущению обеспечивается условием $\Phi L = 0$, которое вместе с (2.4) может быть сведено к уравнению

$$(2.5) \quad (R_* \quad -J_{*1} \quad \dots \quad -J_{*k})(W^{(k)} \quad L^{(k)}) = 0,$$

где

$$W^{(k)} = \begin{pmatrix} CA^k \\ CA^{k-1} \\ \vdots \\ C \end{pmatrix}, \quad L^{(k)} = \begin{pmatrix} CL & CAL & \dots & CA^{k-1}L \\ 0 & CL & \dots & CA^{k-2}L \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (2.5) разрешимо, если

$$\text{rank}(W^{(k)} \quad L^{(k)}) < l(k+1),$$

откуда определяется минимальная размерность $k > p$, а из (2.5) — строка $(R_* \quad -J_{*1} \quad \dots \quad -J_{*k})$. Если j -я позиция матрицы R_* отлична от нуля, по (2.3) и (2.4) определяются матрицы Φ , B_* и D_* . В противном случае нужно найти другое решение уравнения (2.5).

Устойчивость модели обеспечивается обратной связью по сигналу невязки $r_*(t) = R_*y(t) - y_*(t)$:

$$(2.6) \quad \dot{x}_*(t) = A_*x_*(t) + B_*u(t) + J_*y(t) + D_*d(t) + Kr_*(t),$$

матрица K имеет вид $K = (k_1 \ k_2 \ \dots \ k_k)^T$. Коэффициенты $k_1, k_2, \dots, k_k$ определяются исходя из заданных собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$:

$$\begin{aligned} k_1 &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k), \\ k_2 &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \dots + \lambda_{k-1} \lambda_k, \\ &\dots, \\ k_k &= (-1)^k \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k. \end{aligned}$$

С учетом выражения для невязки $r_*(t)$ уравнение (2.6) можно преобразовать:

$$\dot{x}_*(t) = (A_* - KC_*)x_*(t) + B_*u(t) + (J_* + KR_*)y(t) + D_*d(t).$$

3. Вспомогательная задача оптимального управления

Как было сказано, задача идентификации дефектов решается на основе методов оптимального управления, рассмотрим соответствующую задачу для системы

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \dot{z}(t) &= (A_* - KC_*)z(t) + B_*u(t) + (J_* + KR_*)y(t) + D_*w(t), \quad z(t_0) = \Phi x_0, \\ y_z(t) &= C_*z(t), \end{aligned}$$

где переменная $w(t)$ представляет собой вспомогательное управление, выполняющего роль неизвестной функции $d(t)$. Оно выбирается так, чтобы перевести систему (3.1) из состояния $z(t_0)$ в состояние, которому соответствует выход $y_z(t_f)$ такой, что $y_z(t_f) \rightarrow y_*(t_f)$, $t_f \rightarrow \infty$, и при этом минимизировать функционал

$$(3.2) \quad J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (e_y^T Q e_y + w^T R w) dt \rightarrow \min_v.$$

Здесь $e_y(t) = y_z(t) - y_*(t)$ — невязка, Q — положительное число; $R \in \mathbb{R}^{q \times q}$ — положительно определенная матрица. Сходимость $y_z(t_f) \rightarrow y_*(t_f)$, $t_f \rightarrow \infty$, понимается как сходимость по евклидовой норме: $\|y_z(t_f) - y_*(t_f)\| \rightarrow 0$, $t_f \rightarrow \infty$; аналогично для сходимости остальных функций времени, рассматриваемых в работе.

Задача идентификации состоит в построении оптимального в смысле (3.2) управления $w(t)$ такого, что $y_z(t) \rightarrow y_*(t)$ и $w(t) \rightarrow d(t)$, $t \rightarrow \infty$. Минимизация функционала (3.2) должна производиться при достаточно большом значении константы Q , в частности, в примере принято $Q = 10^{20}$. Это практически обеспечивает свойство $e_y(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Имея это в виду, обозначим через e_{y*} асимптоту для $e_y(t)$; из предыдущего следует, что с достаточной степенью точности можно принять $e_{y*} = 0$.

Введем вектор ошибки $e(t) = z(t) - x_*(t) \in R^k$ и запишем уравнение для него:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \dot{e}(t) &= A_* e(t) + D_*(w(t) - d(t)) - K e_y(t) = \\ &= (A_* - K C_*) e(t) + D_*(w(t) - d(t)), \quad e(t_0) = 0, \\ e_y(t) &= C_* e(t). \end{aligned}$$

Допущение 2. Система (3.3) сильно наблюдаема.

Сильная наблюдаемость системы означает, что она не имеет инвариантных нулей, т.е. не существует s , при которых

$$\text{rank}(R(s)) < k + \text{rank} \begin{pmatrix} -D_* \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $R(s)$ — матрица Розенброка [8, 9]:

$$R(s) = \begin{pmatrix} sI - (A_* - K C_*) & -D_* \\ C_* & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Если система (3.3) сильно наблюдаема, то $e_y(t) \rightarrow 0$ влечет $w(t) \rightarrow d(t)$, $t \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть $H(s)$ — передаточная функция системы (3.3):

$$(3.4) \quad E_y(s) = H(s)(W(s) - D(s)),$$

где $E_y(s)$, $W(s)$ и $D(s)$ — изображения по Лапласу функций e_y , $w(t)$ и $d(t)$, s — комплексная переменная. Так как $e_{y*} = 0$, то $E_y(s) = 0$. Поскольку система (3.3) не имеет инвариантных нулей, то при всех s функция $H(s)$ отлична от нуля, а тогда следует $W(s) = D(s)$. Известно [10], что функции, имеющие одинаковые изображения, совпадают при всех $t > 0$ за исключением множества меры нуль, откуда следует, что $w(t)$ и $d(t)$ совпадают при всех $t > 0$ за исключением множества меры нуль. Имея в виду асимптотическую сходимость функции $e_y(t)$, будем записывать это в виде $w(t) \rightarrow d(t)$.

Нетрудно видеть, что справедливо и обратное: если система не является сильно наблюдаемой, то при некотором s она будет иметь передаточный нуль: $H(s) = 0$, а тогда равенство (3.4) будет справедливо для $d(t) + e^{at}$ при $s = a$, т.е. в этом случае дефект восстанавливается с точностью до экспоненты.

4. Решение вспомогательной задачи

Приведем ее решение. Для задачи (3.1), (3.2) запишем Гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}(z - x_*)^T C_*^T Q C_* (z - x_*) + \frac{1}{2} w^T R w + \lambda^T (\bar{A}_* z + \bar{J}_* y + D_* w + B_* u),$$

где $\bar{A}_* = A_* - KC_*$, $\bar{J}_* = J_* + KR_*$, и найдем оптимальное управление:

$$(4.1) \quad \frac{\partial H}{\partial w} = 0 \Rightarrow Rw + D_*^T \lambda = 0 \Rightarrow w = -R^{-1} D_*^T \lambda,$$

а также запишем уравнения для переменной состояния и сопряженной переменной:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \bar{A}_* z + \bar{J}_* y + D_* w + B_* u = \bar{A}_* z + \bar{J}_* y - D_* R^{-1} D_*^T \lambda + B_* u, \\ z(t_0) &= \Phi x_0, \\ \dot{\lambda}(t) &= \frac{\partial H}{\partial z} = -\bar{A}_*^T \lambda - C_*^T Q C_* z + C_*^T Q y_*. \end{aligned}$$

Запишем последние соотношения в матричном виде:

$$\begin{aligned} (4.2) \quad \begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{A}_* & -D_* R^{-1} D_*^T \\ -C_*^T Q C_* & -\bar{A}_*^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(t) \\ \lambda(t) \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} B_* \\ 0 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} \bar{J}_* y(t) \\ C_*^T Q y_*(t) \end{pmatrix}, \\ z(t_0) &= \Phi x_0. \end{aligned}$$

Уравнение (4.2) можно рассматривать как диагностический наблюдатель. Интегрируя в прямом времени (4.2), можно найти и затем на основе (4.1) восстановить функцию, описывающую дефект:

$$(4.3) \quad w(t) = -R^{-1} D_*^T \lambda(t) \rightarrow d(t).$$

Открытым вопросом остается выбор начальных условий для сопряженной переменной при интегрировании (4.2). Поскольку начальные условия неизвестны, то для поиска управления введем преобразование Риккати вида [10]

$$(4.4) \quad z(t) = M(t) \lambda(t) + g(t),$$

где $M(t)$ — невырожденная матрица, $g(t)$ — некоторая вектор-функция. Дифференцируя (4.4) и выполнив ряд преобразований, получим

$$\begin{aligned} &\left(-\dot{M}(t) + \bar{A}_* M(t) + M(t) \bar{A}_*^T - D_* R^{-1} D_*^T + M(t) C_*^T Q C_* M(t) \right) \lambda(t) = \\ &= \dot{g}(t) - \bar{A}_* g(t) - \bar{J}_* y(t) - B_* u(t) - M(t) C_*^T Q C_* g(t) + M(t) C_*^T Q y_*(t). \end{aligned}$$

Полученное соотношение должно выполняться для любого значения $\lambda(t)$, что дает уравнения

$$\begin{aligned} (4.5) \quad \dot{M}(t) &= \bar{A}_* M(t) + M(t) \bar{A}_*^T - D_* R^{-1} D_*^T + M(t) C_*^T Q C_* M(t), \\ \dot{g}(t) &= \bar{A}_* g(t) + \bar{J}_* y(t) + B_* u(t) + M(t) C_*^T Q C_* g(t) - M(t) C_*^T Q y_*(t). \end{aligned}$$

При $t = t_0$ из (4.4) имеем $z(t_0) = M(t_0)\lambda(t_0) + g(t_0)$, а поскольку $\lambda(t_0)$ неизвестна, то для удовлетворения начальных условий нужно принять $M(t_0) = 0$, $z(t_0) = g(t_0)$. Подстановка (4.4) в (4.3) окончательно дает

$$(4.6) \quad w(t) = -R^{-1}D_*^T M^{-1}(t)(z(t) - g(t)).$$

Итоговое выражение для искомого наблюдателя имеет вид

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \dot{z}(t) &= \bar{A}_* z(t) - D_* R^{-1} D_*^T M^{-1}(t)(z(t) - g(t)) + \bar{J}_* y(t) + B_* u(t), \\ z(t_0) &= \Phi x(t_0), \\ y_z(t) &= C_* z(t). \end{aligned}$$

Здесь $M(t)$ и $g(t)$ определяются из уравнений (4.5) с начальными условиями $M(t_0) = 0$ и $z(t_0) = g(t_0)$. На бесконечном интервале времени, когда $t \rightarrow \infty$ и система (3.1) управляема и наблюдаема, решение уравнения (4.5) стремится к установившемуся значению $\bar{M}$, являющемуся решением алгебраического уравнения [11–13]

$$\bar{A}_* \bar{M} + \bar{M} \bar{A}_*^T - D_* R^{-1} D_*^T + \bar{M} C_*^T Q C_* \bar{M} = 0,$$

а функция $g(t)$ из второго уравнения в (4.5) будет стремиться к ограниченному решению $\bar{g}(t)$ дифференциального уравнения

$$(4.8) \quad \dot{\bar{g}}(t) = (\bar{A}_* + \bar{M} C_*^T Q C_*) \bar{g}(t) + \bar{J}_* y(t) + B_* u(t) - \bar{M} C_*^T Q y_*(t)$$

при начальных условиях $\bar{g}(t_0) = z(t_0)$. Искомый наблюдатель на бесконечном интервале времени принимает вид (4.7), где $M(t)$ и $g(t)$ заменены на $\bar{M}$ и $\bar{g}(t)$.

Сходимость $g(t)$ к ограниченному решению $\bar{g}(t)$ вытекает из следующих соображений. Умножив уравнение для M в (4.5) слева и справа на -1 и обозначив $P = -M$, получим уравнение Риккати, которое обычно возникает в задачах оптимального оценивания [14]. При условиях $R > 0$, $Q > 0$ и наблюдаемости системы (3.1) известно, что решение этого уравнения сходится к установившемуся решению $\bar{P}$, которое представляет собой единственное положительно определенное решение алгебраического уравнения Риккати

$$\bar{A}_* \bar{P} + \bar{P} \bar{A}_*^T + D_* R^{-1} D_*^T - \bar{P} C_*^T Q C_* \bar{P} = 0,$$

и при этом матрица $\bar{A}_* - \bar{P} C_*^T Q C_* \bar{P}$ является гурвицевой. Таким образом, поскольку $\bar{P} > 0$, $P \rightarrow \bar{P}$ и $P = -M$, получаем, что $M \rightarrow \bar{M}$, $\bar{M} < 0$ и матрица $\bar{A}_* + \bar{M} C_*^T Q C_* \bar{M}$ также будет гурвицевой. Введя ошибку $e_g(t) = g(t) - \bar{g}(t)$, из (4.5) и (4.8) получаем

$$\dot{e}_g(t) = (\bar{A}_* + \bar{M} C_*^T Q C_*) e_g(t).$$

Поскольку матрица $\bar{A}_* + \bar{M} C_*^T Q C_* \bar{M}$ гурвицева, то $e_g(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, и $g(t) \rightarrow \bar{g}(t)$, $t \rightarrow \infty$.

5. Результаты моделирования

Построим наблюдатель для универсального двухколесного робота (two-wheeled inverted pendulum robots (TWIP)) с возможностью самобалансировки [15]. Кинематическая схема TWIP робота показана на рис. 1. Математическая модель TWIP робота, линеаризованная в точке равновесия, может быть представлена в виде (1.1), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & b_2 \\ 0 & 0 \\ b_4 & b_4 \\ 0 & 0 \\ b_6 & -b_6 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \\ 0 \\ -b_6 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$x = (x_l \dot{x}_l \vartheta \dot{\vartheta} \psi \dot{\psi})$ — вектор состояния; $u = (T_L \ T_R)$ — вектор управления; T_L и T_R — крутящие моменты левого и правого колеса; x_l — линейное перемещение; ϑ — угол тангажа; ψ — угол курса; $y = (x_l \ \vartheta \ \psi)$ — вектор выхода системы; $d(t) = \tilde{T}_L$ — неизвестный дополнительный крутящий момент, действующий на

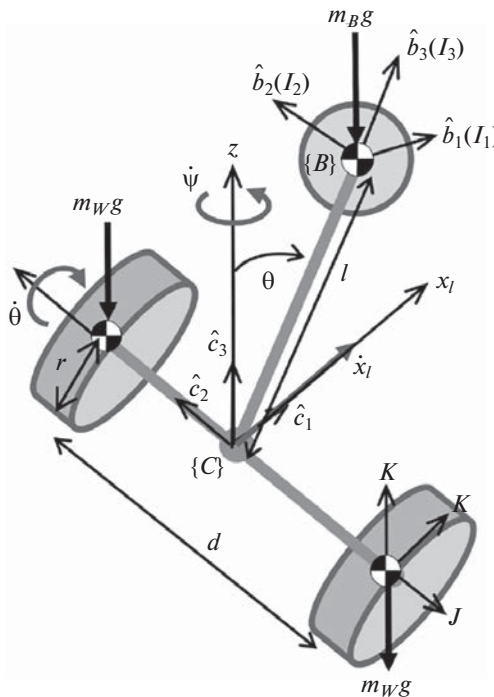


Рис. 1. Кинематическая схема TWIP робота.

Таблица

Символ	Определение	Величина
m_B	Масса корпуса маятника	45 кг
m_W	Масса колеса	2 кг
l	Длина маятника	0,135 м
r	Радиус колеса	8 дюймов
d	Расстояние между колесами	0,6 м
I_1, I_2, I_3	Моменты инерции корпуса маятника относительно осей X, Y, Z	1,9; 2,1; 1,6 кг.м ²
K_*, J	Моменты инерции колес маятника относительно вертикальной оси и оси вращения колес	0,04; 0,02 кг.м ²

левое колесо и подлежащий определению; $\rho(t) = \tilde{T}_R$ — неизвестный дополнительный крутящий момент, действующий на правое колесо; коэффициенты a_2, a_4, b_2, b_4 и b_6 могут быть найдены с помощью выражений [15]:

$$\begin{aligned}
a_2 &= -m_B^2 g l^2 / \mu_1, \quad a_4 = \left(m_B + 2m_W + \frac{2J}{r^2} \right) m_B g l / \mu_1, \\
b_2 &= ((I_2 + m_B l^2) / r + m_B l) / \mu_1, \quad b_4 = - \left(\frac{m_B l}{r} + m_B + 2m_W + \frac{2J}{r^2} \right) / \mu_2, \\
b_6 &= - \frac{d}{r \mu_2}, \\
\mu_1 &= \left(m_B + 2m_W + \frac{2J}{r^2} \right) (I_2 + m_B l^2) - m_B^2 l^2, \\
\mu_2 &= I_3 + 2K_* + 2 \left(m_W + \frac{J}{r^2} \right) d^2.
\end{aligned}$$

Величины параметров робота даны в таблице.

Для определения матриц, входящих в редуцированную модель (2.1), необходимо решить уравнение (2.5). При $k = 1$ оно примет вид

$$(-j_1 \ r_1 \ -j_2 \ r_2 \ -j_3 \ r_3 \ 0) = 0,$$

где j_i — элементы вектора $J_* = (j_1 \ j_2 \ j_3)$; r_i — элементы вектора $r = (r_1 \ r_2 \ r_3)$. Как видно, это уравнение не имеет решений, кроме тривиального. При $k = 2$ уравнение (2.5) будет иметь вид

$$(-j_{21} \ -j_{11} \ a_2 r_1 - j_{22} + a_4 r_2 \ -j_{12} \ -j_{23} \ -j_{31} \ 0 \ b_2 r_1 + b_4 r_2 - b_6 r_3) = 0,$$

где j_{ik} — элементы 2×3 матрицы J_* . В этом случае вектор R_* можно выбрать как $R = (0 \ b_6 \ b_4)$, тогда матрица J_* будет иметь вид

$$J_* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 b_6 & 0 \end{pmatrix}.$$

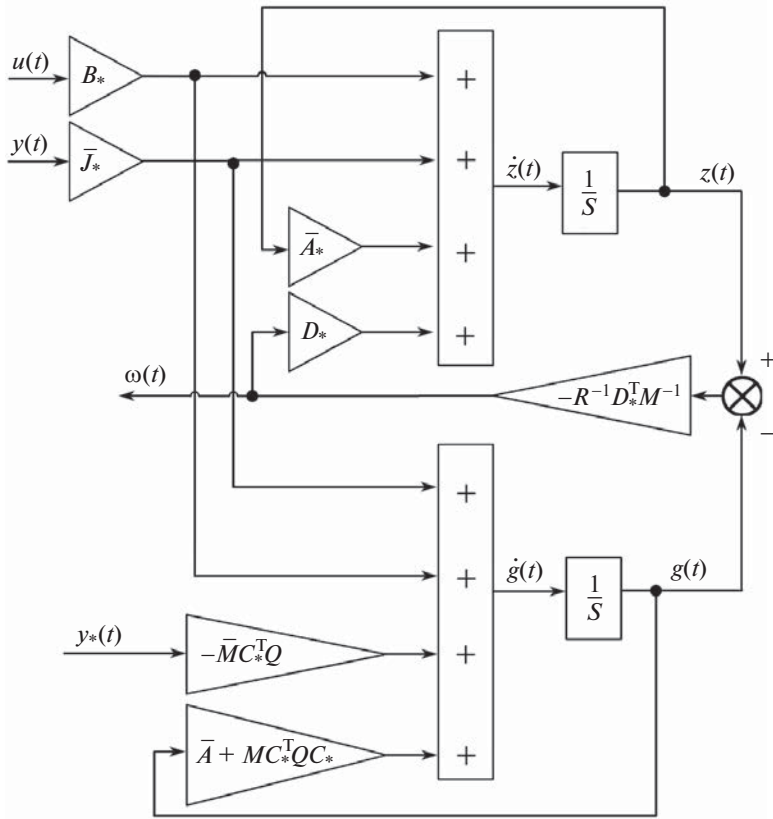


Рис. 2. Структурная схема.

Далее необходимо с помощью выражений (2.4) и (2.3) найти матрицы Φ и B_* :

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_6 & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_6 & 0 & b_4 \end{pmatrix}, \quad B_* = \Phi B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2a_4b_6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуцированная модель (2.6) робота, чувствительная к функции $d(t)$ и нечувствительная к $\rho(t)$, будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{*1}(t) &= x_{*2}(t) + k_1 r_*(t), \\ \dot{x}_{*2}(t) &= a_4 b_6 y_2(t) + 2a_4 b_6 T_L(t) + k_2 r_*(t), \\ r_*(t) &= b_6 y_2(t) + b_4 y_3(t) - x_{*1}(t). \end{aligned}$$

Диагностический наблюдатель для идентификации дефектов имеет вид (4.6)–(4.8), где $R = 10^{-2}$, $Q = 10^{20}$, $K = (1 \ 1)^T$. Структурная схема полученного наблюдателя представлена на рис. 2.

Предполагаем, что дефект (дополнительный момент, действующий на левое колесо) имеет вид прямоугольного импульса длительностью 4 с и начинает появляться с момента $t = 2$.

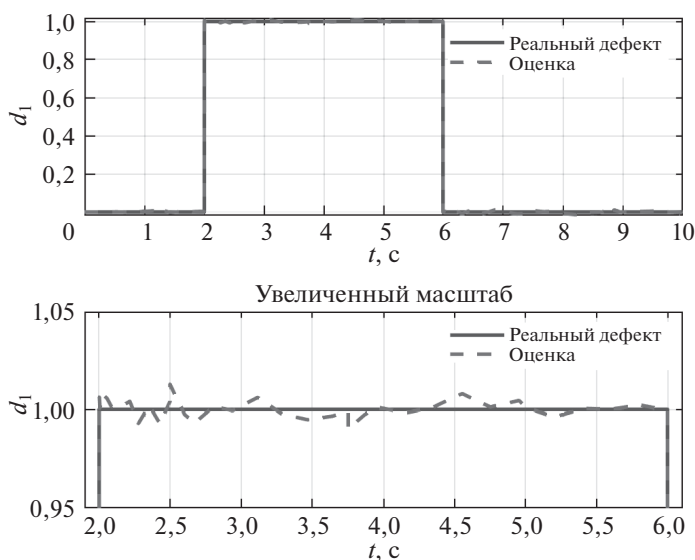


Рис. 3. Результат работы наблюдателя при влиянии дефекта в форме прямоугольного импульса.

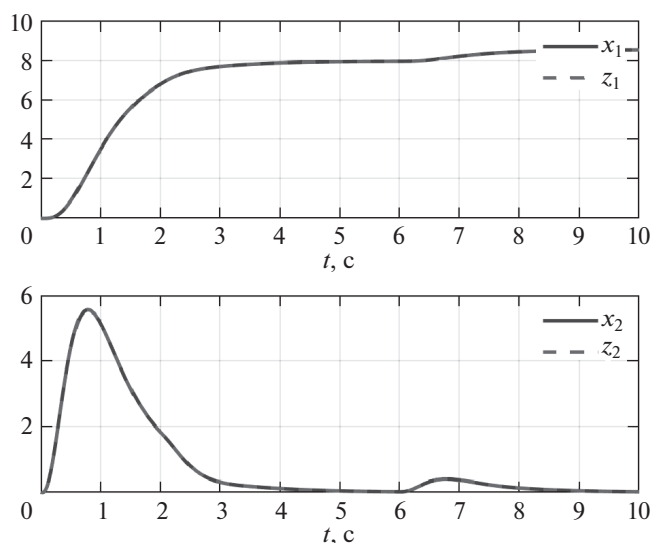


Рис. 4. Графики состояния системы и диагностического наблюдателя.

Выполнив настройку параметров наблюдателя, получаем результат идентификации, отображенный на рис. 3. Из этого рисунка видно, что разработанный подход к построению наблюдателей дает приемлемый результат. Дополнительно приводятся графики состояния модели и наблюдателя (рис. 4) и ошибок наблюдения (рис. 5).

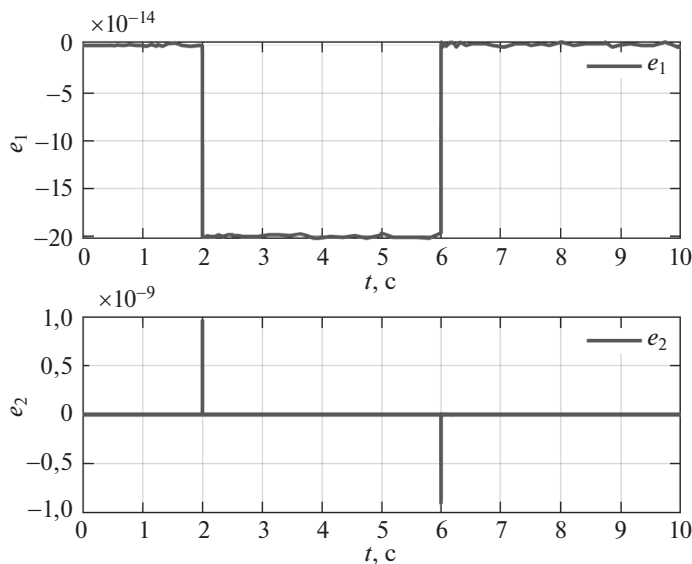


Рис. 5. Графики ошибок наблюдения $e(t) = x_*(t) - z(t)$.

Следует отметить, что качество идентификации на основе оптимального наблюдателя (4.6)–(4.8) зависит от выбора матриц штрафов Q и R и матрицы K . При их выборе рекомендуется руководствоваться следующим. Перекрестные связи между переменными вектора выхода и дефектов отражаются на внедиагональных элементах в этих матрицах. При отсутствии информации о таких связях рекомендуется диагональный вид матрицы R . Такая же рекомендация относится к матрице Q при отсутствии перекрестных связей между наблюдаемыми выходами. Если полученная оценка дефекта имеет большую величину, требуется уменьшить соответствующие диагональные элементы матрицы R . При больших значениях невязки $e(t) = x_*(t) - z(t)$ элементы матрицы Q должны быть увеличены. Коэффициенты матрицы K выбираются таким образом, чтобы обеспечить большее быстроедействие наблюдателя.

6. Заключение

В работе решена задача оценки (идентификации) величин дефектов в системах, описываемых линейными моделями с постоянными коэффициентами в присутствии внешних возмущений. В отличие от известных методов решения этой задачи с использованием работающих в скользящих режимах наблюдателей разработанный в работе подход позволяет расширить класс систем, для которых идентификация может быть осуществлена, так как метод построения наблюдателей, работающих в скользящих режимах, накладывает ограничения на системы, для которых требуется решить задачу идентификации дефектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Edwards C., Spurgeon S., Patton R.* Sliding mode observers for fault detection and isolation // *Automatica*. 2000. V. 36. P. 541–553.
2. *Floquet T., Barbot J., Perruquetti W., Djemai M.* On the robust fault detection via a sliding mode disturbance observer // *Int. J. Control*. 2004. V. 77. P. 622–629.
3. *Yan X., Edwards C.* Nonlinear robust fault reconstruction and estimation using a sliding modes observer // *Automatica*. 2007. V. 43. P. 1605–1614.
4. *Rios H., Efimov D., Davila J., Raissi T., Fridman L., Zolghadri A.* Non-minimum phase switched systems: HOSM based fault detection and fault identification via Volterra integral equation // *Int. J. Adapt. Contr. and Signal Proc.* 2014. V. 28. P. 1372–1397.
5. *Жиравок А.Н., Зуев А.В., Филаретов В.Ф., Шумский А.Е.* Идентификация дефектов в нелинейных системах на основе скользящих наблюдателей с ослабленными условиями существования // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2022. № 3. С. 21–30.
6. *Жиравок А.Н., Зуев А.В., Сергиенко О., Шумский А.Е.* Идентификация дефектов в нелинейных динамических системах и их датчиках на основе скользящих наблюдателей // *АиТ*. 2022. № 2. С. 63–89.
Zhirabok A., Zuev A., Sergiyenko O., Shumsky A. Identification of faults in nonlinear dynamical systems and their sensors based on sliding mode observers // *Autom. Remote Control*. 2022. V. 83. P. 214–236.
7. *Жиравок А.Н., Зуев А.В., Шумский А.Е.* Методы идентификации и локализации дефектов в линейных системах на основе скользящих наблюдателей // *Изв. РАН. ТиСУ*. 2019. № 6. С. 73–89.
8. *Мироновский Л.А.* Функциональное диагностирование динамических систем. М.; СПб.: МГУ-ГРИФ, 1998.
9. *Hautus M.* Strong detectability and observers // *Linear Algebra and its Applications*. 1983. V. 50. P. 353–368.
10. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1968.
11. *Mufti I.H., Chow C.K., Stock F.T.* Solution of ill-conditioned linear two-point boundary value problems by the Riccati transformation // *SIAM Rev.* 1969. V. 11. No. 4. P. 616–619.
12. *Naidu D.S.* Optimal control systems. Electrical Engineering Handbook, Florida, Boca Raton: CRC Press, 2003. 275 p.
13. *Брайсон А., Хо Ю-шн.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
14. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. 652 с.
15. *Kim S., Kwon S.J.* Nonlinear optimal control design for underactuated two-wheeled inverted pendulum mobile platform // *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*. 2017. V. 22. No. 6. P. 2803–2808.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 11.01.2023

После доработки 11.04.2023

Принята к публикации 09.06.2023

© 2023 г. А.В. ПЕСТЕРЕВ, д-р физ.-мат. наук (alexanderpesterev.ap@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ГЛОБАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ АФФИННОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Исследуется устойчивость аффинной системы с переключениями, возникающей при применении управления в виде вложенных сатураторов для стабилизации цепочки двух интеграторов. Использование обратной связи в виде вложенных сатураторов позволяет легко учесть ограниченность ресурса управления и обеспечить выполнение желаемых характеристик переходного процесса, таких как заданная скорость экспоненциального убывания отклонения вблизи положения равновесия и ограничение на максимальную скорость приближения к положению равновесия при больших начальных отклонениях. Доказана глобальная устойчивость замкнутой системы.

Ключевые слова: стабилизация цепочки двух интеграторов, аффинная система с переключениями, глобальная устойчивость, вложенные сатураторы.

DOI: 10.31857/S0005231023090052, **EDN:** JSXFFD

1. Введение

Гибридными системами называют динамические системы, которые демонстрируют как непрерывное, так и дискретное поведение, т.е. системы, состояния которых могут меняться как непрерывно, так и скачками [1]. Система с переключениями представляет собой гибридную динамическую систему, состоящую из семейства подсистем и закона переключения, определяющего в каждый момент времени, какая из подсистем является активной [2]. Системы такого рода встречаются во многих задачах управления механическими, технологическими и другими процессами в различных областях науки и техники [1, 2]. Одна из важных проблем, возникающих при исследовании систем с переключениями, — проблема устойчивости [2–4]. Решению этой проблемы применительно к рассматриваемой системе с переключениями и посвящена настоящая работа.

Исследуемая в статье аффинная система с переключениями возникает при применении управления специального вида, а именно обратной связи в виде вложенных сатураторов, для стабилизации цепочки двух интеграторов. Задача стабилизации цепочек интеграторов широко обсуждалась в литературе в течение нескольких последних десятилетий (см., например, [5–7] и приведенные там ссылки). Интерес к данной проблематике обусловлен тем, что

во многих приложениях исходные модели, например модели механических планарных систем, заданы в виде цепочек интеграторов; более того, управления, разработанные для цепочек интеграторов, легко обобщаются на более широкие классы систем.

Управление с помощью обратных связей в виде вложенных сатураторов исследовалось в ряде работ по стабилизации цепочек интеграторов (см., например, [5, 6, 8–11] и приведенные там ссылки). Однако автору не известны работы, результаты которых могли бы быть использованы для установления устойчивости системы с рассматриваемой в статье обратной связью. Общий случай n -мерного интегратора обсуждается, например, в [5, 6]. Но глобальная устойчивость системы, замкнутой обратной связью в виде n вложенных сатураторов, была доказана только для случая, когда предельные значения вложенных функций насыщения удовлетворяют определенным неравенствам [5, Theorem 2.1], которые не выполняются для применяемой в настоящем исследовании обратной связи. Глобальная устойчивость интегратора второго порядка, стабилизируемого с помощью обратной связи в виде вложенных сатураторов, но с обратным порядком аргументов (см. более подробно в следующем разделе), доказана в [8, 9]. Используемый в этих работах прием не применим в случае рассматриваемой в статье обратной связи.

Обратная связь рассматриваемого вида применялась ранее в ряде работ. В [10, 11]), например, решались оптимизационные задачи выбора коэффициентов обратной связи, а в [12–14] на ее основе были синтезированы контроллеры для стабилизации интеграторов более высокого порядка. В указанных работах устойчивость системы, замкнутой такой обратной связью, молчаливо подразумевалась; однако, доказательство этого факта отсутствовало. Цель настоящей работы — устранить данный недостаток и доказать глобальную устойчивость системы. Интерес к использованию обратной связи в виде вложенных сатураторов для стабилизации интегратора второго порядка объясняется рядом замечательных свойств полученной замкнутой системы, о которых будет сказано в следующем разделе.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу стабилизации интегратора 2-го порядка

$$(1) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = U(x),$$

где $x \equiv [x_1, x_2]^T$, с помощью непрерывной обратной связи с ограниченным ресурсом управления $U_{\max} = k_4 : U(x) = -k_3(x_2 + k_2 \text{sat}(k_1 x_1))$ при $|U(x)| \leq k_4$ и $U(x) = -k_4 \text{sign}(k_3(x_2 + k_2 \text{sat}(k_1 x_1)))$ при $|U(x)| > k_4$. В компактном виде управление $U(x)$ записывается в виде вложенных сатураторов как

$$(2) \quad U(x) = -k_4 \text{sat} \left(\frac{k_3}{k_4} (x_2 + k_2 \text{sat}(k_1 x_1)) \right),$$

где $\text{sat}(\cdot)$ – негладкая функция насыщения: $\text{sat}(w) = w$ при $|w| \leq 1$ и $\text{sat}(w) = \text{sign}(w)$ при $|w| > 1$. Преимущества обратной связи в виде вложенных са-

тураторов в том, что при ее использовании автоматически выполняется не только ограничение на ресурс управления, но и на максимальную скорость приближения к положению равновесия: если положить $k_2 = V_{\max}$, то при любом начальном удалении $\dot{x}_1(t) \leq V_{\max}$ коль скоро $x_2(0) \leq V_{\max}$ [11]. Кроме того, соответствующим выбором коэффициентов k_1 и k_3 легко обеспечить желаемый тип положения равновесия (узел, полюс или центр) и любое желаемое значение экспоненциальной скорости убывания отклонения в окрестности точки равновесия [11].

Как уже упоминалось во введении, в [8, 9] доказана глобальная устойчивость интегратора второго порядка с помощью обратной связи вида (2), но с обратным, по сравнению с (2), порядком аргументов, т.е. аргументом внутреннего сатуратора является скорость x_2 , а аргументом внешнего сатуратора — отклонение x_1 (в [9] аргумент внешнего сатуратора дополнительно зависит от квадрата скорости x_2^2). Доказательство глобальной устойчивости в обеих работах основано на существовании функции Ляпунова в виде суммы квадратичного и интегрального членов. Для системы (1), (2), однако, указанный прием не применим, так как функцию Ляпунова такого вида не удастся найти.

2.1. Эквивалентное представление в виде аффинной системы с переключениями

Покажем сначала, что система (1), (2) является аффинной системой с переключениями. Рассмотрим разбиение плоскости (x_1, x_2) на пять множеств (рис. 1). К множеству D_1 отнесем все точки, в которых оба сатуратора не насыщены:

$$D_1 = \{(x_1, x_2) : |x_1| < 1/k_1, |x_2 + k_1 x_1| < k_4/k_3\}$$

(наклонная полоса, ограниченная пунктирными линиями на рис. 1). В множество D_2 включим все точки, в которых насыщен внутренний сатуратор,

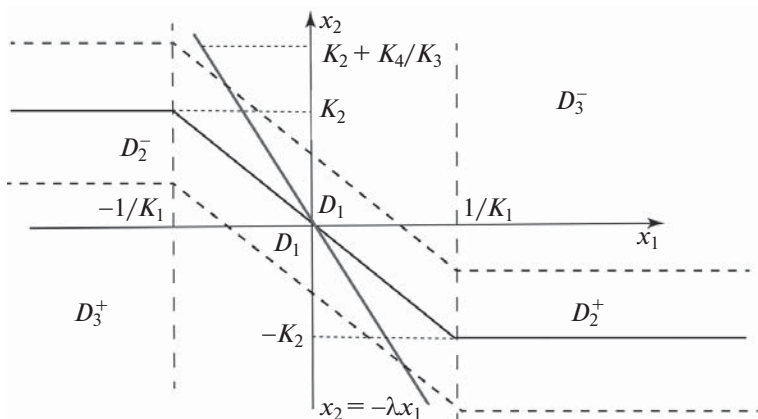


Рис. 1

а внешний сатуратор не достигает насыщения:

$$D_2 = \{(x_1, x_2) : |x_1| \geq 1/k_1, |x_2 + k_2 \text{sign}(x_1)| < k_4/k_3\}.$$

Как видно из рисунка, D_2 включает в себя два непересекающихся множества D_2^- и D_2^+ , лежащие в левой и правой полуплоскостях соответственно (две горизонтальные полосы на рис. 1). Множество

$$D_3 = \{(x_1, x_2) : |x_2 + k_2 \text{sat}(k_1 x_1)| > k_4/k_3\}$$

включает в себя все точки, в которых достигает насыщения внешний сатуратор. Как и D_2 , D_3 состоит из двух непересекающихся множеств D_3^- и D_3^+ , лежащих выше и ниже линии $x_2 = -\text{sat}(k_1 x_1)$ (сплошная ломаная линия на рис. 1), в которых $U_1(x) \equiv -k_4$ и $U_1(x) \equiv +k_4$ соответственно.

Из формулы (2) видно, что $U(x)$ – кусочно-линейная функция:

$$(3) \quad U(x) = \begin{cases} -k_3 x_2 - k_1 k_2 k_3 x_1, & (x_1, x_2) \in D_1, \\ -k_3(x_2 - k_2), & (x_1, x_2) \in D_2^-, \\ -k_3(x_2 + k_2), & (x_1, x_2) \in D_2^+, \\ -k_4, & (x_1, x_2) \in D_3^-, \\ +k_4, & (x_1, x_2) \in D_3^+, \end{cases}$$

а замкнутая система (1), (2) представляет собой систему, состоящую из пяти линейных систем, переключения между которыми зависят от состояния согласно формулам (3). Задача настоящей работы — доказать глобальную устойчивость этой системы.

Стандартный метод доказательства устойчивости линейных систем с переключениями, заключающийся в нахождении общей квадратичной функции Ляпунова для всех систем, в данном случае не применим, так как начало координат является точкой равновесия только для первой системы с областью определения D_1 . Остальные же четыре системы, хотя и линейные, не имеют вообще положений равновесия, т.е. здесь имеем дело с *аффинной системой с переключениями*. Также не удастся применить стандартный метод доказательства устойчивости нелинейных систем общего вида с помощью функции Ляпунова (как, например, в [9]), так как функцию Ляпунова рассматриваемой системы не удалось найти.

2.2. Представление системы в безразмерном виде

Прежде чем приступить к доказательству глобальной устойчивости, упростим задачу, уменьшив количество параметров системы. Очевидно, что свойство устойчивости рассматриваемой системы не зависит от конкретных значений ресурса управления k_4 и максимальной скорости k_2 , так что можно положить их равными единице. Действительно, переход к безразмерным переменным $\tilde{x}_1 = k_4 x_1 / k_2^2$, $\tilde{x}_2 = x_2 / k_2$ и времени $\tilde{t} = k_4 t / k_2$ приводит систему (1), (2) к виду

$$(4) \quad \frac{d\tilde{x}_1}{d\tilde{t}} = \tilde{x}_2, \quad \frac{d\tilde{x}_2}{d\tilde{t}} = -\text{sat}(\tilde{k}_3(\tilde{x}_2 + \text{sat}(\tilde{k}_1 \tilde{x}_1))),$$

где $\tilde{k}_1 = k_1 k_2^2 / k_4$ и $\tilde{k}_3 = k_2 k_3 / k_4$, с единичным безразмерным ресурсом управления $\tilde{k}_4 = 1$ и единичной максимальной скоростью $\tilde{k}_2 = 1$. Всюду далее будем полагать все переменные и константы безразмерными и использовать для них прежнее обозначение (без тильды). Как и прежде, производные относительно безразмерного времени будем обозначать с помощью точки над символами. Кроме того, без потери общности для упрощения выкладок будем выбирать коэффициенты k_1 и k_3 из однопараметрического семейства, параметризованного показателем экспоненциальной скорости убывания отклонения в окрестности нуля λ :

$$(5) \quad k_1 = \lambda/2, \quad k_3 = 2\lambda, \quad \lambda > 0.$$

При таком выборе коэффициентов система (1), замкнутая обратной связью (2), принимает вид

$$(6) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\text{sat}(2\lambda(x_2 + \text{sat}(\lambda x_1/2))).$$

В области D_1 имеем линейную систему

$$(7) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\lambda^2 x_1 - 2\lambda x_2,$$

характеристическое уравнение которой имеет два одинаковых корня $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda$; т.е. начало координат является устойчивым вырожденным узлом. В остальных областях имеем следующие системы уравнений:

$$(8) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -2\lambda(x_2 - 1), \quad (x_1, x_2) \in D_2^-,$$

$$(9) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -2\lambda(x_2 + 1), \quad (x_1, x_2) \in D_2^+,$$

$$(10) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -1, \quad (x_1, x_2) \in D_3^-,$$

$$(11) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 1, \quad (x_1, x_2) \in D_3^+.$$

Уравнение (6) представляет из себя эквивалентную запись системы с переключениями (7)–(11).

3. Доказательство глобальной устойчивости

Докажем сначала, что при исследовании устойчивости системы можно ограничиться рассмотрением траекторий, начинающихся в области D_1 .

Утверждение. Система (7)–(11) глобально асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда любая траектория, начинающаяся в D_1 , асимптотически стремится к нулю.

Необходимость утверждения очевидна. Для доказательства достаточности довольно показать, что, каковы бы ни были начальные условия, траектория через конечное время окажется в области D_1 . Докажем последнее. Действительно, из уравнений (10) и (11) видно, что в D_3^- и D_3^+ траекториями системы являются параболы

$$(12) \quad x_1 = \mp \frac{1}{2} x_2^2 + C.$$

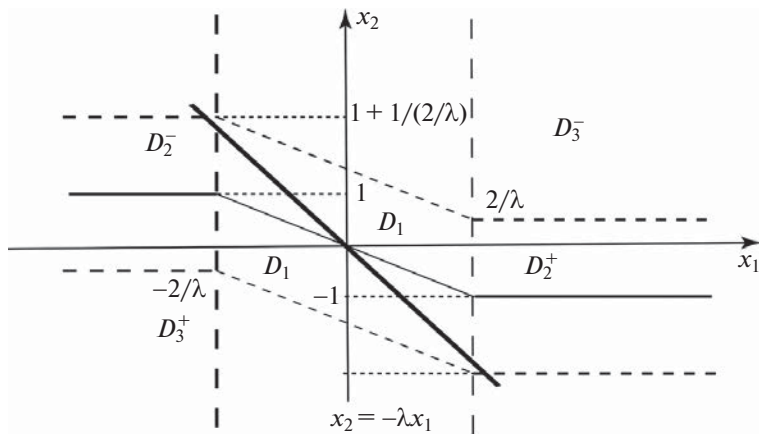


Рис. 2

Так как ни одна из парабол не может целиком лежать в D_3^- или D_3^+ (см. рис. 1) и при этом движение происходит с постоянным ускорением, система через конечное время неизбежно попадает либо в D_1 , либо в D_2 . Далее, из уравнений (8) и (9) видно, что в D_2^- (D_2^+) имеем $x_2(t) \rightarrow 1$ ($x_2(t) \rightarrow -1$), и при этом движение происходит в положительном (отрицательном) направлении оси x_1 , откуда следует, что за конечное время система неизбежно попадет в область D_1 . Таким образом, при любых начальных условиях не более чем после двух переключений, система оказывается в области D_1 . Далее рассматриваются только траектории с начальной точкой в D_1 .

Теорема 1. Система (6) глобально асимптотически устойчива при любых $\lambda > 0$.

Доказательство. Выясним, может ли система попасть из D_1 в D_2 . Рассмотрим для определенности границу между D_1 и D_2^+ . Из первого уравнения (9) видно, что траектория может пересечь границу только в области положительных значений x_2 , т.е. когда полуширина $1/2\lambda$ полосы D_2 больше единицы, как в случае, показанном на рис. 2, что имеет место только при $\lambda < 1/2$. Так как правая часть второго уравнения (9) при этом отрицательна, через конечное время координата $x_2(t)$ поменяет знак, направление движения вдоль оси x_1 изменится на обратное и система вернется в D_1 . Заметим, что участок асимптоты $x_2 = -\lambda x_1$ (жирная линия на рис. 2) линейной системы (7) при $|x_1| \leq 2/\lambda$ целиком лежит в D_1 . Так как траектория системы не может пересечь асимптоту, находясь в D_1 , решение асимптотически стремится к нулю. Аналогично рассматривается случай отрицательных значений x_1 . Таким образом, при малых $\lambda < 1/2$ система глобально устойчива и при этом любая траектория, с начальными условиями в D_1 может пересечь границу между областями (D_1 и D_2) не более двух раз.

Найдем условия, при которых возможны переключения из D_1 в D_3 . Граница между областями (пунктирные линии на рис. 1) определена отрезками

прямых

$$(13) \quad x_2 = -\frac{\lambda}{2}x_1 \pm \frac{1}{2\lambda}, \quad -\frac{2}{\lambda} \leq x_1 \leq \frac{2}{\lambda},$$

где знак плюс перед вторым слагаемым соответствует верхней границе (границе между D_1 и D_3^-), а знак минус — нижней границе. Траектория может пересечь границу, только если угол наклона траектории меньше наклона границы $\lambda/2$. Из уравнений (10) и (11) находим, что модуль тангенса угла наклона траектории на границе равен $1/x_2$, откуда следует, что пересечение траекторией верхней (нижней) границы возможно только в точках, ординаты которых удовлетворяют неравенству $x_2 > 2/\lambda$ ($x_2 < -2/\lambda$), т.е. в области

$$(14) \quad |x_2| > 2/\lambda.$$

Так как максимальное значение $|x_2|$ в D_1 достигается в двух угловых точках с ординатами $\pm(1 + 1/(2\lambda))$, то пересечение границы невозможно при $\lambda \leq 3/2$.

Таким образом, доказана глобальная устойчивость системы и для всех $\lambda \leq 3/2$. Более того, доказано следующее нетривиальное утверждение.

Лемма 1. Пусть $1/2 \leq \lambda \leq 3/2$. Тогда D_1 является инвариантной областью системы с переключениями (6).

Заметим, что D_1 в этом случае является одновременно и инвариантной областью линейной системы (7). Докажем теперь, что система глобально устойчива и при любых больших значениях λ . Из вышеприведенных выкладок следует, что при $\lambda > 3/2$ система может попасть из D_1 только в D_3 . Рассмотрим для определенности верхнюю часть фазовой плоскости, где $U(x) < 0$. Константа C в правой части (12) зависит от координат точки перехода системы из D_1 в D_3^- . Обозначив через x_{2*} ординату точки пересечения границы (абсцисса однозначно определяется из уравнения границы (13)), находим

$$C \equiv C(x_{2*}) = \frac{1}{2} \left(x_{2*}^2 - \frac{4x_{2*}}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} \right).$$

Подставляя формулу для C в (12) и решая полученное квадратное уравнение, находим ординату (обозначим ее через x_{2**}) второй точки пересечения границы (13) параболой, в которой происходит переключение между системами (10) и (7):

$$(15) \quad x_{2**} = \frac{4}{\lambda} - x_{2*}.$$

С учетом неравенств

$$\frac{2}{\lambda} < x_{2*} \leq 1 + \frac{1}{2\lambda}$$

из (15) следует, что x_{2**} удовлетворяет неравенствам

$$\frac{2}{\lambda} > x_{2**} \geq -1 + \frac{7}{2\lambda} > -1 + \frac{1}{2\lambda},$$

т.е. вторая точка пересечения с линией (13) принадлежит границе между D_3^- и D_1 и, следовательно, траектория, выходящая из D_1 в D_3 , не может

попасть в D_2 . Таким образом, при $\lambda > 3/2$ возможны переключения только между тремя системами с областями определения D_1 , D_3^- и D_3^+ . Аналогично находится связь двух последовательных точек пересечения границы между D_1 и D_3^+ :

$$(16) \quad x_{2**} = -\frac{4}{\lambda} - x_{2*}, \quad -\frac{2}{\lambda} < x_{2*} \leq -1 - \frac{1}{2\lambda}.$$

Так как никакая траектория не может иметь самопересечений и не уходит в бесконечность, для доказательства глобальной устойчивости системы достаточно доказать, что не существует замкнутой траектории (цикла) [15]. Допустим противное: пусть существует замкнутая траектория. Из вышеприведенного анализа следует, что такая траектория состоит из четырех сегментов: двух участков в области D_1 , одного участка в D_3^+ и одного участка в D_3^- , причем движение по такой траектории происходит по часовой стрелке.

Покажем, что существует положительно определенная функция, убывающая на каждом из четырех участков траектории, и, следовательно, траектория не может быть замкнутой. Заметим, что речь идет не о функции Ляпунова системы (6), так как от искомой функции не требуется отрицательность ее производной в силу (6) на всей траектории. Ищется функция, изменение которой на всем сегменте траектории, целиком лежащем в одной из областей D_1 , D_3^- или D_3^+ , отрицательно. В качестве кандидата на роль такой функции возьмем квадратичную функцию Ляпунова $F = \lambda^3 x^T P x$ (множитель λ^3 введен для удобства записи) линейной системы (7), где P – положительно определенная матрица второго порядка, удовлетворяющая линейному матричному неравенству (л.м.н.) $A^T P + P A < 0$ [16], и A – матрица линейной системы (7),

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda^2 & -2\lambda \end{pmatrix}.$$

В [17] показано, что матрицу P можно представить в виде

$$(17) \quad P = \begin{pmatrix} \lambda & q_1/2 \\ q_1/2 & q_2/\lambda \end{pmatrix},$$

где $q_1, q_2 > 0$ принадлежат эллипсу Ω (рис. 3), определенному неравенством

$$(18) \quad (q_2 - q_1 - 1)^2 + (q_1 - 2)^2 \leq 4.$$

Посмотрим, найдутся ли $(q_1, q_2) \in \Omega$ такие, что на каждом из четырех сегментов траектории функция F убывает.

Производная функции F в силу системы (7) отрицательна по определению, что гарантирует убывание функции F на двух участках траектории, лежащих в области D_1 . На участках траектории, лежащих в D_3 , отрицательность производной F очевидно не гарантируется, но далее покажем, что интегральное изменение F на каждом из этих участках отрицательно, т.е.

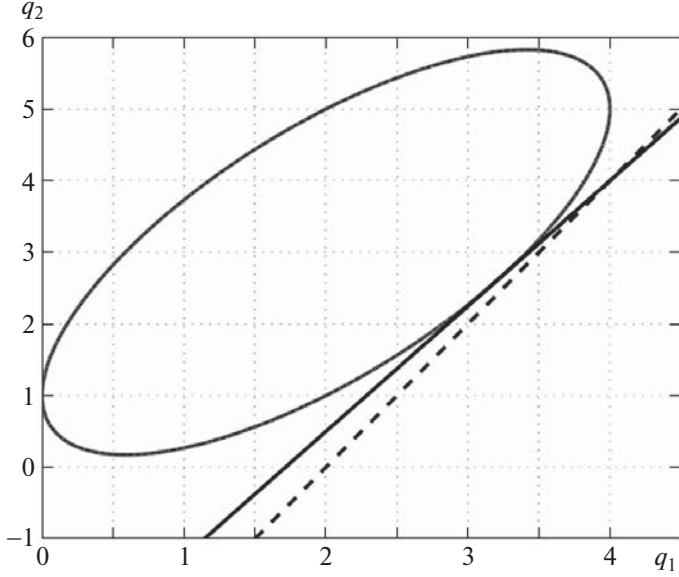


Рис. 3

значение функции в точке границы при переходе из D_1 в D_3 больше, чем ее значение при последующем возврате из D_3 в D_1 .

Подставляя правую часть (17) в F , получим $F(x) = \lambda^2(\lambda^2 x_1^2 + \lambda q_1 x_1 x_2 + q_2 x_2^2)$. Выразив x_1 из уравнения границы (13) и подставив его в правую часть формулы для функции F , получим значения F на верхней границе D_1 :

$$(19) \quad F(x_2) = c_1 x_2^2 - c_2 x_2 + 1,$$

где $c_1 = \lambda^2(q_2 - 2q_1 + 4)$ и $c_2 = \lambda(4 - q_1)$. Из неравенства (18) следует что $q_1 < 4$ и, значит, $c_2 > 0 \forall q_1, q_2 \in \Omega$. Легко также показать, что эллипс (18) не имеет пересечений с прямой $q_2 - 2q_1 - 4 = 0$ (пунктирная линия на рис. 3) и целиком лежит выше ее; следовательно, $c_1 > 0 \forall q_1, q_2 \in \Omega$. Найдём изменение ΔF функции F на сегменте траектории в D_3^- . В начальной и конечной точках сегмента с учетом (19) и (15) имеем соответственно

$$F(x_{2*}) = c_1 x_{2*}^2 - c_2 x_{2*} + 1, \quad F(x_{2**}) = c_1 (4/\lambda - x_{2*})^2 - c_2 (4/\lambda - x_{2*}) + 1.$$

Отсюда,

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(x_{2**}) - F(x_{2*}) = c_1 (16/\lambda^2 - 8x_{2*}/\lambda) + 2c_2 x_{2*} - 4c_2/\lambda = \\ &= (2c_2 - 8c_1/\lambda)x_{2*} + 16c_1/\lambda^2 - 4c_2/\lambda = -(8q_2 - 14q_1 + 24)(\lambda x_{2*} - 2). \end{aligned}$$

Легко проверить, что прямая $8q_2 - 14q_1 + 24 = 0$ (сплошная линия на рис. 3) касается эллипса Ω и лежит ниже его, так что первый сомножитель положителен. Так как согласно (14) $x_{2*} > 2/\lambda$, второй сомножитель также положителен, так что $\Delta F < 0$ при любых $(q_1, q_2) \in \Omega$.

Повторяя вычисления для нижней границы области D_1 с учетом (16), находим

$$(20) \quad F(x_2) = c_1 x_2^2 + c_2 x_2 + 1$$

и

$$(21) \quad \begin{aligned} \Delta F &= c_1(4/\lambda + x_{2*})^2 - c_2(4/\lambda + x_{2*}) - c_1 x_{2*}^2 - c_2 x_{2*} = \\ &= (8q_2 - 14q_1 + 24)(\lambda x_{2*} + 2). \end{aligned}$$

Согласно (14) на нижней границе $x_{2*} < -2/\lambda$, второй сомножитель в (21) отрицателен, следовательно, изменение функции F на сегменте траектории, целиком лежащем в D_3^+ , также отрицательно. Таким образом, при любых $(q_1, q_2) \in \Omega$ значение квадратичной функции Ляпунова линейной системы (7) убывает после прохождения каждого сегмента траектории, откуда следует, что траектория не может быть замкнутой кривой. Теорема доказана.

Численные примеры, иллюстрирующие характер поведения траекторий интегратора (1), стабилизируемого с помощью обратной связи (2), можно найти в [10, 11].

4. Заключение

Рассматривается задача устойчивости аффинной системы второго порядка, состоящей из пяти подсистем с зависящими от состояния переключениями, при этом только одна из подсистем имеет устойчивое положение равновесия. Исследуемая система возникает при применении обратной связи в виде вложенных сатураторов для стабилизации цепочки двух интеграторов. К преимуществам рассматриваемой обратной связи относятся ее непрерывность и ограниченность, а также возможность задать ряд желаемых характеристик переходного процесса. С помощью соответствующего выбора значений четырех параметров, от которых зависит обратная связь, легко обеспечивается желаемый тип положения равновесия и любое желаемое значение экспоненциальной скорости убывания отклонения вблизи положения равновесия, а также выполнение ограничения на максимальную скорость приближения к положению равновесия, что особенно важно при больших начальных отклонениях от положения равновесия. Главный результат работы — доказательство глобальной устойчивости исследуемой аффинной системы с переключениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Goebel R., Sanfelice R.G., Teel A.R. Hybrid Dynamical Systems: Modeling, Stability, and Robustness. Princeton University Press, 2012.
2. Liberzon D. Switching in Systems and Control. Boston: Birkhauser, 1973.
3. Lin H., Antsaklis P.J. Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results // IEEE Trans. Automat. Control. 2009. V. 54. P. 308–322.

4. *Pyatnitskiy E., Rapoport L.* Criteria of asymptotic stability of differential inclusions and periodic motions of time-varying nonlinear control systems // IEEE Trans. Circuits Systems I: Fundamental Theory and Applications. 1996. V. 43. No. 3. P. 219–229.
5. *Teel A.R.* Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls // Sys. & Cont. Lett. 1992. V. 18. No. 3. P. 165–171.
6. *Teel A.R.* A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation // Trans. Autom. Contr., IEEE, 1996. V. 41. No. 9. P. 1256–1270.
7. *Kurzhanski A.B., Varaiya P.* Solution Examples on Ellipsoidal Methods: Computation in High Dimensions. Cham, Switzerland: Springer, 2014.
8. *Olfati-Saber R.* Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles, Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology. Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, 2001.
9. *Hua M.-D., Samson C.* Time sub-optimal nonlinear pi and pid controllers applied to longitudinal headway car control // Int. J. Control. 2011. V. 84. P. 1717–1728.
10. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V., Matrosov I.V.* On Optimal Selection of Coefficients of a Controller in the Point Stabilization Problem for a Robot-wheel // Communicat. Comput. Inform. Sci. (CCIS). 2020. V. 1340. P. 236–249.
11. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V.* Optimizing coefficients of a controller in the point stabilization problem for a robot-wheel // Lect. Notes Comput. Sci. V. 13078. Cham, Switzerland: Springer, 2021. P. 191–202.
12. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V.* The Best Ellipsoidal Estimates of Invariant Sets for a Third-Order Switched Affine System // Lect. Notes Comput. Sci. V. 13781 Cham, Switzerland: Springer, 2022. P. 66–78.
13. *Pesterev A.V., Morozov Yu.V.* Global Stability of a Switched Affine System // Proc. of the 16th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). 2022. P. 1–4.
14. *Пестерев А.В., Морозов Ю.В.* Стабилизация тележки с обратным маятником // АиТ. 2022. № 1. С. 95–112.
Pesterev A.V., Morozov Yu.V. Stabilization of a cart with inverted pendulum // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 1. P. 78–91.
15. *Andronov A.A., Leontovich E., Gordon I.I., Maier A.* Qualitative Theory of Second-order Dynamic Systems. Wiley, 1973.
16. *Boyd S., Ghaoui L.E., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
17. *Пестерев А.В.* Построение наилучшей эллипсоидальной аппроксимации области притяжения в задаче стабилизации движения колесного робота // АиТ. 2011. № 3. С. 51–68.
Pesterev A.V. Construction of the Best Ellipsoidal Approximation of the Attraction Domain in Stabilization Problem for a Wheeled Robot // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 3. P. 512–528.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 17.03.2023

После доработки 13.06.2023

Принята к публикации 29.06.2023

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2023 г. А.С. БУГАЕВ, академик РАН (bugaev@cos.ru)

(Московский физико-технический институт

(национальный исследовательский университет)),

М.В. ЯШИНА, д-р техн. наук (mv.yashina.madi.ru)

(Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет;

Московский технический университет связи и информатики;

Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет)),

А.Г. ТАТАШЕВ, д-р физ.-мат. наук (a-tatashev@yandex.ru)

(Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет;

Московский технический университет связи и информатики)

О СКОРОСТИ ПОТОКА НА РЕГУЛЯРНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ОТКРЫТОЙ ОДНОМЕРНОЙ СЕТИ С НЕСИММЕТРИЧНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ УЗЛОВ¹

Исследуется система, относящаяся к классу динамических систем, называемому контурными сетями или сетями Буслаева. Этот класс разработан с целью создания моделей трафика на сетевых структурах, для которых могут быть получены аналитические результаты. Контурные сети могут иметь и другие приложения. В системе, называемой открытой цепочкой контуров, отрезки, называемые кластерами, движутся по определенным правилам по окружностям (контурам), каждый из которых имеет общие точки (узлы) с двумя соседними контурами, кроме крайнего левого и крайнего правого контура, имеющих по одному соседнему. Найдены результаты о средней скорости движения кластеров с учетом задержек при прохождении узлов. Полученные результаты обобщают результаты, полученные ранее для частного случая рассматриваемой системы.

Ключевые слова: динамические системы, математические модели трафика, контурные сети.

DOI: 10.31857/S0005231023090064, EDN: JTGACT

1. Введение

Класс математических моделей трафика образуют модели, в которых частицы движутся на одномерной или двумерной решетке. Такие модели могут интерпретироваться как клеточные автоматы [1] или процессы с запретами [2]. В дискретной транспортной модели Нагеля–Шрекенберга, введенной

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (FSFM-2023-0003).

в [3] и затем исследовавшейся рядом авторов, на бесконечной или замкнутой одномерной решетке, представляющей собой последовательность клеток (ячеек), движутся частицы по соответствующим правилам. Аналитические результаты для простых вариантов моделей такого класса были получены, например, в [14–19]. Модели этого класса с сетевыми структурами исследовались в основном имитационным моделированием.

В [7] (препринт этой статьи был опубликован в 1999 г.) исследовалось движение частиц по замкнутой решетке в предположении, что на каждом такте частица перемещается на ячейку вперед, если ячейка впереди свободна, и остается на месте, если эта ячейка занята. Если такой системе поставить в соответствие клеточный автомат такой, что ячейке, занятой частицей, соответствует клетка, находящаяся в состоянии 1, а свободной ячейке соответствует клетка автомата, находящаяся в состоянии 0, то этот автомат, как отмечается в [7], будет представлять собой элементарный клеточный автомат 184 в классификации С. Вольфрама [1]. Как установлено в [7], в случае если отношение числа частиц к числу ячеек (плотность частиц) не превышает $1/2$, то при любом начальном состоянии с некоторого момента времени все частицы перемещаются на каждом такте без задержек (свободное движение, самоорганизация). Для плотности, превышающей $1/2$, в [7] установлено, что средняя скорость частиц (отношение среднего числа частиц, перемещающихся в единицу времени, к числу всех частиц) равна $(1 - \rho)/\rho$, где ρ — плотность. Аналогичные результаты для той же модели были получены независимо в [5], где, кроме того, была найдена верхняя граница времени достижения системой предельного режима. В [6] получены аналитические результаты для более общей транспортной модели. В этой модели частица с некоторой вероятностью перемещается из ячейки i в ячейку $i + 1$ и при этом учитываются состояния ячеек с $i - 1$ по $i + 2$ (ячейки нумеруются в направлении движения). Поведение системы исследовалась в [6] в частных случаях. В [8] получена формула для средней скорости частиц в стохастической транспортной модели, в которой на каждом такте частица с заданной вероятностью движется на ячейку вперед, если ячейка впереди свободна. Некоторые обобщения результатов [5, 7, 8] получены в [9], где рассматривается динамическая система с непрерывным пространством состояний, которая в частных случаях эквивалентна системам, рассматриваемым в [5, 7, 8]. В [10] рассматривается стохастическая модель трафика, в которой частицы движутся по незамкнутой решетке, содержащей конечное число ячеек. Частицы появляются на одном конце решетки, перемещаются в направлении к противоположному концу и после достижения его покидают решетку. В [10] разработан матричный подход к анализу этой системы.

В [11] была предложена двумерная модель трафика, в которой частицы движутся на двумерной тороидальной решетке в перпендикулярных направлениях (модель BML). Частицы одного типа движутся по горизонтальным рядам, а частицы второго типа — по вертикальным рядам. Правила движения частиц можно считать двумерным аналогом правила элементарного

клеточного автомата 189. Эта аналогия отмечается в [11]. В [11–18] рассмотрены различные варианты модели ВМЛ, получены некоторые аналитические результаты (прежде всего, условия самоорганизации или полной остановки движения — затора).

В [19] введен граф с переменной конфигурацией частиц. Разработанный подход позволяет моделировать явления, возникающие в сложных сетях (например, в транспортных, в социальных).

Книга [20] является монографией по математическому моделированию автотранспортных потоков. По изложенному в этой книге материалу можно видеть, что известно достаточно мало подходов к аналитическому исследованию математических моделей автотранспортных потоков с сетевой структурой. Это обуславливает актуальность разработки новых таких подходов, одним из которых является построение моделей на основе сетей Буслаева.

В [21] было введено понятие кластерного движения в транспортных моделях. В дискретном варианте кластеры представляют собой группы частиц, располагающихся в соседних ячейках и перемещающихся одновременно. В этом случае движение частиц соответствует правилу элементарного клеточного автомата 240. В непрерывном варианте кластеры представляют собой движущиеся отрезки и называются кластерами по аналогии с дискретным вариантом.

А.П. Буслаев разработал понятие контурных сетей [22]. Контурная сеть представляет собой динамическую систему, содержащую систему контуров, причем соседние контуры имеют общие точки, называемые узлами. В дискретном варианте контур представляет собой замкнутую последовательность ячеек. В непрерывном варианте контур представляется в виде окружности. На контурах движутся по определенным правилам частицы или кластеры. При прохождении частицами узлов возникают задержки, обусловленные тем, что более одной частицы не могут одновременно проходить узел. Основными задачами исследования контурных сетей являются нахождение средней скорости частиц (кластеров), условия попадания системы в состояние свободного движения (начиная с некоторого момента все кластеры перемещаются без задержек в текущий момент и в будущем) или коллапса (с некоторого момента ни одна частица не перемещается). Аналитические результаты получены для двухконтурных сетей с одним [23] или с двумя [24] общими узлами и для контурных сетей с регулярными периодическими структурами [25–30].

В [26] рассматривалась контурная сеть, называемая открытой цепочкой контуров. В [26] рассматривался вариант открытой цепочки с непрерывным пространством состояний и непрерывным временем. Система содержит контуры, каждый из которых имеет два соседних, кроме крайнего левого и крайнего правого контуров, которые имеют по одному соседнему контуру. Соседние контуры имеют общий узел. На каждом контуре имеется кластер. Предполагалось, что длина контура одинакова для всех контуров, а два узла делят контур на равные части. Контуры также имеют одинаковую длину. До-

казано, что если длина кластера не превосходит половину длины контура, то система с некоторого момента находится в состоянии свободного движения, т.е. все кластеры перемещаются без задержек, а если длина кластера больше половины длины контура, то все кластеры движутся с одной и той же средней скоростью, меньшей скорости свободного движения и не зависящей от начального состояния системы, причем получена формула для средней скорости кластеров. В [27] найдена средняя скорость кластеров для варианта открытой цепочки с дискретным пространством состояний и дискретным временем в предположении, что контуры имеют одинаковую длину (одно и то же число ячеек на контуре) и делятся узлами пополам, но длины кластеров различны для случая, когда длина всех кластеров больше половины длины контура. Приведены примеры, показывающие, что в общем случае кластеры могут двигаться с неодинаковыми средними скоростями, при этом средняя скорость может зависеть от начального состояния системы. В [30] найдено предельное распределение (инвариантная мера) для открытой цепочки с одинаковыми по длине контурами и неодинаковыми по длине кластерами.

В [23], где рассматривалась несимметричная двухконтурная система с одним узлом, представляющая собой частный случай неоднородной открытой цепочки контуров, для которого число контуров равно двум, приводится следующий пример возможного приложения результатов по контурным сетям. Пусть в течение рабочего дня к двум подразделениям предприятия постоянно подвозятся со склада сырье или топливо, которые доставляются транспортными средствами, например вагонетками, по узкоколейным путям. Склад находится в точке пересечения этих путей. Транспортное средство, подошедшее к складу во время загрузки другого транспортного средства, ожидает окончания обслуживания и затем начинает загружаться. Предположим, что i -е транспортное средство проходит путь от склада до подразделения и обратно за время $c_i - l_i$ с учетом времени разгрузки в подразделении, а загрузка транспортного средства на складе длится l_i единиц времени, $i = 1, 2$. Тогда процесс перемещения транспортных средств моделируется системой рассматриваемого вида с длинами контуров c_1 и c_2 и длинами кластеров соответственно l_1 и l_2 в предположении, что при отсутствии задержек каждый кластер движется с единичной скоростью.

Этот пример можно обобщить. Предположим, что имеется три подразделения предприятия, два склада и три транспортных средства, каждое из которых подвозит грузы к подразделению, к которому это транспортное средство относится. К подразделению 1 грузы подвозятся со склада 1. К подразделению 3 грузы подвозятся со склада 2. К подразделению 2 грузы подвозятся поочередно с обоих складов. Процесс работы транспортных средств моделируется неоднородной трехконтурной открытой цепочкой такой, что каждый контур соответствует пути транспортного средства, а каждый из двух узлов соответствует одному из складов.

В настоящей работе доказана теорема о поведении системы в случае, когда длина контура и движущегося по нему кластера зависит от номера контура,

а контуры могут делиться узлами на неодинаковые по длине части в предположении, что кластеры имеют достаточно большие длины. Получена формула для средней скорости кластеров, являющаяся обобщением формулы, найденной в [27] для рассматриваемого там частного случая.

2. Описание системы

Рассматривается динамическая система, рис. 1, содержащая N окружностей, называемых *контурами*. Длина контура i равна c_i , $i = 1, \dots, N$. На контуре i задана система координат $[0, c_i)$, $i = 1, \dots, N$. Контуры i и $i + 1$ имеют общую точку, называемую *узлом* $(i, i + 1)$, $i = 1, \dots, N - 1$. Координата узла $(i, i + 1)$ равна 0 на контуре i и равна $d_{i+1} > 0$ на контуре $i + 1$, $i = 1, \dots, N - 2$. Считаем, что координата узла $(N - 1, N)$ равна 0 как на контуре $N - 1$, так и на контуре N . На контуре i находится движущийся отрезок длиной l_i , называемый *кластером* i , $i = 1, \dots, N$. Направление оси координат контура i совпадает с направлением движения кластера, $i = 1, \dots, N$. Если нет задержек, то кластер движется со скоростью 1, т.е. кластер i совершает полный оборот за c_i единиц времени, $i = 1, \dots, N$. Если в момент времени $t \geq 0$ координата передней точки кластера i равна $x_i(t)$, то кластер i располагается в этот момент на дуге $(x_i(t) - l_i, x_i(t))$ (вычитание по модулю c_i) $i = 1, \dots, N$. *Состояние* системы в момент t представляет собой вектор $x(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$, где $x_i(t)$ — координата передней точки кластера i , $i = 1, \dots, N$. Будем говорить, что в момент t кластер i занимает узел $(i, i + 1)$, если $0 < x_i(t) < l_i$, $i = 1, \dots, N - 1$. Будем говорить, что в момент t кластер i занимает узел $(i - 1, i)$, если $d_i < x_i(t) < d_i + l_i$ (при $d_i + l_i < c_i$), рис. 2, или $0 \leq x_i(t) < d_i + l_i - c_i$ (при $d_i + l_i \geq c_i$), рис. 3, $i = 2, \dots, N - 1$, рис. 4, $0 < x_i(t) < l_i$, $i = N$. Будем говорить, что в момент t кластер i находится у узла $(i, i + 1)$, если $x_i(t) = 0$, $i = 1, \dots, N - 1$. Будем говорить, что в момент t кластер i находится у узла $(i - 1, i)$, если $x_i(t) = d_i$, $i = 2, \dots, N - 1$; $x_N(t) = 0$. Состояние *допустимо*, если при нахождении системы в этом состоянии ни один узел не занят двумя кластерами. Состояние системы в момент времени $t = 0$ (*начальное состояние*) задается и должно быть допустимым. Задержка кластера возникает, если кластер находится у узла, занятого в текущий момент кластером соседнего контура. Задержка закончится в момент, когда этот узел перестанет быть занятым. Если кластеры

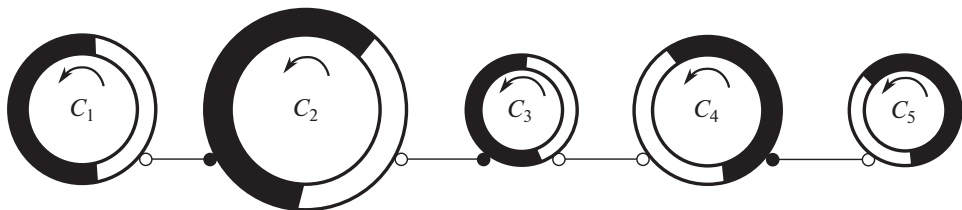


Рис. 1. Открытая цепочка контуров, $N = 5$, c_i — длина контура i , l_i — длина кластера i , $i = 1, \dots, 5$.

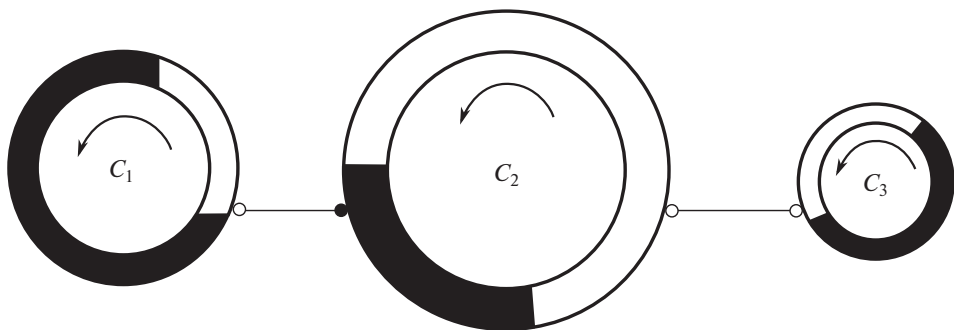


Рис. 2. Кластер 2 занимает узел $(1, 2)$, $l_2 + d_2 < c_2$. Задержка кластера 1 у узла $(1, 2)$.

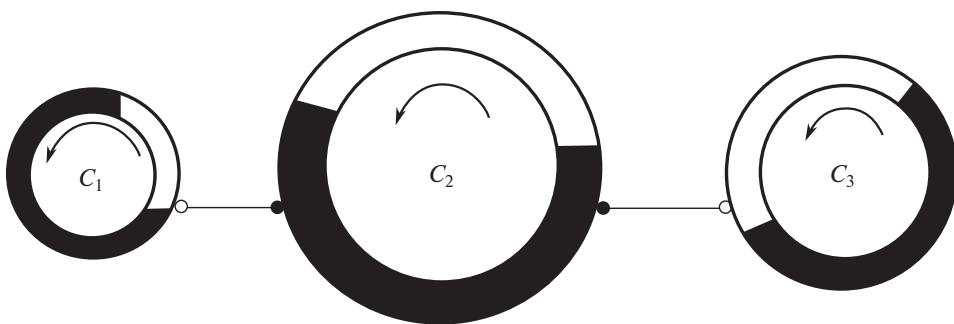


Рис. 3. Кластер 2 занимает узел $(1, 2)$, $l_2 + d_2 > c_2$. Задержка кластера 1 у узла $(1, 2)$.

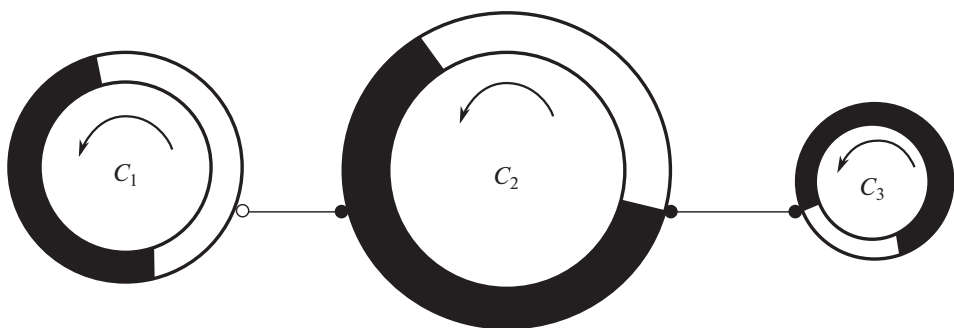


Рис. 4. Конкуренция кластеров 2 и 3.

i и $i + 1$ одновременно находятся у узла $(i, i + 1)$, то возникает конкуренция этих кластеров (рис. 4) и первым через узел проходит кластер, выбираемый в соответствии с детерминированным или стохастическим правилом разрешения конкуренции. При выполнении условий доказанной в разделе 4 теоремы 1 для любого правила разрешения конкуренции реализуется один и тот же не зависящий от начального состояния предельный цикл в пространстве состояний системы, на котором не возникает конкуренций одновременно подошедших к узлу кластеров.

3. Предельные циклы. Средняя скорость

Так как система детерминированная и ее поведение в будущем определяется состоянием в текущий момент, имеем, что если в некоторый момент времени состояние системы повторится, то с этого момента состояния системы будут периодически повторяться, образуя цикл (предельный цикл).

Пусть $H_i(t)$ — суммарное расстояние, проходимое кластером i в интервале времени $(0, t)$. Тогда предел

$$v_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H_i(t)}{t},$$

если этот предел существует, называется средней скоростью кластера i , $i = 1, \dots, N$. Ясно, что если реализуется цикл, то данный предел существует и равен отношению расстояния, проходимого кластером i к периоду цикла.

4. Поведение системы

В разделе 4 докажем утверждения о поведении системы.

Лемма 1. Если

$$(1) \quad \frac{l_i}{c_i} + \frac{l_{i+1}}{c_{i+1}} > 1$$

для некоторых i и $i+1$ ($1 \leq i \leq N-1$), то средняя скорость хотя бы одного из кластеров i и $i+1$ меньше 1.

Доказательство. Предположим, что при некотором i $v_i = v_{i+1} = 1$ и, следовательно, кластеры i и $i+1$ ($1 \leq i \leq N-1$) движутся без задержек. Тогда первое слагаемое в левой части неравенства (1) представляет собой предел при $t \rightarrow \infty$ отношения к t суммарного времени, в течение которого узел $(i, i+1)$ занят кластером i в интервале времени $(0, t)$, а второе слагаемое равно пределу при $t \rightarrow \infty$ отношения к t суммарного времени, в течение которого узел $(i, i+1)$ занят кластером $i+1$ в интервале времени $(0, t)$. Следовательно, сумма этих слагаемых не может быть больше 1, так как узел не может быть занят двумя кластерами одновременно. Полученное противоречие доказывает лемму 1.

Следующая теорема характеризует поведение системы при достаточно больших длинах кластеров (большой нагрузке).

Теорема 1. Пусть выполняются условия

$$(2) \quad l_i > \max(d_i, c_i - d_i), \quad i = 2, \dots, N-1,$$

$$(3) \quad l_1 + l_i > c_i, \quad i = 2, \dots, N,$$

$$(4) \quad l_i + l_N > c_i, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

и хотя бы одно из двух условий

$$(5) \quad \frac{l_1}{c_1} + \frac{l_2}{c_2} > 1,$$

$$(6) \quad \frac{l_{N-1}}{c_{N-1}} + \frac{l_N}{c_N} > 1.$$

Тогда при любом детерминированном или стохастическом правиле разрешения конкуренции реализуется один и тот же предельный цикл, на котором не возникает конкуренции одновременно подходящих к узлу кластеров. Период этого цикла равен

$$(7) \quad T = l_1 + l_N + 2 \sum_{j=2}^{N-1} l_j - \sum_{j=2}^{N-1} c_j.$$

Средняя скорость кластера i равна

$$(8) \quad v_i = \frac{c_i}{l_1 + l_N + 2 \sum_{j=2}^{N-1} l_j - \sum_{i=2}^{N-1} c_i}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Доказательство. Предположим, что выполняются условия (2)–(5). В соответствии с леммой 1 на предельном цикле происходит задержка хотя бы одного из кластеров 1 и 2.

Предположим, что в некоторый момент времени t_1 начинается задержка кластера 2 у узла (1, 2). Тогда имеем $0 < x_1(t_1) < l_1$ и движение кластера 2 возобновляется в момент $t_0 = t_1 + l_1 - x_1(t_1)$, при этом

$$(9) \quad x_1(t_0) = l_1, \quad x_2(t_0) = d_2.$$

Предположим, что в момент времени t_1 начинается задержка кластера 1 у узла (1, 2). Если в момент $t_2 > t_1$ эта задержка заканчивается, то $x_1(t_2) = 0$, $x_2(t_2) = d_2 + l_2 - c_2$. Для момента $t_3 = t_2 + c_2 - l_2$ имеем $x_2(t_3) = d_2$. В соответствии с (3) выполняется неравенство $c_2 - l_2 < l_1$, следовательно, кластер 1 в момент t_2 занимает узел (1, 2) и в этот момент начинается задержка кластера 2 у узла (1, 2). Убедимся, что задержка кластера 1, начинающаяся в момент t_1 , закончится. Если задержка кластера 1 никогда не закончится, то он с момента t_1 будет находиться у узла (1, 2). По индукции можно доказать, что тогда и при $2 \leq i \leq N - 1$ кластер i с некоторого момента находится в текущий момент и в будущем у узла $(i, i + 1)$. Но тогда в некоторый момент t система окажется в состоянии, для которого $x_{N-1}(t) = 0$, $x_N(t) = l_N - \frac{c_N}{2}$, после чего кластер $N - 1$ начнет перемещаться. Таким образом, в некоторый момент возобновляется движение одного из кластеров. Пусть t_4 — наименьшее значение $t_4 > t_0$ такое, что в момент t_4 возобновляется движение кластера $1 \leq i_0 \leq N - 1$, а кластеры $1, 2, \dots, i_0 - 1$ в этот момент не перемещаются.

Тогда в момент

$$t_4 + \sum_{k=0}^{i_0-j-1} (d_{i_0-k} + l_{i_0-j} - c_{i_0-k})$$

возобновляется движение кластера $j = 1, \dots, i_0 - 1$. В частности, в момент

$$t_4 + \sum_{j=0}^{i_0-2} (d_{i_0-j} + l_{i_0-j} - c_{i_0-j})$$

возобновляется движение кластера 1.

Таким образом, для некоторого t_0 выполняется (9).

В момент времени $t_0 - l_1$ кластер 2 находился у узла $(1, 2)$ и сразу после этого момента стал занимать этот узел. При выполнении (2) каждый из кластеров $i = 2, \dots, N - 1$ занимает хотя бы один узел. Таким образом, кластер 2 в момент $t_0 - l_1$ занимает узел $(2, 3)$, и по индукции доказывается, что в момент $t_0 - l_1$ каждый из кластеров $i = 2, \dots, N - 1$ занимает в этот момент узел $(i, i + 1)$. Следовательно, выполняются неравенства

$$(10) \quad d_i + l_i - c_i \leq x_i(t_0) \leq d_i, \quad i = 3, \dots, N - 1.$$

Из (2), (3), (9), (10) следует, что в момент t_0 система находится в состоянии

$$x(t_0) = (l_1, d_2, \dots, d_{N-1}, 0).$$

В момент времени t_0 начинается движение кластера 2 и продолжается движение кластера 1. Движение кластера i возобновляется в момент

$$t(i) = t_0 + \sum_{j=2}^{i-1} (l_j - d_j), \quad i = 3, \dots, N,$$

и этот кластер застает этот узел занятым и ждет его освобождения. В соответствии с (2), (4) каждый кластер $i = 1, \dots, N$, подойдя к узлу $(i, i + 1)$, ждет его освобождения. В момент времени $u_0 + a$

$$(11) \quad a = l_N + \sum_{j=2}^{N-1} (l_j - d_j),$$

система оказывается в состоянии

$$x(t_0 + a) = (0, \dots, 0, l_N).$$

Движение кластера i возобновляется в момент времени

$$u(i) = t_0 + a + \sum_{j=i+1}^{N-1} (d_j + l_j - c_j), \quad i = 2, \dots, N - 1.$$

В соответствии с (2), (3) в момент

$$u(1) = t_0 + \sum_{i=2}^{N-1} (d_i + l_i - c_i)$$

возобновляется движение кластера 1 и в момент $u_0 = t_0 + a + b$ система оказывается в состоянии

$$(12) \quad x(u_0) = x(t_0 + a + b) = (l_1, d_2, \dots, d_{N-1}, 0) = u(t_0),$$

$$(13) \quad b = l_1 + \sum_{i=2}^{N-1} (d_i + l_i - c_i).$$

Из (11), (13) имеем

$$(14) \quad a + b = l_1 + l_N + 2 \sum_{j=2}^{N-1} l_j - \sum_{i=2}^{N-1} c_i.$$

Таким образом, осуществляется цикл с периодом $a + b$, в течение которого не возникает конкуренции одновременно оказывающихся у одного и того же узла кластеров, и каждый кластер совершает в течение цикла один оборот. Отсюда, учитывая (14), получаем утверждение теоремы для случая выполнения условий (2)–(5).

В доказательстве не учитывалось правило разрешения конкуренции. Поэтому в силу симметрии условие (5) следует заменить на условие (6). Теорема доказана.

Следствие 1. При выполнении условия теоремы значения периода (7) реализуемого цикла и средних скоростей (8) кластеров не зависят от $d_2, \dots, d_{N-1}$.

Утверждение следует из теоремы 1.

Предположим, что

$$(15) \quad c_1 = \dots = c_N = 1, \quad d_2 = \dots = d_{N-1} = \frac{1}{2},$$

$$l_i > \frac{1}{2}, \quad i = 1, \dots, N,$$

т.е. все контуры имеют одинаковую длину, которую без ограничения общности можно принять за единицу, причем два узла на контуре делят контур пополам и длина каждого кластера превышает половину длины контура. При выполнении условий (15) формулы (7), (8) принимают вид [21]

$$(16) \quad T = l_1 + l_N + 2 \sum_{i=2}^{N-1} l_i - N + 2,$$

$$(17) \quad v_i = \frac{1}{l_1 + l_N + 2 \sum_{i=2}^{N-1} l_i - N + 2}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Заметим, что в данном случае средняя скорость одинакова для всех кластеров. В [22] показано на примерах, что для дискретной открытой цепочки с контурами одинаковой длины и набором значений длин кластеров, среди которых могут быть как значения не больше, так и значения больше половины длины контура, средние скорости кластеров могут зависеть от начального состояния, а также средние скорости могут быть неодинаковыми для разных кластеров при одном и том же начальном состоянии системы. Приведем пример для рассматриваемой непрерывной цепочки.

Пример 1. Пусть выполняется условие (15), $N = 3$, $l_1 = l_3 = 0,75$, $l_2 = 0,25$. Пусть $(0,75, 0,5, 0,25)$ — начальное состояние. Тогда любой кластер каждый раз оказывается у узла в момент времени, когда узел не занят. Действительно, имеем

$$x(0) = (0,75, 0,5, 0,75), \quad x(0,5) = (0,25, 0, 0,25), \quad x(1) = (0,75, 0,5, 0,75) = x(0).$$

Таким образом, данное начальное состояние принадлежит циклу со скоростью 1. Если же начальным является состояние $(0,25, 0,5, 0,75)$, то имеем

$$\begin{aligned} x(0) &= (0,25, 0,5, 0,75), & x(0,5) &= (0,75, 0,5, 0,25), & x(1) &= (0,25, 0, 0,75), \\ x(1,5) &= (0,75, 0, 0,25), & x(2) &= (0,25, 0,5, 0,75) = x(0). \end{aligned}$$

То есть за цикл с периодом 2 кластеры 1 и 3 движутся без задержек и совершают по два оборота, а кластер 2 совершает за это время только один оборот и, следовательно, $v_1 = 1$, $v_2 = 1/2$, $v_3 = 1$. Таким образом, при одном начальном состоянии скорость каждого из трех кластеров равна 1, а при другом начальном состоянии только скорость кластеров 1 и 3 равна 1, а средняя скорость кластера 2 равна $1/2$.

Если выполняется условие (15) и условие $l_1 = \dots = l_n = l > 1/2$, то формулы (16), (17) имеют полученный в [18] вид

$$\begin{aligned} T &= 2(N-1)l - N + 2, \\ v_i &= \frac{1}{2(N-1)l - N + 2}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Если выполняются условия (15) и $l_1 = \dots = l_N = l \leq 1/2$, то, как доказано, в [19], система попадает в состояние свободного движения из любого начального состояния.

Таким образом, для открытой цепочки с одинаковыми по длине контурами и одинаковыми по длине кластерами средняя скорость одинакова для всех кластеров и не зависит от начального состояния системы в отличие от соответствующей замкнутой цепочки с одинаковыми по длине контурами и различными по длине кластерами [27], для которой средняя скорость кластеров зависит от начального состояния. Для случая, когда выполняется неравенство $l > 1/2$, в [23] найдено предельное распределение состояний (инвариантная мера) открытой цепочки с одинаковыми по длине контурами и одинаковыми по длине кластерами.

5. Заключение

Доказана теорема о поведении динамической системы, называемой открытой цепочкой контуров и принадлежащей классу контурных сетей. Ранее такая система рассматривалась в предположении, что все контуры имеют одну и ту же длину и узлы делят контуры на части одинаковой длины. В настоящей работе предполагается, что длины контуров могут различаться. Контур может делиться также на части различной длины. Система рассматривается в предположении, что находящийся на контуре кластер имеет достаточно большую длину. Доказано, что в рассматриваемых предположениях предельный цикл системы единственен. Найдены средние скорости кластеров и период предельного цикла. Результаты работы могут использоваться при моделировании трафика, а также иметь другие приложения, в частности при моделировании инфокоммуникационных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wolfram S.* Statistical mechanics of cellular automata // *Rev. Mod. Phys.* 1983. V. 55. P. 601–644. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.55.601>
2. *Spitzer F.* Interaction of Markov processes // *Advances in Mathematics.* 1970. V. 5. No. 2. P 246–290.
3. *Nagel K., Schreckenberg M.* A cellular automaton model for freeway traffic // *J. Phys. I.* 1992. V. 2. No. 12. P. 2221–2229. <https://doi.org/10.1051/jp1:1992277>
4. *Schreckenberg M., Schadschneider A., Nagel K., Ito N.* Discrete stochastic models for traffic flow // *Phys. Rev. E.* 1995. V. 51. P. 2939–2949. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.51.2939>
5. *Blank M.L.* Exact analysis of dynamical systems arising in models of traffic flow // *Russian Mathematical Surveys.* 2000. V. 55. No. 3. P. 562–563. <https://doi.org/10.1070/RM2000v055n03ABEH000295>
6. *Gray L., Griffeth D.* The ergodic theory of traffic jams // *J. Stat. Phys.* 2001. V. 105. No. 3/4. P. 413–452.
7. *Belitsky V., Ferrari P.A.* Invariant measures and convergence properties for cellular automaton 184 and related processes // *J. Stat. Phys.* 2005. V. 118. No. 3/4. P. 589–623. <https://doi.org/10.1007/s10955-004-8822-4>
8. *Kanai M., Nishinari K., Tokihiro T.* Exact solution and asymptotic behaviour of the asymmetric simple exclusion process on a ring // *J. Phys. A: Mathematical and General.* 2006. V. 39. No. 29. 9071. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/29/004>
9. *Blank M.* Metric properties of discrete time exclusion type processes in continuum. *J. Stat. Phys.* 2010. V. 140. No. 1. P. 170–197. <https://doi.org/10.1007/s10955-010-9983-y>
10. *Evans M.R., Rajewsky N., Speer E.R.* Exact solution of a cellular automaton for traffic // *J. Stat. Phys.* 2010. V. 95. P. 45–56. <https://doi.org/10.1023/A:1004521326456>
11. *Biham O., Middleton A.A., Levine D.* Self-organization and a dynamic transition in traffic-flow models // *Phys. Rev. A.* 1992. V. 46. No. 10. P. R6124–R6127. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.46.R6124>

12. *Angel O., Holroyd A.E., Martin J.B.* The Jammed Phase of the Biham-Middleton-Levine Traffic Model // *Electronic Communications in Probability*. 2005. V. 10. Paper 17. P. 167–178. <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0504001>
13. *D'Souza R.M.* Coexisting phases and lattice dependence of a cellular automata model for traffic flow // *Physical Review E*. 2005. V. 71. 0066112.
14. *D'Souza R.M.* BML revisited: Statistical physics, computer simulation and probability // *Complexity*. 2006. V. 12. No. 2. P. 30–39.
15. *Austin T., Benjamini I.* For what number must self organization occur in the Biham-Middleton-Levine traffic model from any possible starting configuration? // *arXiv preprint math/0607759*, 2006.
16. *Pan Wei, Xue Yu, Zhao Rui, Lu Wei-Zhen.* Biham-Middleton-Levine model in consideration of cooperative willingness // *Chin. Phys. B*. 2014. V. 23. No. 5. 058902. <https://doi.org/10.1088/1674-1056/23/5/058902>
17. *Wenbin Hu, Liping Yan, Huan Wang, Bo Du, Dacheng Tao.* Real-time traffic jams prediction inspired by Biham, Middleton and Levine (BML) // *Information Sciences*. 2017. P. 209–228. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2016.11.023>
18. *Moradi H.R., Zardadi A., Heydarbeygi Z.* The number of collisions in Biham-Middleton-Levine model on a square lattice with limited number of cars // *Appl. Math. E-Notes*. 2019. V. 19. P. 243–249.
19. *Malecky K.* Graph cellular automata with relation-based neighbourhoods of cells for complex systems modelling: A case of traffic simulation // *Symmetry* 2017. V. 9, 322. <https://doi.org/10.3390/sym9120322>
20. *Гасников А.В. и др.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков. Издание 2-е, испр. и доп. Под ред. А.В. Гасникова. М.: МЦНМО, 2013. 429 с.
21. *Bugaev A.S., Buslaev A.P., Kozlov V.V., Yashina M.V.* Distributed problems of monitoring and modern approaches to traffic modeling // 2011 14th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC), Washington, USA, 5–7 October 2011. P. 477–481. <https://doi.org/10.1109/ITSC.2011.6082805>
22. *Kozlov V.V., Buslaev A.P., Tatashev A.G.* On synergy of totally connected flows on chainmails // *Proc. of the 13th International Conference of Computational and Applied Methods in Science and Engineering*, Almeria, Spain, 24–27 June 2013. V. 3. P. 861–874.
23. *Мышкис П.А., Таташев А.Г., Яшина М.В.* Кластерное движение в двухконтурной системе с приоритетным правилом разрешения конфликта // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. 2020. № 3. С. 3–13.
Myshkis P.A., Tatashev A.G., Yashina M.V. Cluster motion in a two-contour system with priority rule for conflict resolution // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2020. V. 59. No. 3. P. 311–321. <https://doi.org/10.1134/S1064230730030119>
24. *Yashina M., Tatashev A.* Spectral cycles and average velocity of clusters in discrete two-contours system with two nodes // *Math. Meth. Appl. Sci*. 2020. V. 43. No. 7. P. 4303–4316. <https://doi.org/10.1002/mma.6194>
25. *Buslaev A.P., Tatashev A.G., Yashina M.V.* Qualitative properties of dynamical system on toroidal chainmails // *AIP Conference Proceedings*. 2013. V. 1558. P. 1144–1147. <https://doi.org/10.1063/1.4825710>

26. *Buslaev A.P., Tatashev A.G.* Spectra of local cluster flows on open chain of contours // Eur. J. Pure Appl. Math. 2018. V. 11. No. 3. P. 628–641.
<https://doi.org/10.29020/nybg.ejpam.11i3.3292>
27. *Yashina M., Tatashev A.* Discrete open Buslaev chain with heterogeneous loading // 2019 7th International Conference on Control, Mechatronics and Automation (ICCMA), 6–8 Nov. 2019, Delft, Netherlands. P. 283–288.
<https://doi.org/10.1109/ICCMA46720.2019.8988654>
28. *Бугаев А.С., Яшина М.В., Таташев А.Г., Фомина М.Ю.* О спектре скоростей насыщенных потоков на регулярной открытой одномерной сети / XI Всероссийской мультikonференции по проблемам управления МКПУ-2021, материал XIV мультikonференции: в 4 т. Ростов-на-Дону, 2021. С. 41–44.
29. *Бугаев А.С., Таташев А.Г., Яшина М.В.* Спектр непрерывной замкнутой симметричной цепочки с произвольным числом контуров // Математическое моделирование. 2021. Т. 33. № 4. С. 21–44.
Bugaev A.S., Tatashev A.G., Yashina M. Spectrum of a continuous closed symmetric chain with an arbitrary number of contours // Mathematical Models and Computer Simulation. 2021. V. 13. No.6. P. 1014–1027. Translated from Matematicheskoe Modelirovanie. 2021. V. 33. No. 14. P. 21–44.
<https://doi.org/10.1134/S207004822106003X>
30. *Yashina M.V., Tatashev A.G.* Invariant measure for continuous open chain of contours with discrete time // Computational and Mathematical Methods. e1197. First published: 28 September 2021. <https://doi.org/10.1002/cmm4.1197>

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.Н. Граничиным.

Поступила в редакцию 15.05.2022

После доработки 30.06.2023

Принята к публикации 20.07.2023

Управление в технических системах

© 2023 г. Ю.Г. БУЛЫЧЕВ, д-р техн. наук (profbulychhev@yandex.ru)
(АО «Концерн Радиоэлектронные технологии», Москва)

КОСВЕННЫЙ МЕТОД ОДНОПОЗИЦИОННОЙ КООРДИНАТОМЕТРИИ С УЧЕТОМ ИНВАРИАНТОВ ДВИЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СИНГУЛЯРНЫХ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

С учетом инвариантов движения и сингулярных ошибок измерений (представимых в заданном конечномерном функциональном пространстве соответствующей линейной комбинацией с неизвестными спектральными коэффициентами) решена задача однопозиционной косвенной координатометрии по сглаженным измерениям пеленга и радиальной скорости объекта. Рассмотрена возможность применения развиваемого метода к различным моделям движения и наблюдения. Приводятся аналитические соотношения для оценки точностных характеристик и методических ошибок. Дана сравнительная оценка вычислительных затрат.

Ключевые слова: однопозиционная координатометрия, косвенный метод, пеленг, радиальная скорость, инвариант, первый интеграл, условие несмещенности, условие инвариантности, критерий оптимальности, метод множителей Лагранжа, апостериорная дисперсия ошибки оценивания.

DOI: 10.31857/S0005231023090076, **EDN:** JTG GNE

1. Введение

Вопросы, связанные с однопозиционной (активной и пассивной) координатометрией при решении широкого круга задач локации и навигации, остаются актуальными и по настоящее время. Как правило, эти методы реализуются с учетом прямых и косвенных измерений пеленгов, разностей фаз, доплеровских частот, относительных мощностей сигналов и их различных производных. При этом используется дополнительная информация от различных источников подсвета, отражателей (естественного и искусственного происхождения), внешних управляющих систем, а также априорные данные о структуре и некоторых параметрах излучаемого сигнала, скорости объекта, начальной или конечной точке его маршрута, наличии участков барражирования, маневра и др. (вот лишь некоторые источники [1–33]).

Решение задач, связанных с однопозиционной координатометрией в условиях помех различного типа, вполне укладывается в схему оптимального калмановского оценивания в стохастической постановке (как правило, с расширением пространства состояний) с использованием прямых и псевдоизмерений

[9, 10, 17–26, 30, 36]. Однако для широкого класса задач (например, связанных с экспресс- и постобработкой траекторных и телеметрических данных в полигонных и командно-измерительных комплексах, слежением за маневрирующими объектами в реальном времени и др. [2, 7, 8, 11]) на практике зачастую используются достаточно простые неоптимальные косвенные методы координатометрии, реализуемые на сглаженных измерениях. Они основаны на использовании простых детерминированных моделей движения (линейных, кусочно-линейных, полиномиальных, кусочно-полиномиальных, дифференциальных, кусочно-дифференциальных, групповых, кусочно-групповых и многих других), известных аналитических зависимостей, связывающих оцениваемые и измеряемые параметры, а также простых процедур сглаживания наблюдений на базе метода наименьших квадратов (МНК) и его различных модификаций. Такие методы уступают оптимальным методам фильтрации (линейной и нелинейной) в плане потенциальной точности, однако легко реализуемы на практике в реальном времени в условиях качественных сглаженных измерений и при их численной реализации не возникает проблем, связанных с переходными процессами, сходимостью и жесткими требованиями к объему и качеству исходной априорной информации (что зачастую характерно для оптимальных методов, например, при учете эффектов «размазывания точности» или «жесткости» [9, 32]). Так, для указанных выше комплексов, в которых традиционно реализуется многоэтапная обработка информации, применение косвенных методов используется на этапе экспресс-обработки, а оптимальные методы, как правило, реализуются на этапе постобработки.

Известны косвенные методы однопозиционной координатометрии, не использующие пеленги, но оперирующие с периодическими импульсными радиосигналами и ориентированные на возможность измерения непрерывного смещения частоты принимаемого сигнала в точке наблюдения, обусловленного движением либо источника излучения, либо наблюдателя [3, 7]. Принципиальным недостатком этих методов является необходимость учета априорной информации о величине скорости объекта (либо источника, либо наблюдателя), что для практики зачастую является неприемлемым. Кроме того, задача координатометрии ограничивается нахождением дальности и курсового угла для модели прямолинейного равномерного движения, что не позволяет оценить все параметры местоположения объекта для произвольного момента времени. Попытка снять ограничение, связанное со скоростью, предпринята в [27], однако в этом случае возникает необходимость отслеживания эволюции доплеровской частоты с учетом непрерывного накопления (подсчета) импульсов принимаемого сигнала в точке наблюдения. Очевидно, что речь идет только о высокоскоростных объектах и жестких ограничениях на условия наблюдения, при этом также используется модель прямолинейного равномерного движения. Общим недостатком косвенных методов, рассмотренных в [3, 7, 27], также является техническая сложность их практической реализации.

Известны угломерно-доплеровские методы однопозиционного определения параметров движения (см., например, [3, 4, 7, 9, 29]), использующие не только прямые измерения (радиальную скорость и пеленг), но и косвенные (производные различного порядка), а также не привлекающие указанную выше априорную информацию. Данные методы ориентированы на простейшие модели движения (например, орбитальную), не учитывают возможность построения нескольких независимых каналов координатометрии и появление сингулярных ошибок первичных измерений, обесценивающих информацию, содержащуюся в косвенных измерениях (производных от радиальной скорости и пеленга).

Заслуживает внимания метод [29], который оперирует с производными до второго порядка включительно и позволяющий формировать адаптивные алгоритмы координатометрии на базе нескольких параллельных алгоритмов, соответствующих инвариантам движения объекта. Однако анализ показал, что полученные в [29] аналитические соотношения и соответствующие им алгоритмы являются зависимыми и избыточными, при этом они ориентированы также только на модель прямолинейного равномерного движения.

В настоящей работе развивается косвенный метод однопозиционной координатометрии, инвариантный к сингулярным ошибкам заданного класса (представимых в заданном конечномерном функциональном пространстве соответствующей линейной комбинацией с неизвестными спектральными коэффициентами), позволяющий на базе полного набора инвариантов (для широкого класса моделей движения) формировать семейство независимых квазиоптимальных решений и с их помощью формировать результирующую оценку параметров движения объекта. Показан сравнительный вычислительный эффект.

Эффективность применения инвариантов для решения целого класса прикладных целевых задач однопозиционной и многопозиционной локации и навигации на основе косвенных методов наглядно продемонстрирована в [8, 11, 33, 37]. Здесь показана возможность децентрализации, распараллеливания и сокращения вычислительных затрат при обработке измерений в системах различного типа на основе инвариантов непрерывных групп Ли преобразований (НЛГЛП) и первых интегралов, применяемых для описания движения различных объектов.

2. Постановка задачи

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат на отдельном участке наблюдения движение объекта описывается некоторым операторным уравнением (например, в векторно-алгебраической или векторно-дифференциальной форме)

$$(2.1) \quad \mathbf{G}(t, \mathbf{p}, \mathbf{\eta}) = 0 \quad \forall t \in [0, T],$$

где $\mathbf{p} = [x, y, z]^T$ – вектор координат объекта ($x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$), $\mathbf{\eta}$ – вектор неизвестных вещественных параметров.

Полагаем, что координаты x, y, z являются гладкими и требуемое число раз дифференцируемыми функциями, а вектору $\mathbf{p}$ ставится в соответствие вектор сферических координат $\mathbf{\varsigma} = [r, \lambda, \varphi]^T$, где r – наклонная дальность, λ – долгота, φ – широта. В качестве $\mathbf{X} = [r^{(1)}, \lambda, \varphi]^T$ примем вектор прямых измерений (где $r^{(1)} = dr/dt$), а в качестве $\mathbf{Y}$ – вектор косвенных измерений, координатами которого являются производные от $r^{(1)}$, λ, φ различных порядков, необходимые для реализации одного из вариантов развиваемого метода. Выберем сетку («скользящее окно», далее называемое просто «окном») $\{t_{n+i}, i = \overline{-m, m}\}$, где $n \geq m$, $m \in \{1, 2, \dots\}$, $t_{n+i} \in [0, T]$, $2m + 1$ – объем «окна». Вводя обозначение $\mu \in \{r^{(1)}, \lambda, \varphi\}$, воспользуемся следующим аддитивным уравнением наблюдения

$$(2.2) \quad \mathbf{H}_\mu = \mu + \mathbf{s}_\mu + \xi_\mu,$$

где

$$\begin{aligned} \mu &= [\mu_{n+i}, i = \overline{-m, m}]^T, \quad \mathbf{s}_\mu = [s_{\mu, n+i}, i = \overline{-m, m}]^T, \\ \xi_\mu &= [\xi_{\mu, n+i}, i = \overline{-m, m}]^T, \quad \mu_{n+i} = \mu(t_{n+i}), \\ s_{\mu, n+i} &= s_\mu(t_{n+i}), \quad \xi_{\mu, n+i} = \xi_\mu(t_{n+i}). \end{aligned}$$

В (2.2) под $s_\mu(t)$ понимается сингулярная ошибка

$$(2.3) \quad s_\mu(t) = \mathbf{D}_\mu^T \Theta_\mu(t),$$

где

$\mathbf{D}_\mu = [d_{\mu k}, k = \overline{0, K}]^T$ – вектор неизвестных спектральных коэффициентов, $\Theta_\mu(t) = [\theta_{\mu k}(t), k = \overline{0, K}]^T$ – вектор заданных базисных функций.

Для представления $\mu = \mu(t)$ также воспользуемся спектральной моделью

$$(2.4) \quad \mu(t) = \mathbf{A}_\mu^T \Psi_\mu(t),$$

где

$\mathbf{A}_\mu = [a_{\mu b}, b = \overline{0, B}]^T$ – вектор неизвестных коэффициентов, $\Psi_\mu(t) = [\psi_{\mu b}(t), b = \overline{0, B}]^T$ – вектор заданных базисных функций.

Под ξ_μ понимается вектор случайных погрешностей с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей $\mathbf{K}_\mu = [k_{\mu, n+i, n+j}, i, j = \overline{-m, m}]$.

Модели (2.1)–(2.4) находят широкое применение при решении различных локационных и навигационных задач. Применяя для каждого участка наблюдения свою модель (2.1), можно описать сложные траектории, например,

характерные для маневрирующих объектов. В частности, весьма перспективен подход, основанный на описании таких траекторий простейшими группами Ли преобразований (например, сдвига, вращения и растяжения [8, 11, 31, 33–37]).

Требуется на основе набора инвариантов уравнения (2.1) (в частности, первых интегралов движения или инвариантов НЛГЛП) с учетом (2.2)–(2.4) и принятых ограничений развить косвенный метод координатометрии, не требующий расширения пространства состояний, устойчивый к сингулярной ошибке и обеспечивающий построение результирующей оценки параметров движения объекта по расширенному вектору прямых и косвенных измерений $\mathbf{Z} = [\mathbf{X}^T, \mathbf{Y}^T]^T$, координаты которого оцениваются с минимальными апостериорными дисперсиями.

3. Принцип определения параметров движения на основе инвариантов

Поставим в соответствие уравнению (2.1) скалярный инвариант $I = I(t, \mathbf{p}, \boldsymbol{\gamma}_I)$ (где $\boldsymbol{\gamma}_I$ – вектор, состоящий из некоторых производных от координат вектора $\mathbf{p}$), который на решениях $\mathbf{p}(t)$ и $\boldsymbol{\gamma}_I(t)$ уравнения (2.1) удовлетворяет условию

$$(3.1) \quad I(t, \mathbf{p}(t), \boldsymbol{\gamma}_I(t)) = C = \text{const} \quad \forall t \in [0, T].$$

При переходе в (3.1) к сферическим координатам получаем

$$(3.2) \quad Q(t, \boldsymbol{\varsigma}(t), \boldsymbol{\gamma}_Q(t)) = C = \text{const} \quad \forall t \in [0, T],$$

где $\boldsymbol{\gamma}_Q$ – вектор, состоящий из некоторых производных от координат вектора $\boldsymbol{\varsigma}$.

Способ нахождения инвариантов целиком определяется видом уравнения (2.1).

Найдем полную производную по t левой и правой частей уравнения (3.2):

$$(3.3) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\varsigma}} \left(\frac{d\boldsymbol{\varsigma}}{dt} \right)^T + \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\gamma}_Q} \left(\frac{d\boldsymbol{\gamma}_Q}{dt} \right)^T = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Раскрывая в (3.3) все производные, приходим к уравнению

$$(3.4) \quad W(t, \boldsymbol{\varsigma}, \boldsymbol{\gamma}_W) = 0 \quad \forall t \in [0, T],$$

где $\boldsymbol{\gamma}_W$ – вектор, содержащий всевозможные производные от r, λ, φ .

Разрешая это уравнение относительно r , получаем искомую формулу для определения дальности до объекта

$$(3.5) \quad r = W^{-1}(t, \mathbf{Z}).$$

Если уравнению (2.1) поставить в соответствие набор независимых инвариантов $I_l = I_l(t, \mathbf{p}, \mathbf{r}_I)$ (где $l = \overline{1, L}$), то по аналогии с (3.1)–(3.5) получим набор формул

$$(3.6) \quad r[l] = W_{[l]}^{-1}(t, \mathbf{Z}_{[l]}), \quad l = \overline{1, L}.$$

Данный набор может быть использован для адаптивного варианта оценивания с целью повышения точности оценивания дальности с учетом ошибок измерений. Так, если для фиксированного t вектор $\mathbf{Z}_{[l]}$ оценивается с ошибкой, характеризуемой нулевым математическим ожиданием и соответствующей корреляционной матрицей $\mathbf{K}_{\mathbf{Z}}$, то дисперсию оценивания дальности можно найти по формуле

$$(3.7) \quad \sigma_{r[l]}^2 = \mathbf{H}_{[l]}^T \mathbf{K}_{\mathbf{Z}[l]} \mathbf{H}_{[l]}, \quad l = \overline{1, L},$$

где $\mathbf{H}_{[l]}$ – вектор-столбец частных производных от (3.6) по элементам вектора $\mathbf{Z}_{[l]}$, вычисленных на математических ожиданиях этих элементов.

В качестве оптимального варианта оценивания дальности выбирается тот, для которого

$$(3.8) \quad l^* = \arg \min_l \sigma_{r[l]}^2, \quad l^* \in \{1, 2, \dots, L\}.$$

Для определения декартовых координат объекта достаточно воспользоваться зависимостями

$$(3.9) \quad x[l^*] = r[l^*] \cos \varphi \cos \lambda, \quad y[l^*] = r[l^*] \cos \varphi \sin \lambda, \quad z[l^*] = r[l^*] \sin \varphi,$$

где вместо угловых координат λ и φ подставляются либо прямые измерения, либо их сглаженные значения.

Вместо (2.1) можно воспользоваться более общим случаем, если полагать, что на заданном участке наблюдения используется набор вероятных моделей $\mathbf{G}_k(t, \mathbf{p}, \mathbf{\eta}) = 0$, где $k = \overline{0, K}$. В этом случае алгоритм (3.7)–(3.9) принимает вид

$$(3.10) \quad \begin{cases} \sigma_{r[k,l]}^2 = \mathbf{H}_{[k,l]}^T \mathbf{K}_{\mathbf{Z}[k,l]} \mathbf{H}_{[k,l]}, & k = \overline{1, K}, \quad l = \overline{1, L_k}, \\ [k^*, l^*] = \arg \min_{[k,l]} \sigma_{r[k,l]}^2, & k^* \in \{1, 2, \dots, K\}, \quad l^* \in \{1, 2, \dots, L_{k^*}\}, \\ x[k^*, l^*] = r[k^*, l^*] \cos \varphi \cos \lambda, \\ y[k^*, l^*] = r[k^*, l^*] \cos \varphi \sin \lambda, \\ z[k^*, l^*] = r[k^*, l^*] \sin \varphi. \end{cases}$$

Алгоритм (3.10) позволяет распараллелить вычислительный процесс с учетом числа используемых инвариантов и обеспечить адаптацию процедуры оценивания параметров движения объекта к условиям наблюдения.

4. Примеры построения и использования инвариантов

Пусть на отдельно взятом участке наблюдения уравнению (2.1) соответствует НЛГЛП общего вида [32–34]:

$$(4.1) \quad T_a : \quad \boldsymbol{\rho}' = \mathbf{f}(a, \boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\eta}_0) \quad \forall a \in \Delta_a \subset R^1,$$

где $\boldsymbol{\rho}' = [x', y', z']^T$, $\mathbf{f}(a, \boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\eta}_0) = [f_x, f_y, f_z]^T$, $\boldsymbol{\eta}_0$ – вектор числовых параметров группы, a – вещественный групповой параметр, такой, что при $a = a_0$ (где $a_0 \in \Delta_a$) выполняется условие $\mathbf{f}(a_0, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}_0) = \boldsymbol{\rho}$.

Модель (4.1) позволяет описать траекторию движения объекта, а если групповой параметр рассматривать как функцию времени $a = a(t, \boldsymbol{\chi}_0)$ (где $\boldsymbol{\chi}_0$ – вектор в общем случае неизвестных числовых параметров), то можно описать временной закон движения по этой траектории. Если провести замену координат $\boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0$, то с учетом (2.1) получаем: $\boldsymbol{\rho} - \mathbf{f}(a, \boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\eta}_0) = \mathbf{G}(t, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})$, $\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\chi}_0]^T$.

Инварианты $I = I(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}_0)$ модели (4.1), не зависящие от параметров t , $\boldsymbol{\rho}_0$ и $\boldsymbol{\chi}_0$, находятся путем решения следующего линейного уравнения в частных производных

$$(4.2) \quad XI(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}_0) = \phi_x \frac{\partial I}{\partial x} + \phi_y \frac{\partial I}{\partial y} + \phi_z \frac{\partial I}{\partial z} = 0,$$

где $X = \phi_x \partial / \partial x + \phi_y \partial / \partial y + \phi_z \partial / \partial z$ – инфинитезимальный оператор НЛГЛП, координаты которого находятся по формулам $\phi_x = \partial f_x / \partial a$, $\phi_y = \partial f_y / \partial a$, $\phi_z = \partial f_z / \partial a$ в точке $a = a_0$.

С учетом (4.2) для нахождения инвариантов, учитывающих временной характер движения по траектории (4.1) и различные производные от вектора $\boldsymbol{\rho}$, строится расширенный оператор и соответствующее ему уравнение в частных производных [8, 11, 31–34].

Покажем реализацию развиваемого метода на примере группы сдвига. Пусть

$$T_{a=t} : \boldsymbol{\rho}' = \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\eta}_0 t \quad \forall a = t \in \Delta_a = [0, T] \subset R^1,$$

где $\boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{V}_0 = [V_{x0}, V_{y0}, V_{z0}]^T$ – вектор скорости объекта, движущегося прямолинейно и равномерно. В этом случае имеем $\phi_x = V_{x0}$, $\phi_y = V_{y0}$, $\phi_z = V_{z0}$ и два независимых инварианта $I_{[1]} = xV_{y0} - yV_{x0} = xy^{(1)} - yx^{(1)}$ и $I_{[2]} = xV_{z0} - zV_{x0} = xz^{(1)} - zx^{(1)}$, при этом с учетом (3.1) получаем $\gamma_{I[1]}(t) = \gamma_{I[1]} = [x^{(1)}, y^{(1)}]^T$ и $\gamma_{I[2]}(t) = \gamma_{I[2]} = [x^{(1)}, z^{(1)}]^T$. Принимая во внимание (3.2) путем несложных, но громоздких преобразований, находим

$$Q_{[1]}(t, \boldsymbol{\varsigma}(t), \boldsymbol{\gamma}_{Q[1]}(t)) = r^2 \lambda^{(1)} \cos^2 \varphi,$$

$$Q_{[2]}(t, \boldsymbol{\varsigma}(t), \boldsymbol{\gamma}_{Q[2]}(t)) = r^2 \left(\varphi^{(1)} \cos \lambda + \lambda^{(1)} \sin \lambda \sin \varphi \cos \varphi \right),$$

где

$$\Upsilon_{Q[1]} = \left[\varphi^{(1)} \right] \text{ и } \Upsilon_{Q[2]} = \left[\lambda^{(1)}, \varphi^{(1)} \right]^T.$$

Соответственно с учетом (3.3) и (3.4) имеем

$$\begin{aligned} W_{[1]} &= 2r^{(1)}\lambda^{(1)} + r \left(\lambda^{(2)} - 2\lambda^{(1)}\varphi^{(1)} \operatorname{tg} \varphi \right), \\ W_{[2]} &= 2r^{(1)}\varphi^{(1)} + r \left(\varphi^{(2)} + \left(\lambda^{(1)} \right)^2 \sin \varphi \cos \varphi \right), \end{aligned}$$

где

$$\Upsilon_{W[1]} = \left[r^{(1)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \varphi^{(1)} \right]^T \text{ и } \Upsilon_{W[2]} = \left[r^{(1)}, \lambda^{(1)}, \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)} \right]^T.$$

В конечном итоге, конкретизируя (3.5) и (3.6), находим две независимые формулы для определения наклонной дальности

$$(4.3) \quad r[1] = \frac{2r^{(1)}\lambda^{(1)} \cos \varphi}{2\lambda^{(1)}\varphi^{(1)} \sin \varphi - \lambda^{(2)} \cos \varphi},$$

$$(4.4) \quad r[2] = -\frac{2r^{(1)}\varphi^{(1)}}{\varphi^{(2)} + \left(\lambda^{(1)} \right)^2 \sin \varphi \cos \varphi}.$$

В частных случаях $\varphi = \varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = 0$ и $\lambda = \lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = 0$ непосредственно из (4.3) и (4.4) вытекают известные формулы дальнометрии (см., например, дифференциально-геометрический метод [4]):

$$r[1] = -2r^{(1)}\lambda^{(1)}/\lambda^{(2)}, \quad r[2] = -2r^{(1)}\varphi^{(1)}/\varphi^{(2)}.$$

Для получения других формул дальнометрии можно использовать три новых инварианта $I_{[3]} = x^{(1)} = V_{x0}$, $I_{[4]} = y^{(1)} = V_{y0}$ и $I_{[5]} = z^{(1)} = V_{z0}$. Им соответствуют следующие независимые формулы определения дальности

$$(4.5) \quad r[3] = \frac{r^{(2)} \cos \varphi - 2r^{(1)}\varphi^{(1)} \sin \varphi}{\varphi^{(2)} \sin \varphi + \left[\left(\lambda^{(1)} \right)^2 + \left(\varphi^{(1)} \right)^2 \right] \cos \varphi},$$

$$(4.6) \quad r[4] = \frac{r^{(2)} \sin \varphi + 2r^{(1)}\varphi^{(1)} \cos \varphi}{\left(\varphi^{(1)} \right)^2 \sin \varphi - \varphi^{(2)} \cos \varphi},$$

$$(4.7) \quad r[5] = \frac{r^{(2)}}{\left(\varphi^{(1)} \right)^2 + \left(\lambda^{(1)} \right)^2 \cos^2 \varphi}.$$

В отличие от [29] набор формул (4.3)–(4.7) является необходимым и достаточным для построения параллельного алгоритма независимой адаптивной дальнометрии, при этом полученные соотношения записаны в компактной (неизбыточной) форме.

Замечание 1. Поскольку для всех формул (4.3)–(4.7) нет полного совпадения наборов измеряемых параметров, то с учетом (3.7)–(3.10) появляется возможность организации пяти независимых каналов вычисления дальности и адаптации к изменяющимся условиям наблюдения.

Замечание 2. Долгота λ не входит в явном виде ни в одну из формул, что позволяет эффективно бороться с постоянными систематическими ошибками, присутствующими в измерениях координаты λ . Широта φ присутствует в явном виде во всех формулах.

Замечание 3. Для более сложных моделей движения, использующих НЛГЛП общего вида, аналогично группе сдвига находятся всевозможные инварианты, соответствующие как траектории, так и временному закону движения объекта по данной траектории, а также независимые выражения для определения дальности.

Замечание 4. Для маневрирующего объекта необходимо использовать составную модель на основе допустимого набора НЛГЛП частного вида (например, сдвига, вращения и растяжения), при этом выбор той или иной частной НЛГЛП на некотором участке наблюдения соответствует решению задачи идентификации с минимизацией выбранной решающей функции (например, невязки метода наименьших квадратов). Такой подход с использованием группы вращения рассмотрен в [31], где предлагается аппроксимировать траекторию объекта кусками окружностей разного радиуса.

Если модель (2.1) представляет собой некоторое дифференциальное уравнение, то отыскание всех возможных инвариантов для динамического случая осуществляется в рамках известной теории группового анализа [34–36]. Однако на практике зачастую достаточно ограничиться частными инвариантами движения, а именно так называемыми первыми интегралами дифференциального уравнения. Продемонстрируем это на примере кругового орбитального движения: $\mathbf{G}(t, \mathbf{p}, \mathbf{\eta}) = \mathbf{p}^{(2)} + \eta_0 R_0^{-3} \mathbf{p} = 0$, где $\mathbf{\eta} = [R_0, \eta_0]^T$, R_0 и η_0 – радиус и гравитационный параметр Земли соответственно. Известно, что инвариантами (первыми интегралами) данного движения являются выражения $I_{[1]} = xy^{(1)} - yx^{(1)}$ и $I_{[2]} = xz^{(1)} - zx^{(1)}$, которые по внешнему виду совпадают с рассмотренными выше инвариантами группы сдвига, однако теперь производные $x^{(1)}$, $y^{(1)}$ и $z^{(1)}$ не являются константами и ранее использованные инварианты $I_{[3]} = x^{(1)} = V_{x0}$, $I_{[4]} = y^{(1)} = V_{y0}$, $I_{[5]} = z^{(1)} = V_{z0}$ теперь не применимы. С учетом этого в качестве формул определения дальности для динамического случая можно принять только выражения (4.3) и (4.4).

Замечание 5. Развиваемый однопозиционный косвенный метод можно обобщить и на класс стохастических моделей, для которых применение классических инвариантов зачастую весьма ограничено, но есть возможность использовать так называемые ϵ -инварианты (эпсилон-инварианты [37]). Для них условие инвариантности выполняется приближенно (с точностью до ϵ), и, следовательно, в этом случае решение задачи координатометрии может быть выполнено приближенно.

5. Учет флуктуационных ошибок измерений

Покажем на примере группы сдвига и условия $\varphi = \varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = 0$ реализацию алгоритма (3.7) и (3.8). Несложно убедиться, что в данном частном случае из всего набора формул (4.3)–(4.7) информативными являются только две:

$$r[1] = -2r^{(1)}\lambda^{(1)}/\lambda^{(2)}, \quad r[2] = -r^{(2)}/\left(\lambda^{(1)}\right)^2.$$

Соответственно имеем два вектора измеряемых параметров $\mathbf{Z}_{[1]} = [r^{(1)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}]^T$ и $\mathbf{Z}_{[2]} = [r^{(2)}, \lambda^{(1)}]^T$. С целью уменьшения громоздкости последующих записей примем матрицы $\mathbf{K}_{\mathbf{Z}_{[1]}}$ и $\mathbf{K}_{\mathbf{Z}_{[2]}}$ диагональными, т.е.

$$\mathbf{K}_{\mathbf{Z}_{[1]}} = \text{diag} [\sigma_{r^{(1)}}^2, \sigma_{\lambda^{(1)}}^2, \sigma_{\lambda^{(2)}}^2] \quad \text{и} \quad \mathbf{K}_{\mathbf{Z}_{[2]}} = \text{diag} [\sigma_{r^{(2)}}^2, \sigma_{\lambda^{(1)}}^2].$$

Учитывая, что $x = r \cos \lambda$ и $y = r \sin \lambda$, в соответствии с (3.7) находим

$$(5.1) \quad \sigma_{r[1]}^2 = 4 \left(\lambda^{(2)} \right)^{-2} \left\{ \left(\lambda^{(1)} \right)^2 \sigma_{r^{(1)}}^2 + \left(r^{(1)} \right)^2 \left[\sigma_{\lambda^{(1)}}^2 + \left(\lambda^{(1)}/\lambda^{(2)} \right)^2 \sigma_{\lambda^{(2)}}^2 \right] \right\},$$

$$(5.2) \quad \sigma_{r[2]}^2 = \left(\lambda^{(1)} \right)^{-4} \left[\sigma_{r^{(2)}}^2 + 4 \left(r^{(2)} \right)^2 \left(\lambda^{(1)} \right)^{-4} \sigma_{\lambda^{(1)}}^2 \right],$$

при этом в качестве приоритетной выбирается та формула определения дальности, для которой

$$(5.3) \quad l^* = \arg \min_l \sigma_{r[l]}^2, \quad l^* \in \{1, 2\}.$$

Непосредственно из (5.1)–(5.3) следует, что разрабатываемый метод, оперирующий с производными до второго порядка включительно, можно эффективно применять только на сглаженных измерениях, при этом рассматривается класс высокоскоростных объектов, для которых обеспечивается необходимое приращение угловых координат и радиальной скорости на заданном интервале наблюдения [29].

6. Автокомпенсационный алгоритм сглаживания первичных измерений

Рассмотрим с учетом (2.1)–(2.4) алгоритм автокомпенсационного несмещенного сглаживания применительно к параметру $\mu \in \{r^{(1)}, \lambda, \varphi\}$ и его производным $\mu^{(q)}$ (где $q \in \{0, 1, 2\}$) в точке t_n с использованием «окна» $\{t_{n+i}, i = \overline{-m, m}\}$. Будем опираться на общий подход оценивания значений линейных функционалов, изложенный в [38, 39].

Оценку $\mu^{(q)*}$ для $\mu^{(q)}$ ищем в виде

$$(6.1) \quad \mu^{(q)*} = \mathbf{P}_{\mu q}^T \mathbf{H}_{\mu},$$

где $\mathbf{P}_{\mu q} = [p_{\mu q, n+i}, i = \overline{-m, m}]^T$ – вектор неизвестных весовых коэффициентов, которые выбираются из условия минимизации дисперсии $\sigma_{\mu q}^2$ оценки $\mu^{(q)*}$.

Поскольку эта оценка относится к классу линейных, то

$$(6.2) \quad \sigma_{\mu q}^2 = \mathbf{P}_{\mu q}^T \mathbf{K}_{\mu} \mathbf{P}_{\mu q}.$$

Кроме того, потребуем выполнения условий несмещенности оценки $(\mu^{(q)} - \mathbf{P}_{\mu q}^T \mathbf{\mu} = 0)$ и ее инвариантности к сингулярной ошибке $(\mathbf{P}_{\mu q}^T \mathbf{s}_{\mu} = 0)$. Для решения сформулированной задачи условной оптимизации используется метод множителей Лагранжа с решающей функцией

$$(6.3) \quad J(\mathbf{P}_{\mu q}, \boldsymbol{\zeta}_{\mu q}, \boldsymbol{\omega}_{\mu q}) = \mathbf{P}_{\mu q}^T \mathbf{K}_{\mu} \mathbf{P}_{\mu q} + \boldsymbol{\zeta}_{\mu q}^T \boldsymbol{\Theta}_{\mu}^T \mathbf{P}_{\mu q} + \left[(\boldsymbol{\Psi}_{\mu}^T)^{(q)} - \mathbf{P}_{\mu q}^T \boldsymbol{\Psi}_{\mu} \right] \boldsymbol{\omega}_{\mu q},$$

где $\boldsymbol{\zeta}_{\mu q}$ и $\boldsymbol{\omega}_{\mu q}$ – вектор-столбцы множителей Лагранжа, $\boldsymbol{\Theta}_{\mu} = [\theta_{\mu k}(t_{n+i}), i = \overline{-m, m}, k = \overline{0, K}]$ – базисная матрица сингулярной ошибки, $\boldsymbol{\Psi}_{\mu} = [\psi_{\mu b}(t_{n+i}), i = \overline{-m, m}, b = \overline{0, B}]$ – базисная матрица параметра $\mu = \mu(t)$.

Вектор $\mathbf{P}_{\mu q}$, минимизирующий $\sigma_{\mu q}^2$ и обеспечивающий выполнение условий несмещенности и инвариантности, имеет вид

$$(6.4) \quad \mathbf{P}_{\mu q} = \boldsymbol{\Lambda}_{\mu} \mathbf{K}_{\mu}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{\mu} (\boldsymbol{\Psi}_{\mu}^T \boldsymbol{\Lambda}_{\mu} \mathbf{K}_{\mu}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{\mu})^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{\mu}^{(q)},$$

где $\boldsymbol{\Lambda}_{\mu} = E_{2m+1} - \mathbf{K}_{\mu}^{-1} \boldsymbol{\Theta}_{\mu} (\boldsymbol{\Theta}_{\mu}^T \mathbf{K}_{\mu}^{-1} \boldsymbol{\Theta}_{\mu})^{-1} \boldsymbol{\Theta}_{\mu}^T$, E_{2m+1} – единичная матрица размером $(2m+1) \times (2m+1)$, $\boldsymbol{\Psi}_{\mu}^{(q)} = d^q \boldsymbol{\Psi}_{\mu}(t) / dt^q|_{t=t_n}$.

Дисперсия оценки $\mu^{(q)*}$ находится по правилу

$$(6.5) \quad \sigma_{\mu q}^2 = \left(\boldsymbol{\Psi}_{\mu}^{(q)} \right)^T \left[(\mathbf{K}_{\mu}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{\mu})^T (\boldsymbol{\Lambda}_{\mu})^T \boldsymbol{\Psi}_{\mu} \right]^{-1} \mathbf{H}_{\mu} (\boldsymbol{\Psi}_{\mu}^T \boldsymbol{\Lambda}_{\mu} \mathbf{K}_{\mu}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{\mu})^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{\mu}^{(q)},$$

где

$$\mathbf{H}_{\mu} = (\mathbf{K}_{\mu}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{\mu})^T (\boldsymbol{\Lambda}_{\mu})^T \mathbf{K}_{\mu} \boldsymbol{\Lambda}_{\mu} \mathbf{K}_{\mu}^{-1} \boldsymbol{\Psi}_{\mu}.$$

Несложно показать, что математическое ожидание методической ошибки, обусловленной не учетом «хвоста» ряда (2.4), равно

$$(6.6) \quad \varepsilon_{\mu q} = \Delta_{\mu n}^{(q)} - \mathbf{P}_{\mu q}^T \boldsymbol{\Delta}_{\mu n},$$

где $\Delta_{\mu} = \Delta_{\mu}(t)$ – «хвост» ряда, а $\Delta_{\mu n}^{(q)}$ – его q -я производная в точке $t = t_n$, $\boldsymbol{\Delta}_{\mu n} = [\Delta_{\mu}(t_{n+i}), i = \overline{-m, m}]^T$.

В [38, с. 62] показано, что с ростом числа спектральных коэффициентов в модели сингулярной ошибки (2.3) алгоритм (6.1)–(6.6) обеспечивает сокращение вычислительных затрат до 47% по сравнению с традиционным расширенным методом наименьших квадратов. Это позволяет повысить оперативность решения задачи сглаживания.

С учетом (6.1)–(6.6) можно строить искомые оценки параметров движения объекта, инвариантные к сингулярным ошибкам измерений. Так, если воспользоваться формулами (4.3) и (4.4), то можно найти устойчивые оценки наклонной дальности для двух вариантов

$$(6.7) \quad r[1] = \frac{2 (\mathbf{P}_{r1}^T \mathbf{H}_r) (\mathbf{P}_{\lambda 1}^T \mathbf{H}_\lambda) \cos (\mathbf{P}_{\varphi 0}^T \mathbf{H}_\varphi)}{2 (\mathbf{P}_{\lambda 1}^T \mathbf{H}_\lambda) (\mathbf{P}_{\varphi 1}^T \mathbf{H}_\varphi) \sin (\mathbf{P}_{\varphi 0}^T \mathbf{H}_\varphi) - (\mathbf{P}_{\lambda 2}^T \mathbf{H}_\lambda) \cos (\mathbf{P}_{\varphi 0}^T \mathbf{H}_\varphi)},$$

$$(6.8) \quad r[2] = - \frac{2 (\mathbf{P}_{r1}^T \mathbf{H}_r) (\mathbf{P}_{\varphi 1}^T \mathbf{H}_\varphi)}{(\mathbf{P}_{\varphi 2}^T \mathbf{H}_\varphi) + (\mathbf{P}_{\lambda 1}^T \mathbf{H}_\lambda)^2 \sin (\mathbf{P}_{\varphi 0}^T \mathbf{H}_\varphi) \cos (\mathbf{P}_{\varphi 0}^T \mathbf{H}_\varphi)}.$$

По аналогии с (6.7) и (6.8) определяются дальности для вариантов (4.5)–(4.7) и декартовы координаты (3.9) объекта наблюдения.

Результаты вычислительных экспериментов, представленные в [38, 39], показывают высокую эффективность автокомпенсационного алгоритма сглаживания в аномальных условиях измерений, что позволяет формировать устойчивые оценки производных от радиальной скорости и угловых координат, необходимые для успешного применения развитого однопозиционного косвенного метода координатометрии. Результаты моделирования адаптивного алгоритма (3.7) и (3.8) для случая прямолинейного равномерного движения объекта представлены в [29]. Они показывают, что метод применим к высокоточным измерениям, при этом достоверность результатов координатометрии существенно зависит от динамики объекта и условий его наблюдения.

7. Заключение

Развитый метод существенно расширяет сферу применения квазиоптимальных косвенных методов оперативного оценивания применительно к решению задачи однопозиционной координатометрии, устойчивых к сингулярным ошибкам измерений и условиям наблюдения высокоскоростных объектов. Данный метод как самостоятельно, так и в совокупности с традиционными статистическими методами (например, наименьших квадратов, максимального правдоподобия, максимума апостериорной плотности вероятности и различных методов динамической фильтрации) может быть эффективно использован как инструмент интеллектуально-аналитического совершенствования существующих и разработки перспективных однопозиционных систем активной и пассивной локации и навигации нового поколения.

У метода есть ограничения на классы используемых однопозиционных систем в плане точности измерений, условий наблюдения, а также на типы сопровождаемых объектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы маневрирования кораблей / Под ред. М.И. Скворцова. М.: Воениздат, 1966.

2. *Брандин В.Н., Разоренов Г.Н.* Определение траекторий космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978.
3. *Шебшаевич В.С.* Введение в теорию космической навигации. М.: Сов. радио, 1971.
4. *Громов Г.Н.* Дифференциально-геометрический метод навигации. М.: Радио и связь, 1986.
5. *Хвоц В.А.* Тактика подводных лодок. М.: Воениздат, 1989.
6. *Соловьев Ю.А.* Спутниковая навигация и ее приложения. М.: Экотрендз, 2003.
7. *Мельников Ю.П., Попов С.В.* Радиотехническая разведка. М.: Радиотехника, 2008.
8. *Булычев Ю.Г., Манин А.П.* Математические аспекты определения движения летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 2000.
9. *Ярлыков М.С.* Статистическая теория радионавигации. М.: Радио и связь, 1985.
10. *Сосулин Ю.Г., Костров В.В., Паршин Ю.Н.* Оценочно-корреляционная обработка сигналов и компенсация помех. М.: Радиотехника, 2014.
11. *Булычев Ю.Г., Васильев В.В., Джуган Р.В. и др.* Информационно-измерительное обеспечение натурных испытаний сложных технических комплексов. М.: Машиностроение – Полет, 2016.
12. *Гельцер А.А.* Однопозиционный метод определения местоположения источника радиоизлучения с использованием отражений сигналов от множества элементов рельефа и местных предметов // Автореф. дис. Том. гос. универ. систем управления и радиоэлектроники. 2012.
13. *Сиренко И.Л., Донец И.В., Рейзенкинд Я.А.* Однопозиционное определение координат и вектора скорости радиоизлучающих объектов // Радиотехника. 2019. № 10 (16). С. 28–32.
14. *Булычев Ю.Г., Булычев В.Ю., Ивакина С.С., Николас П.И.* Оценка наклонной дальности до цели с полиномиальным законом движения // Вестн. Казан. гос. универ-та. 2013. № 1. С. 67–74.
15. *Булычев Ю.Г., Булычев В.Ю., Ивакина С.С., Мозоль А.А.* Оценивание параметров движения объекта на базе стационарного квазиавтономного пеленгатора // ТиСУ. 2013. № 5. С. 92–99.
16. *Булычев Ю.Г., Булычев В.Ю., Ивакина С.С., Насенков И.Г.* Пассивная локация группы движущихся целей одним стационарным пеленгатором с учетом априорной информации // АиТ. 2017. № 1. С. 152–166.
Bulychev Y.G., Bulychev V.Y., Ivakina S.S., Nasenkov I.G. Passiv of Location of moving Tar gets with prior Information // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 1. P. 125–137.
17. *Lin X., Kirubarajan T., Bar-Shalom Y., Maskell S.* Comparison of EKF, Pseudo-measurement and Particle Filters for a Bearing-only Target Tracking Problem // Proc. SPIE-Int. Soc. Optic. Eng. 2002. V. 4728. P. 240–250.
18. *Miller B.M., Stepanyan K.V., Miller A.B., Andreev K.V., Khoroshenkikh S.N.* Optimal filter selection for UAV trajectory control problems // Proc. 37 Conference on Inform. Techn. Syst. – 2013. Conf. Young Sci. Engin. ИТП RAS, 1–6 September 2013, place City Kaliningrad, country-region Russia. 2013. P. 327–333.
19. *Miller B.M., Miller A.B.* Tracking of the UAV trajectory on the basis of of bearing-only observations // Sensors 2015 [Special Issue]. No. 15 (12). P. 29802–29820. <https://doi.org/10.3390/s151229768>

20. *Amelin K.S., Miller A.B.* An Algorithm for Refinement of the Position of a Light UAV on the Basis of Kalman Filtering of Bearing Measurements // Commun. Technol. Electron. 2014. V. 59. No. 6. P. 622–631.
21. *Karpenko S., Konovalenko I., Miller A., Miller B., Nikolaev D.* UAV Control on the Basis of 3D Landmark Bearing-Only Observations // Sensors 2015 [Special Issue]. No. 15 (12). P. 29802–29820. <https://doi.org/10.3390/s151229768>
22. *Karpenko S., Konovalenko I., Miller A., Miller B., Nikolaev D.* Visual navigation of the UAVs on the basis of 3D natural landmarks // Proc. SPIE. Eight Int. Conf. Machine Vision (ICMV 2015). 2015. V. 9875. P. 1–10. <https://doi.org/10.1117/12.2228793>
23. *Bar-Shalom Ya., Willet P.K., Tian X.* Tracking and Data Fusion: A Handbook of Algorithms, YBS Publishing, 2011. ISBN-13: 978-0964831278.
24. *Ried D.* An Algorithm for Tracking Multiple Targets // IEEE transact. Autom. Control. 1979. V. 24 (6). P. 843–854.
25. *Nardone S.C., Aidala V.J.* Observability Criteria for Bearings-Only Target Motion Analysis // IEEE Transact. Aerospac. Electron. Syst. 1981. V. AES-17. 1981. P. 162–166.
26. *Katta G. Murty.* An algorithm for ranking all the assignments in order of increasing cost // Oper. Res. 1968. No. 16 (3). P. 682–687.
27. *Булычев Ю.Г., Мозоль А.А.* Однопозиционная пассивная локация и навигация с учетом эволюции периода радиосигнала в точке приема // РЭ. 2021. Т. 66. № 5. С. 468–475.
28. *Дятлов А.П., Дятлов П.А.* Доплеровские обнаружители подвижных объектов с использованием «постороннего» источника излучения // Специальная техника. 2010. № 5. С. 16–22.
29. *Булычев Ю.Г., Коротун А.А., Манин А.П.* Фильтрация параметров траекторий в угломерно-доплеровских системах локации // Радиотехника. 1990. № 12. С. 22–26.
30. *Жданюк Б.Ф.* Основы статистической обработки траекторных измерений. М.: Сов. радио, 1978.
31. *Шлома А.М., Фролов С.М., Преображенский Л.А.* Адаптивная фильтрация параметров криволинейных траекторий // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1986. № 12. С. 56–60.
32. *Булычев Ю.Г., Елисеев А.В.* Проблема жесткости уравнений приближенной нелинейной фильтрации // АИТ. 1999. № 1. С. 35–45.
Bulychev Yu.G., Eliseev A.V. Rigidity problems of equations of approximate nonlinear filtering // Autom. Remote Control. 1999. No. 1. P. 35–45.
33. *Булычев Ю.Г., Булычев В.Ю., Ивакина С.С., Насенков И.Г.* Классификация инвариантов пассивной локации и их применение // ТиСУ. 2015. № 6. С. 71–81.
34. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981.
35. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
36. *Павловский Ю.Н.* Агрегирование, декомпозиция, групповые свойства, декомпозиционные структуры динамических систем // Кибернетика и вычислительная техника. 1978. № 39. С. 53–62.

37. Булычев Ю.Г., Бурлай И.В. Системный подход к моделированию стохастических объектов с использованием инвариантов // *АиТ*. 2001. № 12. С. 11–20.
Bulychev Y.G., Burlaj I.V. A system approach to modeling stochastic objects with invariants // *Autom. Remote Control*. 2001. V. 62. No. 12. P. 1939–1946.
38. Булычев Ю.Г., Елисеев А.В. Вычислительная схема инвариантно несмещенного оценивания значений линейных операторов заданного класса // *ЖВМиМФ*. 2008. Т. 48. № 4. С. 580–592.
39. Булычев Ю.Г. Применение методов опорных интегральных кривых и обобщенного инвариантно-несмещенного оценивания для исследования многомерной динамической системы // *ЖВМиМФ*. 2020. Т. 60. № 7. С. 1151–1169.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.А. Степановым.

Поступила в редакцию 18.05.2022

После доработки 22.03.2023

Принята к публикации 09.06.2023

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2023 г. А.Н. ИГНАТОВ, канд. физ.-мат. наук (alexei.ignatov1@gmail.com)
(Московский авиационный институт)

ОБ АЛГОРИТМЕ ФОРМИРОВАНИЯ РАСПИСАНИЯ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК В ТРАНСПОРТНОЙ СЕТИ¹

Рассматривается задача формирования расписания грузоперевозок в транспортной сети, представляемой неориентированным мультиграфом. Перевозки между вершинами могут осуществляться только в заранее определенные промежутки времени. Предлагается итеративный алгоритм поиска решения, приближенного к оптимальному по значению критерия, в исследуемой задаче. Алгоритм конструируется на основе решения задач смешанного целочисленного линейного программирования. Применимость алгоритма проверяется на примере с более чем 90 миллионами бинарных переменных.

Ключевые слова: транспортная сеть, мультиграф, грузоперевозки, расписание, смешанное целочисленное линейное программирование.

DOI: 10.31857/S0005231023090088, EDN: JUZQER

1. Введение

Задача составления расписания движения (грузов, поездов, локомотивов) — широко исследуемая как в теории, так и на практике задача. Публикации, посвященные этой тематике, можно разделить на несколько групп: по наличию времени движения в задаче, по фиксированности времени движения между вершинами, по возможности/фиксированности маршрута движения при оптимизации, по структуре мультиграфа транспортной сети. Например, в [1] использовалась только длительность следования через дуги графа транспортной сети общего вида, а в [2, 3] рассматривается однопутная железная дорога. В [4, 5] рассматривается задача построения расписания для железнодорожных сетей общего вида при фиксированном наборе маршрутов для поездов. В [6, 7] задача поиска маршрута движения поездов и времени их движения по железнодорожной сети решалась одновременно. Время в [6, 7] полагалось дискретным, что может приводить к очень большой размерности поставленной задачи. В [8–11] была рассмотрена задача одновременного формирования расписания и маршрутов движения составов по железнодорожной

¹ Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00293).

сети общего вида, а транспортировки между вершинами осуществлялись в заранее заданные промежутки времени.

Отличие постановок с фиксированным временем движения между вершинами от постановок с произвольным весьма принципиально. В постановках с произвольным временем предполагается готовность транспортного средства для перевозки в любой момент времени, что не всегда физически реализуемо. Принципиальным же отличием [11] от других работ является то, что в этой работе допустимым являлось окончание движения и по окончании промежутка времени, на которое строится расписание (далее — горизонт планирования). Такая возможность актуальна, например, когда необходимость перевезти груз появляется перед окончанием горизонта планирования. Однако такая возможность не только усложняет математическую модель перевозок, но и увеличивает время счета [11]. В этой связи актуальным является разработка более быстрого алгоритма, нежели алгоритм из [11]. Данный алгоритм и разрабатывается в настоящей статье.

В рамках рассматриваемой модели перевозок времени готовности грузов к отправлению, времени начала и конца движения любого транспортного средства, осуществляющего перевозку между вершинами, — фиксированные. При этом данные характеристики являются вещественными числами. Оптимизация в дальнейшем будет проводиться по использованию того или иного транспортного средства для того или иного груза. Также будут рассмотрены и другие оптимизационные переменные, которые характеризуют время стоянки грузов в различных вершинах, ожидаемое количество времени до доставки по окончании горизонта планирования, доставку груза до вершины назначения.

Для разработки алгоритма формирования грузоперевозок строится система из линейных ограничений и неравенств, содержащих целочисленные и непрерывные переменные, которая задает математическую модель движения грузов по транспортной сети общего вида. Транспортная сеть представляется неориентированным мультиграфом. Для снижения времени счета в алгоритме проводится декомпозиция множества грузов, а также декомпозиция горизонта планирования. Для дополнительного ускорения времени счета предусмотрена возможность удаления транспортировок, которые вряд ли могут быть использованы грузами ввиду того, что время начала движения по этим транспортировкам раньше ожидаемого времени прибытия груза в соответствующие этим транспортировкам вершины. Тестирование разработанного алгоритма проводится на содержательном примере с миллионами целочисленных переменных.

2. Основные обозначения и предположения

Рассмотрим транспортную систему, представляемую неориентированным мультиграфом $G = \langle V, E \rangle$, где V — множество вершин (городов, железнодорожных станций, заводов, аэропортов, морских портов) и E — множество

ребер (шоссе, железнодорожных путей, воздушных трасс, морских путей), соединяющих эти вершины. Пусть $|V| = M \geq 2$. Перенумеровав вершины мультиграфа G от 1 до M , составим множество индексов $V' = \{1, 2, \dots, M\}$. Каждый элемент этого множества единственным образом определяет вершину мультиграфа G . Отметим, что необходимость в моделировании транспортных систем с использованием мультиграфов следует из предметной области. Так, встречное движение между двумя железнодорожными станциями в один и тот же промежуток времени в целях безопасности должно быть разнесено по разным железнодорожным путям. Поэтому при моделировании движения приходится отдельно рассматривать все железнодорожные пути (ребра) из одной вершины (станции) в другую (станцию).

Будем отсчитывать время в минутах относительно некоторого момента отсчета. Под горизонтом планирования будем понимать промежуток времени $[0, T_{\max})$, на который строится план перевозок. Если план перевозок строится на день (1440 мин), то $T_{\max} = 1440$.

Разделим горизонт планирования на P непересекающихся промежутков (полуинтервалов) $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_P$, т.е. $[0, T_{\max}) = \bigcup_{p=1}^P \mathcal{T}_p$, где $\forall p_1, p_2 \in \{1, \dots, P\} : p_1 \neq p_2 \Rightarrow \mathcal{T}_{p_1} \cap \mathcal{T}_{p_2} = \emptyset$. Эти промежутки в дальнейшем будем называть *промежутками разбиения*. Введем вспомогательные переменные $\underline{\mathcal{T}}_p \stackrel{\text{def}}{=} \inf \mathcal{T}_p$, $\overline{\mathcal{T}}_p \stackrel{\text{def}}{=} \sup \mathcal{T}_p$, $p = \overline{1, P}$. Будем строить множества $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_P$ так, что

$$\underline{\mathcal{T}}_1 = 0, \quad \overline{\mathcal{T}}_P = T_{\max}, \quad \underline{\mathcal{T}}_{p+1} = \overline{\mathcal{T}}_p, \quad p = \overline{1, P-1}.$$

Пусть имеется I грузов (посылок, контейнеров, поездов). Для i -го груза заданы:

- индекс вершины отправления $v_i^{\text{отпр}} \in V'$;
- индекс вершины прибытия (назначения) $v_i^{\text{приб}} \in V'$;
- время готовности к отправлению $t_i^{\text{отпр}} \in [0, T_{\max})$;
- максимальное время d_i , в течение которого грузу позволяет находиться в пункте отправления с момента готовности;
- время груза в пути T_i , т.е. максимальное время, в течение которого грузу позволяет находиться в транспортной системе (исключая время в вершине отправления), вычисляемое в минутах;
- масса груза $w_i \in \mathbb{R}_+$,

$i = \overline{1, I}$. Груз предполагается неделимым в том смысле, что его нельзя отправить по частям.

Движение между вершинами может выполняться только в определенные промежутки времени. Пусть доступно ровно K перемещений/транспортных перевозок (самолетами, морскими судами, поездами, грузовиками) между вершинами. Параметры транспортировки математически можно представить в виде семиэлементного вектора-строки $z_k \stackrel{\text{def}}{=} (v_k^{\text{нач}}, v_k^{\text{кон}}, n_k, t_k^{\text{нач}}, t_k^{\text{кон}}, W_k, C_k)$, где $v_k^{\text{нач}} \in V'$ – индекс вершины начала движения, $v_k^{\text{кон}} \in V'$ – индекс вершины конца движения, причем $v_k^{\text{нач}}$ и $v_k^{\text{кон}}$ – индексы смежных вершин в

графе G , n_k – номер ребра, соединяющего вершины с индексами $v_k^{\text{нач}}$ и $v_k^{\text{кон}}$, $t_k^{\text{нач}} \in [0, T_{\text{макс}})$ – время начала движения, $t_k^{\text{кон}}$ – время конца движения, W_k – максимальная перевозимая масса при транспортировке, C_k – стоимость транспортировки единицы массы, $k = \overline{1, K}$. Обозначим через $\mathcal{Z}$ множество всех векторов z_k , $k = \overline{1, K}$. Перенумеруем элементы множества $\mathcal{Z}$ от 1 до K . Таким образом, число от 1 до K однозначно определяет конкретную транспортировку и ее параметры.

В дальнейшем под *расписанием движения* груза будем понимать набор номеров транспортировок, которые им используются. Зная номера транспортировок, можно легко определить вершины, посещаемые грузом, время посещения вершин, используемые для движения ребра мультиграфа, а также прочие характеристики движения.

В соответствии с введенными промежутками разбиения $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_P$ разделим множество транспортировок на несколько частей, а именно $\{1, \dots, K\} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \dots \cup \mathcal{K}_P$, где $\mathcal{K}_p \stackrel{\text{def}}{=} \{k \in \mathbb{N} : k \leq K, t_k^{\text{нач}} \in \mathcal{T}_p\}$, $p = \overline{1, P}$.

При выполнении перевозок склады, в которых хранятся грузы, могут быть заполнены. Кроме того, с грузом могут производиться некоторые операции, например переупаковка. В этой связи введем минимально и максимально возможные длительности стоянки в вершине с индексом $v_k^{\text{кон}}$ после выполнения транспортировки с номером k груза с номером i : $t_{i,k}^{\text{ст мин}}$ и $t_{i,k}^{\text{ст макс}}$, $i = \overline{1, I}$, $k = \overline{1, K}$. Очевидно, $\forall i = \overline{1, I}, k = \overline{1, K} \ 0 \leq t_{i,k}^{\text{ст мин}} \leq t_{i,k}^{\text{ст макс}}$.

Зададим величину τ_{m_1, m_2} – ожидаемое время (начиная с момента готовности к отправлению) перевозки груза из вершины с индексом m_1 в вершину с индексом m_2 , $m_1, m_2 = \overline{1, M}$. Очевидно, что $\tau_{m_1, m_1} = 0$, $m_1 = \overline{1, M}$. Если доступны исторические наблюдения по перевозке из вершины с индексом m_1 в вершину с индексом m_2 , то в качестве τ_{m_1, m_2} можно выбрать реализацию выборочного среднего по имеющимся наблюдениям, $m_1, m_2 = \overline{1, M}$. Если эти данные отсутствуют, то указанную величину можно оценить экспертным путем. Также введем величину η_{m_1, m_2} – ожидаемое время с момента готовности до отправления груза из вершины с индексом m_1 в вершину с индексом m_2 , которая вычисляется по аналогичному принципу, что и τ_{m_1, m_2} , $m_1, m_2 = \overline{1, M}$.

Под маршрутом груза с номером i будем понимать набор номеров транспортировок, последовательно используемых этим грузом, $i = \overline{1, I}$. Как следствие, по маршруту можно определить набор вершин, последовательно пересекаемых этим грузом. Ограничим максимальное число транспортировок в маршруте в рамках горизонта планирования некоторым заранее заданным числом J . Под j -м этапом маршрута груза с номером i будем понимать движение этого груза, когда используется j -я по порядку использования транспортировка, $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, J+1}$. Этап $J+1$ – технический, движение на нем не производится, он нужен для корректного задания математической модели. Будем называть вершину промежуточной для i -го груза, если она не является для него ни вершиной отправления, ни вершиной назначения, $i = \overline{1, I}$.

Введем также величину $\mathcal{D}_i$, характеризующую отказ в транспортировке i -му грузу: 0 — грузу отказано в транспортировке, 1 — иначе, $i = \overline{1, I}$. Отказ в транспортировке может быть связан с тем, что для груза не хватает транспортных, чтобы добраться до вершины назначения с учетом ограничения на время в пути и других физических ограничений. В идеальном случае все величины $\mathcal{D}_i$ равны единице, $i = \overline{1, I}$, однако такое не всегда физически реализуемо или не удастся найти расписание движения, приводящее к такому результату.

3. Вспомогательные результаты для формирования алгоритма

3.1. Математическая модель движения по транспортной сети

Разделим множество номеров грузов $\mathcal{I}$ на S непересекающихся подмножеств $\mathcal{I}_s$, т.е. $\mathcal{I} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, I\} = \bigcup_{s=1}^S \mathcal{I}_s$, причем $\forall s_1, s_2 \in \{1, \dots, S\} : s_1 \neq s_2 \implies \mathcal{I}_{s_1} \cap \mathcal{I}_{s_2} = \emptyset$. В [10–12] было предложено разбиение множества $\mathcal{I}$ по принципу нахождения в подмножествах номеров грузов с одинаковыми вершинами отправления и назначения. Кроме того, можно составить ровно столько подмножеств, сколько имеется грузов. При этом в подмножестве с индексом 1 будет номер груза с наиболее ранним/поздним временем готовности к отправлению, с индексом 2 — вторым/предпоследним временем и т.д.

Предположим, что для всех грузов с номерами из множеств $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_{\tilde{s}-1}$ имеется отказ в транспортировке или расписание движения. Если грузу с номером $\hat{i} \in \bigcup_{s=1}^{\tilde{s}-1} \mathcal{I}_s$ отказано в транспортировке, то полагается $\hat{\delta}_{i,j,k} = 0$, $j = \overline{1, J+1}$, $k = \overline{1, K}$, а $\mathcal{D}_{\hat{i}} = 0$. Если груз с номером $\hat{i} \in \bigcup_{s=1}^{\tilde{s}-1} \mathcal{I}_s$ допущен к транспортировке, то $\hat{\delta}_{i,j,k}$ полагается равной единице, если этот груз на этапе с номером j использует транспортировку с номером k , и равной нулю в противоположном случае, $j = \overline{1, J+1}$, $k = \overline{1, K}$. При этом полагается $\mathcal{D}_{\hat{i}} = 1$.

Для снижения размерности решаемых в дальнейшем задач оптимизации расписание движения будет вначале строиться для промежутка времени $[0, \overline{\mathcal{T}}_1)$. При построении расписания на промежуток времени $[0, \overline{\mathcal{T}}_2) = [0, \overline{\mathcal{T}}_1) \cup \mathcal{T}_2$ будет учитываться (фиксироваться) расписание на промежуток $[0, \overline{\mathcal{T}}_1)$, при построении расписания на промежуток времени $[0, \overline{\mathcal{T}}_3) = [0, \overline{\mathcal{T}}_2) \cup \mathcal{T}_3$ будет учтено (зафиксировано) расписание на промежуток времени $[0, \overline{\mathcal{T}}_2)$ и т.д.

В этой связи рассмотрим только транспортировки от начала горизонта планирования до конца промежутка $\mathcal{T}_{\tilde{p}}$, где $\tilde{p}$ — произвольное число из множества $\{1, \dots, P\}$. Сформулируем множество ограничений, задающих движение мультиграфу для грузов с номерами из множества $\mathcal{I}_{\tilde{s}}$ в это время, т.е. в субгоризонт планирования $[0, \overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}})$. Предположим вначале, что расписания движения для грузов с номерами из множества $\mathcal{I}_{\tilde{s}}$ на субгоризонт $[0, \overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}-1})$ ($\tilde{p} > 1$) в наличии не имеется.

Под $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$ будем понимать некоторое непустое подмножество транспортировок $\bigcup_{p=1}^{\tilde{p}} \mathcal{K}_p$, выбираемое для грузов из множества $\mathcal{I}_{\tilde{s}}$.

Для этого введем вспомогательные переменные $\delta_{i,j,k}^{\bar{p}}$, характеризующие использование грузом с номером i транспортировки с номером k на j -м этапе при формировании расписания для субгоризонта планирования $[0, \overline{T_{\bar{p}}})$, $i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}$, $j = \overline{1, J+1}$, $k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}$. Переменная $\delta_{i,j,k}^{\bar{p}}$ равна единице, если транспортировка с номером k используется i -м грузом на j -м этапе, и нулю — в противоположном случае.

Используя определение переменных $\delta_{i,j,k}^{\bar{p}}$, имеем

$$(1) \quad \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} \in \{0, 1\}, \quad i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, \quad j = \overline{1, J+1}, \quad k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}.$$

Движение исключительно по смежным вершинам мультиграфа G задается согласно ограничениям

$$(2) \quad \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} v_k^{\text{кон}} \leq \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} v_k^{\text{нач}} + \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} \right) M^3, \quad i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, \\ j = \overline{1, J-1},$$

$$(3) \quad \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} v_k^{\text{кон}} \geq \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} v_k^{\text{нач}} - \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} \right) M, \quad i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, \\ j = \overline{1, J-1}.$$

Напомним, что M — количество вершин в мультиграфе G . Ограничения (2), (3) приводят [10] к тому, что если для некоторого $\tilde{i} \in \mathcal{I}_{\bar{s}}$ и некоторого $\tilde{j} \in \{1, \dots, J\}$ справедливо $\sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{\tilde{i}, \tilde{j}, k}^{\bar{p}} = 0$, то $\sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{\tilde{i}, j+1, k}^{\bar{p}} = 0$, $j = \overline{\tilde{j}, J}$. Если же $\sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{\tilde{i}, \tilde{j}, k}^{\bar{p}} = 1$, то $\sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{\tilde{i}, \tilde{j}+1, k}^{\bar{p}} = 0$ или $\sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{\tilde{i}, \tilde{j}+1, k}^{\bar{p}} = 1$. Ограничения (2), (3) идентичны [10, 11] с учетом построения математической модели движения для субгоризонта планирования. Отметим, что выбор третьей степени у M в (2) обеспечивает корректное задание математической модели движения по мультиграфу [10].

Поскольку этапов для движения может быть не более J , введем ограничение

$$(4) \quad \sum_{i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i, J+1, k}^{\bar{p}} = 0.$$

Так как груз неделим, то на любом этапе (в том числе первом) можно использовать максимум одну транспортировку

$$(5) \quad \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i, 1, k}^{\bar{p}} \leq 1, \quad i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}.$$

Если перевозка груза начинается, то она должна быть осуществлена из соответствующей вершины отправления

$$(6) \quad \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i, 1, k}^{\bar{p}} v_k^{\text{нач}} = v_i^{\text{отпр}} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i, 1, k}^{\bar{p}}, \quad i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}.$$

Если готовность груза к отправлению происходит после верхней границы промежутка времени $\bar{T}_{\bar{p}}$, то вплоть до окончания $\bar{T}_{\bar{p}}$ никакие транспортировки грузу использовать не разрешено, т.е.

$$(7) \quad \sum_{j=1}^J \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} = 0, \forall i \in \mathcal{I}_{\bar{s}} : t_i^{\text{отпр}} \geq \bar{T}_{\bar{p}}.$$

Груз должен быть отправлен не раньше момента готовности к отправлению с учетом максимального времени в вершине отправления. При этом можно не отправить груз в период $[0, \bar{T}_{\bar{p}})$, если это допустимо с учетом максимального времени в вершине отправления. В этой связи имеем ограничения

$$(8) \quad t_i^{\text{отпр}} \leq \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,1,k}^{\bar{p}} t_k^{\text{нач}} + \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,1,k}^{\bar{p}} \right) \bar{T}_{\bar{p}} \leq t_i^{\text{отпр}} + d_i, \\ \forall i \in \mathcal{I}_{\bar{s}} : t_i^{\text{отпр}} < \bar{T}_{\bar{p}}.$$

Прокомментируем ограничения (8). Для этого рассмотрим груз с номером $\tilde{i} \in \mathcal{I}_{\bar{s}} : t_{\tilde{i}}^{\text{отпр}} < \bar{T}_{\bar{p}}$. Ввиду ограничений (1) и (5) возможны только два варианта: $\sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{\tilde{i},1,k}^{\bar{p}}$ равна нулю или единице. При этом равенство нулю этой суммы (т.е. неотправка груза с номером $\tilde{i}$) приводит к тому, что должно быть выполнено условие $\bar{T}_{\bar{p}} \leq t_{\tilde{i}}^{\text{отпр}} + d_{\tilde{i}}$. Если эта сумма равна единице, то в соответствии с (5) может быть использована только одна транспортировка и время ее начала будет располагаться в промежутке $[t_{\tilde{i}}^{\text{отпр}}, t_{\tilde{i}}^{\text{отпр}} + d_{\tilde{i}}]$. Это соответствует введенному выше смыслу ограничений (8).

Из одной и той же вершины можно выйти лишь единожды²

$$(9) \quad \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}} : v_k^{\text{нач}} = m} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} \leq 1, \quad i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, \quad m = \overline{1, M}.$$

В одну и ту же вершину можно попасть лишь единожды

$$(10) \quad \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}} : v_k^{\text{кон}} = m} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} \leq 1, \quad i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, \quad m = \overline{1, M}.$$

Отправление в промежуточных вершинах маршрута не должно происходить раньше прибытия в эти вершины. Поэтому с учетом ограничений на минимальное и максимальное время стоянки имеем

$$(11) \quad \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} (t_k^{\text{кон}} + t_{i,k}^{\text{ст мин}}) \leq \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} t_k^{\text{нач}} + \\ + \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} \right) \underline{T}, \quad i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, \quad j = \overline{1, J-1},$$

² Здесь и далее полагается, что сумма любых переменных по пустому множеству равна нулю.

где

$$(12) \quad \underline{T} = \max_{i \in \{1, \dots, I\}, k \in \{1, \dots, K\}} t_k^{\text{кон}} + t_{i,k}^{\text{ст. мин}},$$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} (t_k^{\text{кон}} + t_{i,k}^{\text{ст. макс}}) \geq \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} t_k^{\text{нач}}, \quad i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, \quad j = \overline{1, J-1}.$$

Ограничения (11) и (12) идентичны соответствующим ограничениям из [11].

Чтобы гарантировать допустимость стоянки груза по окончании субгоризонта $[0, \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}})$ (если таковая имеет место), введем ограничение

$$(13) \quad \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}: v_k^{\text{кон}} \neq v_i^{\text{приб}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} (t_k^{\text{кон}} + t_{i,k}^{\text{ст. макс}} - \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}}) + \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} \geq 0,$$

$$i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, \quad j = \overline{1, J}.$$

Для запрета движения груза после прибытия в пункт назначения введем ограничения

$$(14) \quad \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}: v_k^{\text{кон}} = v_i^{\text{приб}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} \leq 2 \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} \right), \quad i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, \quad j = \overline{1, J}.$$

Прокомментируем ограничения (14). Для этого рассмотрим груз с номером $\tilde{i} \in \mathcal{I}_{\bar{s}}$. Если этот груз по окончании некоторого этапа прибыл в вершину назначения, то левая часть (14) окажется равной единице, поэтому для совместности (14) необходимо, чтобы правая часть была равна нулю. А это означает ввиду ограничений (1) и (5), что последующий после прибытия этап будет не задействован, как и все оставшиеся этапы. Если же груз не прибыл в вершину назначения, то левая часть (14) будет равна нулю. В этом случае ограничение будет выполняться, так как на любом этапе можно задействовать не более одной транспортировки, а значит, правая часть будет равна либо нулю, либо двум.

Введем величину $\hat{T}_{i,j}^{\bar{p}}$ — количество времени, проводимого грузом с номером i в j -й (по порядку следования) промежуточной вершине своего маршрута в рамках субгоризонта планирования:

$$(15) \quad \hat{T}_{i,j}^{\bar{p}} = \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}} \delta_{i,j+1,k}^{\bar{p}} (t_k^{\text{нач}} - \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}}) + \sum_{k \in \mathcal{K}^{\bar{s}, \bar{p}}: v_k^{\text{кон}} \neq v_i^{\text{приб}}, t_k^{\text{кон}} < \bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}}} \delta_{i,j,k}^{\bar{p}} (\bar{\mathcal{T}}_{\bar{p}} - t_k^{\text{кон}}),$$

$$i \in \mathcal{I}_{\bar{s}}, \quad j = \overline{1, J}.$$

Для удобства формулирования математической модели также положим $\hat{T}_{i,J+1}^{\bar{p}} = 0$.

Введем новые переменные $\mathcal{F}_i^{\bar{p}}$, характеризующие ожидаемое количество времени, требуемого до прибытия в пункт назначения грузу с номером i ,

после окончания субгоризонта $[0, \bar{\mathcal{T}}_{\tilde{p}})$:

$$(16) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}_i^{\tilde{p}} = & \tau_{v_i^{\text{отпр}}, v_i^{\text{приб}}} + \sum_{j=1}^J \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \delta_{i,j,k} \left(\tau_{v_k^{\text{кон}}, v_i^{\text{приб}}} - \tau_{v_k^{\text{нач}}, v_i^{\text{приб}}} \right) + \\ & + \sum_{j=1}^J \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}: t_k^{\text{кон}} \geq \bar{\mathcal{T}}_{\tilde{p}}} \delta_{i,j,k} (t_k^{\text{кон}} - \bar{\mathcal{T}}_p), \quad i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}. \end{aligned}$$

Для того чтобы не превысить допустимое время в пути, введем ограничения

$$(17) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}_i^{\tilde{p}} + \sum_{j=1}^J \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}: t_k^{\text{кон}} < \bar{\mathcal{T}}_p, v_k^{\text{кон}} = v_i^{\text{приб}}} \delta_{i,j,k}^{\tilde{p}} (t_k^{\text{кон}} - \bar{\mathcal{T}}_p) + \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \delta_{i,1,k}^{\tilde{p}} (\bar{\mathcal{T}}_p - t_k^{\text{нач}}) \leq \\ \leq T_i + \left(1 - \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \delta_{i,1,k}^{\tilde{p}} \right) \eta_{v_i^{\text{отпр}}, v_i^{\text{приб}}}, \quad \forall i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}} : t_i^{\text{отпр}} < \bar{\mathcal{T}}_p. \end{aligned}$$

Ограничения (17) идентичны соответствующим ограничениям из [11].

Зададим переменные $\omega_i^{\tilde{p}}$, характеризующие, прибыл ли груз с номером i в пункт назначения на основе используемых транспортировок в субгоризонт планирования $[0, \bar{\mathcal{T}}_{\tilde{p}})$: 0 — прибыл, 1 — не прибыл:

$$(18) \quad \omega_i^{\tilde{p}} = 1 - \sum_{j=1}^J \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}: t_k^{\text{кон}} < \bar{\mathcal{T}}_p, v_k^{\text{кон}} = v_i^{\text{приб}}} \delta_{i,j,k}^{\tilde{p}}, \quad i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}.$$

Необходимость не превысить максимально допустимый вес при транспортировке с номером k приводит к ограничениям

$$(19) \quad \sum_{i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}} \sum_{j=1}^{J+1} \delta_{i,j,k}^{\tilde{p}} w_i \leq W_k - \sum_{\substack{\tilde{s}=1 \\ s=1}}^{\tilde{s}-1} \sum_{j=1}^{J+1} \hat{\delta}_{i,j,k} w_i, \quad k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}.$$

3.2. Критерий оптимальности

Потенциально система уравнений и неравенств (1)–(19) может иметь не единственное решение, поэтому требуется критерий выбора среди этих решений. Составим из всех $\delta_{i,j,k}^{\tilde{p}}$ вектор $\delta^{\tilde{s}, \tilde{p}}$, $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$, $j = \overline{1, J+1}$, $k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$. Также составим из всех $\mathcal{F}_i^{\tilde{p}}$ вектор $\mathcal{F}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$, а из $\omega_i^{\tilde{p}}$ — вектор $\omega^{\tilde{s}, \tilde{p}}$, $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$. Объединим все $\hat{T}_{i,j}^{\tilde{p}}$ в вектор $\hat{T}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$, $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$, $j = \overline{1, J+1}$.

Выберем критериальную функцию следующего вида:

$$\begin{aligned}
 & J_{\tilde{s}}^{\tilde{p}} \left(\delta^{\tilde{s}, \tilde{p}}, \mathcal{F}^{\tilde{s}, \tilde{p}}, \omega^{\tilde{s}, \tilde{p}}, \hat{T}^{\tilde{s}, \tilde{p}} \right) = \\
 & = c_1 \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_s} \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \delta_{i,j,k}^{\tilde{p}} (\min\{t_k^{\text{кон}}, \overline{T}_{\tilde{p}}\} - t_k^{\text{нач}})}_{\text{суммарное время в движении в рамках субгоризонта планирования } [0, \overline{T}_{\tilde{p}}]} + c_2 \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_s} \sum_{j=1}^{J+1} \hat{T}_{i,j}^{\tilde{p}}}_{\text{суммарное время стоянки в промежуточных вершинах}} + \\
 & + c_3 \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_s} \left(\sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \delta_{i,1,k}^{\tilde{p}} t_k^{\text{нач}} + \left(1 - \sum_{k=1}^K \delta_{i,1,k}^{\tilde{p}} \right) \overline{T}_{\tilde{p}} - t_i^{\text{отпр}} \right)}_{\text{суммарное время стоянки в вершинах отправления с момента готовности к отправлению до конца субгоризонта планирования } [0, \overline{T}_{\tilde{p}}]} + \\
 & + c_4 \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_s} \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \delta_{i,j,k}^{\tilde{p}} w_i C_k}_{\text{суммарная стоимость транспортировок}} + c_5 \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_s} \mathcal{F}_i^{\tilde{p}}}_{\text{суммарное ожидаемое время до доставки}} + c_6 \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{I}_s} \omega_i^{\tilde{p}}}_{\text{суммарное количество доставленных грузов в рамках субгоризонта планирования}},
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

где $c_1, \dots, c_6$ – неотрицательные константы, выбираемые лицом, принимающим решения. От выбора констант $c_1, \dots, c_6$ также зависит цель оптимизации. При $c_1 = c_2 = c_3 = c_5 = c_6 = 0$, $c_4 = 1$ получается задача минимизации стоимости перевозок, при $c_1 = c_2 = c_3 = c_5 = 1$, $c_4 = c_6 = 0$ – задача по минимизации суммы времени перевозок в рамках субгоризонта планирования и прогнозируемого времени за пределами этого субгоризонта. Понимая под r -й компонентой критерия сомножитель числа c_r в (20), $r = \overline{1, 6}$, заметим, что не все компоненты критерия являются однородными. Первая, вторая, третья и пятая измеряются в минутах, четвертая – в единицах стоимости, а шестая – в штуках. Если при оптимизации рассматриваются только однородные компоненты, то размерность коэффициентов $c_1, \dots, c_6$ неважна. При необходимости учета в одной задаче оптимизации разнородных компонент имеет смысл рассматривать задачу по минимизации общих затрат, т.е. величины c_1, c_2, c_3, c_5 будут иметь размерность условные единицы/мин, а c_6 будет иметь размерность условные единицы/шт.

Если выбрать $\tilde{p} = P$, то горизонт планирования совпадет с $[0, \overline{T}_{\tilde{p}})$. Если к тому же множество номеров грузов не расщеплять, т.е. $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\tilde{s}}$, а $\mathcal{K}^{\tilde{s}, P} = \bigcup_{p=1}^P \mathcal{K}_p$, то построенный критерий (20) и система ограничений (1)–(19) будут в точности повторять критерий и систему ограничений из [11]. Однако при таком расщеплении (а точнее его отсутствии) множества номеров грузов и $\tilde{p}$, которое не предполагает уменьшения множества транспортировок, используемых при поиске расписания, непосредственная оптимизация крите-

рия (20) с целью найти расписание на весь горизонт планирования целиком может быть очень долгой. Поэтому на основе полученных в работе результатов сформируем алгоритм поиска хотя и не оптимального, но более быстрого решения.

Наличие линейных по оптимизируемым переменным ограничений (2)–(19) и линейного критерия (20), векторов бинарных переменных $\delta^{\bar{s}, \bar{p}}$ и $\omega^{\bar{s}, \bar{p}}$, векторов вещественных переменных $\mathcal{F}^{\bar{s}, \bar{p}}$ и $\hat{T}^{\bar{s}, \bar{p}}$ делает задачу (20) при ограничениях (1)–(19) задачей смешанного целочисленного линейного программирования.

4. Алгоритм для нахождения расписания

При формировании алгоритма учтем возможность более быстрого его функционирования путем удаления транспортировок, которые вряд ли будут использованы. Так, не имеет смысла учитывать при составлении расписания на данный субгоризонт планирования транспортировки из вершин, до которых ни один из грузов в этот субгоризонт не успеет добраться. Вообще говоря, для того чтобы определить, сумеет ли тот или иной груз за заданное время добраться до конкретной вершины, необходимо решить соответствующую задачу оптимизации. Однако решение такого рода задач требует времени. Поэтому для установления того факта, что грузы не доберутся до некоторой вершины, будем использовать величины τ_{m_1, m_2} , $m_1 = \overline{1, M}$, $m_2 = \overline{1, M}$. Безусловно, не всегда вывод о возможности прибыть в некоторую вершину на основе величин τ_{m_1, m_2} является верным, $m_1 = \overline{1, M}$, $m_2 = \overline{1, M}$. Это связано с тем, что эти величины строятся на основе прошлой истории перевозок, а не на транспортировках, доступных сейчас. Тем не менее это существенно позволяет сократить время счета, хотя и с ухудшением значения критериальной функции/невозможностью принять к перевозке некоторые грузы. Величины τ_{m_1, m_2} будем сравнивать с отношением длины соответствующего промежутка разбиения к параметру ускорения, $m_1 = \overline{1, M}$, $m_2 = \overline{1, M}$. Параметр ускорения, который является безразмерным, будем обозначать через A . Чем меньше A , тем меньше транспортировок будет вычеркнуто, но тем, скорее всего, больше грузов будет принято к перевозке. И, напротив, чем больше A , тем быстрее получится решение, но тем менее качественное (в терминах количества принятых к отправке грузов) оно будет. При $A = 0$ никаких удалений делать не будем. При решении задач оптимизации наиболее рациональным представляется полагать A равным единице. В таком случае ожидаемое время до прибытия в некоторую вершину будет сравниваться с длительностью соответствующего промежутка разбиения, т.е. промежутка времени, в котором расписание еще не зафиксировано и ищется.

1. Задаются числа $c_1, \dots, c_6 \in \mathbb{R}_+$. Фиксируются числа $P, J \in \mathbb{N}$. Задается число $A \in \mathbb{R}_+$.

2. Множество номеров грузов расщепляется на $S \in \mathbb{N}$ непересекающихся подмножеств $\mathcal{I}_s$, т.е. $\{1, \dots, I\} = \bigcup_{s=1}^S \mathcal{I}_s$, причем $\forall s_1, s_2 \in \{1, \dots, S\} : s_1 \neq s_2$ $\mathcal{I}_{s_1} \cap \mathcal{I}_{s_2} = \emptyset$.

3. Формируется множество промежутков $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_P$ так, что $[0, T_{\max}) = \bigcup_{p=1}^P \mathcal{T}_p$, где $\forall p_1, p_2 \in \{1, \dots, P\} : p_1 \neq p_2 \quad \mathcal{T}_{p_1} \cap \mathcal{T}_{p_2} = \emptyset$, причем $\mathcal{I}_1 = 0$, $\overline{\mathcal{T}}_P = T_{\max}$, $\mathcal{I}_{p+1} = \overline{\mathcal{T}}_p$, $p = \overline{1, P-1}$.

4. Формируются множества $\mathcal{K}_p = \{k \in \mathbb{N} : k \leq K, t_k^{\text{нач}} \in \mathcal{T}_p\}$, $p = \overline{1, P}$.

5. Инициализируется параметр $\tilde{s} = 1$.

6. Инициализируется параметр $\tilde{p} = 1$.

7. Если $\tilde{p}$ равно единице, то формируется множество $\mathcal{V}^{\tilde{s}, \tilde{p}} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}} v_i^{\text{отпр}}$. Если $\tilde{p}$ больше единицы, то

$$\mathcal{V}^{\tilde{s}, \tilde{p}} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}} \begin{cases} v_i^{\text{отпр}}, & \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}-1}} \bar{\delta}_{i,j,k}^{\tilde{p}-1} = 0, \\ \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}-1}} \bar{\delta}_{i,j_i,k}^{\tilde{p}-1} v_k^{\text{кон}}, & \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}-1}} \bar{\delta}_{i,j,k}^{\tilde{p}-1} > 0, \end{cases}$$

где

$$j_i = \sum_{j=1}^{J+1} \sum_{k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}-1}} \bar{\delta}_{i,j,k}^{\tilde{p}-1}, \quad i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}.$$

Множество $\mathcal{V}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$ состоит из индексов вершин отправления для тех грузов, что еще не в пути, и индексов последних (на текущий момент) вершин движения для грузов, начавших свое движение из соответствующих вершин отправления.

8. Если $A = 0$, то $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}} = \mathcal{K}_{\tilde{p}}$. Если $A > 0$, то формируется множество $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}} = \left\{ k \in \mathcal{K}_{\tilde{p}} : \min_{m \in \mathcal{V}^{\tilde{s}, \tilde{p}}} \tau_{m, v_k^{\text{нач}}} \leq (\overline{\mathcal{T}}_{\tilde{p}} - \mathcal{I}_{\tilde{p}})/A, \min_{i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}} t_i^{\text{отпр}} \leq t_k^{\text{нач}} \right\}$.

9. Если $\tilde{p} > 1$ формируется множество $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}} = \bigcup_{p=1}^{\tilde{p}-1} \mathcal{K}^{\tilde{s}, p} \cup \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$. Если $\tilde{p} = 1$, то $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}} = \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$.

10. Если множество $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$ пусто и $\tilde{p} < P$, то величина $\tilde{p}$ увеличивается на единицу, происходит переход к шагу 7.

Если множество $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$ пусто и $\tilde{p} = P$, то $\hat{\delta}_{i,j,k} = 0$, $\mathcal{D}_i = 0$, $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$, $j = \overline{1, J+1}$, $k = \overline{1, K}$. Если $\tilde{s} = S$, то алгоритм завершен. Если $\tilde{s} < S$, то величина $\tilde{s}$ увеличивается на единицу, происходит переход к шагу 6.

Если множество $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$ непусто, то происходит переход к шагу 11.

11. Решается задача

$$J_{\tilde{s}}^{\tilde{p}}(\delta^{\tilde{s}, \tilde{p}}, \mathcal{F}^{\tilde{s}, \tilde{p}}, \omega^{\tilde{s}, \tilde{p}}, \hat{T}^{\tilde{s}, \tilde{p}}) \rightarrow \min_{\delta^{\tilde{s}, \tilde{p}}, \mathcal{F}^{\tilde{s}, \tilde{p}}, \omega^{\tilde{s}, \tilde{p}}, \hat{T}^{\tilde{s}, \tilde{p}}}$$

при ограничениях (1)–(19), а также при $\tilde{p} > 1$ ограничениях

$$(21) \quad \delta_{i,j,k}^{\tilde{p}} = \bar{\delta}_{i,j,k}^{\tilde{p}-1}, \quad i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}, \quad j = \overline{1, J+1}, \quad k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}-1}.$$

Если решение этой задачи не существует, то $\hat{\delta}_{i,j,k} = 0$, $\mathcal{D}_i = 0$, $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$, $j = \overline{1, J+1}$, $k = \overline{1, K}$. Если $\tilde{s} = S$, то алгоритм завершен. Если $\tilde{s} < S$, то величина $\tilde{s}$ увеличивается на единицу, происходит переход к шагу 6.

Если решение задачи найдено и $\tilde{p} < P$, то задаются величины $\bar{\delta}_{i,j,k}^{\tilde{p}}$, равные единице, если на промежуток времени $[0, \overline{\mathcal{T}_{\tilde{p}}})$ для груза с номером i на этапе с номером j зарезервирована транспортировка с номером k , и равные 0 в противном случае, $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$, $j = \overline{1, J+1}$, $k \in \mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$. Величина $\tilde{p}$ увеличивается на единицу. Происходит переход к шагу 7.

Если решение задачи найдено и $\tilde{p} = P$, то $\mathcal{D}_i = 1$, задаются величины $\hat{\delta}_{i,j,k}$, равные единице, если для груза с номером i на этапе с номером j используется транспортировка с номером k , и равные 0 в противном случае, $i \in \mathcal{I}_{\tilde{s}}$, $j = \overline{1, J+1}$, $k = \overline{1, K}$. Если $\tilde{s} = S$, то алгоритм завершен. Если $\tilde{s} < S$, то величина $\tilde{s}$ увеличивается на единицу, происходит переход к шагу 6.

Отметим, что ограничение (21) позволяет зафиксировать расписание на промежуток $[0, \overline{\mathcal{T}_1})$ при поиске расписания на промежуток $[0, \overline{\mathcal{T}_2})$, расписание на промежуток $[0, \overline{\mathcal{T}_2})$ при поиске расписания на промежуток $[0, \overline{\mathcal{T}_3})$ и т.д.

Алгоритмом *по наименьшему/наибольшему времени* будем называть такой алгоритм, при котором на втором шаге дробление происходит по возрастанию/убыванию времени готовности грузов к отправлению. А именно множество $\mathcal{I}_1$ будет состоять из номера груза с самым ранним/поздним временем готовности к отправлению, $\mathcal{I}_2$ — со вторым/предпоследним и т.д.

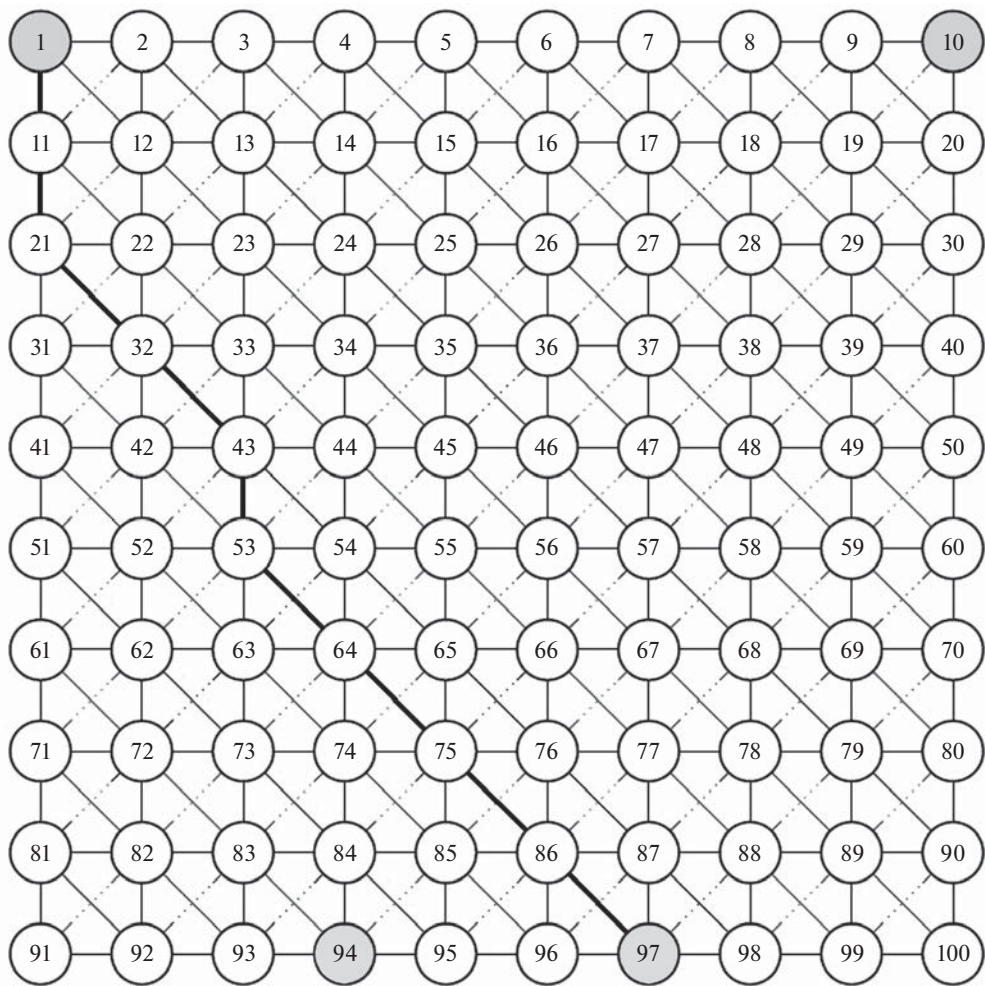
5. Пример

Рассмотрим модельный пример.

Пусть мультиграф транспортной сети имеет вид, представленный на рисунке. Для большей наглядности второе ребро между смежными вершинами опущено. На графе представлены ребра с номером 1. Некоторые ребра обозначены пунктирной линией с целью показать разноуровневое пересечение ребер в транспортной сети.

Положим $T_{\text{макс}} = 1440$ мин. Выбран некоторый момент отсчета. Начиная с момента отсчета: каждые 60 мин в вершине с индексом 1 появляется по 5 грузов одинакового веса в 1 единицу, эти грузы требуется перевезти в вершину с индексом 97; каждые 60 мин в вершине с индексом 10 появляется по 5 грузов одинакового веса в 1 единицу, эти грузы требуется перевезти в вершину с индексом 94.

Транспортировки между вершинами с разностью индексов, равной 1 или 10 по модулю, осуществляются каждые 30 мин, цена такой транспортировки — 10 условных единиц, максимальный перевозимый вес — 2 условные единицы, длительность транспортировки — один час. Транспортировки между вершинами с разностью индексов, равной 9 или 11 по модулю, осуществляются каждые 30 мин, цена такой транспортировки — 20 условных единиц, максимальный перевозимый вес — 2 условные единицы, длительность транспортировки — 85 мин. Таким образом, $I = 240$, $K = 32\,832$, $M = 100$.



Мультиграф G транспортной сети (оранжевым выделены вершины отправления и назначения, синим выделен наиболее часто встречающийся путь у доставленных грузов на одном из полученных решений).

Предположим, что $d_i = 180$, $T_i = 960$, $t_{i,k}^{\text{ст мин}} = 0$, $t_{i,k}^{\text{ст макс}} = 120$, $i = \overline{1, I}$, $k = \overline{1, K}$.

Положим $\eta_{m_1, m_2} = 0$, $m_1, m_2 = \overline{1, 100}$. Пусть также

$$\tau_{m_1+1, m_2+1} = \begin{cases} 90, & |m_1 \% 10 - m_2 \% 10| = 1 \text{ и } |[m_1/10] - [m_2/10]| = 1 \\ 60|m_1 \% 10 - m_2 \% 10| + 60|[m_1/10] - [m_2/10]|, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $x \% y$ – остаток от деления числа x на число y , $[x]$ – целая часть числа x , $m_1, m_2 = \overline{0, 99}$. Такой выбор величин τ_{m_1, m_2} обеспечивает то, что ожидаемое время перевозки грузов от одной смежной вершины до другой, если они соединены по диагонали, составляет 90 мин, во всех остальных случаях ожидаемая длительность перевозок пропорциональна минимальному количеству

Таблица 1. Показатели приближенного решения, найденного алгоритмом по наименьшему времени, в формате суммарное время перевозок/количество принятых к перевозке грузов/количество доставленных грузов/цены перевозок/времени счета в минутах для различных P и J

$J \backslash P$	9	12	15
6	147 960/192/68/21 550/75	183 855 /240/122/28 840/91	183 600 /240/122/28 840/99
12	141 675/182/60/19 720/45	186 435 /240/117/28 520/52	186 435 /240/117/28 520/58
24	170 230/220/94/25 200/54	195 590 /240/96/28 160/59	195 590 /240/96/28 160/64

Таблица 2. Показатели приближенного решения, найденного алгоритмом по наибольшему времени, в формате суммарное время перевозок/количество принятых к перевозке грузов/количество доставленных грузов/цены перевозок/времени счета в минутах для различных P и J

$J \backslash P$	9	12	15
6	148 475/192/64/21 530/73	183 580 /240/122/29 040/88	183 580 /240/122/29 040/107
12	124 245/156/26/15 560/50	187 870/236/106/28 060/54	191 685 /240/110/28 770/62
24	171 470/222/96/25 760/55	171 470/222/96/25 760/57	171 470/222/96/25 760/62

ребер при пути от одной вершины до другой без использования диагональных ребер.

Рассмотрим случай $c_1 = c_2 = c_3 = c_5 = 1$, $c_4 = c_6 = 0$. Положим $A = 1$. Проанализируем, как зависят от P и J результаты применения предложенных алгоритмов. Длительность промежутков $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_P$ будем выбирать одинаковой. Предварительно отметим, что при имеющихся транспортировках движение из вершины с индексом 1 в вершину с индексом 12 стоит столько же, сколько движение через промежуточную вершину с индексом 2 (или индексом 11), при этом движение напрямую занимает меньшее время. Однако наиболее быстрое движение из вершин отправления — по диагонали — вследствие заявленного максимального веса и периодичности транспортировок доступно не для каждого груза, поэтому исследуемая оптимизационная задача, вообще говоря, нетривиальна.

Жирным в табл. 1 и 2 выделены те случаи, когда все грузы приняты к доставке. Как следует из табл. 1 и 2, наилучший результат был достигнут для алгоритма по наибольшему времени при $P = 6$, $J = 12$. Это решение будем называть *базовым*. Для базового решения наиболее часто использованная цепочка индексов вершин, пересекаемых грузами при движении, это

$$1 \rightarrow 11 \rightarrow 21 \rightarrow 32 \rightarrow 43 \rightarrow 53 \rightarrow 64 \rightarrow 75 \rightarrow 86 \rightarrow 97.$$

Такая цепочка встретила для 8 грузов. Среди доставленных в рамках горизонта планирования грузов для 74 грузов было задействовано 9 транспортировок, для 41 груза — 10, для 7 грузов — 11. Из доставленных грузов ровно половина отправлялась из вершины с индексом 1.

Таблица 3. Дальнейшее улучшение базового решения в алгоритме по наибольшему времени

Параметры алгоритма	Суммарное время перевозок	Количество принятых к перевозке грузов	Количество доставленных грузов	Цена перевозок	Время счета, мин
$A = 1, P = 4,$ $J = 12$	182 455	240	122	28 830	222
$A = 0,5, P = 6,$ $J = 12$	183 165	240	124	29 000	187

Еще одним результатом проведенного исследования является тот факт, что для случаев, когда все грузы приняты к перевозке, при фиксированном J с убыванием P ожидаемо растет время счета, так как решаются задачи математического программирования большей размерности. Однако также наблюдается уменьшение критерия. Рост J при фиксированном P приводит к тому, что большее количество грузов принимается к доставке. Однако увеличение J с 12 до 15 в данной задаче не всегда позволяет уменьшить значение критерия. Этот факт может быть вызван тем, что T_i относительно невелико, $i = \overline{1, I}$. Поэтому маршруты с большим числом транспортировок и временем в пути от момента готовности использованы быть не могут. Кроме того, цель оптимизации — в минимизации суммарного времени перевозок, а движение по диагонали, как отмечалось ранее, быстрее.

Заметим, что уже при $J = 12$ с учетом ограничения (4) в исследуемой задаче имеется $I \cdot J \cdot K = 94\,556\,160$ бинарных переменных, подлежащих оптимизации. При этом время поиска решения составляет около часа, что можно признать приемлемой скоростью. Для ускорения поиска решения можно, например, вначале зафиксировать некоторый набор вершин, через которые должен проследовать тот или иной груз. Если для этого набора будут найдены соответствующие транспортировки, то можно не искать расписание для этого набора грузов на всем множестве транспортировок. Также можно уменьшить количество элементов во множестве $\mathcal{K}^{\tilde{s}, \tilde{p}}$, формируемого на восьмом шаге предложенного алгоритма, $\tilde{s} = \overline{1, \tilde{S}}$, $\tilde{p} = \overline{1, \tilde{P}}$. Например, можно исключать транспортировки с вершинами начала или конца движения, в которых уже побывали все грузы из множества $\mathcal{I}_{\tilde{s}}$, $\tilde{s} = \overline{1, \tilde{S}}$. Однако любые такого рода модификации, приводя к увеличению скорости получения решения, могут ухудшить решение в терминах качества.

Исследуем вопрос о качестве получаемого решения, если уменьшить P или A относительно уже использованных.

Как следует из табл. 3, и уменьшение A , и уменьшение P позволили найти решение, несколько лучшее (порядка 0,5 %) по значению критерия, чем базовое решение. Однако время поиска улучшенного решения увеличилось в несколько раз. Увеличение времени счета связано с увеличением размерности решаемых при функционировании алгоритма задач.

Отметим, что потенциально предложенный алгоритм может использоваться не только в целях стратегического, но и оперативного планирования. Оперативное планирование возможно в ситуациях с меньшим количеством транспортировок/меньшим числом вершин мультиграфа, чем рассмотренное в настоящем примере [11]. Вопрос о максимальной размерности решаемой задачи, при которой возможно оперативное планирование при помощи разработанного алгоритма, представляет отдельный научный интерес. Необходимо сказать, что можно ускорить работу предложенного алгоритма новой/другой версией решателя задач смешанного целочисленного линейного программирования.

Все численные эксперименты проводились при помощи математического пакета ILOG CPLEX 12.5.1 на персональном компьютере (Intel Core i5 4690, 3.5 GHz, 8 GB DDR3 RAM).

6. Заключение

В работе была исследована задача формирования расписания движения грузов по транспортной сети, представляемой неориентированным мультиграфом. Транспортировки между вершинами графа осуществлялись в заранее заданные промежутки времени. Для решения этой задачи была предложена математическая модель движения по мультиграфу, построенная с использованием линейных ограничений и неравенств, содержащих целочисленные и непрерывные переменные. Сформулирован критерий оптимизации. Ввиду возможной высокой размерности получаемой задачи был предложен алгоритм поиска приближенного решения. Алгоритм основан на декомпозиции множества грузов и горизонта планирования. Дополнительно в алгоритм введен параметр, отвечающий за ускорение его работы. Этот параметр регулирует количество транспортировок, на которых строится расписание на том или ином шаге алгоритма. Проведено исследование качества декомпозиции на содержательном примере с миллионами целочисленных переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Archetti C., Speranza G., Vigo D.* Vehicle routing problems with profits / Toth P., Vigo D. (eds.). *Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications* (Second ed.). 2014. P. 273–297.
2. *Cacchiani V., Caprara A., Toth P.* A column generation approach to train timetabling on a corridor // *4OR*. 2008. V. 6. No. 2. P. 125–142.
3. *Gao Yu., Kroon L., et. al.* Three-stage optimization method for the problem of scheduling additional trains on a high-speed rail corridor // *Omega*. 2018. V. 80. P. 175–191.
4. *Mu S., Dessouky M.* Scheduling freight trains traveling on complex networks // *Transport. Res. Part B: Methodological*. 2011. V. 45. No. 7. P. 1103–1123.
5. *Forsgren M., Aronsson M., Gestrelus S.* Maintaining tracks and traffic flow at the same time // *J. Rail Transport Planning & Management*. 2013. V. 3. No. 3. P. 111–123.

6. *Meng L., Zhou X.* Simultaneous train rerouting and rescheduling on an N-track network: A model reformulation with network-based cumulative flow variables // *Transportation Research Part B: Methodological*. 2014. V. 67. P. 208–234.
7. *Cacchiani V., Caprara A., Toth P.* Scheduling extra freight trains on railway networks // *Transport. Res. Part B: Methodological*. 2010. V. 44. No. 2. P. 215–231.
8. *Lazarev A.A., Musatova E.G.* The problem of trains formation and scheduling: Integer statements // *Autom. Remote Control*. 2013. V. 74. No. 12. P. 2064–2068.
9. *Гайнанов Д.Н., Игнатов А.Н. и др.* О задаче назначения “технологического окна” на участках железнодорожной сети // *АиТ*. 2020. № 6. С. 3–16.
Gainanov D.N., Ignatov A.N., et al. On track procession assignment problem at the railway network sections // *Autom. Remote Control*. 2020. V. 81. No. 6. P. 967–977.
10. *Ignatov A.N.* On the scheduling problem of cargo transportation on a railway network segment and algorithms for its solution // *Bul. of the South Ural State Univ. Ser. Mat. Model. Progr.* 2021. V. 14. No. 3. P. 61–76.
11. *Игнатов А.Н.* Об общей постановке задачи формирования расписания грузоперевозок и способах ее решения // *АиТ*. 2023. № 4. С. 145–165.
Ignatov A.N. On the general problem statement of cargo carriages scheduling and ways to solve it // *Autom. Remote Control*. 2023. V. 84. No. 4. P. 496–510.
12. *Босов А.В., Игнатов А.Н., Наумов А.В.* Алгоритмы приближенного решения задачи назначения «технологического окна» на участках железнодорожной сети // *Информатика и ее применения*. 2021. Т. 15. № 4. С. 3–11.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 06.04.2023

После доработки 19.06.2023

Принята к публикации 20.07.2023

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2023 г. Е.Г. МУСАТОВА, канд. физ.-мат. наук (nekolyar@mail.ru),
А.А. ЛАЗАРЕВ, д-р физ.-мат. наук (jobmath@mail.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ СУММАРНОЙ ВЗВЕШЕННОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ КУРСОВ ДЛЯ ОДНОГО ПРИБОРА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПРЕДШЕСТВОВАНИЯ

Рассматривается одноприборная задача теории расписаний с заданным частичным порядком выполнения работ. Имеются подмножества работ, именуемые курсами. Необходимо построить расписание работ, при котором суммарное взвешенное время обработки всех курсов минимально. Рассматривается случай, когда начальная и конечная работы каждого курса определены однозначно. Доказана NP-трудность рассматриваемой задачи. Предложен алгоритм решения задачи, трудоемкость которого полиномиально зависит от общего числа работ, но экспоненциально — от количества курсов, что позволяет эффективно его использовать при фиксированном небольшом количестве курсов и произвольном числе работ.

Ключевые слова: теория расписаний, задача одного прибора, NP-трудные задачи, минимизация простоя ресурсов.

DOI: 10.31857/S000523102309009X, **EDN:** JUNOUZ

1. Введение

Имеются множество работ, которые необходимо обслужить на одном приборе, и граф отношения предшествования между работами, задающий частичный порядок выполнения работ. Некоторые из работ объединены во множества, которые будем называть курсами. Необходимо построить расписание, при котором суммарное взвешенное время обработки всех курсов минимально. Под временем обработки курса понимается промежуток между началом обработки первой работы из курса и моментом окончания обработки последней работы из курса. В статье рассмотрен случай, когда начальная и конечная работы каждого курса определены однозначно.

Задачи построения расписаний множества работ на одном приборе все-сторонне исследованы в теории расписаний [1, 2]. При этом одноприборная задача минимизации взвешенной суммарной продолжительности курсов ранее не рассматривалась.

Необходимость минимизировать суммарную продолжительность курсов возникает в разных областях производства, образования и сферы услуг. В [3] рассматривается задача управления проектом с ограничениями на ресурсы с данной целевой функцией применительно к построению расписания подготовки космонавтов к работе на Международной космической станции. Необходимо минимизировать растянутость каждого курса (или бортового комплекса в терминологии Центра подготовки космонавтов им. Ю.А. Гагарина), поскольку, если с начала изучения курса до экзамена проходит слишком много времени, навыки космонавтов считаются утраченными и приходится добавлять дополнительные часы в подготовительный процесс, что приводит к большим временным и финансовым потерям. В этой публикации предлагается эвристический алгоритм построения расписания для поставленной задачи.

Также можно интерпретировать задачу как задачу минимизации суммарного простоя ресурсов. Предположим, что работы каждого курса требуют свой специфический ресурс (например, обработка на дополнительном оборудовании). Данный ресурс берется во временную аренду, которая начинается выплачиваться одновременно с выполнением первой работы из курса и заканчивается завершением последней работы из данного курса. Тогда длительность курса может ассоциироваться с суммарной выплатой за ресурс, а целевая функция характеризует общие выплаты за все арендуемые ресурсы. Помимо выплат за дополнительные ресурсы, данная целевая функция может рассматриваться как плата за хранение и аренду помещений.

Впервые вопрос длительности выполнения курсов был рассмотрен в [4]. Здесь наряду с обычным понятием «работа» вводится понятие «работа-гамак» (hammock activity). Продолжительность работы-гамака определяется началом и окончанием некоторых фиксированных работ. В данной статье рассматривается управление проектом без ограничения на ресурсы и приводятся методы подсчета продолжительности работы-гамака. Отметим, что в случае, когда первая и последняя работы курса определены однозначно, понятия работы-гамака и курса совпадают.

Свое развитие концепция работы-гамака получила в [5], где рассмотрена задача минимизации суммарной стоимости нескольких работ-гамаков в проекте как при наличии ресурсных ограничений (Resource-Constrained Hammock Cost Problem, RCHCP), так и без них. Под стоимостью работы-гамака понимается ее взвешенная продолжительность. При отсутствии ресурсных ограничений задача сводится к задаче линейного программирования. В случае наличия ресурсных ограничений предлагается формулировка задачи в виде задачи смешанного целочисленного линейного программирования. В диссертации [6] продолжено исследование задачи RCHCP и предложена метаэвристика для решения данной задачи, а также приведен обширный обзор публикаций по задачам типа RCHCP.

В некоторых исследованиях используются отличные от работы-гамака термины для описания подобной целевой функции. Так, в теории расписаний

с повторяющимися работами (см., например, [7]) подобные задачи известны как задачи управления проектом с ограничениями на непрерывность работы (work continuity constraints). Например, в [8] рассматривается следующая задача управления проектом с повторяющимися работами. Имеется некоторый базовый граф отношения предшествования работ, который дублируется k раз. Некоторые из повторяющихся работ требуют дополнительного ресурса (оборудования, бригады рабочих и т.д.), и необходимо выполнить проект к заданному директивному сроку с минимизацией длительности выполнения этих повторяющихся работ. В качестве практических приложений приводятся примеры строительства многоэтажных зданий, где на каждом этаже выполняются идентичные работы, или строительство мостов, дорог и т.д. В [9] используются термины минимизации простоя бригад (crew idle time) и минимизации простоя ресурсов (resource idle time), а также описывается практическое использование разработанных для такой задачи алгоритмов при строительстве туннеля Вестерсхелдетюннел в Нидерландах. В качестве ресурсов, суммарную длительность использования которых нужно было минимизировать, были выбраны бригады рабочих и морозильные машины.

Таким образом, если говорить о минимизации суммарной длительности курсов, основное внимание в литературе уделено задачам управления проектом с ресурсными ограничениями или без них. При этом в первом случае приходится иметь дело с NP-трудной задачей [5] и упор в таких исследованиях делается на разработку эвристических алгоритмов, а во втором случае строятся полиномиальные алгоритмы.

В данной статье рассматривается одноприборная задача, которая может быть проинтерпретирована как задача управления проектом с одним ресурсом, доступным в количестве одной единицы в каждый момент времени при условии, что на выполнение каждой работы также требуется одна единица ресурса. Показано, что данная задача является NP-трудной. Предлагается алгоритм, позволяющий найти точное решение в случае большого количества работ, но небольшого фиксированного количества курсов. В разделе 2 приводится формулировка задачи. Раздел 3 содержит доказательство NP-трудности рассматриваемой задачи, а также некоторые ее свойства. Раздел 4 посвящен решению вспомогательной задачи, а в разделе 5 описан алгоритм решения исходной задачи на базе решения вспомогательной задачи и приведены результаты численного эксперимента.

2. Постановка задачи

Имеется множество работ $I = \{1, \dots, n\}$, которые должны быть обслужены на одном приборе. Для каждой работы $i \in I$ известна ее продолжительность $p_i > 0$. Все работы доступны в нулевой момент времени. Прерывания при обслуживании работ запрещены.

Задан ориентированный ациклический граф отношения предшествования работ $G(I, E)$, где I — множество вершин, а E — множество дуг. Будем гово-

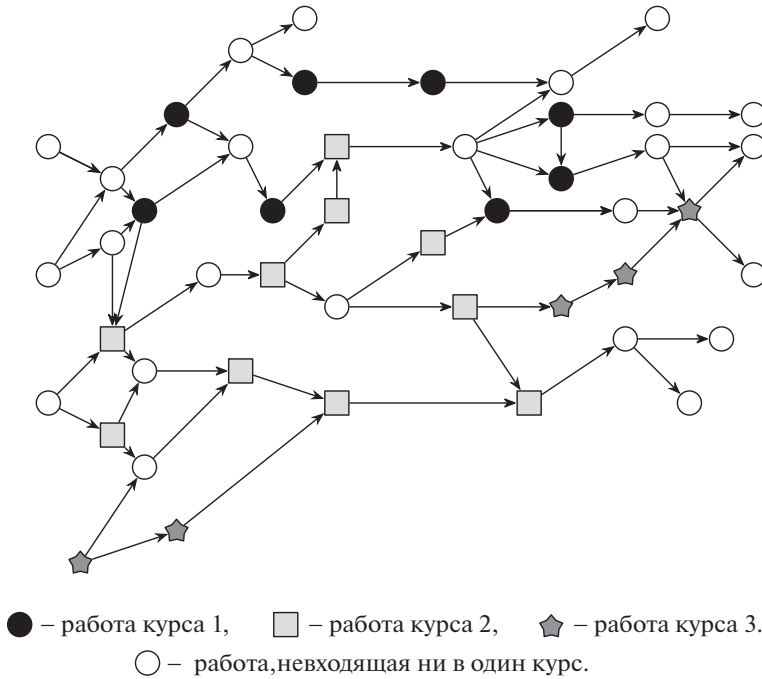


Рис. 1. Граф отношения предшествования работ и курсы.

речь, что для пары работ $i, j \in I$ работа i предшествует работе j , обозначая $i \rightarrow j$, если существует направленный путь из вершины i в вершину j в графе $G(I, E)$. Множество всех работ, предшествующих работе i , будем обозначать через $A(i)$, а множество работ, которым предшествует работа i , обозначим через $D(i)$. Каждая работа i должна быть выполнена после всех работ из множества $A(i)$ и до всех работ из $D(i)$.

Кроме того, заданы множества $I_k \subset I$, $|I_k| > 1$, $k \in \{1, \dots, K\}$, именуемые *курсами*. На рис. 1 приведен пример графа отношения предшествования для задачи с тремя курсами. Каждый курс I_k , $k \in \{1, \dots, K\}$, имеет свой вес $w_k > 0$. В зависимости от интерпретации вес — это цена арендованного ресурса в единицу времени или важность (значимость) курса. Для каждой работы $i \in I$ расписание π определяет ее порядковый номер обработки на приборе, который будем обозначать через $\pi(i)$, момент начала обработки $S_i(\pi)$ и момент завершения обработки $C_i(\pi) = S_i(\pi) + p_i$. Допустимым будем называть расписание, не противоречащее отношениям предшествования работ, в котором прибор в каждый момент времени обслуживает не больше одной работы. Задача минимизации суммарного взвешенного времени обработки всех курсов подразумевает минимизацию следующей целевой функции:

$$(1) \quad H(\pi) = \sum_{k=1}^K w_k \left(\max_{i \in I_k} C_i(\pi) - \min_{i \in I_k} S_i(\pi) \right).$$

В статье рассматривается случай, когда первая и последняя работы каждого курса определены однозначно, т.е. справедливо следующее

Предположение 1. Для каждого курса I_k , $k \in \{1, \dots, K\}$, существуют работы i_k^a и i_k^d , такие что для любых $j \in I_k \setminus \{i_k^a\}$ выполнено $i_k^a \in A(j)$ и для любых $j \in I_k \setminus \{i_k^d\}$ выполнено $i_k^d \in D(j)$.

Такое условие часто выполняется на практике. Например, в учебном процессе первое занятие, как правило, вводное, а последнее подразумевает общую проверку знаний, в то время как последовательность других занятий в курсе может меняться. В этом случае целевая функция может быть записана как

$$(2) \quad H(\pi) = \sum_{k=1}^K w_k (C_{i_k^d}(\pi) - S_{i_k^a}(\pi)) = \sum_{k=1}^K w_k (C_{i_k^d}(\pi) - C_{i_k^a}(\pi) + p_{i_k^a}).$$

Будем называть i_k^a и i_k^d *крайними* работами (вершинами) курса k , $k \in \{1, \dots, K\}$. Множество всех крайних работ курсов обозначим через I_{ad} , а их количество — через e . Поскольку некоторые работы из I_{ad} могут быть одновременно крайними в нескольких курсах, $e \leq 2K$.

Минимизация функции (2) в точности совпадает с минимизацией взвешенной суммарной продолжительности работ-гамаков, описанных во введении. С точки зрения принятой в теории расписаний системы обозначений [10] данная задача может быть классифицирована как $1|prec|H$, где 1 означает один прибор, $prec$ — наличие ограничений предшествования, а H — целевую функцию (2).

3. Свойства задачи

Замечание 1. Поскольку все работы в задаче $1|prec|H$ доступны одновременно и простои в работе не улучшают значение целевой функции, можно рассматривать только расписания без перерывов между работами, с началом выполнения первой работы в нулевой момент времени. Действительно, если существует оптимальное расписание задачи π_1 , в котором имеются простои прибора или первая работа начинается не в нулевой момент времени, то расписание π_2 , в котором все работы выполняются в том же порядке, что и в π_1 , но начиная с нулевого момента времени и без перерывов между работами, также является оптимальным.

Покажем, что даже при одинаковой продолжительности всех работ рассматриваемая задача NP-трудна.

Теорема 1. Задача $1|prec, p_i = 1|H$ является NP-трудной в сильном смысле.

Доказательство. Рассмотрим классическую одноприборную задачу минимизации взвешенной суммы моментов окончания всех работ $1|prec, p_i = 1|\sum w_i C_i$. Задача формулируется следующим образом. Даны один прибор и множество $I' = \{1, \dots, n'\}$ работ, каждая i -я работа имеет вес w'_i и продолжительность обслуживания $p'_i = 1$, $i \in \{1, \dots, n'\}$. Пусть также задан ориен-

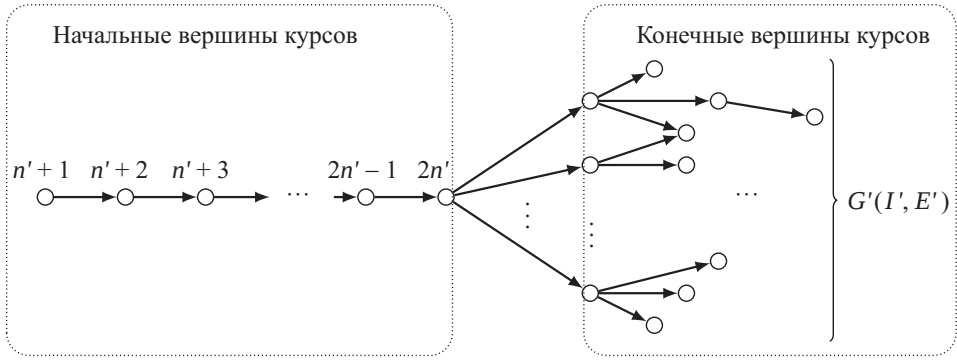


Рис. 2. Структура графа $G(I, E)$ из доказательства теоремы 1.

тированный граф отношения предшествования работ $G'(I', E')$. Необходимо найти расписание π' , минимизирующее целевую функцию $\sum_{i=1}^{n'} w'_i C'_i(\pi')$, где $C'_i(\pi')$ — момент окончания обслуживания i -й работы при расписании π' .

Данная задача является NP-трудной в сильном смысле [11]. Сведем ее к следующей задаче $1|pres, p_i = 1|H$. Дано множество работ $I = \{1, \dots, n\}$, $n = 2n'$. Каждая работа i имеет продолжительность $p_i = 1$. Граф $G(I, E)$ имеет следующую структуру. Имеется $|E'|$ дуг, заданных следующим правилом: если в графе $G'(I', E')$ есть дуга (j, k) , то в графе $G(I, E)$ также есть дуга (j, k) . Кроме того, имеется $n' - 1$ дуг вида $(i, i+1)$ для $i \in \{n'+1, \dots, 2n'-1\}$ и $|L|$ дуг вида $(2n', l)$, где L — множество корневых вершин (источников) в графе G' , $l \in L$. Структура графа $G(I, E)$ отражена на рис. 2.

Зададим курсы следующим образом: работы $n' + 1$ и 1 относятся к первому курсу, имеющему вес w'_1 , работы $n' + 2$ и 2 относятся ко второму курсу, имеющему вес $w'_2, \dots$, работы $2n'$ и n' относятся к n' -му курсу, имеющему вес $w'_{n'}$, т.е. каждый курс состоит из двух работ, первая из которых лежит во множестве $\{n' + 1, \dots, 2n'\}$, а конечная — во множестве I' . Пусть π — произвольное оптимальное расписание данной задачи. Значение целевой функции равно

$$\begin{aligned}
 (3) \quad H(\pi) &= \sum_{i=1}^{n'} w'_i (C_i(\pi) - C_{i+n'}(\pi) + 1) = \\
 &= \sum_{i=1}^{n'} w'_i C_i(\pi) - \sum_{i=1}^{n'} w'_i C_{i+n'}(\pi) + \sum_{i=1}^{n'} w'_i.
 \end{aligned}$$

В силу структуры графа отношения предшествования первой будет выполнена работа $n' + 1$. Тогда с учетом замечания 1 имеем $C_{n'+1}(\pi) = 1$. Поскольку в графе G имеются дуги $(i, i+1)$ для $i \in \{n' + 1, \dots, 2n' - 1\}$, а все работы из $\{1, \dots, n'\}$ выполняются после работы $2n'$, порядок работ $n' + 2, \dots, 2n'$ известен, более того, выполняется

$$(4) \quad C_i(\pi) = i - n', \quad i \in \{n' + 2, \dots, 2n'\},$$

т.е. каждая работа выполняется друг за другом без перерывов в работе прибора. Таким образом, в расписании π выполнение работ $n' + 1, \dots, 2n'$ предопределено и закончится в момент времени n' . Но тогда с учетом (3) расписание π является оптимальным тогда и только тогда, когда выполняется (4) и при расписании π достигается минимум функции $\sum_{i=1}^{n'} w'_i C_i(\pi)$, т.е. когда в расписании π работы $1, \dots, n'$ обслуживаются начиная с момента n' таким образом, чтобы минимизировать их взвешенную сумму моментов окончания. В результате оптимальное расписание π' в задаче $1|prec, p_i = 1| \sum w_i C_i$ может быть получено из оптимального расписания π описанной задачи $1|prec, p_i = 1|H$. Моменты окончания обслуживания работ в задаче $1|prec, p_i = 1| \sum w_i C_i$ находятся следующим образом:

$$C'_i(\pi') = C_i(\pi) - n', \quad i \in \{1, \dots, n'\}.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Аналогичным образом можно доказать NP-трудность в сильном смысле одноприборной задачи минимизации суммарной (невзвешенной) продолжительности курсов с различными длительностями работ, используя сведение к ней NP-трудной задачи $1|prec| \sum C_i$.

Как было отмечено ранее, в силу замечания 1 далее будем рассматривать только расписания без перерывов между работами, с началом выполнения первой работы в нулевой момент времени. В этом случае для каждой работы j , $j \in I$, ее порядковый номер $\pi(j)$ в расписании π однозначно задает начало и завершение работы. Заметим также, что только крайние работы курса входят в определение целевой функции (2), более того, определяющей является только их разность, а не абсолютные значения. Поскольку при отсутствии перерывов в работе прибора длительность курса определяется работами, начатыми после первой работы курса и законченными до завершения последней работы курса, перепишем целевую функцию (2) в другом виде, без использования моментов окончания работ:

$$(5) \quad H(\pi) = \sum_{k=1}^K w_k \left(\sum_{j: \pi(i_k^a) \leq \pi(j) \leq \pi(i_k^d)} p_j \right).$$

Тогда можно записать

$$(6) \quad H(\pi) = \sum_{j=1}^n W_j(\pi) p_j,$$

где

$$(7) \quad W_j(\pi) = \sum_{\substack{k \in K: \\ \pi(j) \geq \pi(i_k^a)}} w_k - \sum_{\substack{k \in K: \\ \pi(j) > \pi(i_k^d)}} w_k.$$

Таким образом, вклад $W_j(\pi)$ каждой работы $j \in I$ в целевую функцию зависит от взаимного порядка крайних работ курсов и ее места среди крайних работ. В связи с этим возникает следующая идея решения задачи: для каждой допустимой перестановки крайних работ курсов необходимо найти оптимальный порядок выполнения работ относительно крайних работ. В следующем разделе будет представлен полиномиальный алгоритм построения оптимального расписания при заданном порядке крайних работ курсов.

4. Решение вспомогательной задачи

Как было показано в предыдущем разделе, значение целевой функции исходной задачи зависит от взаимного порядка крайних работ курсов. Обозначим через $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_e)$ произвольную перестановку крайних работ, не противоречащую отношениям предшествования, задаваемым графом $G(I, E)$, и введем ориентированный ациклический граф $G'(I, E')$ такой, что $E \subset E'$ и для множества крайних работ выполняется условие

$$(8) \quad \lambda_1 \rightarrow \lambda_2 \rightarrow \dots \lambda_{e-1} \rightarrow \lambda_e.$$

Граф $G'(I, E')$ получен из $G(I, E)$ последовательным соединением крайних вершин $\lambda_1, \dots, \lambda_e$ дугами в соответствии с порядком, задаваемым Λ . Если такой порядок не противоречит ограничениям предшествования задачи, полученный граф $G'(I, E')$ будет ациклическим. В силу ациклическости исходного графа $G(I, E)$ всегда существует хотя бы одна последовательность крайних работ Λ , не противоречащая ограничениям предшествования. Тогда в любом расписании π для графа $G'(I, E')$ будет выполнено

$$\pi(\lambda_1) < \pi(\lambda_2) < \dots < \pi(\lambda_{e-1}) < \pi(\lambda_e).$$

Ставится задача минимизации функции (6)–(7) относительно нового графа $G'(I, E')$. Будем обозначать данную вспомогательную задачу через P_Λ .

Для всех работ, не являющихся крайними, необходимо определить место в последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_e$. Для каждой работы имеется не более $e + 1$ вариантов (работа выполняется до λ_1 , между λ_1 и λ_2 и т.д.). Будем говорить, что работа j помещена в ячейку q , $q \in \{1, \dots, e - 1\}$, если она обслуживается после крайней работы λ_q и до крайней работы λ_{q+1} . Будем считать, что $q = 0$, если работа j обслуживается до λ_1 , и $q = e$, если j обслуживается после λ_e .

Определим для каждой крайней работы $\lambda_i \in I_{ad}$ множества $A(\lambda_i)$ и $D(\lambda_i)$ в графе $G'(I, E')$. Отметим несколько очевидных утверждений, которые будут использоваться далее и доказательство которых вытекает непосредственно из (8).

- Лемма 1.* а) Если $j \in A(\lambda_i)$, то $j \in A(\lambda_k)$ для всех $k \geq i$.
 б) Если $j \in D(\lambda_i)$, то $j \in D(\lambda_k)$ для всех $k \leq i$.
 в) Если $j \notin D(\lambda_i)$, то $j \notin D(\lambda_k)$ для всех $k \geq i$.
 г) Если $j \notin A(\lambda_i)$, то $j \notin A(\lambda_k)$ для всех $k \leq i$.

Для определения границ возможного расположения крайних работ по ячейкам в ряду крайних работ введем следующие обозначения:

$$q_1(j) = \begin{cases} 0, & \text{если } j \notin D(\lambda_1), \\ \max\{g \in \{1, \dots, e\} \mid j \in D(\lambda_g)\} & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$q_2(j) = \begin{cases} e, & \text{если } j \notin A(\lambda_e), \\ \min\{g \in \{1, \dots, e\} \mid j \in A(\lambda_g)\} - 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Лемма 2. Для любой работы $j \in I \setminus I_{ad}$ выполняется $q_1(j) \leq q_2(j)$.

Доказательство. Если $j \notin D(\lambda_1)$ или $j \notin A(\lambda_e)$, то утверждение очевидно. Для доказательства в остальных случаях предположим противное. Пусть $q_1(j) > q_2(j)$. По определению $q_1(j)$ имеем $j \in D(\lambda_{q_1(j)})$. С другой стороны, по определению $q_2(j)$ имеем $j \in A(\lambda_{q_2(j)+1})$. Но тогда по лемме 1 получаем $j \in A(\lambda_k)$ для всех $k \geq q_2(j) + 1$, а значит, $j \in A(\lambda_{q_1(j)})$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 3. Если в допустимом решении задачи P_λ работа j помещена в ячейку q , то справедливо $q_1(j) \leq q \leq q_2(j)$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть в некотором допустимом расписании работа j помещена в ячейку q , для которой справедливо либо $q < q_1(j)$, либо $q > q_2(j)$. Пусть $q < q_1(j)$. Тогда $q_1(j) > 0$ и по определению $j \in D(\lambda_{q_1(j)})$, а значит, работа j не может выполняться до $\lambda_{q_1(j)}$, что противоречит выбору ячейки q . Пусть $q > q_2(j)$. Тогда $q_2(j) < e$ и по определению $j \in A(\lambda_{q_2(j)+1})$, а значит, работа не может выполняться после $\lambda_{q_2(j)+1}$, что противоречит выбору ячейки q . Лемма доказана.

Для каждой ячейки $q \in \{0, \dots, e\}$ введем ее стоимость $f(q)$ по следующему правилу:

$$f(q) = \sum_{\substack{k \in K: \\ x(i_k^a) \leq q}} w_k - \sum_{\substack{k \in K: \\ x(i_k^d) \leq q}} w_k,$$

где $x(i_k^a)$ и $x(i_k^d)$ — номера крайних работ курса k в перестановке $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_e)$. Данная величина определяет «вклад» работы в исходной целевой функции (6) в случае ее помещения в ячейку q . Обозначим через $q^*(j)$ первое число от $q_1(j)$ до $q_2(j)$, для которого достигается минимум f :

$$(9) \quad q^*(j) = \min \left\{ t \mid f(t) = \min_{q_1(j) \leq q \leq q_2(j)} f(q) \right\}.$$

Будем называть $q^*(j)$ оптимальной ячейкой для работы j , $j \in I$. Следующая лемма показывает, что, если одна работа должна предшествовать в расписании другой, то ее оптимальная ячейка будет иметь не больший номер, чем оптимальная ячейка для другой работы.

Лемма 4. Если в графе $G'(I, E')$ для двух некрайних работ j и g выполняется $j \rightarrow g$, то

$$a) q_1(j) \leq q_1(g);$$

$$b) q_2(j) \leq q_2(g);$$

$$c) q^*(j) \leq q^*(g).$$

Доказательство. а) Поскольку $j \rightarrow g$, то $g \in D(j)$. Если $q_1(j) = 0$, то утверждение очевидно. Если $q_1(j) > 0$, то $j \in D(\lambda_{q_1(j)})$. Это означает, что $g \in D(\lambda_{q_1(j)})$. Тогда по определению $q_1(g)$ получаем $q_1(g) \geq q_1(j)$.

б) Поскольку $j \rightarrow g$, то $j \in A(g)$. Если $q_2(g) = e$, то утверждение очевидно. Если $q_2(g) < e$, то $g \in A(\lambda_{q_2(g)})$. Это означает, что $j \in A(\lambda_{q_2(g)})$. Тогда по определению $q_2(j)$ получаем $q_2(j) \leq q_2(g)$.

с) Пусть $q^*(j) > q^*(g)$. Принимая во внимание а) и б), получаем

$$q_1(j) \leq q_1(g) \leq q^*(g) < q^*(j) \leq q_2(j) \leq q_2(g).$$

Это означает, что обе ячейки $q^*(j)$ и $q^*(g)$ доступны для работ j и g . Это противоречит правилу выбора ячейки (9). Действительно, если $f(q^*(j)) = f(q^*(g))$, то ячейка $q^*(g)$ должна быть выбрана для обеих работ как более ранняя. Если же $f(q^*(j)) \neq f(q^*(g))$, то ячейка с минимальным значением стоимости f должна быть выбрана для обеих работ. Лемма доказана.

Для каждой ячейки $q \in \{0, \dots, e\}$ введем множество работ I_q , для которых данная ячейка является оптимальной:

$$I_q = \{j \in I \setminus I_{ad} : q^*(j) = q\}, \quad q \in \{0, \dots, e\}.$$

Пусть $E_q \subset E$ — множество дуг, соединяющих вершины из I_q , $q \in \{0, \dots, e\}$. Обозначим через $\bar{\pi}(I_q, E_q)$ произвольную топологическую сортировку графа $G_q(I_q, E_q)$, т.е. некоторую перестановку работ из I_q , удовлетворяющую частичному порядку, задаваемому множеством дуг E_q . В силу ацикличности исходного графа $G(I, E)$ топологическая сортировка любого его подграфа $G_q(I_q, E_q)$ существует. Следующая теорема показывает, что, упорядочив работы в каждой ячейке по отдельности, можно получить оптимальное расписание для задачи P_Λ по следующему правилу: сначала выполняются все работы из множества I_0 , затем крайняя работа λ_1 , затем все работы из множества I_1 , затем крайняя работа λ_2 и т.д.

Теорема 2. Расписание $\pi^\Lambda = (\bar{\pi}(I_0, E_0), \lambda_1, \bar{\pi}(I_1, E_1), \lambda_2, \dots, \lambda_e, \bar{\pi}(I_e, E_e))$ является оптимальным решением задачи P_Λ .

Доказательство. Расписание π^Λ является допустимым в задаче P_Λ . Действительно, рассмотрим любые две работы $i, j \in I \setminus I_{ad}$ такие, что $i \rightarrow j$. Если эти работы оказываются в одной ячейке, то ограничение предшествования выполняется в силу построения топологической сортировки всех работ из данной ячейки. Если же i и j оказываются в разных ячейках, то в силу леммы 4 имеем $q^*(i) < q^*(j)$, а значит, в расписании π^Λ работа i будет выполнена раньше работы j . Отношения предшествования между крайними работами

и всеми остальными работами выполнены в силу правила построения оптимальных ячеек.

Оптимальность решения следует из определения оптимальной ячейки. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I \setminus I_{ad}} f(q^*(j))p_j &= \sum_{j \in I \setminus I_{ad}} \min_{q_1(j) \leq q \leq q_2(j)} \left(\sum_{\substack{k \in K: \\ x(i_k^a) \leq q}} w_k - \sum_{\substack{k \in K: \\ x(i_k^d) \leq q}} w_k \right) p_j = \\ &= \min_{\pi} \sum_{j \in I \setminus I_{ad}} W_j(\pi)p_j. \end{aligned}$$

Поскольку при заданном порядке Λ вклад в целевую функцию крайних работ фиксирован и равен

$$\sum_{j \in I_{ad}} \left(\sum_{\substack{k \in K: \\ x(j) \geq x(i_k^a)}} w_k - \sum_{\substack{k \in K: \\ x(j) > x(i_k^d)}} w_k \right) p_j,$$

это означает, что расписание π^Λ , которое соответствует распределению работ по ячейкам, доставляет минимум целевой функции (6)–(7). Теорема доказана.

Таким образом, решение задачи P_Λ может быть сведено к вычислению оптимальной ячейки для каждой работы и упорядочению работ в каждой ячейке по отдельности. Общую схему поиска решения вспомогательной задачи описывает алгоритм 1. Оценим трудоемкость данного подхода. Необхо-

Algorithm 1 Процедура $Solv(\Lambda)$

```

1:  $\pi^\Lambda := ()$ 
2: for all  $q \in \{0, 1, \dots, e\}$  do
3:    $I_q := \emptyset$ 
4: end for
5: Сгенерировать граф  $G'(I, E')$  по перестановке  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_e)$ 
6: for all  $j \in I \setminus I_{ad}$  do
7:   Вычислить  $q^*(j)$ 
8:    $I_{q^*(j)} := I_{q^*(j)} \cup \{j\}$ 
9: end for
10: Построить  $\bar{\pi}(I_0, E_0)$ 
11:  $\pi^\Lambda := \bar{\pi}(I_0, E_0)$ 
12: for all  $q \in \{1, \dots, e\}$  do
13:   Построить  $\bar{\pi}(I_q, E_q)$ 
14:    $\pi^\Lambda := \pi^\Lambda \cup (\lambda_q, \bar{\pi}(I_q, E_q))$ 
15: end for
16: Вернуть  $\pi^\Lambda$ 

```

дим построить множества $A(\lambda)$, $D(\lambda)$ для каждой крайней работы λ , что суммарно потребует $O(nK)$ операций. Далее для каждой работы j необходимо определить границы $q_1(j)$, $q_2(j)$ и $q^*(j)$ — еще $O(nK)$ операций. Построение частичных расписаний работ в каждой ячейке — не более $O(n + |E|)$ операций [12].

5. Алгоритм решения задачи $1|prec|H$

Обозначим через B множество всех возможных перестановок крайних работ Λ , не противоречащих ограничениям предшествования в исходной задаче. Если количество курсов в задаче мало или в силу структуры графа $G(I, E)$ взаимный порядок крайних работ не допускает большого числа вариантов, возможен эффективный поиск решения задачи путем перебора перестановок крайних работ и решения вспомогательной задачи для каждой перестановки. Таким образом, схема решения задачи может быть представлена в виде алгоритма 2, где H_Λ^* — оптимальное значение целевой функции во вспомогательной задаче P_Λ , а H^* и π^* — оптимальное значение и оптимальное расписание исходной задачи $1|prec|H$ соответственно. Отметим, что в алгоритме 2 нет необходимости находить расписание для каждой рассматриваемой перестановки Λ , поскольку для вычисления значения H_Λ^* достаточно знать номера оптимальных ячеек для каждой работы.

Алгоритм решения задачи имеет трудоемкость $O(|B|(nK + |E|))$, где n — общее число работ, K — количество курсов, $|E|$ — количество ребер в графе отношения предшествования, $|B|$ — количество допустимых перестановок крайних работ курсов. Наибольший вклад в трудоемкость дает величина $|B|$. Максимально возможное значение $|B|$ равно $\frac{(2K)!}{2^K}$, когда рассматриваются все возможные перестановки крайних работ курсов без учета их взаимосвязей в графе отношения предшествования работ, однако в случае, например, плотных графов отношения предшествования величина $|B|$ может быть приемлемой для использования алгоритма 2 даже при большом числе курсов.

При проведении вычислительного эксперимента было проведено сравнение работы предложенного алгоритма с математическим пакетом ILOG CPLEX

Algorithm 2 Решение задачи $1|prec|H$

```

1:  $H^* := +\infty$ 
2: for all  $\Lambda \in B$  do
3:   вычислить  $H_\Lambda^*$ 
4:   if  $H_\Lambda^* < H^*$  then
5:      $H^* := H_\Lambda^*$ 
6:      $\Lambda^* := \Lambda$ 
7:   end if
8: end for
9:  $\pi^* := Solv(\Lambda^*)$ 
10: Вернуть  $\pi^*$ 

```

22.1.0.0 [13]. Для применения данного пакета было использовано следующее представление задачи в виде задачи целочисленного линейного программирования:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \in K} \sum_{j \in I, j \neq i_k^a} w_k p_j x_{i_k^a, j} + \sum_{k \in K} \sum_{j \in I, j \neq i_k^d} w_k p_j x_{j, i_k^d} + \\
& + \sum_{k \in K} \left(p_{i_k^a} + p_{i_k^d} - \sum_{i \in I} p_i \right) \rightarrow \min, \\
& x_{i, j} + x_{j, i} = 1 \quad \forall i, j \in I; \\
& x_{i, j} + x_{j, k} + x_{k, i} \geq 1 \quad \forall i, j, k \in I; \\
& x_{i, j} = 1 \quad \forall (i, j) \in E; \\
& x_{i, j} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in I,
\end{aligned}$$

где переменная $x_{i, j}$, $i \neq j \in I$, принимает значение 1, если работа i выполняется раньше работы j , и значение 0 в противном случае. Такие переменные и ограничения задачи — стандартные для целочисленных постановок одно-приборных задач с ограничениями предшествования (см., например, [14]).

Вычисления проводились на персональном компьютере (Intel Core i7-7700K, 4.2 GHz, 32,0 ГБ), алгоритм реализован на Python с использованием библиотеки NetworkX для работы с графами. В табл. 1 и 2 приведены результаты расчетов для случайно сгенерированных задач. В качестве весов курсов и продолжительностей работ выбирались произвольные целые числа из интервала [1; 10]. В качестве крайних работ курсов выбирались случайные вершины графа таким образом, чтобы не нарушались отношения предше-

Таблица 1. Результаты тестирования для разреженных графов

n	K	$ E $	$ B $	Algorithm 2	CPLEX
100	3	481	6	0,007	13,218
	5	467	4299	5,124	13,436
	7	525	26244	35,191	12,774
200	3	1864	6	0,034	106,282
	5	1942	150	0,516	105,152
	7	1990	870	3,169	102,967
300	3	4550	5	0,050	426,563
	5	4423	10	0,069	404,386
	7	4410	950	6,834	396,179
400	3	7765	1	0,022	>10 мин
	5	7662	4	0,051	>10 мин
	7	7746	280	3,362	>10 мин
500	3	12241	2	0,037	>10 мин
	5	12118	2	0,065	>10 мин
	7	12194	96	1,854	>10 мин

Таблица 2. Результаты тестирования для плотных графов

n	K	$ E $	$ B $	Algorithm 2	CPLEX
100	3	2514	2	0,009	11,144
	5	2541	4	0,054	10,717
	7	2515	3	0,025	10,777
	9	2487	8	0,048	10,668
200	3	10103	1	0,028	94,987
	5	10194	2	0,071	95,790
	7	10199	2	0,043	99,734
	9	10123	4	0,165	94,775
300	3	22846	1	0,034	386,899
	5	22943	1	0,039	398,339
	7	22933	6	0,225	378,841
	9	22845	4	0,156	400,153
400	3	40862	1	0,062	>10 мин
	5	40692	2	0,135	>10 мин
	7	40779	1	0,094	>10 мин
	9	40806	2	0,147	>10 мин
500	3	63657	1	0,090	>10 мин
	5	63424	1	0,098	>10 мин
	7	63676	1	0,136	>10 мин
	9	63802	3	0,316	>10 мин

ствования между первыми и последними вершинами каждого курса. Время работы алгоритма и решателя CPLEX ограничивалось десятью минутами.

Обозначения n , K , $|E|$, $|B|$, используемые в таблицах, совпадают с обозначениями, принятыми ранее в статье, а в колонках «Algorithm 2» и «CPLEX» указано время решения задач в секундах предложенным в статье алгоритмом и решателем CPLEX соответственно.

Как можно видеть из табл. 1, время работы алгоритма зависит от мощности множества $|B|$ сильнее, чем от общего количества работ. Так, даже при высокой размерности задачи, но небольшом количестве допустимых перестановок крайних работ алгоритм дает точное решение задачи за доли секунды. В случае же большого значения $|B|$ (см., например, задачу с $n = 100$, $K = 7$) время работы алгоритма значительно увеличивается. Решатель CPLEX, напротив, нечувствителен к изменению $|B|$ и K , но при повышении n время его работы сильно растет.

В табл. 2 приведены результаты работы алгоритма на задачах с более плотными графами. Здесь, как и ожидалось, количество допустимых перестановок крайних работ меньше, поэтому алгоритм нашел решения во всех задачах менее чем за секунду.

Таким образом, результаты вычислительного эксперимента подтверждают теоретическую оценку сложности разработанного алгоритма и показывают, что алгоритм может эффективно применяться в задачах с небольшой мощностью множества $|B|$, что соответствует случаю задач с плотным графом

отношения предшествования, или задач с небольшим количеством курсов или задач, в которых положения крайних работ зафиксировано друг относительно друга. В перечисленных случаях алгоритм позволяет быстро решать задачи высокой размерности.

6. Заключение

В статье рассмотрена одноприборная задача теории расписаний с ограничениями предшествования на работы, в которой необходимо минимизировать суммарное взвешенное время выполнения курсов (некоторых подмножеств работ). Доказана NP-трудность рассматриваемой задачи, а также предложен точный алгоритм ее решения, полиномиально зависящий от общего количества работ и позволяющий эффективно решать задачи при условии небольшого количества вариантов взаимного расположения крайних работ курсов. Дальнейшее направление исследований может касаться общей постановки задачи, когда крайние работы курсов не заданы однозначно, или задач управления проектом с несколькими ресурсами и данной целевой функцией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brucker P.* Scheduling algorithms. Springer: Heidelberg, 2007.
2. *Лазарев А.А.* Теория расписаний. Методы и алгоритмы. М.: ИПУ РАН, 2019.
3. *Lazarev A., Khusnullin N., Musatova E., Yadrentsev D., Kharlamov M., Ponomarev K.* Minimization of the weighted total sparsity of cosmonaut training courses // Optimization and Applications. OPTIMA 2018. Communications in Computer and Information Science. 2019. P. 202–215.
4. *Harhalakis G.* Special features of precedence network charts // Eur. J. Oper. Res., Elsevier Publ. 1990. V. 49. No. 1. P. 50–59.
5. *Csébfalvi A.B., Csébfalvi G.* Hammock activities in project scheduling // Proceedings of the Sixteenth Annual Conference of POMS. 2005.
6. *Eliezer O.* A new bi-objective hybrid metaheuristic algorithm for the resource-constrained hammock cost problem (RCHCP) / Doctoral Dissertation. Pécs, 2011.
7. *El-Rayes K., Moselhi O.* Resource-driven scheduling of repetitive activities // Construction Management and Economics. 1998. V. 16. No. 4. P. 433–446.
8. *Vanhoucke M.* Work continuity constraints in project scheduling / Working Paper 04/265, Ghent University, Faculty of Economics and Business Administration, Belgium. 2004.
9. *Vanhoucke M., Van Osselaer K.* Work continuity in a real-life schedule: the Westerschelde Tunne / Working Paper 04/271, Ghent University, Faculty of Economics and Business Administration, Belgium. 2005.
10. *Graham R.L., Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G.* Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey // Annals of Discrete Mathematics, Elsevier Publ. 1979. V. 5. P. 287–326.
11. *Lenstra J.K., Rinnooy Kan A.H.G.* Complexity of scheduling under precedence constraints // Oper. Res. 1978. V. 26. No. 1. P. 22–35.

12. *Cormen T.H., Leiserson C.E., Rivest R.L., Stein C.* Introduction to algorithms. MIT press, 2022.
13. IBM ILOG CPLEX Optimization Studio // URL: <https://www.ibm.com/products/ilog-cplex-optimization-studio>.
14. *Potts C.N.* An algorithm for the single machine sequencing problem with precedence constraint / Combinatorial Optimization II. Mathematical Programming Studies, Springer: Berlin, Heidelberg, 1980. V. 13. P. 78–87.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.Ю. Чеботаревым.

Поступила в редакцию 08.02.2023

После доработки 20.06.2023

Принята к публикации 20.07.2023

СОДЕРЖАНИЕ

Обзоры

Матвеев А.С., Фрадков А.Л., Шепелявый А.И. Очерк истории научной школы В.А. Якубовича	3
---	---

Линейные системы

Ибрагимов Д.Н., Подгорная В.М. Формирование оптимального по быстродействию ограниченного управления для линейных дискретных систем на основе метода суперэллипсоидальной аппроксимации	37
Мозжечков В.А. Синтез статической обратной связи в линейных дискретных системах управления на основе обучающих примеров	68

Нелинейные системы

Кабанов А.А., Зуев А.В., Жирабок А.Н., Филаретов В.Ф. Метод идентификации дефектов: подход на основе методов оптимального управления	82
Пестерев А.В. Глобальная устойчивость аффинной системы второго порядка с переключениями	95

Робастное, адаптивное и сетевое управление

Бугаев А.С., Яшина М.В., Таташев А.Г. О скорости потока на регулярной неоднородной открытой одномерной сети с несимметричным расположением узлов	106
--	-----

Управление в технических системах

Булычев Ю.Г. Косвенный метод однопозиционной координатометрии с учетом инвариантов движения при наличии сингулярных ошибок измерений	120
--	-----

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

Игнатов А.Н. Об алгоритме формирования расписания грузоперевозок в транспортной сети	135
Мусатова Е.Г., Лазарев А.А. Задача минимизации суммарной взвешенной длительности курсов для одного прибора с ограничениями предшествования	153

C O N T E N T S

Surveys

Matveev A.S., Fradkov A.L., Shepeljavyi A.I. An essay on the scientific school of V.A. Yakubovich history	3
--	---

Linear Systems

Ibragimov D.N., Podgornaya V.M. Construction of the time-optimal bounded control for linear discrete-time systems based on the method of superellipsoidal approximation	37
Mozzhechkov V.A. Static output feedback design for discrete-time control systems based on training examples	68

Nonlinear Systems

Kabanov A., Zuev A., Zhirabok A., Filaretov V. Method of fault identification: optimal control based approach	82
Pesterev A.V. Global stability of a second-order affine switching system	95

Robust, Adaptive and Network Control

Bugaev A.S., Yashina M.V., Tatashev A.G. Velocity of flow on regular non-homogeneous open one-dimensional net with asymmetrical arrangement of nodes	106
---	-----

Control in Technical Systems

Bulychev Yu.G. An indirect method of single-position coordinate measurement taking into account motion invariants in the presence of singular measurement errors	120
---	-----

Optimization, System Analysis, and Operations Research

Ignatov A.N. On the algorithm of cargoes transportation scheduling in the transport network	135
Musatova E.G., Lazarev A.A. The single machine problem of minimization the total weighted duration of courses with precedence constraints	153