*Автоматика и телемеханика, № 12, 2024*

# *Управление в социально-экономических системах*


**А.Ю. ГОЛУБИН, канд. физ.-мат. наук (agolubin@hse.ru)**
**(Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва;**
**ФГБУН Центр информационных технологий в проектировании РАН, Одинцово, Московская обл.),**
**В.Н. ГРИДИН, д-р техн. наук (info@ditc.ras.ru),**
**Д.С. СМИРНОВ, канд. экон. наук (info@ditc.ras.ru)**
**(ФГБУН Центр информационных технологий в проектировании РАН, Одинцово, Московская обл.),**
**С.А. БУЛГАКОВ канд. физ.-мат. наук (s.a.bulgakov@gmail.com)**
**(Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва)**

## МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ АКТИВАМИ С ПОШАГОВЫМИ CODITIONAL VALUE AT RISK (CVAR) ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПРИ ИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРАХ ВЕКТОРОВ ДОХОДНОСТЕЙ[1]

Предметом исследования является многошаговая задача инвестирования с Conditional Value at Risk (CVaR) ограничениями на приращения процесса риска, с заданным порогом капитала для банкротства, разрешением коротких продаж и нормальной моделью суммарного дохода. Целью является нахождение метода оптимального управления активами для целевого функционала равного среднему значению финального капитала инвестора. В результате исследования показано, что оптимальный инвестиционный портфель на каждом шаге не зависит от текущего значения капитала инвестора, а зависит только от номера шага инвестирования. Доказано, что многошаговая задача сводится к конечному числу одношаговых задач оптимизации, которые сводятся к задачам конического программирования. Для одношаговой задачи приведены условия непустоты множества допустимых портфелей и применена теорема Куна–Таккера об условиях оптимальности портфеля. Изучен случай, когда доходности активов имеют не нормальные распределения, а эллиптические распределения. Представлен иллюстративный численный пример нахождения оптимальной инвестиционной стратегии, основанный на открытых данных о котировках акций трех компаний на фондовой бирже.

*Ключевые слова*: метод нахождения оптимального инвестирования, мера риска, вероятностное ограничение CVaR, банкротство.

**DOI:** 10.31857/S0005231024120053, **EDN:** XTZBUR

---

[1] Исследование выполнено в рамках темы № FFNR-2024-0003.

## 1. Введение

Впервые формализация понятия «инвестиционный портфель» и способы его формирования были предложены Марковицем в 1952 г. в [1], где описана математическая модель формирования оптимального инвестиционного портфеля. В качестве меры риска, которая позволяет получить оценку финансового риска для портфеля активов, Марковиц использовал дисперсию доходности. После использования дисперсии в качестве меры риска, многие ученые исследовали альтернативные меры риска [2, 3]. Одной из таких мер риска стала стоимостная мера риска Value at Risk (VaR), которая стала широко применяться с 1980-х гг. VaR – это оценка величины, которую не превысят ожидаемые потери с заданной вероятностью, выраженная в денежном эквиваленте. В книге [4] квантильные, т.е. VaR ограничения, были использованы в постановках и решениях оптимизационных задач. В [5] сравнивается дисперсия как мера риска, которую использовал Марковиц в своих работах, с мерой риска VaR. Авторы приходят к выводу, что в общем случае мера риска VaR имеет ряд преимуществ, но не свободна от недостатков, например с помощью VaR невозможно оценить размер убытков вне доверительного уровня. Некоторые исследователи [6] указали на то, что VaR не является когерентной мерой риска (см. определение, например, в [6]), поскольку она не удовлетворяет свойству субаддитивности, за исключением случая нормального распределения риска. С другой стороны, в [5, 7] отмечалось, что мера риска VaR широко используется регуляторами в финансовой индустрии.

Введенная в литературе в последние декады мера риска CVaR уже является когерентной мерой риска, в [6] авторы сравнили меру риска VaR и CVaR и пришли к выводу о том, что в случае отсутствия в инвестиционном портфеле безрискового актива мера риска CVaR является более эффективной, чем мера риска VaR. Помимо этого, авторы отмечают, что CVaR учитывает выбросы, что критически важно для оценки рискованных и волатильных активов. В [8] авторы приходят к выводу, что несмотря на преимущество меры риска CVaR над мерой риска VaR в общем случае, имеет смысл учитывать обе этих меры для оценки риска инвестиционного портфеля.

В [9] была исследована многошаговая задача инвестирования с VaR ограничениями, но без возможности банкротства. С другой стороны, (см., например, [10]) банкротство, т.е. понижение капитала инвестора ниже заданного значения, когда на оставшемся временном интервале дальнейшие сделки по инвестированию запрещены, играет существенную роль в оценке финансовой стратегии. Оптимальная инвестиционная стратегия с пошаговыми квантильными (т.е. VaR) ограничениями была найдена в [11], где предусмотрена возможность банкротства.

В представленной работе изучена многошаговая задача инвестирования с возможностью банкротства, где – в отличие от [11] – предусмотрены пошаговые CVaR ограничения; преимущества такого подхода над введением VaR ограничений описаны выше. Показано, что рассматриваемая многошаговая задача дележа риска имеет решение, в котором каждый оптимальный портфель на шаге $t$ зависит только от номера шага $t$ и не зависит от значения текущего капитала инвестора ($x > 0$). Доказано, что исходная многошаговая задача сводится к решению конечного числа одношаговых задач конусной оптимизации, где целевые функции определяются рекуррентной формулой, что позволяет относительно просто найти оптимальную инвестиционную стратегию. Заметим, что в отличие от [12, 13], где риск банкротства на каждом шаге лишь оценивался с помощью неравенства Чебышева, здесь авторы исследуют задачу, решая уравнения динамического программирования, в которых предусмотрена возможность банкротства.

В разделе 2 рассматривается одношаговая задача с CVaR ограничением. Приведены необходимые и достаточные условия непустоты множества допустимых портфелей и выполнения условия регулярности Слейтера, а также использована теорема Куна–Таккера для определения решения этой задачи конусной оптимизации. Раздел 3 посвящен исследованию оптимизации инвестиционной стратегии в многошаговой задаче с CVaR ограничениями. Показано, что каждая компонента оптимального портфеля зависит только от номера шага инвестирования и не зависит от текущего капитала инвестора, найдены необходимые условия оптимальности стратегии. Модель, отличная от ранее рассмотренной нормальной модели, исследована в разделе 4, где изучено обобщение нормальной модели в случае эллиптических распределений. В разделе 5 решен численный пример, иллюстрирующий на основе реальных данных нахождение оптимальной стратегии для инвестиций в три крупные компании. Раздел 6 содержит заключительные замечания.

## 2. Одношаговая задача построения оптимального портфеля

Изучим сначала одношаговую модель выбора оптимального инвестиционного портфеля (см., например, [6, 11]), где случайный вектор доходностей активов $R = (R_0, \dots, R_n)$, и $R_i$ представляет изменение стоимости $i$-го актива от текущей стоимости в процентах. В терминах цены акций это означает, что $R_i = p_1/p_0$, где $p_0$ – текущая цена акции $i$-го актива (детерминированная величина), $p_1$ – цена акции $i$-го актива при следующей котировке (случайная величина). Пусть $R_0 = m_0$ почти наверное (п.н), т.е. это – безрисковый актив. Пусть $\overline{a} \in R^{n+1}$ – инвестиционный портфель, где $a_i$ – доля в процентах от начального капитала $x_0 > 0$, инвестированная в $i$-й актив. Бюджетное ограничение $\sum_{i=0}^{n} a_i = 1$ означает самофинансирование инвестора (нет притока средств извне, и имеющиеся средства инвестора вкладываются только в активы этого рынка) и, вместе с тем, разрешение «коротких продаж», т.е. возможность взятия взаймы некоторых активов по текущей стоимости с целью вложения этих денег в другие активы. Максимизируемой функцией является математическое ожидание финального дохода

$$EX_{\overline{a}} = Ex_0 \sum_{i=0}^{n} a_i R_i = x_0 \sum_{i=0}^{n} a_i m_i,$$

где $m_i = ER_i$ и $x_0 > 0$ – начальный капитал.

Для формулировки CVaR меры риска (см. [6]) в рассматриваемой задаче сначала понадобится определение меры риска Value at Risk (VaR) для случайного дохода $Z$:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(Z) = -z_\alpha = -\inf\left\{t : P\left(Z < t\right) \geqslant \alpha\right\},$$

где $\alpha \in (0, 1/2)$ – заданный уровень значимости. Conditional Value at Risk (CVaR) – мера риска, имеющая смысл ожидаемых потерь в случае превышения условной меры риска VaR с заданным уровнем значимости $\alpha$:

$$\mathrm{CVaR}_\alpha\left(Z\right) = E\left\{Z|\, Z \geqslant VaR_\alpha\left(Z\right)\right\}.$$

Обозначим через $f_Z(z)$ плотность распределения стандартизованного дохода $(Z - EZ)/\sqrt{DZ}$. Тогда [6]

$$\mathrm{CVaR}_\alpha\left(Z\right) = -EZ + \sqrt{DZ}k,$$

где

$$k = \frac{-\int\limits_{-\infty}^{-z_\alpha} z f_Z(z) dz}{\alpha}.$$

Предполагая нормальную аппроксимацию финального дохода инвестора $X_a = x_0 \sum_{i=0}^{n} a_i R_i$, широко используемую в портфельной теории (см., например, [6, 9]), получим выражение для параметра $k$ (см. выше его определение). Поскольку $\phi'(x) = -x\phi(x)$, где $\phi(x)$ – плотность стандартного нормального распределения, то легко видеть, что $k = \phi\left(\Phi^{-1}\left(\alpha\right)\right)/\alpha$. Тогда

$$\mathrm{CVaR}_\alpha\left(X_a\right) = -EX_a + \sqrt{DX_a}\frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha},$$

где $\Phi\left(x\right)$ – стандартная нормальная функция распределения, $\alpha$ – заданный уровень значимости.

Введем ограничение CVaR для рассматриваемой задачи:

$$\mathrm{CVaR}_\alpha\left(X_a\right) \equiv -(x_0\langle a, \Delta m\rangle + x_0 m_0) + x_0\sqrt{aCa'}\frac{\phi\left(\Phi^{-1}\left(\alpha\right)\right)}{\alpha} \leqslant dx_0.$$

Здесь через $\Delta m$ обозначен вектор $(m_1 - m_0, \ldots, m_n - m_0)$, $\langle a, \Delta m\rangle$ – скалярное произведение $\sum_{i=1}^{n} a_i \Delta m_i$, $d$ – доля в процентах от начального капитала $x_0 >$ $> 0$, $C$ – ковариационная матрица $n \times n$ рисковых активов.

Суммируя все рассуждения выше, сформулируем одношаговую задачу оптимизации:

$$\left\{ \begin{array}{l} EX_a \equiv \langle a, \Delta m\rangle + m_0 \ \to \max, \\ a \in D = \left\{ a \in R^n: \sqrt{aCa'} \leqslant \dfrac{\langle a, \Delta m\rangle + m_0 + d}{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))/\alpha} \right\}. \end{array} \right. \tag{1}$$

Ниже будем использовать следующие естественные предположения: $0 < < m_0 < \min_{i=1,\ldots,n} m_i$, матрица ковариаций рисковых активов $C$ положительно определена.

Далее в этом разделе приводим просто модификации утверждений, полученных ранее (см. [11, 14]) для VaR ограничения и на случай CVaR ограничения (см. (1)), которые затем будут использованы при решении многошаговой задачи.

По определению, конус второго порядка (см., например, [15]) есть $K = = \{(a,t) \in R^{n+1} : \sqrt{aCa'} \leqslant t\}$. Известно, что такой конус регулярен, иными словами, он является выпуклым, замкнутым, $IntK \neq \emptyset$ и, если $x \in K$, $-x \in K$, то $x = 0$. Задачу (1) тогда можно переписать как задачу конусного программирования [15]

$$\max\langle a, \Delta m\rangle \ \text{ при ограничении } \ \left( a, \frac{\langle a, \Delta m\rangle + m_0 + d}{\frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha}} \right) \in K. \tag{2}$$

Для решения (2) понадобится описание конуса, двойственного к $K$. Согласно определению, двойственный конус равен $K^* = \{x \in R^{n+1} : \langle x, y\rangle \geqslant 0$ для всех $y \in K\}$. В задаче (2) он определяется [3] как

*Лемма 1. Двойственный конус равен*

$$K^* = \left\{ (u,v) \in R^{n+1} : \sqrt{uC^{-1}u'} \leqslant v \right\}.$$

Ниже приведем условие, достаточное для выполнения условия Слейтера (см. определение, например, в [15]) в задаче (2). Обозначим через $j$ индекс, при котором выражение $\sigma_i \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha} - \Delta m_i$ достигает своего минимума, $i = = 1, \ldots n$, здесь $\sigma_i = \sqrt{DR_i}$ – стандартное отклонение.

*Утверждение 1. Если*

$$\sigma_j \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha} - \Delta m_j < 0, \tag{3}$$

*то внутренняя часть $IntD \neq \emptyset$, т.е. условие Слейтера в задаче (1) и, следовательно, в задаче (2) выполнено.*

*Доказательство.* Пусть $a^j$ – инвестиционный портфель вида $(0, \ldots, 0, a_j, 0, \ldots 0)$, где $a_j$ находится на $j$-м месте, а все остальные компоненты инвестиционного портфеля – нули. Заметим, что в рассматриваемом случае разрешены короткие продажи, т.е. $a_j$ может быть меньше нуля. CVaR ограничение в одношаговой задаче (1) примет вид

$$|a_j|\,\sigma_j \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha} - a_j \Delta m_j \leqslant d + m_0.$$

Рассмотрим минимум левой части этого выражения:

$$\rho = \min_a \left\{ |a_j|\,\sigma_j \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)}{\alpha} - a_j \Delta m_j \right\}.$$

Утверждается, что

$$\rho = -\infty.$$

Действительно, рассмотрим случай $a_j \geqslant 0$. Левая часть CVaR ограничения перепишется следующим образом:

$$a_j \sigma_j \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)}{\alpha} - a_j \Delta m_j = a_j \left( \sigma_j \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)}{\alpha} - \Delta m_j \right).$$

Поскольку по предположению $\sigma_j \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)}{\alpha} - \Delta m_j < 0$, то

$$\min_{a_j} \left\{ a_j (\sigma_j \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)}{\alpha} - \Delta m_j) \right\} = -\infty.$$

Суммируя рассуждения выше, получаем: если $\sigma_j \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha} - \Delta m_j < 0$, то $IntD \neq \emptyset$. Утверждение 1 доказано.

Заметим, что из доказательства утверждения 1 очевидно следует (см. (3)) достаточное условие непустоты допустимого множества $D$, $\sigma_j \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha} - \Delta m_j \leqslant 0$.

Утверждение 2. *Если условие* (3) *выполнено, то допустимый портфель $a^*$ оптимален в задаче* (2) *тогда и только тогда, когда существует вектор $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu) \in K^*$ такой, что*

$$\Delta m \left( 1 + \frac{\mu}{\frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha}} \right) + \lambda = 0$$

*и*

$$a^* \lambda' + \frac{\mu(\langle a^*, \Delta m \rangle + m_0 + d)}{\frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha}} = 0, \quad \text{где } \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Данное утверждение является очевидным следствием теоремы Куна–Таккера [15] для вогнутой задачи конусного программирования (2). Заметим, что без условия вогнутости целевой функции в (2), которая сейчас является линейной, теорема дает лишь необходимые условия оптимальности.

## 3. Многошаговая задача построения оптимального портфеля

В многошаговой задаче горизонт инвестирования разделен на $T$ частей или моментов времени $0, 1, \dots, T$. Случайный вектор доходностей активов для момента времени $t$ обозначается как $R^t = (R_0^t, \dots, R_n^t)$ , где $R_0^t = m_0^t$ п.н. – доходность безрискового актива. Векторы $R^t$ предполагаются независимыми, как и в работах по оптимизации инвестирования в многошаговых моделях с банкротством [7, 12]. Обозначим математическое ожидание доходности $i$-го актива через $m_i^t = ER_i^t$. Матрицы ковариаций доходностей рисковых активов $C_t$ положительно определены на каждом шаге $t$.

Термин «банкротство инвестора» означает следующее. Если текущий капитал инвестора $X_t$ опустится ниже порога $r = 0$, то инвестор не может совершать любые сделки с активами (покупать, продавать, брать в долг) и значение капитала $X_t$ считается фиксированным от момента $t$ до последнего шага. После применения нормальной аппроксимации для приращения в процентах капитала на интервале $[t, t+1]$ получаем нормально распределенную случайную величину $Y_a^t := \sum_1^n a_i(R_i^t - m_0^t) + m_0^t$ с параметрами $\mu^t(a) = \langle a, \Delta m^t\rangle + m_0^t$ и $\sigma^t(a) = \sqrt{aC_ta'}$. Тогда пошаговые CVaR ограничения (см. раздел 2) имеют вид

$$-X_t\langle a, \Delta m^t\rangle + X_t m_0^t + X_t\sqrt{aC_ta^T}\,\frac{\varphi\left(\Phi^{-1}\left(\alpha^t\right)\right)}{\alpha^t} \leqslant d^t X_t$$

$$\text{для каждого}\quad X_t = x > 0.$$

Здесь $\Delta m^t = (m_1^t - m_0^t, \dots, m_n^t - m_0^t)$, $d^t > 0$ – доля в процентах от текущего капитала, ограничивающая меру риска CVaR, $\alpha^t \in (0,1)$ – уровень значимости, $t = 0, \dots, T-1$. Инвестиционную стратегию будем обозначать как $A = (a^0, \dots, a^{T-1})$, напомним, что короткие продажи разрешены.

Тогда уравнение динамики капитала при выбранной инвестиционной стратегии будет

$$X_{t+1} = \begin{cases} X_t\left[\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i^t\left(R_i^t - m_0^t\right) + m_0^t\right], & \text{при } X_t > 0,\\ X_t, & \text{при } X_t \leqslant 0,\\ t = 0, \dots, T-1;\quad X_0 = x_0,\quad \text{где } x_0 > 0. & \end{cases} \tag{4}$$

Предполагается, что цель инвестора – максимизация среднего значения финального капитала. Таким образом, рассматриваемая задача есть задача оптимального управления марковской цепью при наличии множества поглощающих состояний $\{x : x \leqslant 0\}$:

$$\begin{cases} J[A] \equiv E\left(X_T\right) \to \max,\quad A \in \mathbf{A} \text{ при ограничениях (4) и}\\ -(\langle a, \Delta m^t\rangle + m_0^t) + \sqrt{aC_ta^T}\,\dfrac{\varphi\left(\Phi^{-1}\left(\alpha^t\right)\right)}{\alpha^t} \leqslant d^t, \end{cases} \tag{5}$$

где $\mathbf{A}$ – множество всех инвестиционных стратегий, предсказуемых в смысле естественной фильтрации.

Определим функцию Беллмана как $V_t(x) = \max_A EX_T$ для управляемого процесса на интервале $[t, T]$ с начальным состоянием $X_t = x$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&V_T(x) = x;\\
&V_{T-1}(x) = \max_{a \in D_{T-1}} xEY_a^{T-1} = \max_{a \in D_{T-1}} xG_{T-1}(a) = xG_{T-1}\left(a_*^{T-1}\right), \text{ если } x > 0,\\
&V_{T-1}(x) = x, \text{ если } x \leqslant 0;\\
&V_{T-2}(x) = \max_{a \in D_{T-2}} x \Big\{ E\left[G_{T-1}\left(a_*^{T-1}\right) Y_a^{T-2} | Y_a^{T-2} > 0\right] \times\\
&\qquad \times P\left(Y_a^{T-2} > 0\right) + E\left[Y_a^{T-2} | Y_a^{T-2} \leqslant 0\right] P\left(Y_a^{T-2} \leqslant 0\right) \Big\} =\\
&= \max_{a \in D_{T-2}} xG_{T-2}(a) = xG_{T-2}\left(a_*^{T-2}\right) \text{ при } x > 0 \text{ и } V_{T-2}(x) = x \text{ при } x \leqslant 0;\\
&\qquad \ldots\\
&V_0(x) = \max_{a \in D_0} x \left\{ E\left[G_1(a_*^1) Y_a^0 | Y_a^0 > 0\right] P(Y_a^0 > 0) + E\left[Y_a^0 \,|\, Y_a^0 \leqslant 0\right] P\left(Y_a^0 \leqslant 0\right) \right\} =\\
&\qquad = \max_{a \in D_0} xG_0(a) = xG_0\left(a_*^0\right), \text{ где } x > 0.
\end{aligned}
$$

Здесь $D_t$, множество допустимых портфелей на шаге $t$, есть (см. (5))

$$
D_t = \left\{ a \in R^n : \sqrt{aC_t a'} \leqslant \frac{\langle a, \Delta m^t \rangle + m_0^t + d^t}{\frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha^t))}{\alpha^t}} \right\}, \tag{6}
$$

где, напомним, $\Delta m^t = (m_1^t - m_0^t, \ldots, m_n^t - m_0^t)$, $t = 0, \ldots, T-1$, случайные величины $Y_a^t$ определены выше. Отметим, что $D_t$ не зависит от текущего состояния $x > 0$ процесса $X_t$.

Введенные выше функции $G_t(a)$ определяются рекуррентной формулой

$$
\begin{aligned}
G_t(a) &= E\left[Y_a^t | Y_a^t > 0\right] P\left(Y_a^t > 0\right) G_{t+1}\left(a_*^{t+1}\right) +\\
&\quad + E\left[Y_a^t | Y_a^t \leqslant 0\right] P\left(Y_a^t \leqslant 0\right), \; t = 0, \ldots, T-1,\\
G_T(a) &\equiv 1,
\end{aligned} \tag{7}
$$

где $a_*^{t+1}$ – портфель, максимизирующий $G_{t+1}(a)$ на множестве $D_{t+1}$.

Из приведенных выражений для функций Беллмана следует, что каждый портфель $a_*^t$ в оптимальной стратегии $A_* = (a_*^0, \ldots, a_*^{T-1})$ зависит только от момента $t$ принятия решения и не зависит от величины текущего состояния $x > 0$ процесса $X_t$.

Следующая теорема дает явное выражение для функций $G_t(a)$ и приводит необходимые условия оптимальности в задаче оптимального управления (5).

Т е о р е м а 1. *Пусть условие* (3) *выполняется для всех* $\alpha^t$, $\sigma_j^t$, $\Delta m_j^t$.

*Если инвестиционная стратегия* $(a_*^0, \ldots, a_*^{T-1})$ *является оптимальной, то существует вектор*

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu) \in K^* = \left\{(\lambda, \mu) \in R^{n+1} : \sqrt{\lambda C_t^{-1} \lambda'} \leqslant \mu\right\},$$

*такой что:*

$$\nabla G_t\left(a_*^t\right) + \frac{\Delta m^t \mu}{\frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha^t))}{\alpha^t}} + \lambda = 0 \tag{8}$$

*и*

$$a_*^t \lambda' + \frac{\mu\left(\langle a_*^t, \Delta m^t\rangle + m_0^t + d^t\right)}{\frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha^t))}{\alpha^t}} = 0, \tag{9}$$

*где* $\nabla G_t(a)$ *обозначает градиент* $G_t(a)$*,*

$$\begin{aligned} G_t(a) &= \left\{\overline{\Phi}\left[-\frac{\mu^t(a)}{\sigma^t(a)}\right]\mu^t(a) + \sigma^t(a)\,\varphi\left[-\frac{\mu^t(a)}{\sigma^t(a)}\right]\right\} \times \\ &\quad \times G_{t+1}\left(a_*^{t+1}\right) + \Phi\left[-\frac{\mu^t(a)}{\sigma^t(a)}\right]\mu^t(a) - \sigma^t(a)\,\varphi\left[-\frac{\mu^t(a)}{\sigma^t(a)}\right], \\ G_T(a) &\equiv 1. \end{aligned} \tag{10}$$

*Здесь* $\overline{\Phi}(\cdot) = 1 - \Phi(\cdot)$*, через* $\Phi(\cdot)$ *и* $\varphi(\cdot)$ *обозначены функция распределения и плотность стандартной нормальной случайной величины соответственно,* $\mu^t(a) = \langle a, \Delta m^t\rangle + m_0^t$ *и* $\sigma^t(a) = \sqrt{aC_t a'}$*.*

*Доказательство.* Выражение для $G_t(a)$ (см. рекуррентную формулу (7)) легко преобразуется в (10) с учетом выражений для математического ожидания нормальной случайной величины $Y_a^t$, усеченной на интервалы $(0, \infty)$ и $(-\infty, 0]$ (см., например, [16]). Поскольку в знаменателях в (10) присутствует стандартное отклонение $\sigma^t(a) = \sqrt{aC_t a'}$, необходимо сначала показать, что вырожденный инвестиционный портфель $a^d = (0, \ldots, 0)$ не может быть оптимальным в задаче

$$\max_{a \in D_t} G_t(a). \tag{11}$$

Действительно, рассмотрим портфель $a_\gamma = \gamma \Delta m^t$, который является допустимым для достаточно малых $\gamma > 0$ (см. (6)). Далее,

$$\mu^t(a_\gamma) = \gamma\|\Delta m^t\|^2 + m_0^t, \quad \sigma^t(a_\gamma) = \gamma\sqrt{\Delta m_t C_t \Delta m_t'} \ \text{ и } \ \Phi\left(\frac{-\mu^t(a_\gamma)}{\mu^t(a_\gamma)}\right) \to 0,$$
$$\varphi\left(\frac{-\mu^t(a_\gamma)}{\sigma^t(a_\gamma)}\right) \to 0 \ \text{ при } \ \gamma \to 0 + 0.$$

Тогда

$$G_t(a_\gamma) = G_t\left(a_*^{t+1}\right)\left(\gamma\|\Delta m_t\|^2 + m_0^t\right) + o(\gamma) > G_t(a^d) = G_t(a_*^{t+1})m_0^t$$

для достаточно малых значений $\gamma > 0$. Таким образом, для решения задачи (11) достаточно ограничиться множеством допустимых портфелей $D_t \setminus a^d$.

Условие (3) означает, что $IntD_t \neq \emptyset$, т.е. выполнено условие Слейтера в задаче (11). Применяя утверждение 2 к этой задаче конусного программирования, где целевая функция $G_t\,(a)$ не является, вообще говоря, вогнутой, получим (8)–(9) как необходимые условия оптимальности в (11). Теорема 1 доказана.

## 4. Модель доходностей рисковых активов, отличная от нормальной

Пусть доходности $n$ рисковых активов имеют многомерное эллиптичекое распределение (нормальное распределение, распределение Лапласа, Бесселя и др. [17]), что позволяет, в частности, учесть "тяжелые хвосты" в распределениях доходностей. Удобное свойство этого класса распределений для анализа рисков состоит в том, что линейная комбинация эллиптически распределенных активов снова имеет эллиптическое распределение. Обозначим через $F(x)$ функцию распределения "стандартной" эллиптической случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, а через $f(x)$ – ее плотность.

Тогда (см. раздел 2) мера риска CVaR имеет вид

$$\mathrm{CVaR}_\alpha\,(X_a) = -EX_a + \sqrt{DX_a}k^*,$$

где теперь

$$k^* = \frac{-\int\limits_{-\infty}^{-z_\alpha^*} xf(x)dx}{\alpha} \text{ и } z_\alpha^* : \, F(-z_\alpha^*) = \alpha.$$

Таким образом, полученные выше результаты сохраняют силу и в этом случае с заменой $k = \phi\left(\Phi^{-1}\,(\alpha)\right)/\alpha$ на $k^*$. Усеченные нормальные распределения заменяются на соответствующие усеченные эллиптические.

## 5. Пример[2]

Проиллюстрируем полученные в разделе 3 результаты решением численного примера нахождения оптимальных портфелей для рынка из трех компаний: Apple, Microsoft, Facebook. Данные о стоимости акций за период 07.05.2022–07.05.2023 (один год) были взяты в открытом доступе с сайта биржи nasdaq (https://www.nasdaq.com/market-activity/stocks/). Полученные реализации доходностей этих активов примерно следуют нормальным

[2] Данные для этого примера и само решение были получены с помощью Сильвентойнена Д.П.

распределениям (но в этой работе строгая проверка гипотез о нормальности распределений доходностей методами математической статистики остается вне рассмотрения), поэтому предположение о нормальном распределении общего дохода инвестора на каждом шаге представляется обоснованным. На основе этих эмпирических данных построены оценки вектора математических ожиданий $m = (m_0^t, \ldots, m_3^t)$ и матрицы ковариаций $C = C_t$ трех рисковых активов. Предполагается, что векторы математических ожиданий и матрицы ковариаций не зависят от номера шага на всем временном интервале $[0, T] = [0, 4]$, а безрисковый актив имеет доходность $m_0 = 1$, т.е. вложения в этот актив сохраняются и не приносят убытка/прибыли. Начальный капитал инвестора $x_0 = 1$; уровень значимости $\alpha = 0{,}05$; константа $d$, ограничивающая сверху меру риска CVaR, является варьируемым параметром.

Согласно результатам раздела 3 (см. теорему 1) оптимальный портфель на шаге $t$ определяется как решение задачи

$$\max_{D_t} G_t\left(a\right), \quad t = 3, 2, 1, 0,$$

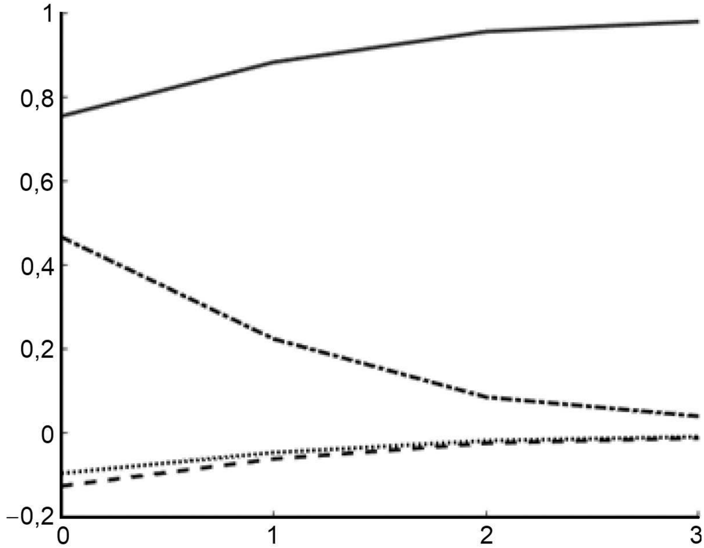
где рекуррентные выражения для $G_t\left(a\right)$ определены в (10). Таблица ниже показывает, как меняется оптимальный портфель при увеличении константы $d$, ограничивающей CVaR.

Оптимальные инвестиционные портфели в многошаговой задаче с изменением константы $d$, ограничивающей меру риска CVaR на каждом шаге

| $t$ | $t = 0$ | $t = 1$ | $t = 2$ | $t = 3$ |
|---|---|---|---|---|
| $d$ | 0,2 | 0,25 | 0,28 | 0,29 |
| Apple, $a_*^t(1)$ | 0,7536 | 0,8820 | 0,9548 | 0,9786 |
| Microsoft, $a_*^t(2)$ | −0,0950 | −0,0457 | −0,0175 | −0,0082 |
| Facebook, $a_*^t(3)$ | −0,1253 | −0,0607 | −0,0233 | −0,0110 |
| Безрисковый актив, $a_*^t(0)$ | 0,4667 | 0,2244 | 0,0860 | 0,0406 |

С увеличением константы $d$ на каждом шаге инвестор становится более склонным к риску, поэтому ожидаемо доля инвестирования в безрисковый актив уменьшается от шага к шагу, а доля инвестирования в рисковые активы увеличивается. Для наглядности полученные оптимальные инвестиционные портфели отображены на рисунке.

Оптимальное значение целевого функционала $J[A_*] = E\,X_4$ равно 1,031, что означает получение 3% средней прибыли за весь период инвестирования. Такое низкое значение объясняется тем, что наблюдаемые за год доходности акций рисковых активов близки к единице и имеют низкую волатильность – различия в эмпирических доходностях каждого рискового актива составляют лишь доли процента. Отметим, что решенный пример есть лишь иллюстрация к теореме 1 и приведенная в ней методика вычисления оптимальной




Оптимальные инвестиционные портфели на шагах $\{0, 1, 2, 3\}$. Сплошная линия обозначает долю вложений в акции Apple, доля вложений в безрисковый актив — штрихпунктирная линия, доля вложений в Microsoft — пунктирная линия, доля вложений в Facebook — штриховая линия.

инвестиционной стратегии дала бы другие результаты в случае рисковых активов, отличных от трех, рассмотренных выше.

## 6. Заключение

В работе была сформулирована и решена многошаговая задача инвестирования с вероятностными (CVaR) ограничениями и возможностью банкротства. Предполагалось разрешение коротких продаж и нормальная (или эллиптическая) модель распределений суммарных доходов на каждом шаге. Было показано, что оптимальный инвестиционный портфель на каждом шаге не зависит от значения капитала инвестора, а зависит только от номера шага инвестирования. В рамках нахождения оптимальных инвестиционных портфелей показано, что многошаговая задача разбивается на конечное число одношаговых задач оптимизации, которые рекуррентно связаны и сводятся к задачам конического программирования. Для вспомогательной одношаговой задачи были приведены и доказаны достаточные условия непустоты множества допустимых портфелей и выполнения условий регулярности Слейтера. При ее решении была применена модифицированная теорема Куна–Таккера для случая обобщенных неравенств. Результатом решения многошаговой задачи можно считать метод построения оптимальных портфелей инвестирования, применимый на практике при известных оценках векторов математических ожиданий и матриц ковариаций доходностей.

Также представлен численный пример, основанный на данных о котировках акций трех компаний на фондовой бирже за один год, который иллюстрирует нахождение оптимальных инвестиционных портфелей. Представляются интересными следующие направления развития данной работы: использование других распределений вместо нормальной или эллиптической модели для доходностей, например, гамма-распределений; применение другой меры риска вместо CVaR, например shortfall probability [3]. Еще одним направлением может стать анализ аналогичной задачи, но с запретом на короткие продажи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Markowitz H.* Portfolio Selection // J. Finance. 1952. V. 7. P. 77–91.
2. *Gaivoronski A., Pflug G.* Value at Risk in Portfolio Optimization: Properties and Computational Approach // J. Risk. 2004. V. 7. No. 2. P. 1–31.
3. *Голубин А.Ю., Гридин В.Н.* Построение эффективных инвестиционных портфелей с вероятностью падения финального капитала ниже установленного уровня в качестве меры риска // АиТ. 2023. № 4. С. 131–144.
4. *Кибзун А.И., Кан Ю.С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.
5. *Alexander G.J., Baptista A.M.* Economic Implications of Using a Mean-VaR Model for Portfolio Selection: A Comparison with Mean-variance Analysis // J. Econom. Dynam. Control. 2002. V. 26. P. 1159–1193.
6. *Alexander G.J., Baptista A.M.* A comparison of VaR and CVaR constraints on portfolio selection with the mean-variance model // Management Sci. 2004. V. 50. P. 1261–1273.
7. *Shiba N., Xu C., Wang J.* Multistage Portfolio Optimization with VaR as Risk Measure // Int. J. Innovat. Comput., Inform. Control. 2007. V. 3. No. 3. P. 709–724.
8. *Tyrrell R., Rockafellar R.T., Uryasev S.* Conditional value-at-risk for general loss distributions // J. Banking Finance. 2002. V. 26. No. 7. P. 1443–1471. https://doi.org/10.1016/S0378-4266(2)00271-6.
9. *Pinar M.C.* Static and Dynamic VaR Constrained Portfolios with Application to Delegated Portfolio Management // Optimization. 2013. V. 62. No. 11. P. 1419–1432.
10. *Gardoni P., Murphy C.* Gauging the societal impacts of natural disasters using a capabilities-based approach // Disasters: Disaster Studies, Policy, Management. 2010. V. 34. No. 3. P. 619–636.
11. *Golubin A.Y.* Optimal Investment Policy in a Multi-stage Problem with Bankruptcy and Stage-by-stage Probability Constraints // Optimization. 2022. V. 70. No. 10. P. 2963–2977. https://doi.org/10.1080/02331934.2021.1892674
12. *Li C., Li Z.* Multi-period portfolio optimization for asset–liability management with bankrupt control // Apppl. Math. Comput. 2012. V. 218. P. 11196–11208.
13. *Wei S., Ye Z.* Multi-period optimization portfolio with bankruptcy control in stochastic market // Apppl. Math. Comput. 2007. V. 186. P. 414–425.

14. *Голубин А.Ю., Газов А.И.* Условия оптимальности в задаче выбора инвестиционного портфеля при вероятностном ограничении на капитал инвестора // Информационные технологии в проектировании и производстве. 2018. № 4. С. 53–57.

15. *Boyd S., Vandenberghe L.* Convex Optimization, Cambridge, Cambridge: University Press, 2009.

16. *Burkardt J.* The Truncated Normal Distribution, Department of Scientific Computing, Florida State University, 2014.

17. *Landsman Z., Valdez E.A.* Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions // North Amer. Actuarial J. 2003. V. 7. No. 4. P. 55–71.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.*

Поступила в редакцию 13.02.2024

После доработки 30.09.2024

Принята к публикации 09.10.2024