

© 2024 г. М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)  
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

## СИНТЕЗ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ВЫХОДУ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ КАК ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ

Предлагается новый подход к решению задачи подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений в линейных дискретных системах управления при помощи динамической обратной связи по выходу. Подход основан на сведении проблемы к задаче матричной оптимизации, где переменными являются матрица обратной связи и матрица наблюдателя. Выписан градиентный метод для отыскания динамической обратной связи по выходу и дано его обоснование.

*Ключевые слова:* линейные системы, дискретное время, внешние возмущения, обратная связь по выходу, наблюдатель, оптимизация, уравнение Лапунова, градиентный метод, метод Ньютона.

**DOI:** 10.31857/S0005231024120012, **EDN:** XUOEAO

### 1. Введение

В работе [1] был предложен и обсужден новый подход к решению задачи подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений в линейных непрерывных системах управления при помощи динамической обратной связи по выходу с использованием наблюдателя Люенбергера [2, 3]. Этот подход, восходящий к работе [4], основан на сведении проблемы к задаче матричной оптимизации, где переменными являются матрица обратной связи и матрица наблюдателя; далее эта задача решается градиентным методом.

Небольшой обзор литературы по соответствующей проблематике был дан в [1] (см., например, [5], а также приведенную там обширную библиографию). В [6] был предложен подход к решению этой же задачи путем ее сведения к решению задачи полуопределенного программирования в терминах линейных матричных неравенств (ЛМН) [7, 8]; при этом пришлось произвести ряд заглублений для того, чтобы линеаризовать матричные неравенства и установить окончательный результат в терминах ЛМН, что привело к излишнему консерватизму полученных условий.

Среди идейно близких публикаций также следует отметить недавние работы [9, 10], в которых был предложен перспективный подход к решению обсуждаемой задачи, основанный на нахождении решений параметризованных матричных уравнений Риккати.

Настоящая статья является непосредственным продолжением работы [1], распространяя предложенные в ней подходы на системы управления в дискретном времени. Важной практически-ориентированной особенностью предлагаемого подхода является возможность ограничения величины матриц наблюдателя и динамического регулятора.

Всюду далее  $\mathbb{S}^n$  – пространство симметричных матриц размера  $n \times n$  с вещественными элементами,  $\|\cdot\|$  – евклидова норма вектора и спектральная норма матрицы,  $\|\cdot\|_F$  – фробениусова норма матрицы,  $^T$  – символ транспонирования,  $\text{tr}$  – след матрицы,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – скалярное произведение Фробениуса для матриц,  $I$  – единичная матрица соответствующей размерности,  $\lambda_i(A)$  – собственные значения матрицы  $A$ , а  $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)| < 1$  – радиус устойчивости шуровской матрицы  $A$ .

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим систему управления

$$(1) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Dw_k, \\ y_k &= C_1x_k + D_1w_k, \\ z_k &= C_2x_k, \end{aligned}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $D_1 \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ ,  $C_1 \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}^{r \times n}$ , с состоянием  $x_k \in \mathbb{R}^n$ , начальным условием  $x_0$ , наблюдаемым выходом  $y_k \in \mathbb{R}^\ell$ , оптимизируемым выходом  $z_k \in \mathbb{R}^r$ , управлением  $u_k \in \mathbb{R}^p$  и внешним возмущением<sup>1</sup>  $w_k \in \mathbb{R}^m$ , ограниченным в каждый момент времени:

$$\|w_k\| \leq \delta \quad \text{для всех } k = 0, 1, 2, \dots$$

Будем предполагать, что пара  $(A, B)$  управляема, а пара  $(A, C_1)$  наблюдаема.

Состояние  $x_k$  системы недоступно измерению и информация о системе предоставляется ее выходом  $y_k$ . Задачей является нахождение минимального (в определенном смысле) эллипсоида, содержащего оптимизируемый выход  $z_k$ .

Построим наблюдатель, описываемый линейным разностным уравнением, включающим в себя рассогласование выхода  $y_k$  и его прогноза  $C_1\hat{x}_k$ :

$$(2) \quad \hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + L(y_k - C_1\hat{x}_k), \quad \hat{x}_0 = 0,$$

где  $L \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$  – матрица наблюдателя.

Согласно (1), (2) невязка  $e_k = x_k - \hat{x}_k$  будет удовлетворять разностному уравнению

$$e_{k+1} = (A - LC_1)e_k + (D - LD_1)w_k, \quad e_0 = x_0.$$

---

<sup>1</sup> Несмотря на то, что природа возмущений в состоянии и наблюдаемом выходе системы, вообще говоря, различна, удобно считать их одними и теми же, полагая что матрицы  $D$  и  $D_1$  “вырезают” из вектора  $w_k$  разные “куски”; общий случай также может быть рассмотрен ценой некоторого усложнения.

Замкнув систему (1) обратной связью с помощью динамического регулятора

$$(3) \quad u_k = K\hat{x}_k, \quad K \in \mathbb{R}^{p \times n},$$

получаем систему

$$(4) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= (A + BK)x_k - BKe_k + Dw_k, \\ e_{k+1} &= (A - LC_1)e_k + (D - LD_1)w_k, \\ z_k &= C_2x_k \end{aligned}$$

с регулируемым выходом  $z_k$ .

Как и в непрерывном случае, синтез статического регулятора по выходу вида  $u_k = Ky_k$  не всегда возможен: матрица  $A + BKC_1$  может оказаться не стабилизируемой выбором  $K$ , тогда как динамический регулятор (3) может быть построен (при малоограничительных требованиях управляемости и наблюдаемости системы; подробнее см. раздел 3).

### 3. Подход к решению

Воспользуемся методом инвариантных эллипсоидов (подробнее см. [8, 13]). Напомним, что эллипсоид

$$\mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n: \quad x^T P^{-1} x \leq 1\}, \quad P \succ 0$$

называется *инвариантным* для линейной дискретной динамической системы

$$(5) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Dw_k, \quad \|w_k\| \leq 1, \\ z_k &= Cx_k \end{aligned}$$

с шуровской матрицей  $A$ , если любая траектория системы, исходящая из точки  $x_0$ , лежащей в эллипсоиде  $\mathcal{E}_x$ , при всех внешних возмущениях  $w_k: \|w_k\| \leq 1$  в любой момент времени будет находиться в этом эллипсоиде.

Инвариантный эллипсоид обладает свойством притягиваемости: траектория системы, исходящая из точки вне инвариантного эллипсоида, стремится к нему с течением времени.

Легко видеть, что если  $\mathcal{E}_x$  – инвариантный эллипсоид с матрицей  $P$ , то линейный выход  $z_k$  системы (5) при  $x_0 \in \mathcal{E}_x$  будет принадлежать эллипсоиду

$$\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}^r: \quad z^T (CPC^T)^{-1} z \leq 1\},$$

называемому *ограничивающим* (а при  $x_0 \notin \mathcal{E}_x$  – стремиться к нему).

Оценивая влияния внешних возмущений на выход системы, естественно интересоваться минимальными ограничивающими эллипсоидами; в качестве критерия минимальности ограничивающего эллипсоида часто принимается величина  $\text{tr } CPC^T$ , равная сумме квадратов его полуосей. Хорошо известен следующий результат (см., например, [8]).

*Теорема 1. Пусть матрица  $A$  шуровская,  $\rho = \max_i |\lambda_i(A)| < 1$ , пара  $(A, D)$  управляема, а матрица  $P(\alpha) \succ 0$ ,  $\rho^2 < \alpha < 1$  удовлетворяет дискретному уравнению Ляпунова*

$$(6) \quad \frac{1}{\alpha} A P A^T - P + \frac{1}{1 - \alpha} D D^T = 0.$$

*Тогда задача об оптимальном ограничивающем эллипсоиде для системы (5) сводится к минимизации одномерной функции*

$$f(\alpha) = \text{tr} C P(\alpha) C^T$$

*на интервале  $\rho^2 < \alpha < 1$ .*

Сделаем несколько замечаний. Во-первых, если  $\alpha^*$  – точка минимума в задаче из теоремы 1, и  $x_0$  удовлетворяет условию  $x_0^T P^{-1}(\alpha^*) x_0 \leq 1$ , то гарантируется очевидная равномерная оценка

$$\|z_k\|^2 \leq \|C P(\alpha^*) C^T\| \leq \text{tr} C P(\alpha^*) C^T = f(\alpha^*), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Во-вторых, уравнение (6) представимо в виде

$$\left( \frac{1}{\sqrt{\alpha}} A \right) P \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha}} A \right)^T - P + \frac{1}{1 - \alpha} D D^T = 0$$

и согласно [8, лемма 1.2.6] имеет единственное положительно-определенное решение тогда и только тогда, когда матрица  $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} A$  шуровская, т.е.

$$\rho \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha}} A \right) < 1.$$

Вернемся к системе (4); введя составной вектор

$$g_k = \begin{pmatrix} x_k \\ e_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n},$$

запишем ее в матричном виде и введем в рассмотрение матрицы  $A_{K,L}$ ,  $D_L$  и  $C$ :

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{g}_k &= \underbrace{\begin{pmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - LC_1 \end{pmatrix}}_{A_{K,L}} g_k + \underbrace{\begin{pmatrix} D \\ D - LD_1 \end{pmatrix}}_{D_L} w_k, \quad g_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \end{pmatrix}, \\ z_k &= \underbrace{\begin{pmatrix} C_2 & 0 \end{pmatrix}}_C g_k. \end{aligned}$$

Заклучим состояние  $g_k$  системы (7) в инвариантный эллипсоид

$$\mathcal{E}_g = \{g \in \mathbb{R}^{2n}: \quad g^T P^{-1} g \leq 1\},$$

порожденный матрицей  $P \in \mathbb{S}^{2n}$ , и будем минимизировать размер соответствующего ограничивающего эллипсоида

$$\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}^r: \quad z^T(\mathcal{C}P\mathcal{C}^T)^{-1}z \leq 1\}$$

по выходу  $z_k$  с матрицей  $\mathcal{C}P\mathcal{C}^T$ . В качестве критерия его минимальности примем критерий следа, т.е. величину  $\text{tr } \mathcal{C}P\mathcal{C}^T$ .

Заметив, что матрица  $A_{K,L}$  представима в виде

$$\begin{aligned} A_{K,L} &= \begin{pmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - LC_1 \end{pmatrix} = \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}}_{\mathcal{A}} + \underbrace{\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}}_{M_1} K \underbrace{\begin{pmatrix} I & -I \end{pmatrix}}_{N_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}}_{M_2} L \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -C_1 \end{pmatrix}}_{N_2}, \end{aligned}$$

в соответствии с теоремой 1 приходим к задаче минимизации функции  $\text{tr } \mathcal{C}P\mathcal{C}^T$  при ограничении

$$\begin{aligned} (8) \quad & \frac{1}{\alpha}(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L N_2)P(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L N_2)^T - \\ & - P + \frac{\delta^2}{1 - \alpha} D_L D_L^T = 0 \end{aligned}$$

относительно матричных переменных  $0 \prec P \in \mathbb{S}^{2n}$ ,  $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$  и скалярного параметра  $\alpha > 0$ .

В качестве критерия качества выберем функцию

$$(9) \quad f(K, L, \alpha) = \text{tr } \mathcal{C}P\mathcal{C}^T + \chi_K \|K\|_F^2 + \chi_L \|L\|_F^2,$$

в которой помимо компоненты, определяющей размер ограничивающего эллипсоида по критерию следа, содержатся штрафы за величину матриц регулятора и наблюдателя (при этом коэффициенты  $\chi_K, \chi_L > 0$  регулируют их важность); в то же время их наличие гарантирует коэрцитивность минимизируемой функции по  $K$  и  $L$  (см. раздел 4).

*Замечание 1.* Обратим внимание, что блочная матрица  $A_{K,L}$  имеет те же собственные значения, что и стоящие на ее диагонали матрицы  $A + BK$  и  $A - LC_1$ . В свою очередь, существование матриц  $K$  и  $L$  таких, чтобы матрицы  $A + BK$  и  $A - LC_1$  были устойчивыми, вытекает из свойств управляемости и наблюдаемости исходной системы.

В силу замечания 1 заведомо существуют матрицы  $K_0$  и  $L_0$  такие, что матрица  $A_{K_0, L_0}$  шуровская. Матрицы  $(K, L)$ , обладающие этим свойством, будем называть *стабилизирующей матричной парой*.

#### 4. Оптимизация функции $f(K, L, \alpha)$

Итак, исходная задача синтеза динамической обратной связи при помощи наблюдателя, подавляющей воздействие внешних возмущений на выход  $z_k$  системы (1), свелась к задаче минимизации функции  $f(K, L, \alpha)$ , определяемой соотношением (9), при ограничении

$$(10) \quad \frac{1}{\alpha} A_{K,L} P A_{K,L}^T - P + \frac{\delta^2}{1 - \alpha} D_L D_L^T = 0$$

по переменным  $P \in \mathbb{S}^{2n}$ ,  $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$  и скалярному параметру  $\alpha > 0$ . Запись  $f(K, L, \alpha)$  подчеркивает, что при заданных  $K$ ,  $L$  и  $\alpha$  матрица  $P$  находится из уравнения Ляпунова (10); тем самым независимыми переменными являются  $K$ ,  $L$  и  $\alpha$ .

Установленные в [11] свойства функции  $f(\alpha) = \text{tr } C P C^T$  (при некоторой фиксированной стабилизирующей паре  $(K, L)$ ), могут быть полностью перенесены на рассматриваемый случай. В частности, функция  $f(\alpha)$  определена, положительна и строго выпукла на интервале  $\rho^2(A_{K,L}) < \alpha < 1$ , а ее значения стремятся к бесконечности на концах этого интервала.

Минимизацию функции  $f(\alpha)$  можно эффективно осуществлять при помощи метода Ньютона. А именно, зададимся некоторым начальным приближением  $\rho^2(A_{K,L}) < \alpha_0 < 1$ , например  $\alpha_0 = (1 + \rho^2(A_{K,L}))/2$  и применим итерационный процесс

$$(11) \quad \alpha_{j+1} = \alpha_j - \frac{f'(\alpha_j)}{f''(\alpha_j)}.$$

При этом согласно [11]

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \text{tr } Y \left( \frac{\delta^2}{(1 - \alpha)^2} D_L D_L^T - \frac{1}{\alpha^2} A_{K,L} P A_{K,L}^T \right), \\ f''(\alpha) &= 2 \text{tr } Y \left( \frac{\delta^2}{(1 - \alpha)^3} D_L D_L^T + \frac{1}{\alpha^3} A_{K,L} (P - X) A_{K,L}^T \right), \end{aligned}$$

где  $P$ ,  $Y$  и  $X$  – решения дискретных уравнений Ляпунова (10),

$$\frac{1}{\alpha} A_{K,L}^T Y A_{K,L} - Y + C^T C = 0$$

и

$$\frac{1}{\alpha} A_{K,L} X A_{K,L}^T - X + \frac{\delta^2}{(1 - \alpha)^2} D_L D_L^T - \frac{1}{\alpha^2} A_{K,L} P A_{K,L}^T = 0$$

соответственно.

Следующая теорема гарантирует глобальную сходимость алгоритма.

*Теорема 2* [11]. В методе (11) справедливы оценки

$$|\alpha_j - \alpha^*| \leq \frac{f''(\alpha_0)}{2^j f''(\alpha^*)} |\alpha_0 - \alpha^*|, \quad |\alpha_{j+1} - \alpha^*| \leq c |\alpha_j - \alpha^*|^2,$$

где  $c > 0$  – некоторая константа (она может быть выписана явно).

Первая оценка гарантирует глобальную сходимость метода (быстрее, чем геометрическая прогрессия с коэффициентом  $1/2$ ), а вторая – квадратичную сходимость в окрестности решения.

Перейдем к минимизации функции

$$f(K, L) \doteq \min_{\alpha} f(K, L, \alpha),$$

предварительно исследовав ее свойства.

*Лемма 1* [1]. Функция  $f(K, L)$  определена и положительна на множестве  $\mathcal{S}$  стабилизирующих матричных пар.

Множество определения  $\mathcal{S}$  функции  $f(K, L)$  может быть невыпуклым и несвязным, причем, как и в непрерывном случае, его границы могут быть негладкими (см. [12]).

*Лемма 2.* Функция  $f(K, L, \alpha)$  определена при  $(K, L) \in \mathcal{S}$  и для  $\rho^2(A_{K,L}) < \alpha < 1$ . На этом допустимом множестве она дифференцируема, причем градиент дается выражениями

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} f(K, L, \alpha) &= \operatorname{tr} Y \left( \frac{\delta^2}{(1-\alpha)^2} D_L D_L^T - \frac{1}{\alpha^2} A_{K,L} P A_{K,L}^T \right), \\ (12) \quad \frac{1}{2} \nabla_K f(K, L, \alpha) &= \frac{1}{\alpha} M_1^T Y A_{K,L} P N_1^T + \chi_K K, \end{aligned}$$

$$(13) \quad \frac{1}{2} \nabla_L f(K, L, \alpha) = \frac{1}{\alpha} M_2^T Y A_{K,L} P N_2^T - \frac{\delta^2}{1-\alpha} (0 \quad I) Y D_L D_1^T + \chi_L L,$$

где матрица  $Y$  является решением дискретного уравнения Ляпунова

$$(14) \quad \frac{1}{\alpha} A_{K,L}^T Y A_{K,L} - Y + C^T C = 0.$$

Минимум функции  $f(K, L, \alpha)$  достигается во внутренней точке допустимого множества и определяется необходимыми условиями

$$\nabla_K f(K, L, \alpha) = 0, \quad \nabla_L f(K, L, \alpha) = 0, \quad \nabla_{\alpha} f(K, L, \alpha) = 0.$$

При этом  $f(K, L, \alpha)$  как функция от  $\alpha$  строго выпукла на  $\rho^2(A_{K,L}) < \alpha < 1$  и достигает минимума во внутренней точке этого интервала.

Доказательство этого и последующего утверждений приведены в Приложении.

Далее – для получения простых количественных оценок в лемме 3 – в минимизируемую функцию (9) вводится регуляризующая добавка  $\varepsilon$  следующим образом:

$$f(K, L, \alpha) = \operatorname{tr} P(C^T C + \varepsilon I) + \chi_K \|K\|_F^2 + \chi_L \|L\|_F^2 \rightarrow \min_{K, L, \alpha}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Требование необходимости ее введения можно существенно ослабить, но цель сейчас состоит в получении наиболее простых и наглядных результатов.

*Лемма 3. На множестве  $\mathcal{S}$  функция  $f(K, L)$  коэрцитивна (т.е. стремится к бесконечности на его границе), причем справедливы следующие оценки:*

$$(15) \quad \begin{aligned} f(K, L) &\geq \frac{\delta^2}{1 - \rho^2(A_{K,L})} \frac{\varepsilon}{1 - \sigma_{\min}^2(A_{K,L})} \|D_L\|_F^2, \\ f(K, L) &\geq \chi_K \|K\|^2, \\ f(K, L) &\geq \chi_L \|L\|^2. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение множество уровня

$$\mathcal{S}_0 = \{(K, L) \in \mathcal{S} : f(K, L) \leq f(K_0, L_0)\}.$$

Из леммы 3 вытекает очевидное

*Следствие 1. Для любых  $(K_0, L_0) \in \mathcal{S}$  множество  $\mathcal{S}_0$  ограничено.*

С другой стороны, у функции  $f(K, L)$  на множестве  $\mathcal{S}_0$  существует точка минимума (как у непрерывной – в силу свойств решения уравнения Ляпунова – функции на компактном множестве), но множество  $\mathcal{S}_0$  не имеет общих точек с границей  $\mathcal{S}$  в силу (15). Выше было показано, что  $f(K, L)$  дифференцируема на  $\mathcal{S}_0$ . Следовательно, справедливо

*Следствие 2. Существует точка минимума  $(K_*, L_*)$  на множестве  $\mathcal{S}$ , и в ней градиент функции  $f(K, L)$  обращается в нуль.*

Градиенты функции  $f(K, L)$  по  $K$  и по  $L$  не являются липшицевыми на множестве  $\mathcal{S}$  стабилизирующих регуляторов, однако можно показать, что они обладают этим свойством на его подмножестве  $\mathcal{S}_0$ .

Полученные свойства минимизируемой функции и ее производных позволяют построить метод минимизации и обосновать его сходимость.

## 5. Алгоритм решения

Предлагаются следующий итеративный подход к решению задачи (8)–(9). В его основе лежит попеременное применение градиентного метода по переменным  $K$  и  $L$  и минимизация по параметру  $\alpha$  по методу Ньютона.

*Алгоритм минимизации  $f(K, L, \alpha)$ :*

1. Задаемся параметрами  $\varepsilon > 0$ ,  $0 < \tau_K, \tau_L < 1$  и начальной стабилизирующей матричной парой  $(K_0, L_0)$ .

Вычисляем величину

$$\alpha_0 = \frac{1 + \rho^2(\mathcal{A} + M_1 K_0 N_1 + M_2 L_0 N_2)}{2}.$$

2. На  $j$ -й итерации имеем величины  $K_j$ ,  $L_j$  и  $\alpha_j$ .

Вычисляем градиент  $H_j^K = \nabla_K f(K_j, L_j, \alpha_j)$ .



3. Делаем шаг градиентного метода по  $K$ :

$$K_{j+1} = K_j - \gamma_j^K H_j^K,$$

при этом длину шага  $\gamma_j^K > 0$  подбираем дроблением  $\gamma_K$  до выполнения условий:

а.  $K_{j+1}$  обращает матрицу  $(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L_j N_2)/\sqrt{\alpha_j}$  в шуровскую;

б.  $f(K_{j+1}) \leq f(K_j) - \tau_K \gamma_j^K \|H_j^K\|^2$ .

4. Имея величину  $K_{j+1}$ , вычисляем градиент  $H_j^L = \nabla_L f(K_{j+1}, L_j, \alpha_j)$ .

5. Делаем шаг градиентного метода по  $L$ :

$$L_{j+1} = L_j - \gamma_j^L H_j^L,$$

при этом длину шага  $\gamma_j^L > 0$  подбираем дроблением  $\gamma_L$  до выполнения условий:

а.  $L_{j+1}$  обращает матрицу  $(\mathcal{A} + M_1 K_{j+1} N_1 + M_2 L N_2)/\sqrt{\alpha_j}$  в шуровскую;

б.  $f(L_{j+1}) \leq f(L_j) - \tau_L \gamma_j^L \|H_j^L\|^2$ .

6. Для полученных  $K_{j+1}$ ,  $L_{j+1}$  решаем задачу минимизации  $f(K_{j+1}, L_{j+1}, \alpha)$  по  $\alpha$  и получаем  $\alpha_{j+1}$ . Переходим к п. 2.

*Условие остановки:*

$$\|H_j^K\| \leq \varepsilon, \quad \|H_j^L\| \leq \varepsilon.$$

В этом случае текущую пару  $(K_j, L_j)$  принимаем за приближенное решение и завершаем работу алгоритма.

Важным моментом является выбор пробного шага градиентного метода. Весьма перспективным является его выбор из следующих соображений. Пусть для некоторых  $K$ ,  $L$ ,  $\alpha$  и  $P \succ 0$  выполняется

$$\frac{1}{\alpha}(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L N_2)P(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2 L N_2)^T - P + \frac{\delta^2}{1 - \alpha} D_L D_L^T = 0.$$

Рассмотрим приращение по  $K$ :

$$K \rightarrow K - \gamma H^K, \quad H^K = \nabla_K f(K, L, \alpha),$$

и найдем, для каких  $\gamma$  матрица  $\mathcal{A} + M_1(K - \gamma H^K)N_1 + M_2 L N_2$  останется устойчивой (шуровской).

Для этого достаточно потребовать, чтобы  $P$  оставалась матрицей квадратичной функции Ляпунова для  $\mathcal{A} + M_1(K - \gamma H^K)N_1 + M_2 L N_2$ , т.е.

$$(\mathcal{A} + M_1(K - \gamma H^K)N_1 + M_2 L N_2)P(\mathcal{A} + M_1(K - \gamma H^K)N_1 + M_2 L N_2)^T - P \prec 0$$

или

$$\begin{pmatrix} P & \mathcal{A} + M_1(K - \gamma H^K)N_1 + M_2 L N_2 \\ (\mathcal{A} + M_1(K - \gamma H^K)N_1 + M_2 L N_2)^T & P^{-1} \end{pmatrix} \succ 0.$$

Последнему соотношению можно придать вид

$$\begin{pmatrix} P & A_{K,L} \\ A_{K,L}^T & P^{-1} \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} 0 & M_1 H^K N_1 \\ (M_1 H^K N_1)^T & 0 \end{pmatrix} \succ 0,$$

откуда, согласно [14],

$$0 < \gamma^K < \min_{\lambda_i > 0} \lambda_i \left( \begin{pmatrix} P & A_{K,L} \\ A_{K,L}^T & P^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & M_1 H^K N_1 \\ (M_1 H^K N_1)^T & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Аналогичным образом предлагается выбирать пробный шаг при оптимизации по переменной  $L$ :

$$0 < \gamma^L < \min_{\lambda_i > 0} \lambda_i \left( \begin{pmatrix} P & A_{K,L} \\ A_{K,L}^T & P^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & M_2 H^L N_2 \\ (M_2 H^L N_2)^T & 0 \end{pmatrix} \right),$$

где  $H^L = \nabla_L f(K, L, \alpha)$ .

## 6. Пример: управление двухмассовой системой

Рассмотрим *двухмассовую систему* – систему из двух твердых тел с массами  $m_1$  и  $m_2$ , соединенных пружиной с коэффициентом упругости  $k$ , скользящих без трения вдоль неподвижного горизонтального стержня (рис. 1). К левому телу приложено управление  $u$ ; на каждое из тел воздействуют внешние возмущения  $w_1$  и  $w_2$ .

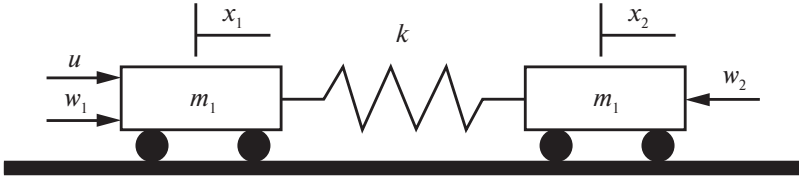


Рис. 1. Двухмассовая система.

Обозначим через  $x_1, v_1$  координату и скорость левого тела, а через  $x_2, v_2$  – правого тела. Наблюдению доступен зашумленный двумерный выход

$$y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + w_3 \end{pmatrix},$$

а в качестве регулируемого выхода рассмотрим

$$z = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Будем полагать ограниченным в каждый момент времени объединенный вектор внешних возмущений:

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad \|w\| \leq 0,2.$$

При единичных параметрах двухмассовой системы и интервале дискретизации  $\Delta = 0,1$  приходим к системе вида (1) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0,9950 & 0,0050 & 0,0998 & 0,0002 \\ 0,0050 & 0,9950 & 0,0002 & 0,0998 \\ -0,0997 & 0,0997 & 0,9950 & 0,0050 \\ 0,0997 & -0,0997 & 0,0050 & 0,9950 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0,0050 \\ 0,0000 \\ 0,0998 \\ 0,0002 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0,0050 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0050 & 0 \\ 0,0998 & 0,0002 & 0 \\ 0,0002 & 0,0998 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зададимся некоторой начальной стабилизирующей парой

$$K_0 = \begin{pmatrix} -6,9566 & 2,6036 & -4,1281 & -5,8682 \end{pmatrix}, \quad L_0 = \begin{pmatrix} 3,2037 & -0,6077 \\ 3,5790 & 0,3961 \\ 3,3299 & 0,1006 \\ -7,0446 & 5,3352 \end{pmatrix}$$

и положим

$$\chi_K = \chi_L = 0,1.$$

Итеративная процедура в соответствии со сформулированным выше алгоритмом приводит к матрице динамического регулятора

$$K^* = \begin{pmatrix} -1,0311 & 0,6922 & -1,8064 & 0,0088 \end{pmatrix}, \quad \|K^*\| = 2,1921,$$

матрице наблюдателя

$$L^* = \begin{pmatrix} 1,1630 & -0,1759 \\ 1,8237 & 0,3432 \\ 2,0765 & 0,0714 \\ -3,7874 & 2,6783 \end{pmatrix}, \quad \|L^*\| = 5,2735$$

и соответствующему ограничивающему эллипсу с матрицей

$$\mathcal{C}P^*\mathcal{C}^T = \begin{pmatrix} 0,3974 & 0,1478 \\ 0,1478 & 0,4115 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } \mathcal{C}P^*\mathcal{C}^T = 0,8089;$$

при этом  $\alpha^* = 0,9714$ . Динамика изменения критерия  $f(K, L)$  показана на рис. 2.

Положив теперь

$$\chi_K = \chi_L = 0,01,$$

находим матрицу динамического регулятора

$$K'^* = \begin{pmatrix} -1,3591 & 0,8130 & -2,5922 & 0,0186 \end{pmatrix}, \quad \|K'^*\| = 3,0378,$$

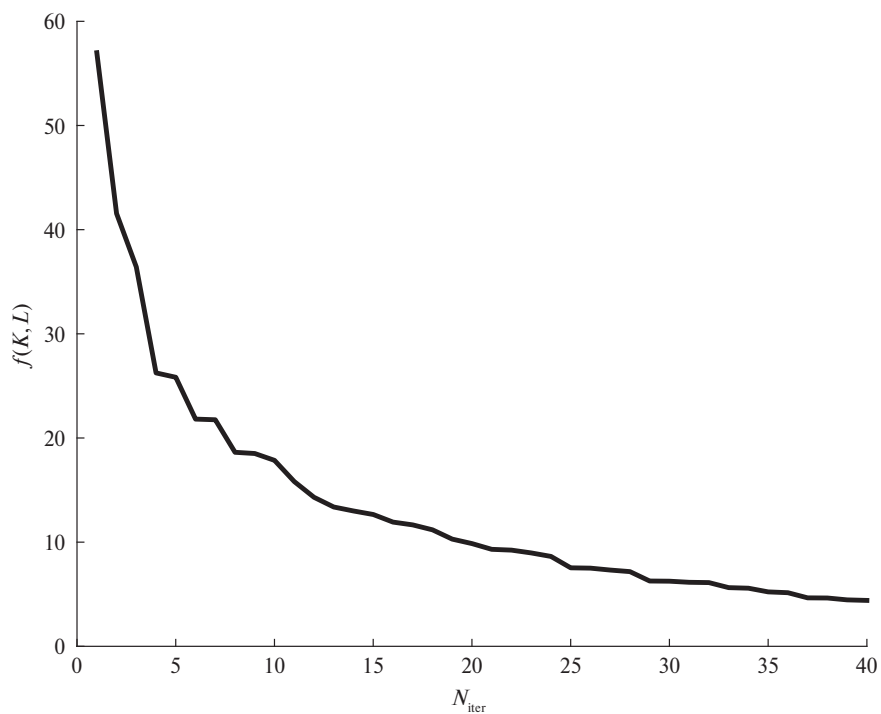


Рис. 2. Оптимизационная процедура при  $\chi_K = \chi_L = 0,1$ .

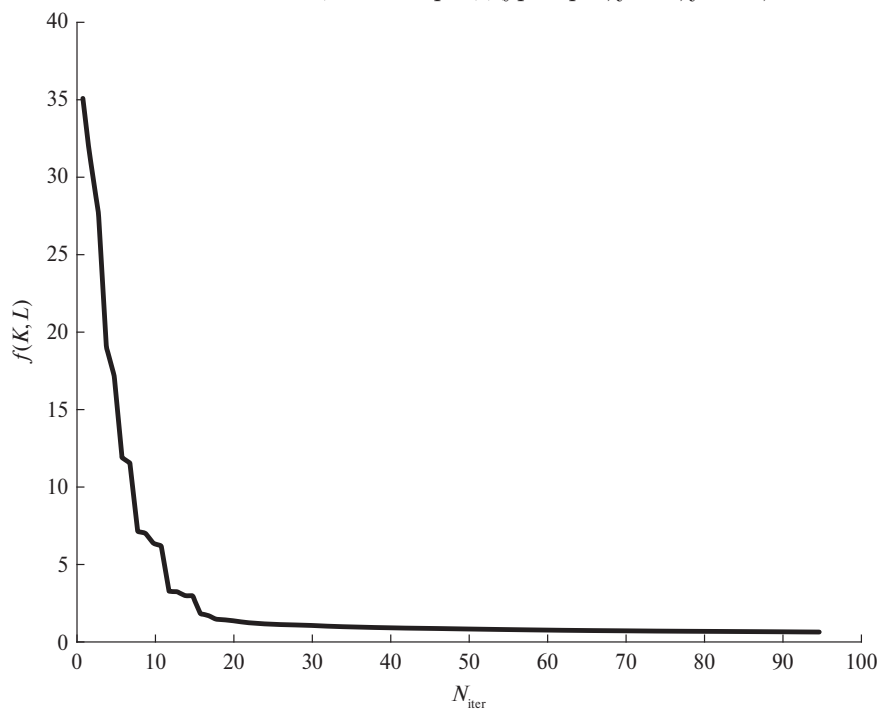


Рис. 3. Оптимизационная процедура при  $\chi_K = \chi_L = 0,01$ .

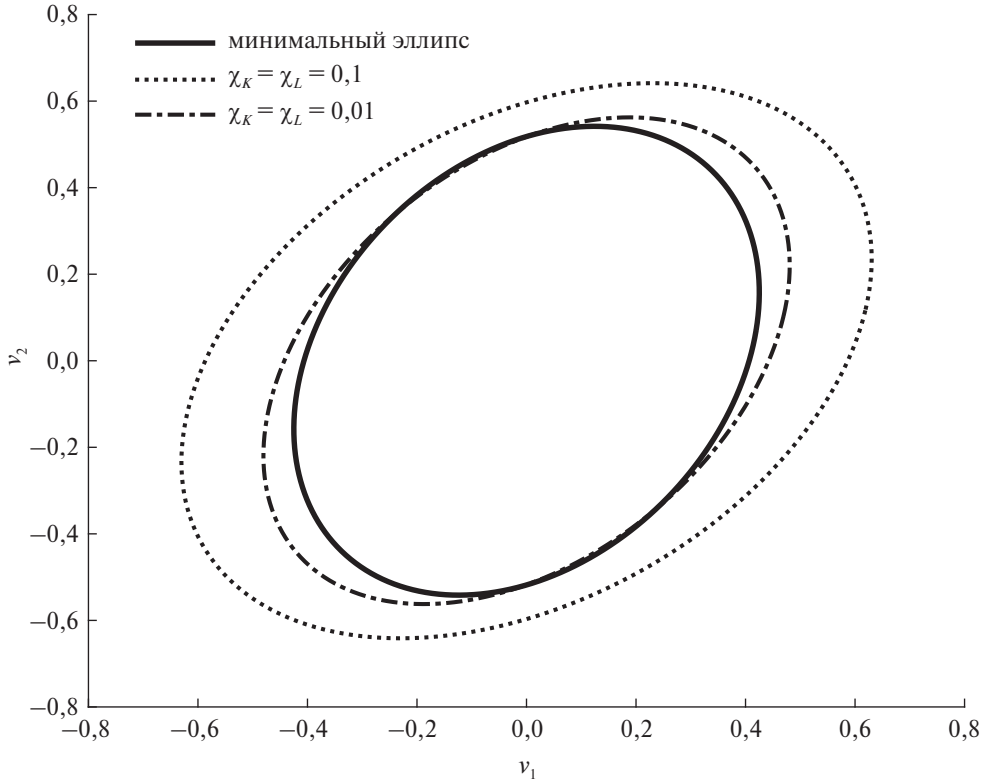


Рис. 4. Ограничивающие эллипсы.

матрицу наблюдателя

$$L'^* = \begin{pmatrix} 0,6899 & -0,0066 \\ 2,7589 & 0,5861 \\ 3,0458 & 0,1396 \\ -5,3792 & 3,8014 \end{pmatrix}, \quad \|L'^*\| = 7,4014$$

и соответствующий ограничивающий эллипс с матрицей

$$CP'^*C^T = \begin{pmatrix} 0,2310 & 0,1056 \\ 0,1056 & 0,3163 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } CP'^*C^T = 0,5473;$$

при этом  $\alpha^* = 0,9677$ . Динамика изменения критерия  $f(K, L)$  показана на рис. 3.

Как видно, уменьшение штрафных коэффициентов привело к ожидаемому результату: размер ограничивающего эллипса уменьшился (примерно на треть); “платой” за это явился рост нормы матриц динамического регулятора и наблюдателя (приблизительно на 40%).

Для сравнения, воспользовавшись для решения этой же задачи подходом, предложенным в [10], находим матрицу динамического регулятора

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} -15,2436 & 10,0353 & -10,7619 & -8,9984 \end{pmatrix}, \quad \|\hat{K}\| = 23,0188,$$

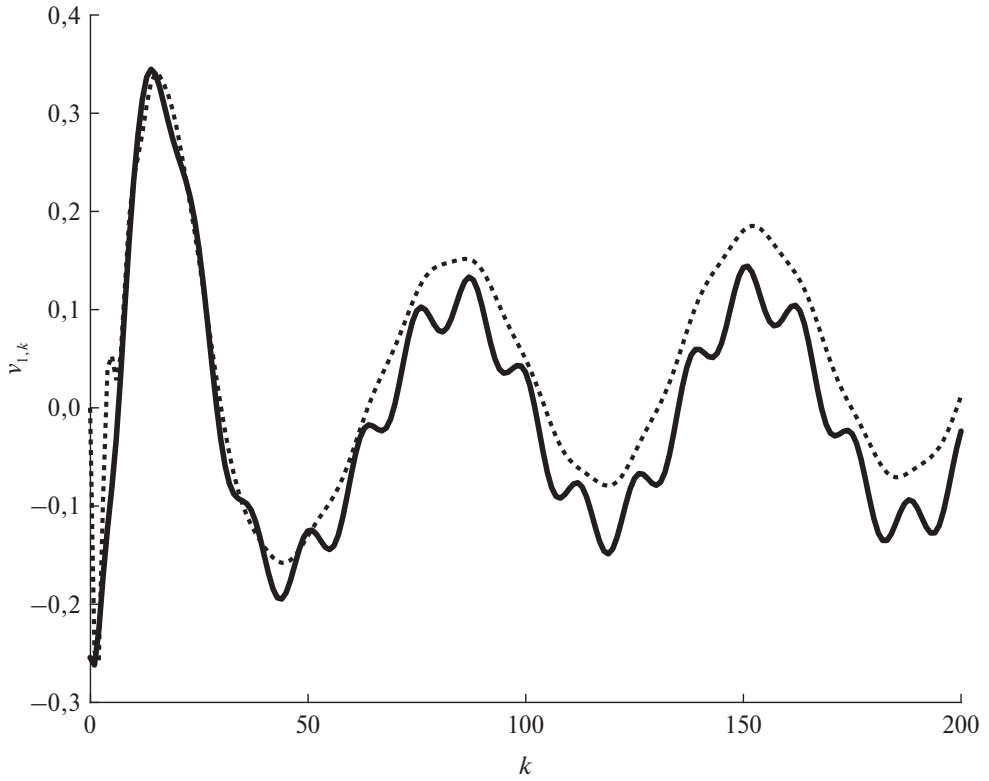


Рис. 5. Динамика координаты  $v_1$  (сплошная линия) и ее оценки  $\hat{v}_1$  (точечная линия).

и матрицу наблюдателя

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 3,0329 & 0,0004 \\ 14,9866 & 0,0818 \\ 20,9524 & 0,0080 \\ 6,6502 & 0,0405 \end{pmatrix}, \quad \|\hat{L}\| = 26,7774,$$

соответствующие минимальному ограничивающему эллипсу с матрицей

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 0,1807 & 0,0672 \\ 0,0672 & 0,2935 \end{pmatrix}, \quad \text{tr } \hat{R} = 0,4742.$$

Как видно, построенный ограничивающий эллипс с матрицей  $\mathcal{C}P'^*\mathcal{C}^T$  превышает оптимальный (с матрицей  $\hat{R}$ ) всего лишь на 15%, тогда как соответствующие матрицы регулятора и наблюдателя отличаются по норме в несколько раз (для матрицы регулятора – почти на порядок).

На рис. 4 сплошной линией показан оптимальный ограничивающий эллипс, предоставляемый методом [10]; точечной линией показан полученный в соответствии с предлагаемой оптимизационной процедурой ограничивающий эллипс при  $\chi_K = \chi_L = 0,1$ , а штрихпунктиром – при  $\chi_K = \chi_L = 0,01$ .

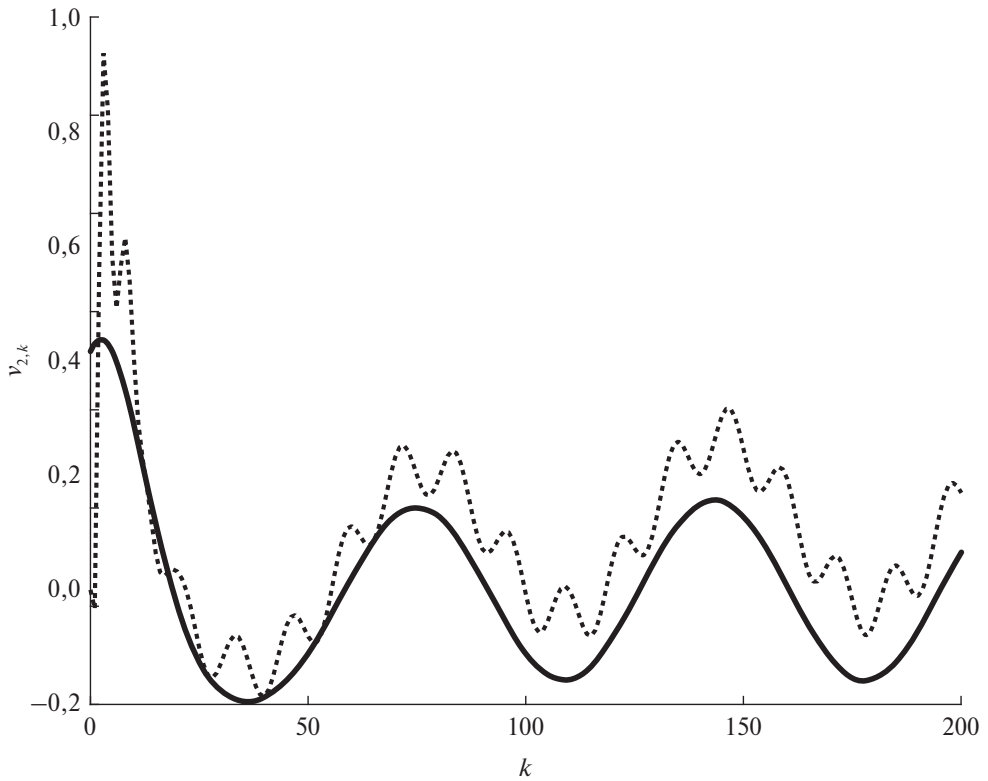


Рис. 6. Динамика координаты  $v_2$  (сплошная линия) и ее оценки  $\hat{v}_2$  (точечная линия).

На рис. 5 и 6 сплошной линией показаны истинные траектории оцениваемых координат системы (при некотором начальном условии и допустимом внешнем возмущении), а точечной линией – их оценки, предоставляемые построенной парой  $(K^*, L^*)$ .

## 7. Заключение

Предложен новый подход к задаче подавления неслучайных ограниченных внешних возмущений в линейных дискретных системах управления при помощи динамической обратной связи по выходу. Подход основан на сведении исходной задачи к задаче матричной оптимизации, далее она решается градиентным методом. Конечно, возможно использование заметно более быстрых методов минимизации первого порядка, чем градиентный метод (в частности – метод сопряженных градиентов). Подробная проверка более эффективных методов предполагается в будущем; пока важна принципиальная возможность и эффективность нового подхода. Его практически-ориентированной особенностью является возможность ограничения величины матрицы наблюдателя и матрицы регулятора.

Одним из возможных направлений для дальнейших исследований является обобщение предлагаемого подхода на различные робастные постановки задачи.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство леммы 2.* Дифференцирование по  $\alpha$  производится в соответствии с результатами, приведенными в разделе 4.

Для дифференцирования по  $K$  функции (9) при ограничении в виде дискретного уравнения Ляпунова

$$(П.1) \quad \frac{1}{\alpha} A_{K,L} P A_{K,L}^T - P + \frac{\delta^2}{1-\alpha} D_L D_L^T = 0$$

относительно матрицы  $P$  инвариантного эллипсоида придадим величине  $K$  приращение  $\Delta K$  и обозначим соответствующее приращение  $P$  через  $\Delta P$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} (\mathcal{A} + M_1(K + \Delta K)N_1 + M_2 L N_2)(P + \Delta P)(\mathcal{A} + M_1(K + \Delta K)N_1 + M_2 L N_2)^T - \\ - (P + \Delta P) + \frac{\delta^2}{1-\alpha} D_L D_L^T = 0. \end{aligned}$$

Оставляя обозначение  $\Delta P$  для главной части приращения, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} (A_{K,L} P A_{K,L}^T + A_{K,L} P (M_1 \Delta K N_1)^T + M_1 \Delta K N_1 P A_{K,L}^T + A_{K,L} \Delta P A_{K,L}^T) - \\ - (P + \Delta P) + \frac{\delta^2}{1-\alpha} D_L D_L^T = 0. \end{aligned}$$

После вычитания уравнения (П.1) из этого уравнения имеем:

$$(П.2) \quad \frac{1}{\alpha} A_{K,L} \Delta P A_{K,L}^T - \Delta P + \frac{1}{\alpha} (A_{K,L} P (M_1 \Delta K N_1)^T + M_1 \Delta K N_1 P A_{K,L}^T) = 0.$$

Вычислим приращение функции  $f(K, L, \alpha)$  по  $K$ , линеаризуя соответствующие величины:

$$\begin{aligned} \Delta_K f(K, L, \alpha) &= f(K + \Delta K, L, \alpha) - f(K, L, \alpha) = \\ &= \text{tr } \mathcal{C}(P + \Delta P) \mathcal{C}^T + \chi_K \|K + \Delta K\|_F^2 - (\text{tr } \mathcal{C} P \mathcal{C}^T + \chi_K \|K\|_F^2) = \\ &= \text{tr } \mathcal{C} \Delta P \mathcal{C}^T + \chi_K (\langle K + \Delta K, K + \Delta K \rangle - \langle K, K \rangle) = \\ &= \text{tr } \mathcal{C} \Delta P \mathcal{C}^T + \chi_K (\text{tr } K^T \Delta K + \text{tr } (\Delta K)^T K) = \text{tr } \Delta P \mathcal{C}^T \mathcal{C} + 2\chi_K \text{tr } K^T \Delta K. \end{aligned}$$

Из двойственных уравнений Ляпунова (П.2) и (14) имеем (см. [11, лемма П.1.1])

$$\text{tr } \Delta P \mathcal{C}^T \mathcal{C} = \frac{2}{\alpha} \text{tr } Y M_1 \Delta K N_1 P A_{K,L}^T$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \Delta_K f(K, L, \alpha) &= \frac{2}{\alpha} \text{tr } Y M_1 \Delta K N_1 P A_{K,L}^T + 2\chi_K \text{tr } K^T \Delta K = \\ &= 2 \left\langle \frac{1}{\alpha} M_1^T Y A_{K,L} P N_1^T + \chi_K K, \Delta K \right\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к соотношению (12).



Перейдем к дифференцированию функции  $f(K, L, \alpha)$  по  $L$ : придадим величине  $L$  приращение  $\Delta L$  и обозначим соответствующее приращение  $P$  через  $\Delta P$ :

$$\frac{1}{\alpha}(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2(L + \Delta L)N_2)(P + \Delta P)(\mathcal{A} + M_1 K N_1 + M_2(L + \Delta L)N_2)^T - \\ -(P + \Delta P) + \frac{\delta^2}{1 - \alpha} \left( D - (L + \Delta L)D_1 \right) \left( D - (L + \Delta L)D_1 \right)^T = 0.$$

Оставляя обозначение  $\Delta P$  для главной части приращения, получаем

$$\frac{1}{\alpha}(A_{K,L} P A_{K,L}^T + A_{K,L} P (M_2 \Delta L N_2)^T + M_2 \Delta L N_2 P A_{K,L}^T) - \\ -(P + \Delta P) + \frac{\delta^2}{1 - \alpha} \left[ D_L D_L^T - \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta L D_1 \end{pmatrix} D_L^T - D_L \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta L D_1 \end{pmatrix}^T \right] = 0.$$

После вычитания уравнения (П.1) из этого уравнения имеем

$$(П.3) \quad \frac{1}{\alpha} A_{K,L} \Delta P A_{K,L}^T - \Delta P + \frac{1}{\alpha} (A_{K,L} P (M_2 \Delta L N_2)^T + M_2 \Delta L N_2 P A_{K,L}^T) - \\ - \frac{\delta^2}{1 - \alpha} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta L D_1 \end{pmatrix} D_L^T + D_L \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta L D_1 \end{pmatrix}^T \right] = 0.$$

Вычислим приращение функции  $f(K, L, \alpha)$  по  $L$ , линейризуя соответствующие величины:

$$\Delta_L f(K, L, \alpha) = f(K, L + \Delta L, \alpha) - f(K, L, \alpha) = \\ = \text{tr} \mathcal{C}(P + \Delta P) \mathcal{C}^T + \chi_L \|L + \Delta L\|_F^2 - (\text{tr} \mathcal{C} P \mathcal{C}^T + \chi_L \|L\|_F^2) = \\ = \text{tr} \mathcal{C} \Delta P \mathcal{C}^T + \chi_L (\langle L + \Delta L, L + \Delta L \rangle - \langle L, L \rangle) = \\ = \text{tr} \mathcal{C} \Delta P \mathcal{C}^T + \chi_L (\text{tr} L^T \Delta L + \text{tr} (\Delta L)^T L) = \text{tr} \Delta P \mathcal{C}^T \mathcal{C} + 2\chi_L \text{tr} L^T \Delta L.$$

Из двойственных уравнений (П.3) и (14) имеем

$$\text{tr} \Delta P \mathcal{C}^T \mathcal{C} = 2 \text{tr} Y \left[ \frac{1}{\alpha} M_2 \Delta L N_2 P A_{K,L}^T - \frac{\delta^2}{1 - \alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta L D_1 \end{pmatrix} D_L^T \right]$$

и поэтому

$$\Delta_L f(K, L, \alpha) = \\ = 2 \text{tr} Y \left[ \frac{1}{\alpha} M_2 \Delta L N_2 P A_{K,L}^T - \frac{\delta^2}{1 - \alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta L D_1 \end{pmatrix} D_L^T \right] + 2\chi_L \text{tr} L^T \Delta L = \\ = 2 \text{tr} \left[ \frac{1}{\alpha} N_2 P A_{K,L}^T Y M_2 \Delta L - \frac{\delta^2}{1 - \alpha} D_1 D_L^T Y \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \Delta L \right] + 2\chi_L \text{tr} L^T \Delta L = \\ = 2 \left\langle \frac{1}{\alpha} M_2^T Y A_{K,L} P N_2^T - \frac{\delta^2}{1 - \alpha} \begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix} Y D_L D_1^T + \chi_L L, \Delta L \right\rangle,$$

откуда и следует формула (13).

Лемма 2 доказана.

*Доказательство леммы 3.* Рассмотрим последовательность стабилизирующих матричных пар  $\{K_j, L_j\} \in \mathcal{S}$  такую, что

$$(K_j, L_j) \rightarrow (K, L) \in \partial \mathcal{S},$$

т.е.  $\rho(A_{K,L}) = 1$ . Это означает, что для любого  $\epsilon > 0$  найдется число  $N = N(\epsilon)$  такое, что неравенство

$$|\rho(A_{K_j, L_j}) - \rho(A_{K, L})| = 1 - \rho(A_{K_j, L_j}) < \epsilon$$

справедливо для всех  $j \geq N(\epsilon)$ .

Пусть  $P_j$  – решение дискретного уравнения Ляпунова (10), ассоциированного с парой  $(K_j, L_j)$ :

$$\frac{1}{\alpha_j} A_{K_j, L_j} P_j A_{K_j, L_j}^T - P_j + \frac{\delta^2}{1 - \alpha_j} D_{L_j} D_{L_j}^T = 0,$$

а  $Y_j$  – решение двойственного к нему дискретного уравнения Ляпунова

$$\frac{1}{\alpha_j} A_{K_j, L_j}^T Y_j A_{K_j, L_j} - Y_j + \mathcal{C}^T \mathcal{C} + \varepsilon I = 0.$$

Тогда (см. [12, лемма П.1])

$$\begin{aligned} f(K_j, L_j) &= \text{tr } P_j (\mathcal{C}^T \mathcal{C} + \varepsilon I) + \chi_K \|K_j\|_F^2 + \chi_L \|L_j\|_F^2 \geq \text{tr } P_j (\mathcal{C}^T \mathcal{C} + \varepsilon I) = \\ &= \text{tr } Y_j \frac{\delta^2}{1 - \alpha_j} D_{L_j} D_{L_j}^T \geq \frac{\delta^2}{1 - \alpha_j} \lambda_{\min}(Y_j) \text{tr } (D_{L_j} D_{L_j}^T) \geq \\ &\geq \frac{\delta^2}{1 - \alpha_j} \frac{\lambda_{\min}(\mathcal{C}^T \mathcal{C} + \varepsilon I)}{1 - \sigma_{\min}^2(A_{K_j, L_j})} \text{tr } (D_{L_j} D_{L_j}^T) \geq \\ &\geq \frac{\delta^2}{1 - \rho^2(A_{K_j, L_j})} \frac{\varepsilon}{1 - \sigma_{\min}^2(A_{K_j, L_j})} \|D_{L_j}\|_F^2 \geq \\ &\geq \frac{\delta^2}{\epsilon} \frac{\varepsilon}{1 - \sigma_{\min}^2(A_{K_j, L_j})} \|D_{L_j}\|_F^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} +\infty, \end{aligned}$$

поскольку

$$\rho^2(A_{K_j, L_j}) < \alpha_j < 1.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} f(K_j, L_j) &= \text{tr } P_j (\mathcal{C}^T \mathcal{C} + \varepsilon I) + \chi_K \|K_j\|_F^2 + \chi_L \|L_j\|_F^2 \geq \\ &\geq \chi_K \|K_j\|_F^2 \geq \chi_K \|K_j\|^2 \xrightarrow{\|K_j\| \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} f(K_j, L_j) &= \text{tr } P_j (\mathcal{C}^T \mathcal{C} + \varepsilon I) + \chi_K \|K_j\|_F^2 + \chi_L \|L_j\|_F^2 \geq \\ &\geq \chi_L \|L_j\|_F^2 \geq \chi_L \|L_j\|^2 \xrightarrow{\|L_j\| \rightarrow +\infty} +\infty. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Синтез обратной связи по выходу при помощи наблюдателя как задача оптимизации // *АиТ*. 2022. № 3. С. 7–32.  
*Polyak B.T., Khlebnikov M.V.* Observer-Aided Output Feedback Synthesis as an Optimization Problem // *Autom. Remote Control*. 2022. V. 83. No. 3. P. 303–324.
2. Коровин С.К., Фомичев В.В. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: Физматлит, 2007.
3. Luenberger D.G. An Introduction to Observers // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1971. V. AC-16. No. 6. P. 596–620.
4. Levine W., Athans M. On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1970. V. 15. No. 1. P. 44–48.
5. Fatkhullin I., Polyak B. Optimizing Static Linear Feedback: Gradient Method // *SIAM J. Control Optim.* 2021. V. 59. No. 5. P. 3887–3911.
6. Поляк Б.Т., Топунов М.В. Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // *АиТ*. 2008. № 5. С. 72–90.  
*Polyak B.T., Topunov M.V.* Suppression of Bounded Exogenous Disturbances: Output Feedback // *Autom. Remote Control*. 2008. V. 69. No. 5. P. 801–818.
7. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., et al. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
8. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
9. Peregudin A., Furtat I. New Duality Relations in Linear Systems and Optimal Control Under Bounded Disturbances // *IEEE Trans. Autom. Control*. 2024. V. 69. No. 8. P. 5569–5576.
10. Dogadin E., Peregudin A., Shirokih D. Optimal Control for Discrete-Time Systems under Bounded Disturbances // *Proc. 2024 American Control Conf. (ACC)*. Toronto, Canada, 2024. P. 1940–1945.
11. Хлебников М.В. Сравнение гарантирующего и калмановского фильтров // *АиТ*. 2023. № 4. С. 64–95.  
*Khlebnikov M.V.* A Comparison of Guaranteeing and Kalman Filters // *Autom. Remote Control*. 2023. V. 84. No. 4. P. 434–459.
12. Поляк Б.Т., Хлебников М.В. Синтез статического регулятора для подавления внешних возмущений как задача оптимизации // *АиТ*. 2021. № 9. С. 86–115.  
*Polyak B.T., Khlebnikov M.V.* Static Controller Synthesis for Peak-to-Peak Gain Minimization as an Optimization Problem // *Autom. Remote Control*. 2021. V. 82. No. 9. P. 1530–1553.
13. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью // *АиТ*. 2021. № 1. С. 3–54.  
*Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S.* Linear Matrix Inequalities in Control Systems with Uncertainty // *Autom. Remote Control*. 2021. V. 82. No. 1. P. 1–40.

14. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Техника D-разбиения при решении линейных матричных неравенств // АиТ. 2006. № 11. С. 159–174.  
*Polyak B.T., Shcherbakov P.S. The D-Decomposition Technique for Linear Matrix Inequalities // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No. 11. P. 1847–1861.*

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.*

Поступила в редакцию 10.06.2024

После доработки 26.09.2024

Принята к публикации 22.10.2024