

© 2024 г. А.В. ПЕСТЕРЕВ, д-р физ.-мат. наук (alexanderpesterev.ap@gmail.com),
Ю.В. МОРОЗОВ, канд. физ.-мат. наук (tot1983@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ГЛОБАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ИНТЕГРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ В ВИДЕ ВЛОЖЕННЫХ САТУРАТОРОВ

Исследуется устойчивость системы с переключениями, возникающей при применении обратной связи в виде вложенных сатураторов для стабилизации интегратора 2-го порядка. Использование обратной связи в виде вложенных сатураторов позволяет легко учесть ограниченность ресурса управления и обеспечить выполнение фазового ограничения на скорость приближения к положению равновесия, что особенно важно при больших начальных отклонениях. Построена функция Ляпунова замкнутой системы, с помощью которой доказана ее глобальная асимптотическая устойчивость при любых положительных коэффициентах обратной связи.

Ключевые слова: стабилизация цепочки двух интеграторов, система с переключениями, глобальная асимптотическая устойчивость, вложенные сатураторы, функция Ляпунова.

DOI: 10.31857/S0005231024040032, **EDN:** ZGUVAJ

1. Введение

Одна из актуальных проблем теории управления – стабилизация цепочек интеграторов. Интерес к данной проблематике обусловлен тем, что во многих приложениях исходные модели, например модели механических планарных систем, заданы в виде цепочек интеграторов; более того, управления, разработанные для цепочек интеграторов, легко обобщаются на другие классы систем. Широкое распространение в последние десятилетия получил подход, основанный на применении специальных обратных связей в виде вложенных негладких функций насыщения – сатураторов. Настоящая работа является продолжением опубликованного в [1] исследования устойчивости интегратора 2-го порядка с обратной связью в виде вложенных сатураторов.

Интерес к обратной связи в виде вложенных сатураторов объясняется рядом замечательных свойств полученной замкнутой системы. Преимущества таких обратных связей, а также актуальность задачи стабилизации цепочек интеграторов обсуждаются во многих публикациях, например в [1–8]. Применение обратной связи в виде вложенных сатураторов, однако, приводит к достаточно сложной нелинейной системе с переключениями, анализ устойчивости которой представляет нетривиальную задачу. Доказать глобальную

устойчивость удается преимущественно для систем 2-го порядка [1, 2, 5] и для обратных связей определенного вида. Так, например, основанное на построении функции Ляпунова доказательство устойчивости системы 2-го порядка в [2] неприменимо к рассмотренной в [1] системе с обратным порядком вложенности сатураторов (см. более подробно [1]). Общий случай n -мерного интегратора обсуждается в [3, 4]. Однако глобальная устойчивость системы, замкнутой обратной связью в виде n вложенных сатураторов, была доказана только для случая, когда предельные значения вложенных функций насыщения удовлетворяют определенным, на практике редко выполнимым условиям [3, Theorem 2.1],

В [1] доказана глобальная асимптотическая устойчивость интегратора 2-го порядка с обратной связью в виде вложенных сатураторов для одного частного случая, когда коэффициенты обратной связи выбираются из однопараметрического семейства. Цель настоящей работы – представить более простое, основанное на построении функции Ляпунова доказательство глобальной асимптотической устойчивости, справедливое и в общем случае произвольного выбора коэффициентов.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача стабилизации интегратора 2-го порядка

$$(1) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = U(x), \quad x \equiv [x_1, x_2]^T,$$

с помощью непрерывной ограниченной обратной связи в виде вложенных сатураторов:

$$(2) \quad U(x) = -\text{sat}_{k_4}(k_3(x_2 + \text{sat}_{k_2}(k_1 x_1))),$$

где $\text{sat}_d(\cdot)$, $d = \{k_2, k_4\}$ – негладкая функция насыщения, $\text{sat}_d(w) = w$, когда $|w| \leq d$, и $\text{sat}_d(w) = d \text{sign}(w)$ при $|w| > d$; k_4 – ресурс управления и k_2 – ограничение на максимальную скорость приближения к равновесию. Правая часть (2) задает разбиение фазовой плоскости на множества D_1 , D_2 и D_3 (рис. 1). Область D_1 включает все точки, в которых оба сатуратора ненасыщены (наклонная полоса, ограниченная пунктирными линиями на рис. 1); множество $D_2 = D_2^- \cup D_2^+$ – точки, в которых насыщен только внутренний сатуратор; $D_3 = D_3^- \cup D_3^+$ – все точки, в которых насыщен внешний сатуратор (более подробно см. [1, 7]). Из формулы (2) видно, что $U(x)$ – кусочно-линейная функция, а замкнутая система (1), (2) представляет собой систему с переключениями, состоящую из пяти линейных систем, переключения между которыми зависят от состояния и происходят при пересечении границ между областями.

Исходная, зависящая от четырех параметров задача, сводится к исследованию двухпараметрической задачи, если перейти к безразмерным переменным $\tilde{x}_1 = k_4 x_1 / k_2^2$, $\tilde{x}_2 = x_2 / k_2$ и времени $\tilde{t} = k_4 t / k_2$ [1]. В безразмерной модели два

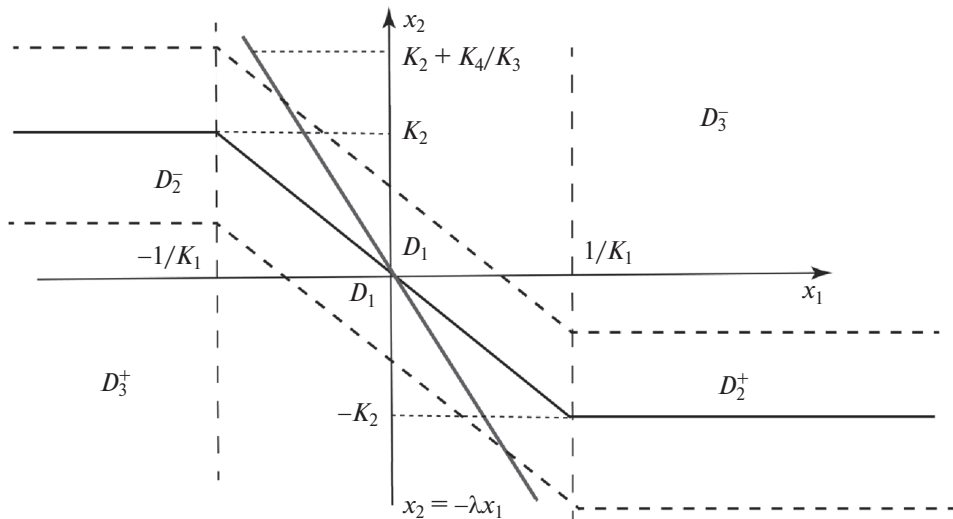


Рис. 1. Разбиение фазовой плоскости на множества D_1 , D_2 и D_3 .

коэффициента обращаются в единицу, $\tilde{k}_4 = \tilde{k}_2 = 1$, а два других определены формулами $\tilde{k}_1 = k_1 k_2^2 / k_4$ и $\tilde{k}_3 = k_2 k_3 / k_4$. Всюду далее будем полагать все переменные и константы безразмерными и использовать для них прежнее обозначение (без тильды). В безразмерной модели обратная связь (2) принимает вид [1]:

$$(3) \quad U(x_1, x_2) = -\text{sat}(k_3(x_2 + \text{sat}(k_1 x_1))),$$

где обозначение $\text{sat}(\cdot)$ без нижнего индекса используется для функции насыщения с единичным пределом: $\text{sat}(\cdot) \equiv \text{sat}_1(\cdot)$.

Отметим, что обратная связь (3) обеспечивает выполнение фазового ограничения $|x_2(t)| \leq 1$ при любом начальном удалении $x_1(0)$, коль скоро $|x_2(0)| \leq 1$ [7]; т.е. множество $\Pi = \{x : |x_2| \leq 1\}$ является инвариантной областью системы (1), (3). Кроме того, соответствующим выбором коэффициентов k_1 и k_3 легко обеспечить желаемый тип положения равновесия (узел или фокус) и любое желаемое значение экспоненциальной скорости убывания отклонения в окрестности точки равновесия [1, 7].

Нетрудно показать также, что и при любых начальных условиях начиная с некоторого момента времени указанное фазовое ограничение также выполняется. Действительно, рассмотрим функцию $v(x) = x_2^2$, положительно определенную при всех $x_2 \neq 0$, и продифференцируем ее в силу системы (1), (3): $\dot{v}(x) = -2x_2 \text{sat}(k_3(x_2 + \text{sat}(k_1 x_1)))$. Функция $\dot{v}(x)$ определенно отрицательна в области $|x_2| > 1$; т.е. множество $|x_2| \leq 1$ является притягивающим для решений системы (1), (3). Отсюда с учетом того, что никакая целая траектория не может принадлежать множеству $|x_2| = 1$, следует, что траектория системы за конечное время обязательно попадет в инвариантную область $|x_2| \leq 1$.

В [1] доказана глобальная асимптотическая устойчивость системы (1), (3) в частном случае выбора коэффициентов k_1 и k_3 из однопараметрического семейства:

$$(4) \quad k_1 = \lambda/2, \quad k_3 = 2\lambda, \quad \lambda > 0,$$

где λ – экспоненциальная скорость убывания отклонения в окрестности нуля. Доказательство несложно, но достаточно громоздко и существенно опирается на тот факт, что коэффициенты k_1 и k_3 связаны соотношениями (4), и поэтому не может быть обобщено на случай независимого выбора коэффициентов.

Представленное ниже доказательство глобальной асимптотической устойчивости основано на построении функции Ляпунова системы (1), (3) и справедливо для любых положительных коэффициентах обратной связи.

3. Доказательство глобальной асимптотической устойчивости

Теорема 1. Система (1), (3) глобально асимптотически устойчива при любых положительных коэффициентах.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$(5) \quad V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} \text{sat}(k_3 \text{sat}(k_1 s)) ds$$

и докажем, что она является функцией Ляпунова системы (1), (3). Из определения функции насыщения следуют неравенства $\text{sat}(s)s > 0$ и $\text{sat}(f(s))s > 0$, $\forall s \neq 0$, где $f(s)$ – любая монотонно неубывающая непрерывная функция такая, что $f(0) = 0$. Отсюда с учетом монотонности функции $\text{sat}(s)$ следует положительность интегрального члена в (5), а значит, и функции $V(x)$ во всем R^2 . Очевидно также, что $V(x)$ стремится к бесконечности при $\|x\| \rightarrow \infty$. Дифференцируя $V(x)$ в силу системы (1), (3), получим

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -x_2 \text{sat}(k_3(x_2 + \text{sat}(k_1 x_1))) + \text{sat}(k_3 \text{sat}(k_1 x_1))x_2 = \\ &= -[\text{sat}(k_3(x_2 + \text{sat}(k_1 x_1))) - \text{sat}(k_3 \text{sat}(k_1 x_1))]x_2. \end{aligned}$$

Так как сатуратор – монотонно неубывающая функция, справедливо неравенство $[\text{sat}(s + s_0) - \text{sat}(s_0)]s \geq 0 \quad \forall s \neq 0, \quad \forall s_0$, откуда следует знакоотрицательность производной: $\dot{V}(x) \leq 0$.

При $k_3 < 1$ выражение в квадратных скобках, а с ним и производная, обращается в ноль только на множестве $x_2 = 0$, которое не содержит ни одной целой траектории, кроме $x = 0$. Если $k_3 \geq 1$, производная дополнительно обращается в ноль на подмножествах областей D_3^+ и D_3^- , в которых оба слагаемых в квадратных скобках одновременно равны $+1$ и -1 соответственно. Легко видеть, что указанные множества также не могут содержать целых

траекторий. Действительно, траекториями системы в D_3^- и D_3^+ являются параболы

$$x_1 = \mp \frac{1}{2} x_2^2 + C.$$

Так как ни одна из парабол не может целиком лежать в D_3^- или D_3^+ (см. рис. 1) и при этом движение происходит с постоянным ускорением, система через конечное время неизбежно попадает либо в D_1 , либо в D_2 .

Таким образом, функция $V(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Барбашина–Красовского [9] и, следовательно, начало координат является асимптотически устойчивым положением равновесия системы (1), (3) в целом. Теорема доказана.

4. Численная иллюстрация

В качестве иллюстрации были построены линии уровня функции Ляпунова (5) для системы (1), (3) с коэффициентами $k_1 = 1$ и $k_3 = 3$. На рис. 2 показана одна из линий уровня (сплошная линия) и несколько фазовых траекторий (пунктирные линии), начинающихся на ней. Начальные точки траекторий помечены кружочками. Как видно из рисунка, ни одна из траекторий не выходит за пределы инвариантного множества, ограниченного линией уровня. Сегменты траекторий, идущие вдоль границы множества, лежат в подмножествах D_3^- и D_3^+ , в которых производная функции Ляпунова в силу системы равна нулю. После пересечения границы с областью D_1 или D_2 производная становится отрицательной и траектория уходит внутрь инвариантной области. Другие численные примеры, иллюстрирующие эффективность обратной связи в виде вложенных сатураторов, приведены в [6, 7].

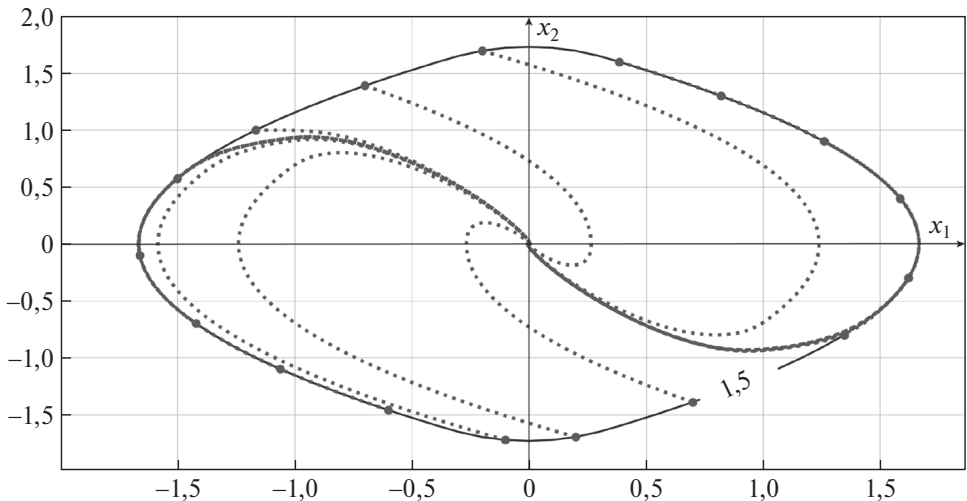


Рис. 2. Линия уровня функции Ляпунова и фазовые траектории.

5. Заключение

Рассмотрена задача стабилизации цепочки двух интеграторов обратной связью в виде двух вложенных сатураторов. С помощью перехода к безразмерным переменным исходная, зависящая от четырех коэффициентов обратной связи задача сводится к исследованию двухпараметрической системы. Обсуждаются преимущества обратной связи в виде вложенных сатураторов. Главный результат работы – построение функции Ляпунова, с помощью которой доказана глобальная устойчивость замкнутой системы при любых положительных коэффициентах обратной связи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пестерев А.В.* Глобальная устойчивость аффинной системы второго порядка с переключениями // *АиТ.* 2023. № 9. С. 95–105.
Pesterev A. V. Global Stability of a Second-Order Affine Switching System // *Autom. Remote Control.* 2023. V. 84. No. 9. pp. 1085–1093.
2. *Hua M.-D., Samson C.* Time sub-optimal nonlinear pi and pid controllers applied to longitudinal headway car control // *Int. J. Control.* 2011. V. 84. P. 1717–1728.
3. *Teel A.R.* Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls // *Sys. & Cont. Lett.* 1992. V. 18. No. 3. P. 165–171.
4. *Teel A.R.* A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation // *Trans. Autom. Contr. IEEE,* 1996. V. 41. No. 9. P. 1256–1270.
5. *Olfati-Saber R.* Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles // Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology. Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, 2001.
6. *Pesterev A. V., Morozov Yu. V., Matrosov I. V.* On Optimal Selection of Coefficients of a Controller in the Point Stabilization Problem for a Robot-wheel // *Communicat. Comput. Inform. Sci. (CCIS).* 2020. V. 1340. P. 236–249.
7. *Pesterev A. V., Morozov Yu. V.* Optimizing coefficients of a controller in the point stabilization problem for a robot-wheel // *Lect. Notes Comput. Sci.* V. 13078. Cham, Switzerland: Springer, 2021. P. 191–202.
8. *Pesterev A. V., Morozov Yu. V.* The Best Ellipsoidal Estimates of Invariant Sets for a Third-Order Switched Affine System // *Lect. Notes Comput. Sci.* V. 13781 Cham, Switzerland: Springer, 2022. P. 66–78.
9. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. Серия: Физико-математическая библиотека инженера. М.: Наука. 1967.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 08.02.2024

После доработки 21.03.2024

Принята к публикации 29.03.2024