

Нелинейные системы

© 2024 г. Ж.Т. ЖУСУБАЛИЕВ, д-р техн. наук (zhanybai@gmail.com),
Д.В. ТИТОВ, д-р техн. наук (amazing2004@inbox.ru),
О.О. ЯНОЧКИНА, канд. техн. наук (yanooolga@gmail.com)
(Юго-Западный государственный университет, Курск),
У.А. СОПУЕВ, канд. физ. мат. наук (ulansopuev@mail.ru)
(Ошский государственный университет, Ош)

О БИФУРКАЦИЯХ ГРАНИЧНОГО СТОЛКНОВЕНИЯ В ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЕ¹

Исследуются бифуркации граничного столкновения («border-collision bifurcations») в кусочно-гладком отображении, описывающем поведение импульсной системы автоматического управления. Показано, что в области колебательных движений такое отображение является кусочно-линейным непрерывным. Известно, что в кусочно-линейных отображениях классические бифуркации, например бифуркация удвоения периода, касательная и виллообразная бифуркации, становятся вырожденными («degenerate bifurcations»), сочетая свойства как гладких, так и бифуркаций граничного столкновения. Выявлены необычные свойства рассматриваемого класса динамических систем, проявляющиеся в том, что бифуркации граничного столкновения коразмерности один, включая и вырожденные, происходят, когда пара точек периодической орбиты одновременно сталкивается с двумя многообразиями переклечения. Численно и аналитически изучены бифуркации «слияния» («merging»), «расширения» («expansion»), связанные с гомоклиническими бифуркациями неустойчивых периодических орбит.

Ключевые слова: импульсная система, дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, бимодальное кусочно-линейное отображение, бифуркации граничного столкновения, вырожденные бифуркации, бифуркации «слияния» и «расширения», хаотические колебания.

DOI: 10.31857/S0005231024020027, EDN: UMFZYH

1. Введение

Рассмотрим импульсную систему, поведение которой описывается дифференциальным уравнением с разрывной правой частью [1–8]

$$(1) \quad \frac{T}{T_0} \dot{x} + x = f(t, \varphi) - \mu, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$f(t, \varphi) \equiv f(t + 1, \varphi), \quad 0 \leq \mu < 1, \quad \varphi = q - x(t).$$

¹ Жусубалиев Ж.Т. поддержан Минобрнауки РФ программой стратегического академического лидерства «Приоритет-2030» (1.7.21/S – 2, 1.71.23П). Работа Сопуева У.А. поддержана грантом № 14-22 Ошского государственного университета.

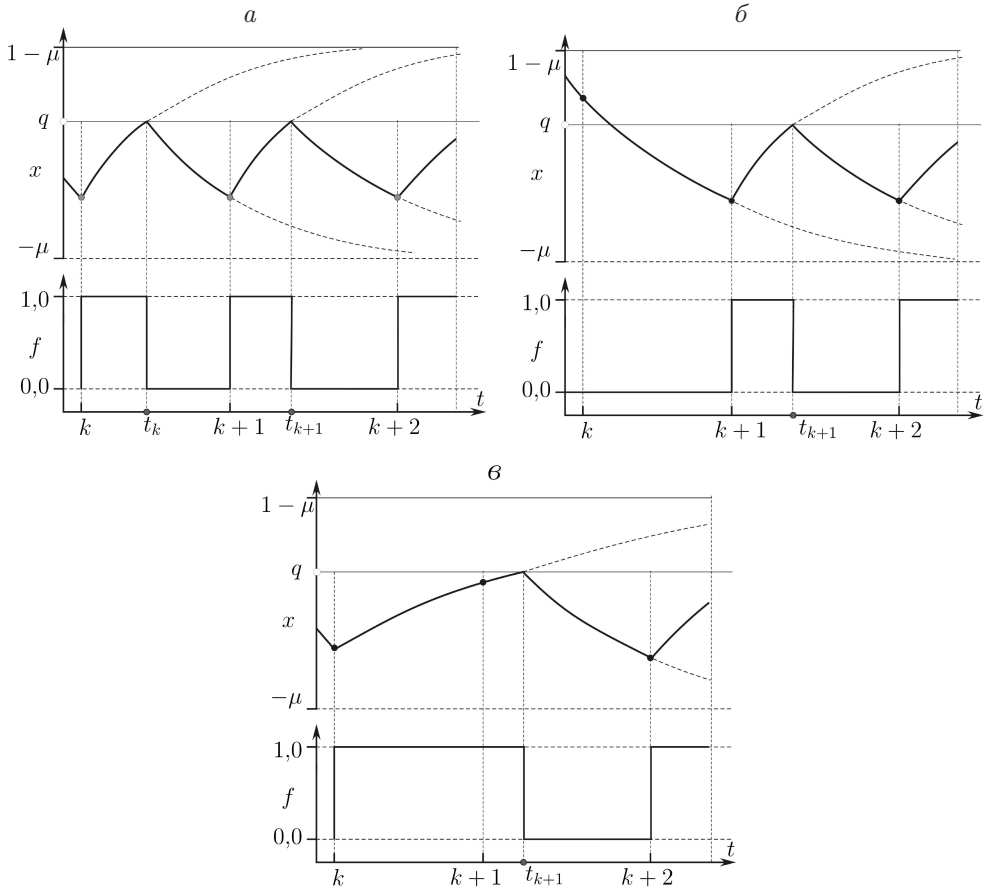


Рис. 1. Формирование импульсов управления.

Здесь, как и в [8], x – выход системы; $\dot{x}$ – производная x по безразмерному времени t ; T_0 – период модуляции [8]; T – постоянная времени; q, μ – параметры; φ, f – сигналы на входе и выходе модулятора.

В пределах каждого из временных интервалов $k < t < k + 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$ выходной сигнал f модулятора определяется как [8, 9]:

$$(2) \quad f = \begin{cases} 1, & k \leq t \leq t_k; \\ 0, & t_k < t < k + 1. \end{cases}$$

В (2) t_k – моменты переключения модулятора $f = 1 \rightarrow f = 0$ (рис. 1),

$$(3) \quad t_k = \begin{cases} k, & \varphi_k^+ \leq 0; \\ t_{k*}, & \varphi_k^+ > 0 \text{ и } \varphi_{k+1}^- < 0; \\ k + 1, & \varphi_{k+1}^- \geq 0, \end{cases}$$

$$\varphi_k^\pm = \lim_{t \rightarrow k \pm 0} \varphi(t), \quad k \leq t_k \leq k + 1.$$

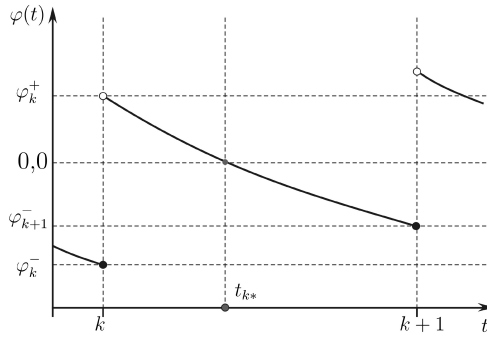


Рис. 2. График функции $\varphi(t)$ для случая когда $\varphi_k^+ > 0$ и $\varphi_{k+1}^- < 0$.

Здесь

$$\varphi(t) = q - x(t),$$

где

$$x(t) = 1 - \mu + e^{\lambda(t-k)} (x_k - 1 + \mu), \quad \lambda = -T_0/T$$

есть решение уравнения (1) при $f = 1$ с начальным условием $x(t)|_{t=k} = x_k$, а t_{k*} – корень уравнения

$$(4) \quad \varphi(t) = q - x(t) = q - 1 + \mu - e^{\lambda(t-k)} = 0.$$

Легко заметить, что функция $\varphi(t)$ монотонно убывает на промежутке $t \in [k, k+1]$, принимая на концах $[k+0, k+1-0]$ значения φ_k^+ и φ_{k+1}^- такие, что $\varphi_k^+ > \varphi_{k+1}^-$, где $-\mu < x_k < 1 - \mu$.

Если $\varphi_k^+ > 0$ и $\varphi_{k+1}^- < 0$, то в силу монотонности $\varphi(t)$ уравнение (4) имеет единственное решение

$$(5) \quad t_{k*} = k + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{q - 1 + \mu}{x_k - 1 + \mu}, \quad k < t_{k*} < k + 1.$$

График функции $\varphi(t)$ изображен на рис. 2.

Если $\varphi_k^+ < 0$ или $\varphi_{k+1}^- > 0$, то уравнение (4) не имеет корня. Тогда $t_k = k$, если $\varphi_k^+ < 0$, и $t_k = k + 1$, если $\varphi_{k+1}^- > 0$. В этих случаях говорят, что модулятор насыщается.

Период периодического решения уравнения (1) в общем случае является кратным периоду внешнего воздействия. Решение с таким периодом будем называть циклом периода m или m -циклом, $m = 1, \dots$

Параметры: $q = 0,356$; $\lambda = -0,6$, $0 < \mu < 1$. Здесь μ – варьируемый параметр. На рис. 3 приведены результаты численных расчетов, иллюстрирующие периодические и хаотические решения (1) при разных значениях параметра μ . На рис. 3,а изображены $x(t)$ и выходной сигнал f модулятора, отвечающие периодическим колебаниям с периодом внешнего воздействия (1-циклу)

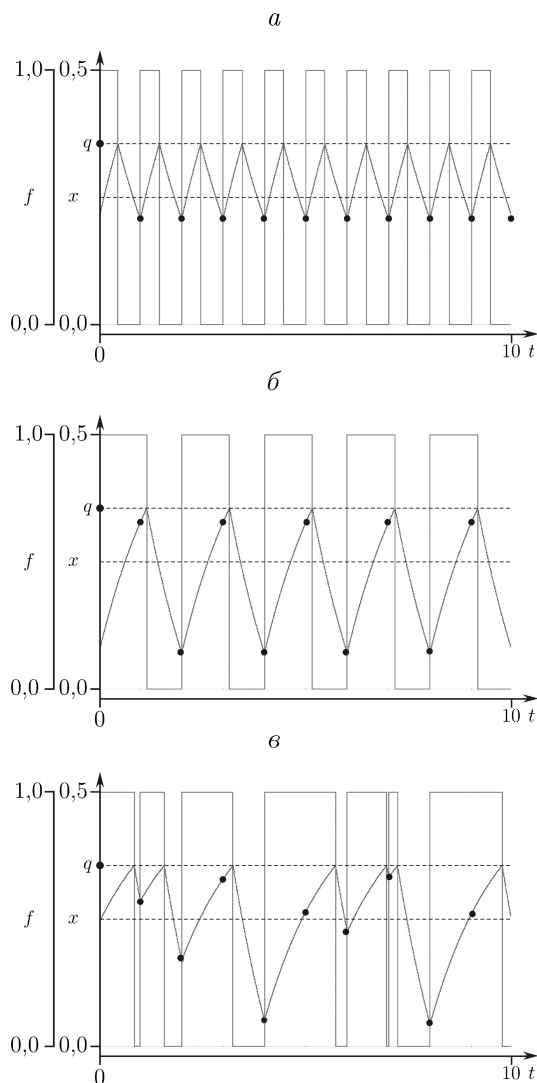


Рис. 3. *а* – Периодические колебания с $m = 1$: $x(t) = x(t+1)$, $\mu = 0,18$. *б* – Колебания с удвоенным периодом $m = 2$: $x(t) = x(t+2)$, $\mu = 0,36$. *в* – Хаотический режим, $\mu = 0,4754$.

$x(t) = x(t+1)$ при $\mu = 0,18$. Рисунок 3,б демонстрирует периодическое решение (1) с удвоенным периодом (2-цикл) $x(t) = x(t+2)$ ($\mu = 0,36$). На рис. 3,в показан пример хаотических колебаний ($\mu = 0,4754$).

Рисунок 3 иллюстрирует типичное свойство нелинейных импульсных систем [7, 9]. Исследование механизмов перехода от одного колебательного движения к другому при вариации параметров в целях прогнозирования, обнаружения и подавления нерегулярных колебаний, управления колебательной системой представляет одну из актуальных задач современной нелинейной динамики и теории управления [10, 11].

Дифференциальные уравнения вида (1) обычно сводятся к кусочно-гладким отображениям $F : I \rightarrow I$, $I \subseteq \mathbb{R}$

$$(6) \quad F : x \mapsto F(x) = \begin{cases} F_1(x), & x \in S_1; \\ F_2(x), & x \in S_2; \\ \dots\dots\dots \\ F_p(x), & x \in S_p, \quad p \in \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

Каждая из F_i , $i = 1, \dots, p$ в (6) есть C^r – гладкая функция ($r \geq 1$) по x в своей области определения S_i ; $\mathbb{N}^+$ – множество положительных целых чисел (без нуля). Границы S_i называются многообразиями переключения («switching manifolds»), в которых F является недифференцируемой. Неподвижные точки отображения (6) отвечают периодическим решениям уравнения (1) с периодом внешнего воздействия.

При вариации параметров неподвижная точка, попадает на одну из границ, разделяющих области определения функций F_i , $i = 1, \dots, p$. Это приводит к изменениям топологической структуры фазового пространства из-за нарушения условия существования неподвижной точки или цикла. Подобные перестройки фазового пространства кусочно-гладких отображений называются бифуркациями граничного столкновения («border collision bifurcations») [12] или «*C-бифуркациями*» [13–15].

Бифуркации граничного столкновения не имеют аналогов в гладких динамических системах и индуцируют чрезвычайно большое многообразие нелинейных явлений, например удвоение или «умножение» периода колебаний, одновременное возникновение нескольких сосуществующих аттракторов [16, 17] или рождение из неподвижной точки хаотического аттрактора в результате единственной бифуркации [12, 18–25].

Обратим внимание на то, что такие бифуркации не связаны с нарушением условия гиперболичности неподвижных точек или циклов, поэтому они не поддаются описанию и интерпретации методами классической теории бифуркаций [26, 27].

В представленной работе численно и аналитически изучаются бифуркации граничного столкновения в кусочно-гладком отображении, полученном из уравнения (1). Показано, что в области колебательных движений такое отображение является кусочно-линейным непрерывным. Известно, что в кусочно-линейных отображениях классические бифуркации, например, бифуркация удвоения периода, касательная и виллообразная бифуркации, становятся вырожденными («degenerate bifurcations») [25, 28], сочетая свойства как гладких, так и бифуркаций граничного столкновения.

Главная особенность рассматриваемой динамической системы состоит в том, что бифуркации граничного столкновения коразмерности один, включая и вырожденные, происходят, когда пара точек периодической орбиты одновременно сталкивается с двумя многообразиями переключения.

Исследуются так называемые бифуркации «слияния» («merging»), «расширения» («expansion») [25, 28–31], связанные с гомоклиническими бифуркациями неустойчивых периодических орбит. Бифуркации «слияния» и «расширения» известны еще как «кризисы хаотических аттракторов» («merging crisis», «interior crisis», см., например, [32–34]).

Особый интерес представляют механизмы, при которых хаотический аттрактор претерпевает внезапные изменения. Различают два вида таких переходов. Хаотический аттрактор может внезапно исчезнуть из-за «граничного кризиса» («final bifurcation», «boundary crisis») или внезапно измениться в размерах из-за «внутреннего кризиса» («expansion», «interior crisis»). В представленной работе исследуется «внутренний кризис».

2. Кусочно-гладкое отображение

Во временном интервале $k < t \leq t_k$ сигнал на выходе модулятора $f = 1$ и (1) принимает вид

$$\dot{x} = \lambda(x + \mu - 1), \quad x_k = x(t)|_{t=k},$$

решение которого

$$x(t) = e^{\lambda(t-k)} (x_k - 1 + \mu) + 1 - \mu.$$

Отсюда для $t = t_k$ имеем

$$x(t_k) = e^{\lambda(t_k-k)} (x_k - 1 + \mu) + 1 - \mu.$$

В промежутке $t_k < t < k+1$ сигнал $f = 0$. Подставив $f = 0$ в (1), получим линейное уравнение с постоянным коэффициентом

$$\dot{x} = \lambda(x + \mu) - \mu,$$

решение которого с начальным условием

$$x(t_k) = e^{\lambda(t_k-k)} (x_k - 1 + \mu) + 1 - \mu$$

будет иметь вид

$$x(t) = e^{\lambda(t-k)} (x_k - 1 + \mu) - \mu + e^{\lambda(t-t_k)}.$$

Отсюда для $t = k+1$ следует, что

$$(7) \quad x_{k+1} = e^{\lambda} (x_k - 1 + \mu) - \mu + e^{\lambda(k+1-t_k)}.$$

Обозначив $z_k = t_k - k$, перепишем выражение (7) в виде

$$(8) \quad x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = e^{\lambda} (x - 1 + \mu) - \mu + e^{\lambda(1-z)},$$

где z ($0 \leq z \leq 1$) на основании (3) и формулы (5) находится как:

$$(9) \quad z = \begin{cases} 0, & q - x \leq 0; \\ \frac{1}{\lambda} \ln \frac{q - 1 + \mu}{x - 1 + \mu}, & q - x > 0 \quad \text{и} \quad q - 1 + \mu - e^\lambda(x - 1 + \mu) < 0; \\ 1, & q - 1 + \mu - e^\lambda(x - 1 + \mu) \geq 0. \end{cases}$$

Переменная z называется коэффициентом заполнения импульса (относительная ширина импульса) [8].

Утверждение 1. Функция $F(x)$ (8) является кусочно-линейной. Более того, если $\mu < 1 - q$, то $F(x)$ непрерывна и разрывна, если $\mu > 1 - q$.

Доказательство. Покажем сначала, что в интервалах $x \in (-\infty; 1 - \mu + (q - 1 + \mu)/e^\lambda)$ и $x \in (q + \infty)$ функция $F(x)$ линейно возрастающая. Обозначим $F(x)$ в указанных интервалах через $F_{\mathcal{L}}(x)$ и $F_{\mathcal{R}}(x)$ соответственно. Найдем $F_{\mathcal{L}}(x)$ и $F_{\mathcal{R}}(x)$, подставив соответствующие значения z из (9) в разностное уравнение (8).

Запишем $F(x)$, подставив в (8) значение $z = 1$,

$$F_{\mathcal{L}}(x) = F(x)|_{z=1} = e^\lambda(x - 1 + \mu) - \mu.$$

Функция $F_{\mathcal{L}}(x)$ линейно возрастающая во всей своей области определения $(-\infty; 1 - \mu + (q - 1 + \mu)/e^\lambda)$, так как производная $F'_{\mathcal{L}}(x)$ положительная: $F'_{\mathcal{L}}(x) = e^\lambda > 0$.

Аналогичным образом находим

$$F_{\mathcal{R}}(x) = F(x)|_{z=0} = e^\lambda(x + \mu) - \mu,$$

которая также линейно возрастающая на промежутке $(q; +\infty)$, где она определена.

Остается показать, что на интервале $[1 - \mu + (q - 1 + \mu)/e^\lambda; q]$ функция $F(x)$ линейно убывающая. Обозначим ее через $F_{\mathcal{M}}(x)$:

$$(10) \quad F_{\mathcal{M}}(x) = e^\lambda(x - 1 + \mu) - \mu + e^\lambda/e^{\lambda z}.$$

Разрешим уравнение (4)

$$q - x(t) = 0, \quad x(t) = q - 1 + \mu - e^{\lambda z}(x_k - 1 + \mu), \quad z = t - k$$

относительно $e^{\lambda z}$:

$$(11) \quad e^{\lambda z} = \frac{q - 1 + \mu}{x_k - 1 + \mu}.$$

Подставив полученное выражение (11) для $e^{\lambda z}$ в (10) и опуская индекс k в x_k (см. (11)), получим

$$F_{\mathcal{M}}(x) = \frac{q + \mu}{q - 1 + \mu} e^\lambda(x - 1 + \mu) - \mu.$$

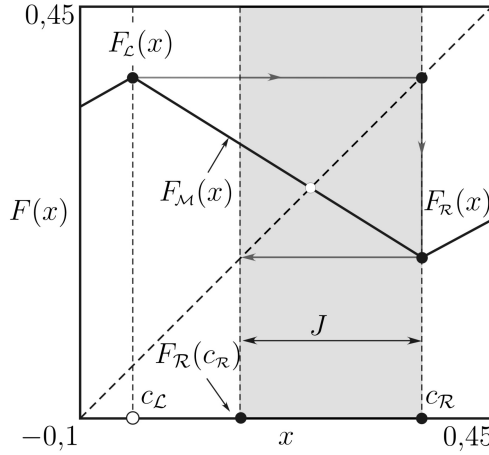


Рис. 4. Бимодальное кусочно-линейное отображение.

Область определения $F_M(x)$ есть промежуток $[1 - \mu + (q - 1 + \mu)/e^\lambda; q]$. Так как $\frac{q+\mu}{q-1+\mu} e^\lambda < 0$, то $F_M(x)$ убывающая.

Докажем теперь непрерывность $F(x)$ на границах, разделяющих $F_L(x)$, $F_M(x)$ и $F_R(x)$. Введем следующие обозначения для границ:

$$c_L = 1 - \mu + \frac{q - 1 + \mu}{e^\lambda}, \quad c_R = q.$$

Так как

$$\begin{aligned} \lim_{x=c_L-0} F(x) &= F_L(c_L); & \lim_{x=c_L+0} F(x) &= F_M(c_L), \\ F_M(c_L) &= F_L(c_L) = e^\lambda(c_L - 1 + \mu) + 1 - \mu, \end{aligned}$$

то $F(x)$ непрерывна в точке $x = c_L$. Аналогично доказывается непрерывность $F(x)$ в точке $x = c_R$.

Легко проверить, что если $\mu = 1 - q$, то $c_L = c_R = q$. Поэтому в области $\mu \geq 1 - q$ функция $F(x)$ становится разрывной:

$$(12) \quad F(x) = \begin{cases} F_L(x) = e^\lambda(x - 1 + \mu) + 1 - \mu, & x < q; \\ F_R(x) = e^\lambda(x + \mu) - \mu, & x \geq q, \\ F_L(q) \neq F_R(q). \end{cases}$$

Итак, если $\mu < 1 - q$, то $F(x)$ необратимая и непрерывная, а при $\mu \geq 1 - q$ — обратимая и разрывная. Утверждение 1 доказано.

Окончательно отображение (8) $F : I \rightarrow R$, $I \subseteq \mathbb{R}$ можно записать в виде

$$(13) \quad F : x \mapsto F(x), \quad F(x) = \begin{cases} F_L(x) = a x + b_L, & x < c_L; \\ F_M(x) = a_M x + b_M, & c_L \leq x \leq c_R; \\ F_R(x) = a x + b_R, & x > c_L, \end{cases}$$

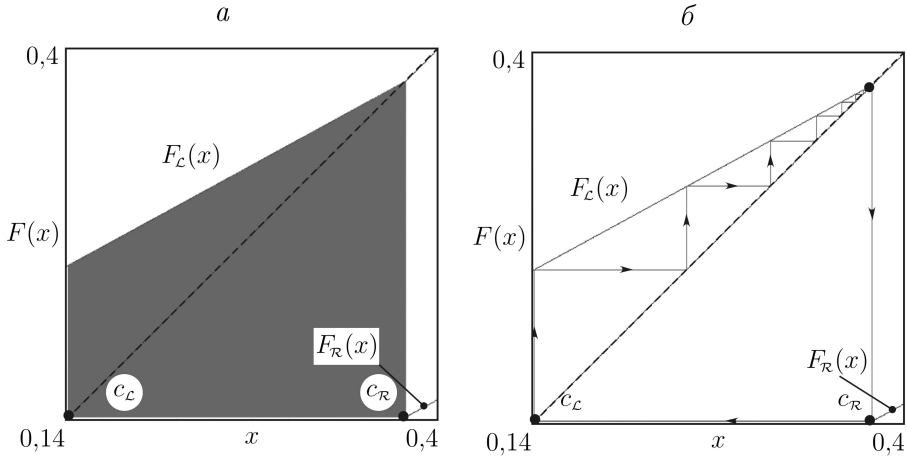


Рис. 5. Разрывное отображение.

где

$$a = e^\lambda, \quad b_L = (1 - \mu)(1 - e^\lambda), \quad b_R = \mu(e^\lambda - 1), \quad a_M = \frac{q + \mu}{q - 1 + \mu} e^\lambda, \\ b_M = \frac{q + \mu}{q - 1 + \mu} e^\lambda (\mu - 1) - \mu, \quad c_L = 1 - \mu + \frac{q - 1 + \mu}{e^\lambda}, \quad c_R = q.$$

График функции $F(x)$ показан на рис. 4. Здесь точки c_L и c_R являются границами, разделяющими области определения функций $F_L(x)$, $F_M(x)$ и $F_R(x)$, и называются многообразиями переключения [21].

Заметим, что разрывное отображение (12) при $\mu > 1 - q$ имеет единственную устойчивую неподвижную точку

$$F_L(x) - x = 0, \quad F_L = a(x - 1 + \mu) + 1 - \mu,$$

отвечающую состоянию равновесия уравнения (1): $x - 1 + \mu = 0$ (рис. 5,а). При $\mu = 1 - q$ существует полуустойчивая неподвижная точка: слева она притягивающая, а справа – отталкивающая (рис. 5,б). Следовательно, область колебательных движений рассматриваемой системы есть $0 < \mu < 1 - q$.

Прежде чем продолжить, напомним основные понятия [25, 35] и отметим некоторые свойства отображения (13), которые понадобятся в дальнейшем. Для этого перепишем (13) в эквивалентной форме: $x_{k+1} = F(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

- Точка $x_1 = F(x_0)$, в которую отображается за одну итерацию F точка $x_0 \in I$, $I \subseteq \mathbb{R}$, называется образом ранга один x_0 .
- Любая точка x_0 , такая что $F(x_0) = x_1$, называется прообразом ранга один точки x_1 , или $x_1 = F^{-1}(x_0)$, где $F^{-1}(x)$ – обратная функция. Образы и прообразы ранга k точки x_0 определяются как $F^k(x_0) = F \circ F \circ \dots \circ F(x_0)$ и $F^{-k}(x_0) = F^{-1} \circ F^{-1} \circ \dots \circ F^{-1}(x_0)$, $k = 1, 2, \dots$ (см. [35]).

- Для каждого $x_0 \in I$ отображение $x_{k+1} = F(x_k)$ определяет некоторую последовательность точек:

$$x_0, F(x_0), F^2(x_0), \dots, F^k(x_0), \dots$$

Эта последовательность называется положительной полутраекторией точки x_0 и обозначается как $\mathcal{O}^+(x_0)$:

$$\mathcal{O}^+(x_0) = \{x_0 \in I : x_0, F^k(x_0), \quad k = 1, 2, \dots\}.$$

- При определении отрицательной $\mathcal{O}^-(x_0)$ полутраектории могут возникнуть сложности из-за необратимости отображения. Но если взять все прообразы x_0 , то

$$\mathcal{O}^-(x_0) = \{x \in I : F^k(x) = x_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

- Если

$$F^m(x_0) - x_0 = 0$$

в $\mathcal{O}^+(x_0)$ при некотором $m > 0$, то x_0 – периодическая точка. Заметим, что если x_0 есть m -периодическая точка, то она является k m -периодической для любого положительного целого k . Поэтому под m понимается наименьший период [26]. Таким образом, если m – наименьшее положительное целое число, обладающее таким свойством, то m называют периодом цикла.

- Пусть x_0 – периодическая точка. Тогда конечная последовательность различных точек

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_m(x_0) &= \{x_0 \in I : x_0, F^k(x_0), \quad k = 1, 2, \dots, m-1\}, \\ F^m(x_0) &= x_0, \quad F^k(x_0) \neq x_0 \end{aligned}$$

называется периодической орбитой периода m или m -циклом. В случае $m = 1$ имеем

$$F(x_0) - x_0 = 0.$$

Тогда говорят, что x_0 есть неподвижная точка или 1-цикл отображения. Очевидно, что орбита неподвижной точки состоит из одной точки $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0\}$ [26].

- Если x_0 – периодическая точка периода m , то она является неподвижной точкой функции $F^m(x)$ [26].
- Множество $E \subseteq I$ является инвариантным F , если $F(E) = E$. Это означает, что если $x \in E$, то $F(x) \in E$. Примерами простейших инвариантных множеств являются неподвижная точка и периодическая орбита.

- Цикл периода m называется устойчивым, если

$$\rho(\mathcal{O}_m) = \left| \prod_{k=0}^{m-1} F'(x_k) \right| < 1, \quad x_k = F^k(x_0),$$

где x_k – периодические точки. Величина $\rho(\mathcal{O}_m)$ называется мультипликатором m -цикла [26].

- Если $\rho(\mathcal{O}_m) \neq 1$, то m -цикл называется гиперболическим, в противном случае – негиперболическим.
- Как можно видеть из рис. 4, функция $F(x)$ имеет два локальных экстремума в точках недифференцируемости (рис. 4,б): максимум в $x = c_{\mathcal{L}} = 1 - \mu + \frac{q-1+\mu}{e^\lambda}$ и минимум в $x = c_{\mathcal{R}} = q$. Точки локальных экстремумов $F(x)$ отображаются в так называемые критические точки [25, 35] $c_0 = F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}})$, $c_1 = F_{\mathcal{R}}(c_{\mathcal{R}})$, являющиеся образами ранга один точек $c_{\mathcal{L}}$ и $c_{\mathcal{R}}$ соответственно.
- Множество J называется поглощающим, если [25]:
 - (а) $F(J) \subseteq J$ (т.е. либо J инвариантно $F(J) = J$, либо оно строго отображается само в себя $F(J) \subsetneq J$);
 - (б) существует окрестность $\mathcal{U}$ множества J такая, что для любого $x \in \mathcal{U}$ имеется конечное число $k > 1$ такое, что $F^k(x) \in J$;
 - (в) J ограничено двумя различными критическими точками или критической точкой и ее образами.
- Как было показано ранее (см. (13) и рис. 4), рассматривается бимодальное кусочно-линейное непрерывное отображение. Для описания орбиты такой системы, следуя [25], можно использовать три символа $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{R}$ («left», «middle», «right»). Тогда орбита $\{x_i = F^i(x_0)\}$, $i = 0, 1, 2, \dots$ описывается последовательностью:

$$\sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots,$$

где символ σ_i , $i = 0, 1, 2, \dots$ в этой последовательности для каждого $i \geq 0$ определяется как

$$\sigma_i = \begin{cases} \mathcal{L}, & x_i < c_{\mathcal{L}}; \\ \mathcal{M}, & c_{\mathcal{L}} < x_i < c_{\mathcal{R}}; \\ \mathcal{R}, & x_i > c_{\mathcal{R}}. \end{cases}$$

Для непрерывных отображений не имеет значения, какой символ использовать для граничных точек (т.е. для точек локальных экстремумов, см. рис. 4) $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ или $\mathcal{R}$, поскольку образы таких точек определяются однозначно.

- Как известно, в кусочно-гладких системах возможны разные типы периодических движений с одинаковым периодом. Поэтому для описания m -периодического движения конкретного типа будем использовать обозначение $O_{\sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{m-1}}$.

Лемма 1. Пусть $c_{\mathcal{L}}$ и $c_{\mathcal{R}}$ – точки локальных экстремумов функции $F(x)$ (13) (многообразия переключения). Тогда для критической точки $c_0 = F(c_{\mathcal{L}})$ и ее прообраза ранга один справедливы равенства

$$(14) \quad F(c_{\mathcal{L}}) = c_{\mathcal{R}}, \quad F^{-1}(c_{\mathcal{R}}) = c_{\mathcal{L}},$$

где $F(\cdot) = F_{\mathcal{L}/\mathcal{M}}(\cdot)$.

Доказательство. Доказательство леммы 1 состоит в проверке равенств (14). Найдем сначала $F_{\mathcal{L}}^{-1}(x)$ и $F_{\mathcal{M}}^{-1}(x)$:

$$(15) \quad \begin{aligned} F_{\mathcal{L}}^{-1}(x) &= e^{-\lambda} (x - 1 + \mu) + 1 - \mu, \\ F_{\mathcal{M}}^{-1}(x) &= \frac{q - 1 + \mu}{(q + \mu) e^{\lambda}} (x + \mu) + 1 - \mu. \end{aligned}$$

Так как $c_{\mathcal{L}} = 1 - \mu + (q - 1 + \mu)/e^{\lambda}$ и $c_{\mathcal{R}} = q$, то, подставив выражение для $c_{\mathcal{L}}$ и $c_{\mathcal{R}}$ в левую часть равенств (14), получим

$$F_{\mathcal{L}/\mathcal{M}}(c_{\mathcal{L}}) = q; \quad F_{\mathcal{L}/\mathcal{M}}^{-1}(c_{\mathcal{R}}) = 1 - \mu + (q - 1 + \mu)/e^{\lambda}.$$

Лемма 1 доказана.

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть $\mathcal{O}_m$ – цикл периода m . Если при вариации параметров хотя бы одна из точек m -периодической орбиты $\mathcal{O}_m$ оказывается на одной из границ $c_{\mathcal{L}}$ или $c_{\mathcal{R}}$ (т.е. m -цикл $\mathcal{O}_m$ претерпевает бифуркацию граничного столкновения), то существует другая точка, лежащая на второй границе, так что для этой пары справедливо (14).

Это означает, что в рассматриваемой системе бифуркации граничного столкновения происходят, когда пара точек периодической орбиты $\mathcal{O}_m$ одновременно сталкивается с двумя многообразиями переключения. Таким образом, в точке бифуркации имеем периодическую орбиту $\mathcal{O}_m = \{x_0, F(x_0), F^2(x_0), \dots, F^{m-1}(x_0)\}$, $F^m(x_0) - x_0 = 0$, $x_0 = c_{\mathcal{L}}$, $F(x_0) = c_{\mathcal{R}}$, которая может быть гиперболической или негиперболической (в случае вырожденной бифуркации).

3. Бифуркационный анализ и численные эксперименты

В области колебательных движений отображение (13) имеет единственную неподвижную точку $\mathcal{O}_{\mathcal{M}} = \{x_*\}$ (1-цикл), принадлежащую промежутку $[c_{\mathcal{L}}, q]$ (рис. 6, а, б):

$$(16) \quad x_* = \frac{(q + \mu) e^{\lambda}}{(q + \mu) e^{\lambda} - q + 1 - \mu} - \mu.$$

Устойчивость $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ определяется неравенством

$$|\rho(\mathcal{O}_{\mathcal{M}})| < 1, \quad \rho(\mathcal{O}_{\mathcal{M}}) = \frac{q + \mu}{q - 1 + \mu} e^{\lambda}.$$

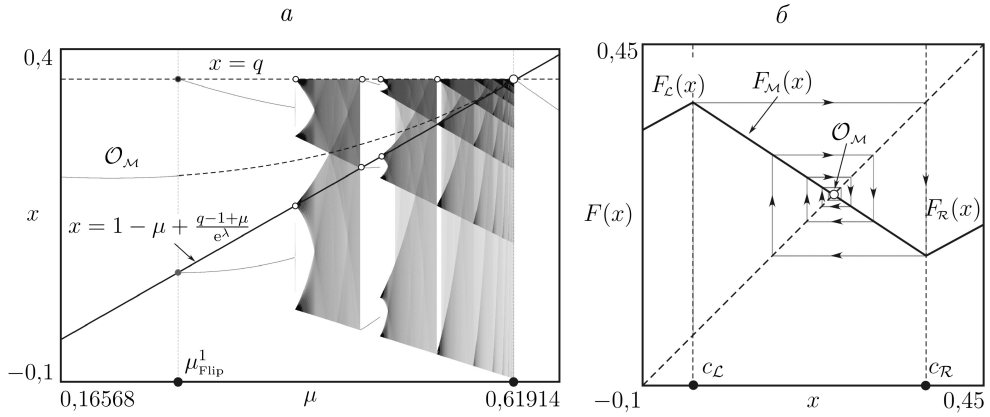


Рис. 6. *а* – Бифуркационная диаграмма. *б* – Устойчивая неподвижная точка при $0 < \mu < \frac{1}{1 + e^\lambda} - q$.

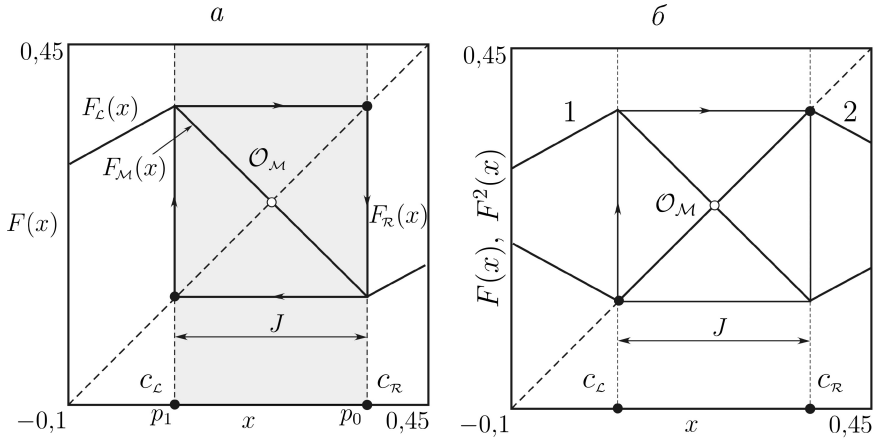


Рис. 7. *а* – Вырожденная бифуркация удвоения периода в точке μ_{Flip}^1 . *б* – Графики функций $F(x)$ и $F^2(x)$ в точке бифуркации.

При $\mu = \mu_{\text{Flip}}$ неподвижная точка O_M претерпевает вырожденную бифуркацию удвоения периода (рис. 6, *а* и рис. 7, *а*), когда

$$\rho(O_M) = \frac{q + \mu}{q - 1 + \mu} e^\lambda = -1.$$

Решив это уравнение относительно μ , получим бифуркационное значение параметра (точку вырожденной бифуркации удвоения периода):

$$\mu_{\text{Flip}}^1 = \frac{1}{1 + e^\lambda} - q.$$

В результате такой бифуркации возникает негиперболический цикл $O_2 = \{p_0, p_1\}$ периода 2 с мультипликатором $+1$ (рис. 7, *а, б*), для которого

$$F_R \circ F_L(c_L) = c_L, \quad F_L \circ F_R(c_R) = q.$$

Периодические точки p_0, p_1 цикла $\mathcal{O}_2$ в силу леммы 1 (см. рис. 7) равны критическим точкам ранга один $c_0 = F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}) = c_{\mathcal{R}}$ и $c_1 = F_{\mathcal{R}}(c_{\mathcal{R}}) = c_{\mathcal{L}}$:

$$p_0 = F_{\mathcal{R}}(c_{\mathcal{R}}) = q - \frac{1 - e^{\lambda}}{1 + e^{2\lambda}}, \quad p_1 = F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}) = q.$$

Причем любая точка $x \in J$, $J = [c_{\mathcal{L}}; c_{\mathcal{R}}] = \left[q - \frac{1 - e^{\lambda}}{1 + e^{\lambda}}; q \right]$, за исключением $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$, периодическая с периодом 2.

Действительно (см. рис. 7,б), в промежутке $J = \left[q - \frac{1 - e^{\lambda}}{1 + e^{\lambda}}; q \right]$ имеем:

$$F(x) = -(x - 1 + \mu) + \mu = -x + 1 \quad \text{и} \quad F^2(x) = x.$$

Отсюда в точке $\mu = \mu_{\text{Flip}}^1$

$$F([F_{\mathcal{M}}(c_{\mathcal{L}}); q]) = [F_{\mathcal{M}}(c_{\mathcal{L}}); q],$$

где

$$c_{\mathcal{L}} = q - \frac{1 - e^{\lambda}}{1 + e^{\lambda}}.$$

При переходе параметра μ через μ_{Flip}^1 неподвижная точка $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}$ теряет устойчивость, а негиперболический 2-цикл $\mathcal{O}_2$ становится устойчивым $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}} = \{x_0^{\mathcal{LM}}, x_1^{\mathcal{LM}}\}$ (см. рис. 8,а), где периодические точки есть

$$\begin{aligned} x_0^{\mathcal{LM}} &= -\mu + 1 - \frac{e^{\lambda}(q - 1 + \mu)}{q - 1 + \mu - (q + \mu)e^{2\lambda}}, \\ x_1^{\mathcal{LM}} &= -\mu - \frac{e^{2\lambda}(q + \mu)}{q - 1 + \mu - (q + \mu)e^{2\lambda}}. \end{aligned}$$

Цикл $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}$ устойчив в диапазоне

$$\frac{1}{1 + e^{\lambda}} - q < \mu < \frac{1}{1 + e^{2\lambda}} - q.$$

При дальнейшем увеличении параметра 2-цикл $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}$ (рис. 8,б) претерпевает вырожденную бифуркацию удвоения периода. Бифуркационное значение параметра найдем из условия

$$\rho(\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}) = \frac{e^{2\lambda}(q + \mu)}{q - 1 + \mu} = -1.$$

Отсюда получим

$$\mu_{\text{Flip}}^2 = \frac{1}{1 + e^{2\lambda}} - q.$$

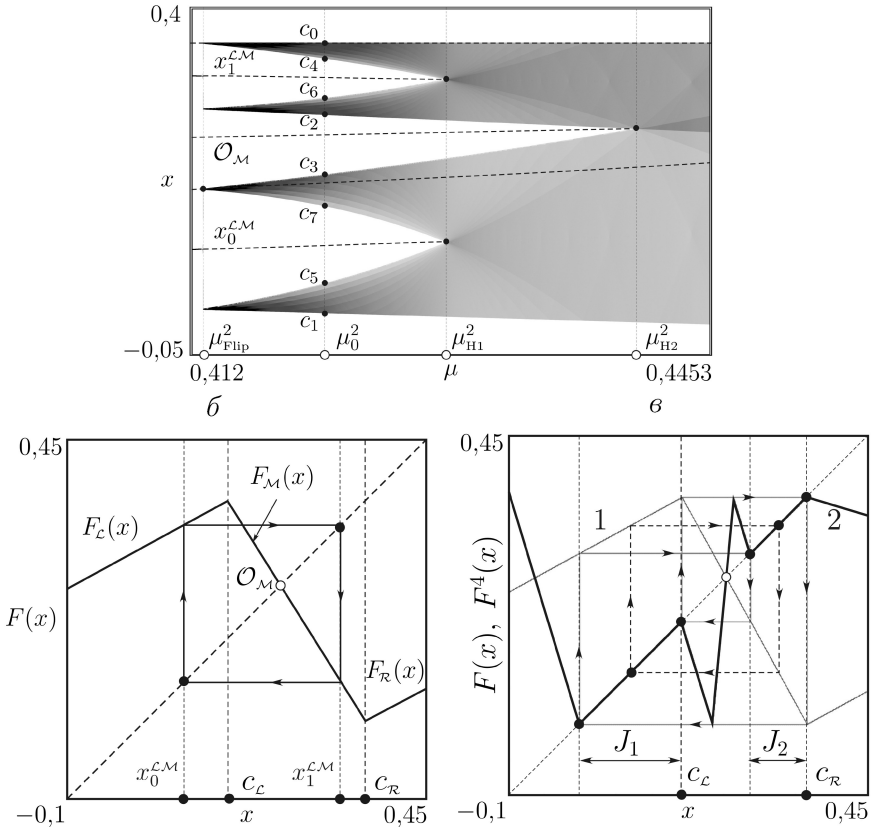


Рис. 8. а – Бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая вырожденную бифуркацию удвоения периода 2-цикла $\mathcal{O}_{LM}$. б – Устойчивый 2-цикл $\mathcal{O}_{LM} = \{x_0^{LM}, x_1^{LM}\}$ в области $\mu_{\text{Flip}}^1 < \mu < \mu_{\text{Flip}}^2$. в – Графики функций $F(x)$ и $F^4(x)$ в точке бифуркации.

Такая бифуркация приводит к возникновению 4-цикла $\mathcal{O}_4$, для которого в точке $\mu = \mu_{\text{Flip}}^2$ справедливо условие

$$F_M \circ F_L \circ F_R \circ F_L(c_L) = c_L.$$

Как можно видеть из рис. 8,б,в, если $\mu = \mu_{\text{Flip}}^2$, то периодические точки p_3, p_4 4-цикла $\mathcal{O}_4 = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$, согласно лемме 1, лежат на многообразиях переклечения c_L, c_R :

$$p_2 = c_L = \frac{e^{2\lambda} - e^\lambda}{1 + e^{2\lambda}} + q, \quad p_4 = c_R = q.$$

Как и в предыдущем случае, все точки $x \in J$, $J = J_1 \cup J_2$, за исключением периодических точек 2-цикла $\mathcal{O}_{LM}$, являются периодическими с периодом 4 (см. рис. 8,б). Здесь $J_1 = [F_R(q), q]$, $J_2 = [F_L \circ F_R(q), q]$.

При $\mu > \mu_{\text{Flip}}^2$ из негиперболического 4-цикла $\mathcal{O}_4$ возникает четырехполосный хаотический аттрактор (рис. 9,а), который существует в промежутке

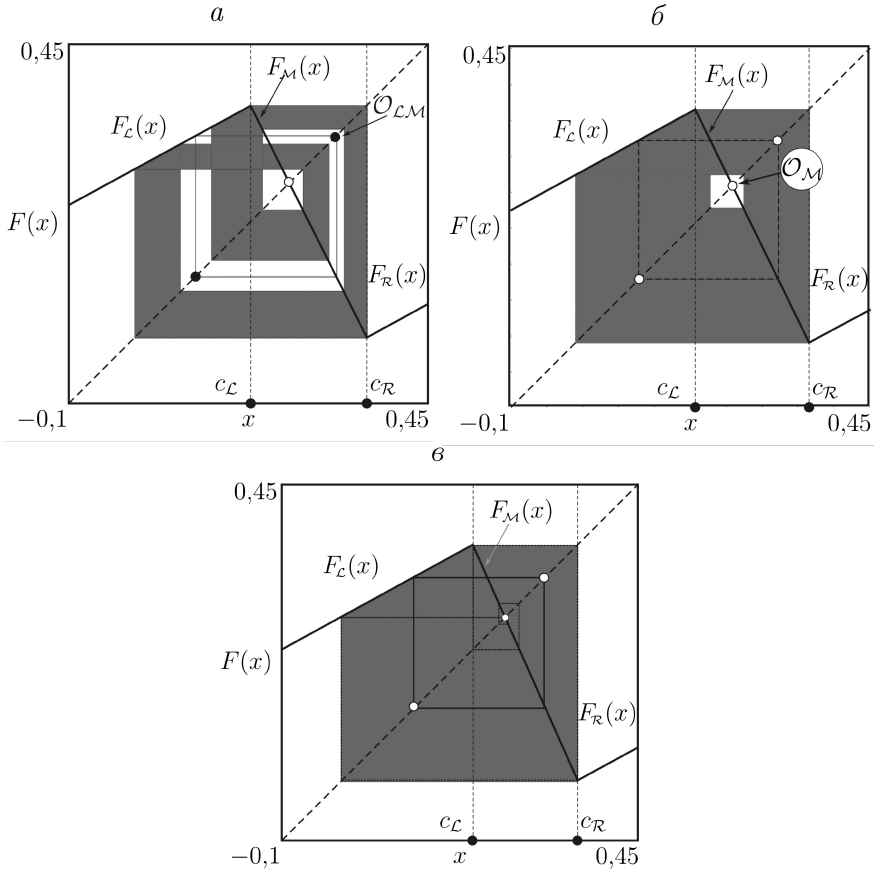


Рис. 9. *а* – Четырехполосный (4-band) хаотический аттрактор. *б* – Переход от четырехполосного хаотического аттрактора в двухполосный в точке μ_{H1}^2 через гомоклиническую бифуркацию неустойчивого 2-цикла $\mathcal{O}_{LM}$. *в* – Переход от двухполосного хаотического аттрактора в однополосный в точке μ_{H2}^2 через гомоклиническую бифуркацию неустойчивой неподвижной точки $\mathcal{O}_M$.

$\mu_{\text{Flip}}^2 < \mu < \mu_{H1}^2$ (рис. 8,а). В точке $\mu = \mu_{H1}^2$ четырехполосный хаотический аттрактор переходит в двухполосный через так называемую бифуркацию «слияния» («merging»), связанную с гомоклинической бифуркацией неустойчивого 2-цикла $\mathcal{Q}_{LM} = \{x_0^{LM}, x_1^{LM}\}$ (рис. 8,а).

Определение 1. Предположим, что хаотический аттрактор A_k состоит из k полос, $k > 2$, и существует неустойчивый m -цикл $\mathcal{O}_m$, $m < k$ с отрицательным мультипликатором, расположенный на границе непосредственного бассейна притяжения A_k . Бифуркация «слияния» возникает, если при некотором значении параметра аттрактор A_k сталкивается с m -циклом $\mathcal{O}_m$ и полосы хаотического аттрактора, контактирующие с циклом $\mathcal{O}_m$, попарно сливаются [25].

Поскольку границы хаотического аттрактора образованы критическими точками и их образами, то в момент бифуркации цикл $\mathcal{O}_m$ сталкивается

с некоторыми из них. Это приводит к появлению гомоклинической орбиты $\mathcal{O}_m$, которая является критической в момент бифуркации. Соответственно, цикл $\mathcal{O}_m$ претерпевает гомоклиническую бифуркацию. Поскольку $\mathcal{O}_m$ является негомоклиническим до бифуркации, то он обязательно становится двусторонним гомоклиническим после, так как цикл с отрицательным мультипликатором не может быть односторонним гомоклиническим [25, 29].

Известно, что в кусочно-гладких непрерывных отображениях, когда хаотический аттрактор $\mathcal{A}_k$, имеющий $k = 2m$ полос перед бифуркацией, сталкивается с m -циклом $\mathcal{O}_m$, то все полосы сливаются попарно и их количество после бифуркации уменьшается вдвое [25, 29].

На рис. 8,а и 9,а,б показан переход от четырехполосного хаотического аттрактора к двухполосному. В данном переходе участвует неустойчивый 2-цикл $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}} = \{x_0^{\mathcal{LM}}, x_1^{\mathcal{LM}}\}$ (см. рис. 8,а) с отрицательным мультипликатором

$$\rho(\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}) = \frac{(q + \mu)}{q - 1 + \mu} e^{2\lambda} < -1.$$

До бифуркации цикл $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}$ не является гомоклиническим. При увеличении μ от значения $\mu_{\text{Flip}}^2 = \frac{1}{1+e^{2\lambda}} - q$ полосы аттрактора $\mathcal{A}_4$ растут (см. рис. 8,а), а затем в точке μ_{H1}^2 сливаются попарно, сталкиваясь с периодическими точками $x_0^{\mathcal{LM}}$ и $x_1^{\mathcal{LM}}$ (см. рис. 8,а).

Как показано на рис. 8,а (см. также 9,б), верхняя граница аттрактора $\mathcal{A}_4$ равна $c_0 = q = F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}})$, нижняя — $c_1 = F_{\mathcal{R}}(q)$. Следующие границы есть $c_2 = F_{\mathcal{L}}(c_1)$, $c_3 = F_{\mathcal{L}}(c_2)$, $c_4 = F_{\mathcal{M}}(c_3)$, $c_5 = F_{\mathcal{M}}(c_4)$, $c_6 = F_{\mathcal{L}}(c_7)$ и $c_7 = F_{\mathcal{M}}(c_6)$.

Бифуркационное значение параметра можно найти из условия, когда периодические точки $x_0^{\mathcal{LM}}$, $x_1^{\mathcal{LM}}$ цикла $\mathcal{O}_{\mathcal{LM}}$ совпадают с критическими точками, определяющими соответствующие границы аттрактора. Таким образом, бифуркационное значение параметра можно найти, решив любое из уравнений

$$x_1^{\mathcal{LM}} = c_4, \quad x_1^{\mathcal{LM}} = c_6, \quad x_0^{\mathcal{LM}} = c_5, \quad x_0^{\mathcal{LM}} = c_7.$$

Первое уравнение содержит критическую точку самого низкого ранга. Поэтому оно и было использовано для нахождения бифуркационного значения параметра. Это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{a^4(q + \mu)^3}{(q - 1 + \mu)^2} - \frac{a^8(q + \mu)^5}{(q - 1 + \mu)^4} - \frac{a^3(q + \mu)^2}{(q - 1 + \mu)^2} - \frac{a^6(q + \mu)^4}{(q - 1 + \mu)^4} - \\ & - \frac{a(q + \mu)}{q - 1 + \mu} - \frac{a^4(q + \mu)^3}{(q - 1 + \mu)^3} + \frac{a^2(q + \mu)^3}{q - 1 + \mu} - 1 + a = 0, \quad a = e^{\lambda}. \end{aligned}$$

и, решив его численно относительно μ , получим μ_{H1}^2 .

При дальнейшем увеличении параметра двухполосный хаотический $\mathcal{A}_2$ аттрактор переходит в однополосный $\mathcal{A}_1$, когда в точке μ_{H2}^2 (рис. 8,а и рис. 9,б)

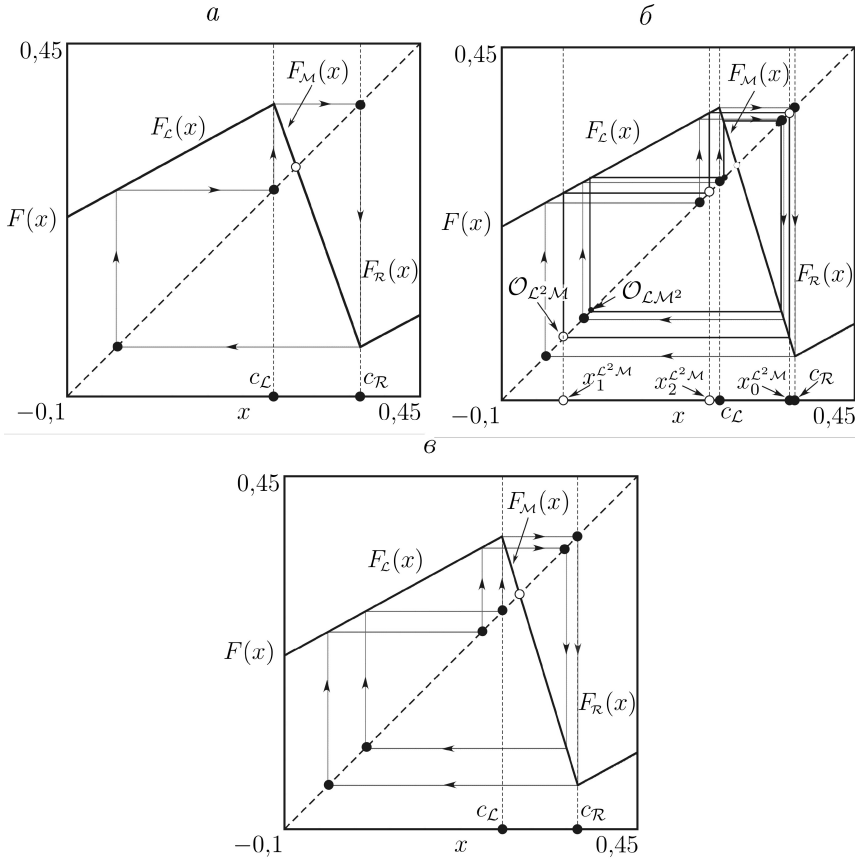


Рис. 10. *а* – Негиперболический 3-цикл с мультипликатором $+1$, возникающий через бифуркацию граничного столкновения («border-collision fold»). *б* – Вырожденная бифуркация удвоения периода 3-цикла O_{L^2M} . *в* – Негиперболический 6-цикл, возникающий через вырожденную бифуркацию удвоения периода.

полосы хаотического аттрактора сливаются попарно, сталкиваясь с неподвижной точкой O_M . Бифуркационное значение параметра можно найти, решив любое из двух уравнений

$$O_M = c_3, \quad O_M = c_7.$$

Из первого уравнения находим:

$$e^{2\lambda} (q + \mu)^2 + q + \mu - 1 = 0,$$

положительный корень которого соответствует второй точке бифуркации слияния

$$\mu_{H2}^2 = -\frac{1}{2e^\lambda} \left(1 - \sqrt{1 + 4e^{2\lambda}} \right).$$

В точке $\mu_{\text{ВСВ}}^3$ возникают устойчивый и неустойчивый 3-циклы через бифуркацию граничного столкновения (рис. 10,а):

$$\mu_{\text{ВСВ}}^3 = \frac{1 - e^{2\lambda}}{1 - e^{3\lambda}} - q.$$

При $\mu > \mu_{\text{ВСВ}}^3$ существуют два 3-цикла – устойчивый $\mathcal{O}_{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}$ с отрицательным мультипликатором и неустойчивый $\mathcal{O}_{\mathcal{L}\mathcal{M}^2}$ с положительным мультипликатором, периодические точки которых удовлетворяют уравнениям

$$F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{M}}(x) - x = 0, \quad F_L \circ F_M \circ F_M(x) - x = 0.$$

Решив эти уравнения, находим $\mathcal{O}_{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}$ и $\mathcal{O}_{\mathcal{L}\mathcal{M}^2}$.

Область устойчивости 3-цикла $\mathcal{O}_{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}$:

$$\frac{1 - e^{2\lambda}}{1 - e^{3\lambda}} - q < \mu < \frac{1}{1 + e^{3\lambda}} - q.$$

В точке

$$\mu = \mu_{\text{Flip}}^3 = \frac{1}{1 + e^{3\lambda}} - q$$

цикл $\mathcal{O}_{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}$ претерпевает вырожденную бифуркацию удвоения периода. Как и в предыдущих случаях, две периодические точки 6-цикла одновременно сталкиваются с двумя многообразиями переключения (рис. 10,б,в):

$$F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{M}} \circ F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{L}} \circ F_{\mathcal{R}} \circ F_{\mathcal{L}}(c_{\mathcal{L}}) = c_{\mathcal{L}}.$$

При переходе через μ_{Flip}^3 возникает шестиполосный хаотический аттрактор, который переходит в трехполосный через гомоклиническую бифуркацию (рис. 11,а,б), когда полосы хаотического аттрактора (см. рис. 8,а), сливаются попарно при $\mu = \mu_{\text{Н1}}^3$, сталкиваясь с периодическими точками $\{x_0^{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}, x_1^{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}$ и $x_2^{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}\}$ неустойчивого 3-цикла $\mathcal{O}_{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}$ с отрицательным мультипликатором

$$\rho(\mathcal{O}_{\mathcal{L}^2\mathcal{M}}) = \frac{(q + \mu)^3}{(q - 1 + \mu)^3} e^{3\lambda} < -1.$$

При дальнейшем увеличении параметра в точке $\mu_{\text{Н2}}^3$ происходит так называемая бифуркация «расширения» («expansion bifurcation» [25, 29]) (см. рис. 11,а и в).

Определение 2. Предположим, что хаотический аттрактор A_k состоит из k полос, $k > 1$, и существует неустойчивый m -цикл $\mathcal{O}_m$, $m > 1$ с положительным мультипликатором, расположенный на границе непосредственного бассейна A_k . Бифуркация «расширения» («expansion») возникает, если при некотором значении параметра аттрактор A_k сталкивается с циклом $\mathcal{O}_m$ и резко увеличивается в размерах [25, 29].

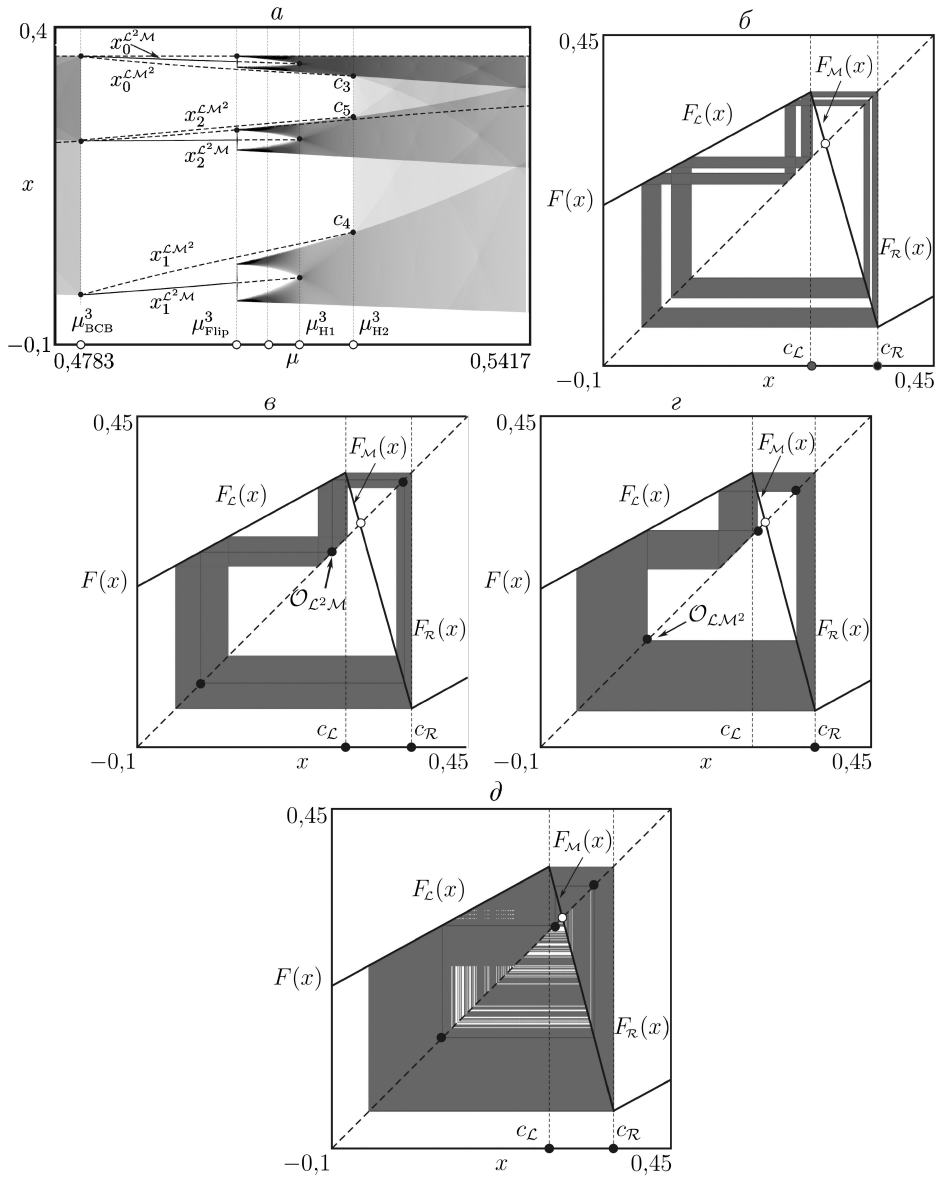


Рис. 11. *а* – Диаграмма, иллюстрирующая бифуркации «слияния» и «расширения». *б* – Шестиполосный (6-band) хаотический аттрактор. *в* – Переход от шестиполосного хаотического аттрактора в трехполосный в точке μ_{H1}^3 через гомоклиническую бифуркацию неустойчивого 3-цикла $\mathcal{O}_{L^2\mathcal{M}}$. *г*, *д* – Переход от трехполосного хаотического аттрактора в однополосный в точке μ_{H2}^3 через гомоклиническую бифуркацию неустойчивого 3-цикла $\mathcal{O}_{L\mathcal{M}^2}$.

Как и в предыдущем случае, такая бифуркация приводит к появлению гомоклинической орбиты для $\mathcal{O}_m$, которая является критической в момент бифуркации. Отличие состоит в том, что до бифуркации цикл $\mathcal{O}_m$ может быть либо односторонним гомоклиническим, либо негомоклиническим. После бифуркации $\mathcal{O}_m$ становится двусторонним гомоклиническим [25].

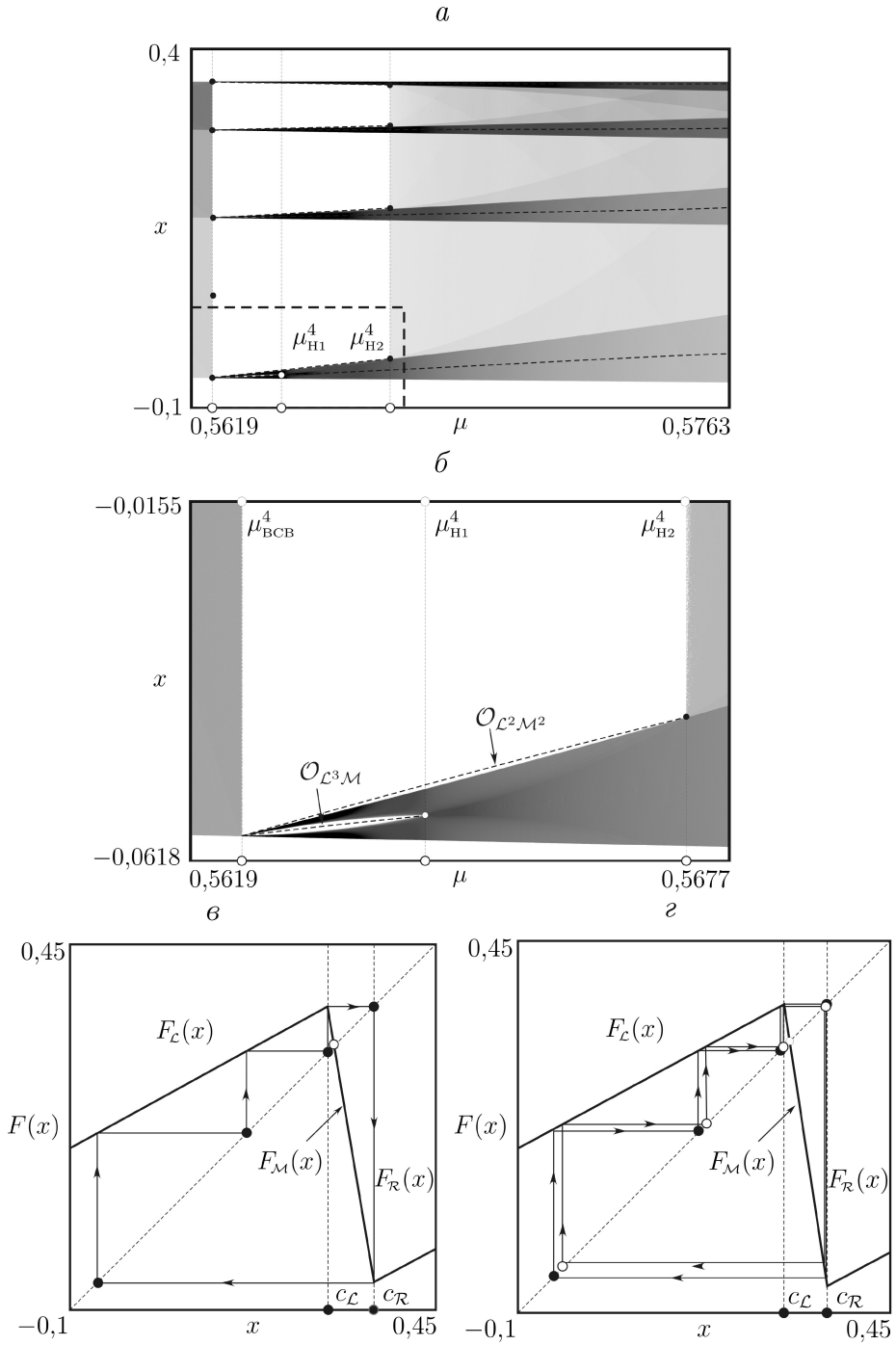


Рис. 12. a – Бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая бифуркации «слияния» и «расширения». b – Увеличенный фрагмент диаграммы, выделенный пунктирным прямоугольником. $в, г$ – Рождение неустойчивых 4-циклов через бифуркацию граничного столкновения.

При увеличении μ трехполосный хаотический аттрактор сталкивается в точке μ_{H2}^3 с неустойчивым 3-циклом $O_{\mathcal{LM}^2}$ с положительным мультипликатором

$$\rho(O_{\mathcal{LM}^2}) = \frac{(q + \mu)^2}{(q - 1 + \mu)^2} e^{3\lambda} > 1.$$

Как отмечалось выше, после бифуркации 3-цикл $O_{\mathcal{LM}^2}$ является двусторонним гомоклиническим и хаотический A_3 аттрактор состоит только из одной полосы (рис. 11, ∂).

Как можно видеть из рис. 11, a , для вычисления бифуркационного значения параметра можно решить любое из следующих уравнений:

$$x_0^{\mathcal{LM}^2} = c_1, \quad x_1^{\mathcal{LM}^2} = c_2, \quad x_2^{\mathcal{LM}^2} = c_4.$$

Первое уравнение содержит образ критической точки самого низкого ранга и, следовательно, является самым простым для решения. Точка бифуркации «расширения» μ_{H2}^3 находилась численно из уравнения

$$\frac{a^3(q + \mu)^2 + a^2(q + \mu)(q - 1 + \mu)}{(q - 1 + \mu)^2 - a^3(q + \mu)^2} = a^3(q + \mu) - a^2 + 1.$$

На рис. 12 показан еще один переход. В точке μ_{BCB}^4 возникают два неустойчивых 4-цикла – с положительным и отрицательным мультипликатором (рис. 12, a) через бифуркацию граничного столкновения («border-collision fold»), когда две точки 4-цикла сталкиваются одновременно с двумя многообразиями переключения.

$$\mu_{\text{BCB}}^4 = \frac{1 - e^{3\lambda}}{1 - e^{4\lambda}} - q.$$

При увеличении μ цикл периода 4 с отрицательным мультипликатором претерпевает бифуркацию «слияния» в точке μ_{H1}^4 , а 4-цикл с положительным мультипликатором – бифуркацию «расширения» в точке μ_{H2}^4 (рис. 12, b).

4. Выводы

В данной статье представлены результаты исследований бифуркаций граничного столкновения («border-collision bifurcations») в кусочно-гладком отображении, описывающем поведение импульсной системы автоматического управления.

Показано, что такое отображение в области колебательных движений является кусочно-линейным непрерывным. Известно, что в кусочно-линейных отображениях классические бифуркации, например бифуркация удвоения периода, касательная и вилообразная бифуркации, становятся вырожденными

(«degenerate bifurcations»), сочетая свойства как гладких, так и бифуркаций граничного столкновения.

Выявлено необычное свойство рассматриваемого класса импульсных систем, состоящее в том, что бифуркации граничного столкновения коразмерности один, включая и вырожденные, происходят, когда пара точек периодической орбиты одновременно сталкивается с двумя многообразиями переключения. Насколько известно авторам, этот случай не изучался ранее в общей теории бифуркаций негладких систем. Вопрос, связан ли описанный феномен со свойством конкретной системы, остается открытым.

Вторая часть работы посвящена исследованию бифуркаций «слияния» («merging») и «расширения» («expansion») [25, 29] хаотических аттракторов в импульсных системах. Этот важный класс нелокальных бифуркаций, известный еще как кризисы хаотических аттракторов («merging crisis», «interior crisis», «boundary crisis» [32–34]) в импульсных системах, остается практически неизученным.

Особый интерес представляют механизмы, при которых хаотический аттрактор претерпевает внезапные изменения. Хаотический аттрактор может внезапно исчезнуть из-за «граничного кризиса» («boundary crisis») или внезапно измениться в размерах из-за «внутреннего кризиса» («interior crisis») [32–34]. В представленной работе изучен «внутренний кризис».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розенвассер Е.Н. Периодически нестационарные системы управления. М.: Наука, 1973.
2. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
3. Гелиг А.Х., Чурилов А.Н. Периодические режимы в широтно-импульсных системах // АиТ. 1986. № 11. С. 37–44.
4. Каретный О.Я., Кипнис М.М. Периодические режимы работы широтно-импульсных систем управления. I // АиТ. 1987. № 11. С. 46–54.
5. Каретный О.Я., Кипнис М.М. Периодические режимы работы широтно-импульсных систем управления. II // АиТ. 1987. № 12. С. 42–48.
6. Гелиг А.Х., Чурилов А.Н. Исследование Ω -периодических режимов в широтно-импульсных системах // АиТ. 1989. № 2. С. 30–39.
7. Кипнис М.М. Хаотические явления в детерминированной одномерной широтно-импульсной системе управления // Техническая кибернетика. 1992. № 1. С. 108–112.
8. Гелиг А.Х., Чурилов А.Н. Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. СПб.: Изд-во СПб. ун-та., 1993.
9. Баушев В.С., Жусубалиев Ж.Т. О недетерминированных режимах функционирования стабилизатора напряжения с широтно-импульсным регулированием // Электричество. 1992. № 8. С. 47–53.
10. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом: методы и приложения. I. Методы // АиТ. 2003. № 5. С. 3–45.

11. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом: методы и приложения. II. Приложения // АиТ. 2004. № 4. С. 3–34.
12. Nusse H.E., Yorke J.A. Border-Collision Bifurcations Including “Period Two to Period Three” for Piecewise Smooth Systems // Physica D. 1992. V. 57. No. 1–2. P. 39–57.
13. Фейгин М.И. Удвоение периода колебаний при С-бифуркациях в кусочно-непрерывных системах // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 5. С. 861–869.
14. Фейгин М.И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. М.: Наука, 1994.
15. Di Bernardo M., Feigin M.I., Hogan S.J., Homer M.E. Local Analysis of C-bifurcations in n -Dimensional Piecewise-Smooth Dynamical Systems // Chaos, Solitons and Fractals, 1999. V. 19. No. 11. P. 1881–1908.
16. Kapitaniak T., Maistrenko Yu. Multiple Choice Bifurcations as a Source of Unpredictability in Dynamical Systems // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 5161–5163.
17. Dutta M., Nusse H., Ott R., Yorke J., Yuan G. Multiple Attractor Bifurcations: A Source of Unpredictability in Piecewise Smooth Systems // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 4281–4284.
18. Nordmark A.B. Non-Periodic Motion Caused by Grazing Incidence in An Impact Oscillator // J. Sound Vib. 1991. V. 145. P. 279–297.
19. Banerjee S., Verghese C.C. (Eds.) Nonlinear Phenomena in Power Electronis. New York: IEEE Press, 2001.
20. Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E. Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. Singapore: World Scientific, 2003.
21. Di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A.R., Kowalczyk P. Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications. London: Springer-Verlag, 2008.
22. Di Bernardo M., Budd C.J., Champneys A.R., Kowalczyk P., Nordmark A.B., Tost G.O., Piironen P.T. Bifurcations in Nonsmooth Dynamical Systems // SIAM Review. 2008. V. 50. P. 629–701.
23. Avrutin V., Mosekilde E., Zhusubaliyev Zh. T., Gardini L. Onset of Chaos in a Single-Phase Power Electronic Inverter // Chaos. 2015. No. 25. P. 043114-1–043114-14.
24. Simpson D.J.W. Border-Collision Bifurcations in R^N // SIAM Review. 2016. V. 58. P. 177–226.
25. Avrutin V., Gardini L., Sushko I., Tramontana F. Continuous and Discontinuous Piecewise-Smooth One-Dimensional Maps: Invariant Sets and Bifurcation Structures. Singapore: World Scientific, 2019.
26. Kuznetsov Yu.A. Elements of Applied Bifurcation Theory. New York: Springer-Verlag, 2004.
27. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Москва–Ижевск: Инс-т компьютер. исслед., 2003.
28. Sushko I., Gardini L. Degenerate Bifurcations and Border Collisions in Piecewise smooth 1D and 2D Maps // Int. J. Bifurcat. Chaos. 2010. V. 20. No. 7. P. 2045–2070.
29. Avrutin V., Gardini L., Schanz M., Sushko I. Bifurcations of Chaotic Attractors in One-Dimensional Maps // Int. J. Bifurcat. Chaos. 2014. V. 24. P. 1440012.

30. *Zhusubaliyev Zh.T., Avrutin V., Bastian F.* Transformations of Closed Invariant Curves and Closed-Invariant-Curve-Like Chaotic Attractors in Piecewise Smooth Systems // Int. J. Bifurcat. Chaos. 2021. V. 31. No. 3. P. 2130009.
31. *Avrutin V., Panchuk A., Sushko I.* Border Collision Bifurcations of Chaotic Attractors in One-Dimensional Maps with Multiple Discontinuities // Proc. Roy. Soc. A. 2021, V. 477. P. 20210432.
32. *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* Chaotic Attractors in Crisis // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 1507–1510.
33. *Grebogi C., Ott E., Yorke J.* Crisis: Sudden Changes in Chaotic Attractors and Transient Chaos // Physica D. 1983. V. 7. P. 181.
34. *Grebogi C., Ott E., Romeiras F., Yorke J.A.* Critical Exponents for Crisis-Induced Intermittency // Phys. Rev. A . 1987. V. 36. No. 11. P. 5365–5380.
35. *Mira C., Gardini L., Barugola A., Cathala J.C.* Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps. Singapore: World Scientific, 1996.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Л. Фрадковым.

Поступила в редакцию 26.09.2022

После доработки 07.12.2023

Принята к публикации 30.12.2023