Автоматика и телемеханика, № 5, 2023

Нелинейные системы

© 2023 г. **А.Н. НАИМОВ, д-р физ.-мат. наук (naimovan@vogu35.ru),**
М.В. БЫСТРЕЦКИЙ, канд. физ.-мат. наук (pmbmv@bk.ru)
(Вологодский государственный университет, Вологда),
А.Б. НАЗИМОВ, д-р физ.-мат. наук (n.akbar54@mail.ru)
(Международный инновационный университет, Сочи)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ[1]

Для динамической системы, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка, исследована задача идентификации периодических режимов. Данная задача состоит в определении периодичности произвольного решения системы уравнений при обнаружении периодичности наблюдаемого значения решения. Исследованы условия, при которых разрешима задача идентификации периодических режимов. Сформулированы и доказаны теоремы, дополняющие известные результаты о наблюдаемости динамических систем.

Ключевые слова: динамическая система, идентификация периодических режимов, наблюдаемое значение.

DOI: 10.31857/S0005231023050021, **EDN:** AFNHKP

1. Введение

Рассмотрим динамическую систему, описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями вида

$$(1)\qquad \frac{dx}{dt} = F(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство n-мерных векторов с вещественными координатами, $n \geqslant 2$, $F(t,y) : \mathbb{R}^{1+n} \mapsto \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, периодическое по t с периодом $\omega > 0$. Всякое ω-периодическое решение $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $x(t+\omega) = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ системы уравнений (1) называем периодическим режимом. Качественная картина фазовых траекторий решений динамической системы (1) во многом определяется наличием периодических режимов. Нахождение периодических режимов аналитически или численно, в общем, весьма затруднительно. Поэтому представляется актуальным нахождение периодических режимов динамической системы (1) посредством

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00032).

так называемых наблюдаемых значений $Cx(t)$, где C — задаваемая ненулевая матрица размера $m \times n$. Определение ω-периодичности произвольного решения $x(t)$ при обнаружении ω-периодичности наблюдаемого значения $Cx(t)$ назовем задачей идентификации периодических режимов в динамической системе (1).

В теории управления задача наблюдаемости, состоящая в однозначном определении $x(t)$ по наблюдаемому значению $Cx(t)$, достаточно изучена для линейных систем (см., например, [1, 2]). Но задача идентификации периодических режимов по наблюдаемым значениям для линейных и нелинейных систем не исследована. Можно привести примеры линейных и нелинейных систем, где периодические режимы отсутствуют, хотя наблюдаемые значения периодичны. В настоящей работе выделены классы систем вида (1) и для них исследованы условия, при которых для произвольного решения $x(t)$ из ω-периодичности наблюдаемого значения $Cx(t)$ следует ω-периодичность $x(t)$. Сформулированы и доказаны теоремы, дополняющие известные результаты о наблюдаемости динамических систем.

Исследованию периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений посвящены многочисленные работы. Среди них можно отметить идейно близкие авторам монографии [3, 4], где представлены основополагающие методы исследования ограниченных и периодических решений для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В [5–7] исследованы условия существования периодических режимов в динамических моделях теории управления.

2. Основные результаты

Исследуем задачу идентификации периодических режимов для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t, Cx), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Здесь $n \geqslant 2$, A — квадратная матрица порядка n, C — матрица размера $m \times n$, $f(t, y) : \mathbb{R}^{1+n} \mapsto \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, ω-периодическое по t.

Введем матрицу

$$B = [C; CA; \dots ; CA^{n-1}], \tag{3}$$

составленную по строкам матриц $C, CA, \dots, CA^{n-1}$.

Верна следующая

Теорема 1. Пусть ранг матрицы B, определяемой формулой (3), равен n:

$$\operatorname{rank}(B) = n. \tag{4}$$

Тогда для произвольного решения системы уравнений (2) из ω-периодичности $Cx(t)$ следует ω-периодичность $x(t)$.

Условие (4) в теории управления называют условием полной наблюдаемости для пары матриц (A, C) [2].

В качестве примера рассмотрим следующую систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + f_1(t, Cx), \quad \frac{dx_2}{dt} = x_3 + f_2(t, Cx), \quad \frac{dx_3}{dt} = f_3(t, Cx), \tag{5}$$

где
$x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^\top$, $C = (c_1, c_2, c_3)$, $f(t, y) = (f_1(t, y), f_2(t, y), f_3(t, y))^\top$: $\mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ — непрерывное отображение, ω-периодическое по t. Системе уравнений (5) соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы $B = [C; CA; CA^2]$ условие $\operatorname{rank}(B) = 3$ выполняется лишь при $c_1 \neq 0$. Следовательно, согласно теореме 1 при $c_1 \neq 0$ для произвольного решения системы уравнений (5) из ω-периодичности наблюдаемого значения $c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + c_3x_3(t)$ следует ω-периодичность самого решения $x(t)$. Существование ω-периодических решений зависит от задаваемых функций $f_1(t, y), f_2(t, y), f_3(t, y)$. Например, полагая $\omega = 2\pi$, зададим

$$f_1(t, y) = -2\cos t\varphi_1(y), \quad f_2(t, y) = -2\sin t\varphi_2(y), \quad f_3(t, y) = \cos t\varphi_3(y),$$

где $\varphi_k(y) = 1$ при $|y| \leqslant |c_1| + |c_2| + |c_3|$, $k = 1, 2, 3$. В этом случае вектор-функция $x^0(t) = (-\sin t, \cos t, \sin t)^\top$ является 2π-периодическим решением системы уравнений (5).

Выясним, при каких условиях система уравнений (2) имеет хотя бы одно решение с ω-периодическим наблюдаемым значением $Cx(t)$. Очевидно, такое решение существует, если система уравнений имеет ω-периодическое решение. Из теоремы 13.4, доказанной в монографии [8, с. 77–80], вытекает, что система уравнений (2) имеет ω-периодическое решение, если матрица A не имеет чисто мнимых собственных значений, кратных $i2\pi/\omega$, и отображение $f(t, y)$ удовлетворяет условию $|y|^{-1}|f(t, y)| \rightrightarrows 0$ при $|y| \to \infty$. Представляют интерес случаи, когда существует не ω-периодическое решение $x(t)$ с ω-периодическим наблюдаемым значением $Cx(t)$.

Рассмотрим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + g(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

где вектор-функция $g(t)$ предполагается заданным, непрерывным и ω-периодическим. Справедлива следующая

Т е о р е м а 2. *Система уравнений* (6) *имеет единственное решение с* ω*-периодическим наблюдаемым значением* $Cx(t)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условие* (4) *и условие*

$$\det\left(e^{\omega A} - E\right) \neq 0, \tag{7}$$

где $e^{\omega A}$ *— матричная экспонента,* E *— единичная матрица порядка* n.

Заметим, что при выполнении условия (7) однородная система

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

не имеет ненулевое ω-периодическое решение [4]. Поэтому из теоремы 2 вытекает, что если выполнено условие (7) и нарушено условие (4), то система уравнений (8) имеет не ω-периодическое решение $x(t)$ с ω-периодическим наблюдаемым значением $Cx(t)$.

Теперь рассмотрим систему уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + G(t,x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

где отображение $G(t,y) : \mathbb{R}^{1+n} \mapsto \mathbb{R}^n$ непрерывно, ω-периодическое по t и удовлетворяет условию Липшица

$$|G(t,y_1) - G(t,y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|, \quad y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n,$$

с константой $L \geqslant 0$, не зависящей от t, y_1 и y_2. Из общих свойств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений [9, гл. 2, §3] следует, что любое решение $x(t)$ системы уравнений (9) определено при всех $t \in (-\infty, +\infty)$.

Имеет место следующая

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнено условие* (4). *Тогда*

1) *существует число* $M > 0$*, зависящее лишь от матриц* A, C*, и такое что для любой вектор-функции* $z(t) \in C^1\left([0,1];\mathbb{R}^n\right)$ *справедлива оценка*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} |z(t)| \leqslant M\left(\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\frac{dz(t)}{dt} - Az(t)\right| + \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|Cz(t)|\right); \tag{10}$$

2) *если* $LM < 1$*, то для произвольного решения* $x(t)$ *системы уравнений* (9) *при любом* $a \in \mathbb{R}$ *верна оценка*

$$\max_{a\leqslant t\leqslant a+1} |x(t+\omega) - x(t)| \leqslant (1 - LM)^{-1} M \max_{a\leqslant t\leqslant a+1} |Cx(t+\omega) - Cx(t)|. \tag{11}$$

Доказательство теорем 1–3 дано в Приложении.

Приведенные теоремы можно обобщить, предполагая матрицы A и C зависящими от t непрерывно и ω-периодично, воспользовавшись результатами из книги [1, гл. 4].

Проверим справедливость следующей леммы.

Лемма. Для произвольного вектора $u \in \mathbb{R}^n$ *тождество* $Ce^{tA}u \equiv 0$, $t \in (t_1, t_2)$ *равносильно равенствам*

$$Cu = 0, \quad CAu = 0, \quad \ldots, \quad CA^{n-1}u = 0. \tag{П.1}$$

Доказательство леммы. Пусть имеет место тождество $Ce^{tA}u \equiv 0$, $t \in (t_1, t_2)$. Проверим, что $Ce^{tA}u \equiv 0$, $t \in R$. Для этого достаточно показать, что при любом $v \in \mathbb{R}^m$ функция $\varphi(t) = \langle Ce^{tA}u, v\rangle$ тождественно равна нулю на $\mathbb{R}$.

Найдем производные функции $\varphi(t)$: $\varphi^{(k)}(t) = \langle CA^k e^{tA}u, v\rangle$, $k = 1, 2, \ldots$. Далее, воспользуемся тем, что согласно теореме Гамильтона–Кэли [10, с. 93] матрица A удовлетворяет своему характеристическому уравнению

$$A^n + q_1 A^{n-1} + \ldots + q_{n-1}A + q_n E = O,$$

где

$$\lambda^n + q_1\lambda^{n-1} + \ldots + q_{n-1}\lambda + q_n \equiv \det(\lambda E - A).$$

Отсюда вытекает, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению

$$y^{(n)}(t) + q_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + q_{n-1}y'(t) + q_n y(t) = 0, \quad t \in R^n.$$

Для данного уравнения только нулевое решение может обращаться в ноль тождественно на каком-либо интервале. Так как по условию $\varphi(t) \equiv 0$, $t \in (t_1, t_2)$, поэтому $\varphi(t) \equiv 0$, $t \in R$. Следовательно, имеет место тождество $Ce^{tA}u \equiv 0$, $t \in R$. Данное тождество дифференцируя k раз и полагая $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $t = 0$, получаем равенства (П.1).

Обратно, если имеют место равенства (П.1), то из теоремы Гамильтона–Кэли следует, что $CA^k u = 0$ при любом целом $k \geqslant 0$. Отсюда по определению матричной экспоненты выводим $Ce^{tA}u \equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть выполнено условие (4) и $x(t)$ — решение системы уравнений (2), удовлетворяющее условию

$$Cx(t + \omega) = Cx(t), \quad t \in (-\infty, +\infty). \tag{П.2}$$

Систему уравнений (2) решим относительно $x(t)$, предполагая заданной вектор-функцию $f(t, Cx(t))$:

$$x(t) = e^{tA}\left(x(0) + \int_0^t e^{-sA} f(s, Cx(s))ds\right). \tag{П.3}$$

С учетом этого равенства условие (П.2) принимает следующий вид:

$$Ce^{tA}\left(\left(e^{\omega A}-E\right)x(0)+\int\limits_0^{t+\omega}e^{(\omega-s)A}f(s,Cx(s))ds-\int\limits_0^{t}e^{-sA}f(s,Cx(s))ds\right)=0.$$

Легко проверить, что

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^{t+\omega}e^{(\omega-s)A}f(s,Cx(s))ds-\int\limits_0^{t}e^{-sA}f(s,Cx(s))ds\right)=$$

$$=f(t+\omega,Cx(t+\omega))-f(t,Cx(t))=0,\quad t\in(-\infty,+\infty).$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{t+\omega}e^{(\omega-s)A}f(s,Cx(s))ds-\int\limits_0^{t}e^{-sA}f(s,Cx(s))ds\equiv\int\limits_0^{\omega}e^{(\omega-s)A}f(s,Cx(s))ds,$$

и получаем равенство

$$Ce^{tA}\left(\left(e^{\omega A}-E\right)x(0)+\int\limits_0^{\omega}e^{(\omega-s)A}f(s,Cx(s))ds\right)=0,\quad t\in(-\infty,+\infty).$$

Отсюда в силу леммы выводим:

$$B\left(\left(e^{\omega A}-E\right)x(0)+\int\limits_0^{\omega}e^{(\omega-s)A}f(s,Cx(s))ds\right)=0. \tag{П.4}$$

Таким образом, для решения $x(t)$ системы уравнений (2) из (П.2) вытекают (П.4) и

$$f(t+\omega,Cx(t+\omega))=f(t,Cx(t)),\quad t\in(-\infty,+\infty). \tag{П.5}$$

Верно и обратное, если для решения $x(t)$ системы уравнений (2) выполнены (П.4) и (П.5), то имеет место (П.2).

Так как $\operatorname{rank}(B)=n$, поэтому (П.4) возможно лишь при условии

$$\left(e^{\omega A}-E\right)x(0)+\int\limits_0^{\omega}e^{(\omega-s)A}f(s,Cx(s))ds=0. \tag{П.6}$$

Из (П.3) и (П.6) следует ω-периодичность $x(t)$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Выше показали, что для решения $x(t)$ системы уравнений (2) условие (П.2) равносильно условиям (П.4) и (П.5).

Полагая в этих условиях $f(s, Cx(s)) \equiv g(s)$, получаем, что система уравнений (6) имеет единственное решение с ω-периодическим наблюдаемым значением $Cx(t)$ тогда и только тогда, когда система алгебраических уравнений

$$B\left(\left(e^{\omega A} - E\right) x(0) + \int\limits_0^\omega e^{(\omega - s)A} g(s) ds\right) = 0$$

имеет единственное решение с неизвестным $x(0) \in \mathbb{R}^n$. А такое возможно лишь при выполнении условия

$$\operatorname{rank}\left(B\left(e^{\omega A} - E\right)\right) = n.$$

Данное условие согласно определению и общим свойствам ранга матрицы равносильно условиям (4) и (7).

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Предположим, что оценка (10) неверна. Тогда существует бесконечная последовательность вектор-функций $z_j(t) \in C^1([0,1]; \mathbb{R}^n)$, $j = 1, 2, \ldots$ такая, что

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |z_j(t)| > j\left(\max_{0 \leqslant t \leqslant 1}\left|\frac{dz_j(t)}{dt} - Az_j(t)\right| + \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |Cz_j(t)|\right), \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Рассмотрим вектор-функции

$$v_j(t) = r_j^{-1} z_j(t), \quad t \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots,$$

где r_j — максимум функции $|z_j(t)|$ на отрезке $[0,1]$. Для этих вектор-функций имеем:

$$1 = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |v_j(t)| > j\left(\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |v_j'(t) - Av_j(t)| + \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |Cv_j(t)|\right), \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Переходя к пределу вдоль равномерно сходящейся подпоследовательности вектор-функций $v_{j_1}(t), v_{j_2}(t), \ldots$, получаем функцию $v(t) \in C^1([0,1]; \mathbb{R}^n)$ такую, что

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |v(t)| = 1, \quad v'(t) - Av(t) \equiv 0, \quad Cv(t) \equiv 0.$$

Отсюда выводим:

$$v(t) \equiv e^{tA} v(0), \quad v(0) \neq 0, \quad Ce^{tA} v(0) \equiv 0.$$

Из последнего тождества в силу леммы следует, что система уравнений (П.1) имеет ненулевое решение, что противоречит условию $\operatorname{rank}(B) = n$. Оценка (10) доказана.

Пусть $LM < 1$ и $x(t)$ — произвольное решение системы уравнений (9). В оценке (10) вместо $z(t)$ подставляя $x(t + a + \omega) - x(t + a)$, получаем

$$\max_{a \leqslant t \leqslant a+1} |x(t+\omega) - x(t)| \leqslant$$
$$\leqslant M \left(\max_{a \leqslant t \leqslant a+1} |G(t, x(t+\omega)) - G(t, x(t))| + \max_{a \leqslant t \leqslant a+1} |Cx(t+\omega) - Cx(t)| \right).$$

Далее, воспользуясь условием Липшица

$$\max_{a \leqslant t \leqslant a+1} |G(t, x(t+\omega)) - G(t, x(t))| \leqslant L \max_{a \leqslant t \leqslant a+1} |x(t+\omega) - x(t)|,$$

получаем оценку (11).

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. Учебное пособие. 2-е изд. СПб.: Изд-во “Лань”, 2009.
2. *Леонов Г.А.* Введение в теорию управления. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004.
3. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966.
4. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
5. *Блиман П.А., Красносельский А.М., Рачинский Д.И.* Секторные оценки нелинейностей и существование автоколебаний в системах управления // АиТ. 2000. № 6. С. 3–18.
   Bliman P.A., Krasnosel'skii A.M., Rachinskii D.I. Sector Estimates for Nonlinearities and the Existence of Auto-Oscillations in Control Systems // Autom. Remote Control. 2000. V. 61. No. 6. P. 889–903.
6. *Красносельский А.М., Рачинский Д.И.* Существование континуумов циклов в гамильтоновых системах управления // АиТ. 2001. № 2. С. 65–74.
   Krasnosel'skii A.M., Rachinskii D.I. Existence of Continua of Cycles in Hamiltonian Control Systems // Autom. Remote Control. 2001. V. 62. No. 2. P. 227–235.
7. *Перов А.И.* Об одном критерии устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // АиТ. 2013. № 2. С. 22–37.
   Perov A.I. On One Stability Criterion for Linear Systems of Differential Equations with Periodic Coefficients // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 2. P. 183–195.
8. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.
9. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
10. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.В. Кузнецовым.

Поступила в редакцию 23.01.2023

После доработки 06.02.2023

Принята к публикации 20.03.2023