

Управление в технических системах

© 2023 г. П.А. АКИМОВ, канд. физ.-мат. наук (akmpavel@rambler.ru),
А.И. МАТАСОВ, д-р физ.-мат. наук (alexander.matasov@gmail.com)
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

МЕТОД ГАРАНТИРУЮЩЕГО ОЦЕНИВАНИЯ ПРИ КАЛИБРОВКЕ БЛОКА ГИРОСКОПОВ

Статья посвящена применению метода гарантирующего оценивания к задаче калибровки блока гироскопов. Построены математические модели, описывающие кинематику блока гироскопов на калибровочном стенде, исследованы границы их применимости и возникающие погрешности. Для проблем гарантирующего оценивания разработана методика численного решения, основанная на сведениях к задачам l_1 -аппроксимации.

Ключевые слова: гарантирующий подход к оцениванию, выпуклая оптимизация, блок гироскопов, калибровка, Python.

DOI: 10.31857/S0005231023070036, **EDN:** FCNJCE

1. Введение

В данной работе предложена методика калибровки блока датчиков угловой скорости (ДУС), гироскопов, основанная на методе гарантирующего оценивания [1–5]. Цель калибровки состоит в оценке параметрических погрешностей (сдвигов нулей, масштабных коэффициентов и углов перекаса) в блоке, состоящем из трех датчиков угловой скорости. Для определения этих параметров производится серия измерений на стенде, позволяющем с высокой точностью управлять скоростью вращения и ориентацией блока. При калибровке решается задача выбора режимов вращения и обработки полученных сигналов.

Во многих традиционных методах калибровки используются динамические модели оценивания неизвестных параметров по измерениям датчиков инерциальной навигационной системы (ИНС) — ньютонометров (акселерометров) и гироскопов [6–8]. Тем не менее, как указано в [9], определение погрешностей ДУС без привлечения информации от ньютонометров в ряде случаев является более предпочтительной. Такая ситуация возникает, во-первых, когда точность ньютонометров не позволяет использовать их сигналы при стендовых испытаниях и, во-вторых, при калибровке лазерных гироскопов на виброподвесах. Основным инструментом решения проблем оценивания служат фильтр Калмана или метод наименьших квадратов [10]. В силу наличия

большого количества неизвестных параметров в задаче калибровки (погрешности датчиков, погрешности стенда), нелинейно влияющих на результаты измерений, существенны два вопроса: как построить математическую модель стендовых испытаний, учитывающую все эти факторы, и как минимизировать влияние погрешностей на результат оценки. Вариант ответа на эти вопросы представлен в данной статье, которая является продолжением исследования по применению гарантирующего подхода в инерциальной навигации, описанного, например, в [11], где рассматривается калибровка блока ньютонометров. Однако в отличие от указанной статьи здесь этот метод применяется к другому классу систем, характеризующемуся большим количеством неизвестных параметров и нелинейными эффектами, что требует построения других моделей и приводит к иным, структурно более сложным проблемам оценивания.

Метод гарантирующего оценивания дает возможность решить проблемы оценивания неизвестных параметров при “наихудших” реализациях ошибок измерений, максимально снижающих точность оценки. При этом вместо вероятностных гипотез используются характерные максимальные значения погрешностей стенда. Получаемое данным методом решение задает направления вращения блока гироскопов на стенде, т.е. явным образом описывают оптимальные режимы калибровки.

Структура статьи следующая. В первом разделе строится математическая модель стендовых испытаний блока гироскопов, осуществляется переход от основных кинематических уравнений к нескольким вариантам линейной модели, возникающим в результате осреднения сигналов, исследуются границы применимости линейных моделей. Во втором и третьем разделах формулируются проблемы гарантирующего оценивания и соответствующие им вспомогательные вариационные задачи l_1 -аппроксимации, которые могут быть решены численно. Четвертый раздел посвящен определению оптимальных планов эксперимента, применению алгоритмов оценивания в модельных задачах и анализу точности полученных решений.

2. Математическая модель

2.1. Основные предположения и соотношения кинематики блока гироскопов

Рассмотрим математическую модель, описывающую основные кинематические соотношения блока гироскопов на стенде при калибровке [12]. Пусть эксперимент проводится в точке M , жестко связанной с Землей и находящейся на ее поверхности. Введем следующие обозначения:

$Mz = Mz_1z_2z_3$ — приборная система координат, жестко связанная с блоком гироскопов;

$Mx = Mx_1x_2x_3$ — система координат, жестко связанная с неподвижным относительно Земли основанием стенда;

$D(t)$ — ортогональная матрица ориентации Mz относительно Mx . По определению матрицы ориентации для любого вектора l его координаты в системах отсчета Mz, Mx связаны соотношением $l_z = D(t)l_x$, а строки матрицы ориентации состоят из координат базисных векторов Mz в системе Mx ;

$\Omega(t)$ — вектор угловой скорости вращения блока гироскопов относительно стенда;

$\omega(t)$ — вектор абсолютной угловой скорости вращения блока гироскопов;

u_x — координаты угловой скорости вращения Земли в системе Mx , u — абсолютная величина угловой скорости вращения Земли.

В проекциях на Mx абсолютная угловая скорость блока гироскопов описывается соотношением

$$\omega_x(t) = \Omega_x(t) + u_x.$$

В проекциях на оси трехгранника Mz данное равенство примет вид

$$(1) \quad \omega_z(t) = D(t) (\Omega_x(t) + u_x).$$

В начальный момент времени матрица ориентации D известна с некоторой точностью, эту оценку $D(0)$ обозначим как D_{init} :

$$(2) \quad D(0) = D_{\text{init}}(I_3 + \hat{\beta}), \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T, \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_3 & -\beta_2 \\ -\beta_3 & 0 & \beta_1 \\ \beta_2 & -\beta_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|\beta_i| \leq \beta_{\max}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Погрешности начальной выставки блока гироскопов — углы малого поворота β_i — неизвестны, но ограничены по величине значением $\beta_{\max}$. Обозначение I_n здесь и далее используется для единичной матрицы размерности $n \times n$, а символ $\hat{\beta}$ обозначает кососимметрическую матрицу, построенную по вектору β согласно вышеуказанному правилу.

Для блока гироскопов выходными сигналами (измерениями) являются показания каждого из ДУС — компоненты вектора $\omega_z(t)$. Введем следующую модель измерений:

$$(3) \quad \zeta(t) = \omega_z(t) + \Gamma \omega_z(t) + \nu_0 + \delta\nu(t).$$

Здесь $\zeta(t) \in \mathbf{R}^3$ — значения измерений, $\Gamma \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ — неизвестная матрица, описывающая ошибки масштабных коэффициентов датчиков и ошибки в знании ориентации осей чувствительности, $\nu_0 \in \mathbf{R}^3$ — неизвестные смещения нулей в показаниях датчиков, $\delta\nu(t) \in \mathbf{R}^3$ — непараметрические флуктуирующие ошибки измерения. Матрицу Γ без ограничения общности будем считать симметричной [5].

Задача калибровки состоит в определении значений Γ , ν_0 по совокупности доступных измерений $\zeta(t)$. При этом на стенде можно управлять угловой

скоростью вращения $\Omega_x(t)$, и именно формирование оптимальной стратегии движения блока на стенде является одной из целей математической задачи калибровки. Представим угловую скорость $\Omega_x(t)$ в виде

$$\Omega_x(t) = s'(t)w,$$

где $s'(t) \in \mathbf{R}$ — величина угловой скорости вращения, $w \in \mathbf{R}^3$ — единичный вектор направления угловой скорости вращения Mz в проекциях на Mx . Далее будем рассматривать частный случай движения блока гироскопов на стенде, состоящий из нескольких однотипных экспериментов. В рамках каждого из них блок вращается вокруг фиксированной оси с задаваемой угловой скоростью, затем блок переводится в новое положение, задается новое направление его вращения и эксперимент повторяется. Направление оси вращения и величина угловой скорости известны с некоторыми погрешностями, т.е. считаются известными функция $s(t) \geq 0$ и вектор y ($\|y\|_2 = 1$), которые связаны с истинными значениями следующими выражениями:

$$(4) \quad s'(t) = s(t) + \varepsilon(t), \quad w = (I_3 + \hat{\alpha})y, \quad \Omega_x(t) = (s(t) + \varepsilon(t))(I_3 + \hat{\alpha})y.$$

Углы малого поворота $\alpha \in \mathbf{R}^3$ и соответствующая им кососимметрическая матрица $\hat{\alpha}$ определяют неизвестные погрешности в задании вектора вращения блока гироскопов, а скалярная функция $\varepsilon(t)$ — погрешность в задании величины угловой скорости. Как и в случае с углами β , известными являются максимальные допустимые значения для α : $|\alpha_i| \leq \alpha_{\max}$, $i = 1, 2, 3$.

На каждом этапе испытаний погрешности α , β неизменны, но для разных экспериментов они разные, поскольку предполагается, что задание программной, целевой, угловой скорости и ориентации блока происходит при каждом эксперименте независимо. Таким образом формируется несколько серий измерений $\zeta(t)$, соответствующих разным режимам вращения и разным реализациям погрешностей.

2.2. Линеаризация уравнений и осреднение сигнала

Подставив (1), (4) в (3), получим выражение для измерений

$$(5) \quad \zeta(t) = (I_3 + \Gamma) D(t) (s'(t)w + u_x) + \nu_0 + \delta\nu(t).$$

Помимо сигнала $\zeta(t)$, от времени зависят две составляющие угловой скорости, $D(t)u_x$ и $s'(t)D(t)w$, и неопределенные погрешности $\delta\nu(t)$, $\varepsilon(t)$. В этом разделе рассматривается математическая модель, соответствующая режиму вращения блока гироскопов с постоянной по направлению угловой скоростью в течение периода времени длительностью T . Процедура калибровки будет состоять из последовательности таких режимов вращения вокруг различных направлений.

Далее построим “осредненный” по времени аналог уравнения измерений, для чего необходимо учесть эффект осреднения при вращении Mz относительно Mx . Под осреднением понимается процедура расчета средних арифметических значений от серии измерений на длительном интервале времени T (несколько десятков минут), в течение которого система делает не один полный оборот.

Воспользуемся тем фактом, что $D(t)$ — матрица перехода от Mx к Mz , а Mz жестко связана с блоком гироскопов, вращающимся относительно Mx с угловой скоростью Ω_x . Переход от Mx к Mz можно представить состоящим из трех этапов.

1. Переход от Mx к Mx_{fix} — неподвижному относительно основания стенда трехграннику, орт $e_{\text{fix}3}$ которого по направлению совпадает с w . Соответствующую матрицу перехода обозначим как $D_{\text{fix}} = (d_{\text{fix}1}; d_{\text{fix}2}; d_{\text{fix}3})$, ее третья строка равна $d_{\text{fix}3} = w^T$, а первая и вторая ортогональны ей и между собой и могут быть выбраны любым подходящим образом.

2. Вращение относительно оси $Mx_{\text{fix}3} = Mz_{\text{cir}3}$ со скоростью $s'(t)$, переводящее Mx_{fix} в трехгранник Mz_{cir} , жестко связанный с блоком гироскопов. Зависящий от времени угол вращения в плоскости $Mx_{\text{fix}1}x_{\text{fix}2}$ обозначим через $\psi(t)$. В силу принятых обозначений имеем $\frac{d\psi(t)}{dt} = s'(t)$, а матрица перехода от Mx_{fix} к Mz принимает вид

$$D_{\text{cir}}(t) = \begin{pmatrix} \cos \psi(t) & -\sin \psi(t) & 0 \\ \sin \psi(t) & \cos \psi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Переход от Mz_{cir} к Mz , задающийся не известной точно постоянной ортогональной матрицей, которую для дальнейших выкладок удобно представить в виде $D' = (d'_1, d'_2, d'_3)$.

Таким образом, матрицу $D(t)$ можно представить в виде произведения фиксированных и зависящих от времени матриц перехода

$$D(t) = D' D_{\text{cir}}(t) D_{\text{fix}}.$$

Получим выражение для $s'(t)D(t)w$, воспользовавшись тем, что по определению первые две строки матрицы D_{fix} ортогональны w :

$$\begin{aligned} s'(t)D(t)w &= s'(t)D' D_{\text{cir}}(t) D_{\text{fix}} w = \\ (6) \quad &= s'(t)D' \begin{pmatrix} \cos \psi(t) & -\sin \psi(t) & 0 \\ \sin \psi(t) & \cos \psi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = s'(t)d'_3. \end{aligned}$$

По определению матрицы перехода D' столбец d'_3 состоит из проекций ортов приборного трехгранника на ось $Mz_{\text{cir}3}$. Так как направление $Mz_{\text{cir}3}$

не меняется во времени и вращение происходит вокруг этой оси, то проекции ортов приборного трехгранника на данное направление также остаются постоянными. Поэтому d'_3 можно определить на основании априорной информации (2):

$$(7) \quad d'_3 = D(t)w = D(0)w = D_{\text{init}}(I_3 + \hat{\beta})w,$$

т.е. при вращении вокруг фиксированной оси направление вектора $D(t)\Omega_x(t)$ остается постоянным и в результате его осреднения получаем вектор $s'D_{\text{init}}(I_3 + \hat{\beta})w$, где s' — среднее значение $s'(t)$.

В силу рассматриваемого режима движения результат осреднения вектора $D(t)u_x$ будет иметь специальную структуру, описанную в лемме 1.

Лемма 1. Пусть величина угловой скорости вращающейся системы координат описывается функцией $s'(t) = s + \varepsilon(t)$, “программная” угловая скорость вращения s постоянна и $s > \varepsilon_{\max}$, а вращение происходит вокруг фиксированного направления w . Тогда при осреднении сигнала во времени проекции вектора вращения Земли на оси Mz описываются равенством

$$\bar{u}_z = D_{\text{init}}(I_3 + \hat{\beta})ww^T u_x + u^\perp.$$

При этом неизвестный вектор $u^\perp$ ортогонален вектору $D_{\text{init}}(I_3 + \hat{\beta})w$ и по модулю его компоненты оцениваются сверху как

$$|u_i^\perp| \leq u \left(\frac{4}{T(s - \varepsilon_{\max})} + C \frac{\varepsilon_{\max}}{s} \right) \stackrel{\text{def}}{=} u_{\max},$$

где C — ограниченная величина, зависящая от начального и конечного значений угла поворота на стенде.

Получим явный вид уравнения измерений, перейдя к осредненным величинам в уравнении (5) и используя выражения (4), (7), а также результаты леммы 1:

$$(8) \quad \begin{aligned} \tilde{\zeta} &= (I_3 + \Gamma) \left(s'D_{\text{init}}(I_3 + \hat{\beta})w + D_{\text{init}}(I_3 + \hat{\beta})ww^T u_x + u^\perp \right) + \nu_0 + \delta\tilde{\nu} = \\ &= (I_3 + \Gamma) D_{\text{init}}(I_3 + \hat{\beta}) \left((s + \varepsilon)(I_3 + \hat{\alpha})y + (I_3 + \hat{\alpha})yy^T(I_3 + \hat{\alpha})^T u_x \right) + \\ &\quad + (I_3 + \Gamma) u^\perp + \nu_0 + \delta\tilde{\nu}. \end{aligned}$$

Здесь ε — результат осреднения шума $\varepsilon(t)$ — и погрешность $\delta\tilde{\nu}$, являющаяся результатом осреднения во времени шума $\delta\nu(t)$, будем считать ограниченными по абсолютной величине

$$|\varepsilon| \leq \varepsilon_{\max}, \quad |\delta\tilde{\nu}_j| \leq \nu_{\max}, \quad j = 1, 2, 3,$$

где константа $\nu_{\max}$ считается известной, характеризует априорное знание о величине погрешности гироскопа.

Таблица 1. Порядки величин для параметров модели

Величина	Порядок величины
$\alpha, \alpha_{\max}$	$1' \approx 2,9 \cdot 10^{-4}$
$\beta, \beta_{\max}$	$5' \approx 1,5 \cdot 10^{-3}$
$\varepsilon(t)$	$5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/c}$
$\varepsilon, \varepsilon_{\max}$	$1 \cdot 10^{-8} \text{ 1/c}$
s	$17,5 \text{ 1/c}$
T	$600\text{--}1200 \text{ с}$
Γ_{ii}	$5 \cdot 10^{-3} (5 \cdot 10^{-5})$
$\Gamma_{ij}, i \neq j$	$5 \cdot 10^{-3} (5 \cdot 10^{-5})$
ν_0	$2,4 \cdot 10^{-7} \text{ 1/c} (5 \cdot 10^{-8} \text{ 1/c})$
$\nu_{\max}$	$1,2 \cdot 10^{-8} \text{ 1/c}$
u	$7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ 1/c}$

В зависимости от масштабов переменных $\alpha, \beta, \Gamma, \varepsilon, \nu$ можно по-разному упрощать модель измерений, пренебрегая теми или иными группами слагаемых. В табл. 1, см. ниже, зафиксируем характерные масштабы параметров модели, соответствующие типовым точностям стендов и гироскопов, а также требования к точности оценки параметров Γ, ν_0 (указаны в скобках).

Важно заметить, что в рассматриваемом случае величины $\nu_{\max}, \varepsilon_{\max}$ значительно меньше, чем характерные амплитуды $\delta\nu(t), \varepsilon(t)$, что соответствует случаю, когда исходный сигнал был осреднен. Предлагаемый в статье подход не является применимым исключительно при вышеуказанных масштабах переменных, и в зависимости от реальной задачи могут быть применены иные способы упрощения исходной модели измерений.

При выбранных значениях в выражении для измерений слагаемые делятся на несколько групп: не являющиеся малыми, такие, например, как $sy, \tilde{\zeta}$; линейно зависящие от малых параметров $\alpha, \beta, \varepsilon, u$; пренебрежимо малые, второго и третьего порядка малости, гарантированно не превосходящие $\nu_{\max}$; нелинейные слагаемые, которыми нельзя пренебречь в силу того, что они зависят от $s\Gamma D_{\text{init}}\hat{\alpha}, s\Gamma D_{\text{init}}\hat{\beta}, sD_{\text{init}}\hat{\alpha}\hat{\beta}, \Gamma u^\perp, u^\perp$ и могут превышать $\nu_{\max}$.

После исключения малых слагаемых уравнение (8) примет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta} = D_{\text{init}} & \left(s(I_3 + \hat{\alpha} + \hat{\beta})y + s\hat{\beta}\hat{\alpha}y + \varepsilon y + (I_3 + \hat{\alpha} + \hat{\beta})yy^T u_x - yy^T \hat{\alpha}u_x \right) + \\ & + u^\perp + \Gamma u^\perp + \Gamma D_{\text{init}}(sy + yy^T u_x) + \Gamma D_{\text{init}}s(\hat{\alpha} + \hat{\beta})y + \nu_0 + \delta\tilde{\nu}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы слагаемыми $sy^T \hat{\beta}\hat{\alpha}y, \Gamma D_{\text{init}}s(\hat{\alpha} + \hat{\beta})y$ также можно было пренебречь, достаточно, чтобы они по величине были сопоставимы с неустраняемой помехой $\delta\tilde{\nu}$, т.е. $\|sy^T \hat{\beta}\hat{\alpha}y\|_\infty \leq \nu_{\max}, \|\Gamma D_{\text{init}}s(\hat{\alpha} + \hat{\beta})y\|_\infty \leq \nu_{\max}$. Поскольку масштаб компонент матрицы Γ известен (см. табл. 1), $|\Gamma_{ij}| \leq \Gamma_{\max}$, введем

дополнительное ограничение на величину угловой скорости s :

$$(9) \quad s \leq \frac{\nu_{\max}}{2 \max\{\alpha_{\max} \beta_{\max}, \Gamma_{\max}(\alpha_{\max} + \beta_{\max})\}} \stackrel{\text{def}}{=} s_{\max}.$$

Иными словами, вращение блока гироскопов на стенде с меньшей угловой скоростью позволяет снизить влияние погрешностей α, β на результат оценивания.

Если вращение будет слишком медленным, то может оказаться, что ошибка осреднения — слагаемое $\Gamma u^\perp$ — превосходит требуемую точность оценки, откуда получаем второе ограничение на параметр s : $\|\Gamma u^\perp\|_\infty \leq \nu_{\max}$, или с учетом априорного знания масштабов компонент матрицы $\Gamma_{\max}$ и леммы 1

$$\|\Gamma u^\perp\|_\infty \leq 3\Gamma_{\max} u \left(\frac{4}{(s - \varepsilon_{\max})T} + C \frac{\varepsilon_{\max}}{s} \right) \leq \nu_{\max}.$$

В силу того, что слагаемое $\Gamma_{\max} C u \varepsilon_{\max}/s$ мало по сравнению с $\nu_{\max}$, ограничение на s принимает вид

$$(10) \quad 3\Gamma_{\max} u \frac{4}{(s - \varepsilon_{\max})T} \leq \nu_{\max}, \quad \text{или} \quad s \geq \frac{12\Gamma_{\max} u}{\nu_{\max} T} + \varepsilon_{\max} \stackrel{\text{def}}{=} s_{\min}.$$

Скомпенсировать влияние $u^\perp$ также можно, радикально увеличив T , однако, как будет показано далее, это достигается иным способом — при помощи скаляризации.

Помимо вращения со скоростью sy возможен еще один режим стендовых испытаний, при котором блок ДУС неподвижен относительно основания стенда и гироскопы измеряют угловую скорость вращения Земли. Как нетрудно проверить, выражение для измерений в этом случае может быть получено из (5) подстановкой $s' = 0$, $s = 0$, $\varepsilon(t) = 0$, $D(t) = D_{\text{init}}(I_3 + \hat{\beta})$ и переходом к осредненным сигналам $\tilde{\zeta}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta} &= (I_3 + \Gamma) D_{\text{init}}(I_3 + \hat{\beta}) u_x + \nu_0 + \delta\tilde{\nu} = \\ &= D_{\text{init}} u_x + \Gamma D_{\text{init}} u_x + D_{\text{init}} \hat{\beta} u_x + \nu_0 + \delta\tilde{\nu} \end{aligned}$$

с точностью до слагаемых второго порядка малости.

Подводя итог данного раздела, сформулируем модель осредненного сигнала гироскопов с учетом введенных выше ограничений (9), (10).

$$(11) \quad \begin{aligned} \tilde{\zeta} &= D_{\text{init}} \left(s(I_3 + \hat{\alpha} + \hat{\beta})y + \varepsilon y + (I_3 + \hat{\alpha} + \hat{\beta})yy^T u_x - yy^T \hat{\alpha} u_x \right) + \\ &+ \Gamma D_{\text{init}}(sy + yy^T u_x) + u^\perp + \nu_0 + \delta\tilde{\nu}, \quad s \in \{0\} \cup [s_{\min}, s_{\max}]. \end{aligned}$$

2.3. Модели измерений и скаляризация

В уравнении (11) входной информацией являются слагаемые $\tilde{\zeta}$, $D_{\text{init}}(sy + yy^T u_x)$, а “полезным сигналом” — слагаемые $\Gamma D_{\text{init}}(sy + yy^T u_x) + \nu_0$. Погрешности измерений состоят из вектора $\delta\tilde{\nu}$, возникающего при осреднении

флуктуационного шума $\delta\tilde{\nu}(t)$, и неизвестных систематических погрешностей, обусловленных неточностью стенда и меняющихся при каждом новом стендовом испытании. После переноса известных слагаемых в левую часть уравнения (11) получим следующую линейную модель измерений:

$$(12) \quad z(s, y) = \Gamma D_{\text{init}}(sy + yy^T u_x) + \nu_0 + r + \delta\nu',$$

в которой сами “измерения” $z = z(s, y)$ и их погрешности $r = r(s, y, \alpha, \beta, \varepsilon), \delta\nu'$ определены следующим образом:

$$(13) \quad \begin{aligned} z &= \tilde{\zeta} - D_{\text{init}}(sy + yy^T u_x), \\ r &= D_{\text{init}} \left(s(\hat{\alpha} + \hat{\beta})y + \varepsilon y + (\hat{\alpha} + \hat{\beta})yy^T u_x - yy^T \hat{\alpha} u_x \right), \end{aligned}$$

$$(14) \quad \delta\nu' = \delta\tilde{\nu} + u^\perp, \quad |\delta\nu'_j| \leq \nu_{\max} + u_{\max} \stackrel{\text{def}}{=} \nu'_{\max}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Для определенности назовем эту модель трехмерной (поскольку $z(s, y) \in \mathbf{R}^3$) или моделью-1.

В модели (12)–(14) составляющая $\delta\tilde{\nu}$ вследствие осреднения не имеет внятного спектра и поэтому исчерпывающе описывается неравенством $|\delta\tilde{\nu}_j| \leq \nu_{\max}$. Составляющая $u^\perp$ не является столь же произвольной (см. лемму 1). Поэтому принятое в (14) ограничение $|\delta\nu'_j| \leq \nu'_{\max}$ является загрубленным.

Воспользуемся методом скаляризации [11], который состоит в том, что исходные трехмерные уравнения измерений скалярно домножаются на известный вектор, в данном случае — на $\tilde{y} = D_{\text{init}}y$. После такого шага все слагаемые в r , представляющие собой произведение кососимметричной матрицы на вектор y , сокращаются. Скалярное произведение $y^T D_{\text{init}}^T u^\perp$ также приближенно можно считать равным нулю в силу леммы 1:

$$(15) \quad 0 = w^T(I_3 - \hat{\beta})D_{\text{init}}^T u^\perp = y^T(I_3 - \hat{\alpha})(I_3 - \hat{\beta})D_{\text{init}}^T u^\perp \approx y^T D_{\text{init}}^T u^\perp$$

— с точностью до малых слагаемых, имеющих порядок $(\alpha_{\max} + \beta_{\max})u \times \left(\frac{4}{T(s - \varepsilon_{\max})} + C \frac{\varepsilon_{\max}}{s} \right)$. Данная точность приближения является достаточной, поскольку

$$(\alpha_{\max} + \beta_{\max})u \left(\frac{4}{T(s - \varepsilon_{\max})} + C \frac{\varepsilon_{\max}}{s} \right) \leq \nu_{\max}$$

при рассматриваемых масштабах параметров $\alpha_{\max}, \beta_{\max}, s, T, \varepsilon_{\max}$.

Следовательно, появляется возможность перейти к одномерной (скалярной) модели измерений с меньшими по масштабу погрешностями:

$$(16) \quad z_{\text{scal}} = z_{\text{scal}}(s, y) = \tilde{y}^T \Gamma D_{\text{init}}(sy + yy^T u_x) + \tilde{y}^T \nu_0 + r_{\text{scal}} + \tilde{y}^T \delta\tilde{\nu},$$

где

$$(17) \quad z_{\text{scal}} = \tilde{y}^T \tilde{\zeta} - s - y^T u_x, \quad r_{\text{scal}} = \varepsilon - y^T \hat{\alpha} u_x.$$

Назовем эту модель измерений скалярной или моделью-2. В ней учтена специфика слагаемого, содержащего величину $u^\perp$, почти исчезающего при скаляризации (см. (15)). Поэтому модель для помехи измерений z_{scal} в этом случае более адекватна, чем для трехмерной модели-1, этим и объясняется ее лучшая точность.

3. Формулировки задач гарантирующего оценивания

В соответствии с изложенными в [5, 11] идеями сформулируем задачу оценки неизвестных матрицы Γ и вектора ν_0 в виде проблемы гарантирующего оценивания. Вектор неизвестных оцениваемых параметров в задаче состоит из компонент погрешностей Γ, ν_0 :

$$\gamma = (\Gamma_{11}, \Gamma_{21}, \Gamma_{31}, \Gamma_{12}, \Gamma_{22}, \Gamma_{32}, \Gamma_{13}, \Gamma_{23}, \Gamma_{33})^T, \quad q = (\gamma^T, \nu_{01}, \nu_{02}, \nu_{03})^T \in \mathbf{R}^{12}.$$

Необходимо оценить скалярную величину $a^T q$, где вектор $a \in \mathbf{R}^{12}$ задан. К примеру, при оценивании компоненты Γ_{11} имеем $a = (1, 0, \dots, 0)^T$ и т.д.

Оценка ищется в виде линейного функционала от измерений

$$l(\Phi) = \int_{(y,s) \in S} \Phi_0^T(y, s) z(y, s) dy ds + \sum_{k=1}^K \Phi^T(k) z(y(k), s(k)),$$

где интеграл берется по множеству

$$S = \{y \in \mathbf{R}^3 : \|y\|_2 = 1\} \times \{\{0\} \cup [s_{\min}, s_{\max}]\}$$

(далее для краткости множество, по которому берется интеграл, не будет указываться), $\Phi_0(\cdot) : S \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\Phi^{(k)} \in \mathbf{R}^3$, а набор значений $\{y(k), s(k)\}_{k=1}^K$ задает совокупность изолированных положений и величин вектора угловой скорости вращения в рамках эксперимента. Каждому элементу (y, s) соответствуют измерения $z(y, s)$, полученные в результате обработки сигналов гироскопов при вращении с соответствующей угловой скоростью, а структура измерений может задаваться моделями-1,-2, описанными в предыдущем разделе. Сначала сформулируем задачу гарантирующего оценивания для трехмерной модели-1, а затем по аналогии — задачу для скалярной модели.

С помощью формального обозначения, использующего дельта-функцию Дирака, $l(\Phi)$ можно записать в более компактном виде:

$$l(\Phi) = \int_{y,s} \Phi^T(y, s) z(y, s) dy ds,$$

$$\Phi(y, s) = \Phi_0(y, s) + \sum_{k=1}^K \Phi^T(k) \delta(y - y(k), s - s(k)).$$

Обозначим множество всех функций $\Phi(\cdot)$ вышеуказанного вида через $\mathcal{F}$.

Будем рассматривать проблему гарантирующего оценивания скалярного параметра $a^T q$, которая состоит в определении оценщика Φ , доставляющего минимум гарантированной ошибке оценки [11]

$$(18) \quad I(\Phi) \rightarrow \inf_{\Phi \in \mathcal{F}},$$

где функционал $I(\Phi)$ представляет собой точную верхнюю грань ошибки $|l(\Phi) - a^T q|$:

$$(19) \quad I(\Phi) = \sup_{(q, \alpha, \beta, \varepsilon, \delta \nu') \in \mathcal{B}'} |l(\Phi) - a^T q|.$$

Точная верхняя грань ищется среди множества $\mathcal{B}'$ — множества всех допустимых значений неизвестных параметров $(q, \alpha, \beta, \varepsilon, \delta \nu')$:

$$(20) \quad q \in \mathbf{R}^{12}, \quad |\alpha_j| \leq \alpha_{\max}, \quad |\beta_j| \leq \beta_{\max}, \quad |\delta \nu'_j| \leq \nu'_{\max}, \quad j = 1, 2, 3, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_{\max}.$$

Решение проблемы (18)–(20) позволит определить оптимальный план проведения эксперимента. На практике возникают задачи оценки каждой компоненты вектора q , для этих целей необходимо решить 12 задач вида (20), в каждой из которых от нуля отлична только одна компонента a .

Для задачи гарантирующего оценивания может быть сформулирована эквивалентная проблема l_1 -аппроксимации, которая, в свою очередь, может быть численно решена.

Утверждение 1. Функция $\Phi(y, s) \in \mathcal{F}$ является решением проблемы гарантирующего оценивания (18)–(20) для модели-1 (12)–(13) тогда и только тогда, когда она является решением оптимизационной задачи

$$(21) \quad \int \left(\nu'_{\max} \|\Phi\|_1 + \alpha_{\max} \|C_\alpha \Phi\|_1 + \beta_{\max} \|C_\beta \Phi\|_1 + \right. \\ \left. + \varepsilon_{\max} |y^T D_{\text{init}}^T \Phi| \right) dy ds \rightarrow \inf_{\Phi \in \mathcal{F}}$$

при ограничениях

$$(22) \quad \left(\frac{\int v(y, s) \otimes \Phi dy ds}{\int \Phi dy ds} \right) = a,$$

где введены следующие обозначения:

$$(23) \quad \begin{aligned} v &= D_{\text{init}}(sy + yy^T u_x), \\ C_\alpha &= (s\hat{y} + y^T u_x \hat{y} - \hat{u}_x yy^T) D_{\text{init}}^T, \\ C_\beta &= (s\hat{y} + y^T u_x \hat{y}) D_{\text{init}}^T. \end{aligned}$$

Здесь символ $\otimes$ соответствует произведению Кронекера, вектор v и матрицы C_α, C_β являются функциями s, y . Доказательство утверждения 1 приведено в Приложении.

Похожим образом получим формулировки проблем гарантирующего оценивания для модели-2, определив одномерный оценщик χ :

$$\chi(y, s) = \chi_0(y, s) + \sum_{k=1}^K \chi(k) \delta(y - y(k), s - s(k)),$$

при помощи которого оценка неизвестного скалярного параметра $a^T q$ ищется в виде

$$l(\chi) = \int_{y,s} \chi(y, s) z_{\text{scal}}(y, s) dy ds.$$

Обозначим множество всех функций $\chi(y, s)$ описанной выше структуры как $\mathcal{X}$.

Утверждение 2. Функция $\chi(y, s) \in \mathcal{X}$ является решением проблемы гарантирующего оценивания (18)–(20) для скалярной модели-2 (16)–(17) тогда и только тогда, когда она является решением оптимизационной задачи

$$(24) \quad \int (\nu_{\max} \|D_{\text{init}} y\|_1 + \alpha_{\max} \|\hat{u}_x y\|_1 + \varepsilon_{\max}) |\chi(y, s)| dy ds \rightarrow \inf_{\chi \in \mathcal{X}}$$

при ограничениях

$$(25) \quad \int \chi(y, s) \begin{pmatrix} v(y, s) \otimes D_{\text{init}} y \\ D_{\text{init}} y \end{pmatrix} dy ds = a.$$

Доказательство утверждения 2 аналогично доказательству утверждения 1.

4. Дискретные оптимизационные задачи

В вариационной задаче l_1 -аппроксимации (21)–(22) в качестве искомой переменной выступает вектор-функция $\Phi(y, s)$, аргумент которой принимает континуальное множество значений, что затрудняет поиск численного решения. Для схожих проблем гарантирующего оценивания доказано, что оптимальный оценщик Φ отличен от нуля на конечном множестве точек [5, 11]. В данной работе не будем получать аналитическое решение, вместо этого рассмотрим дискретный аналог вышеуказанных проблем и будем решать их численно. Пусть функция $\Phi(y, s)$ отлична от нуля в конечном наборе точек $\{(y(k), s(k))\}_{k=1}^K$, соответствующих различным значениям вектора угловой скорости блока на стенде, и принимает в них значения $\Phi(k)$. Это дискретное множество положений может быть задано с помощью введения сферических

координат для определения вектора y и выбора “сетки значений” для широты и долготы с заданным шагом.

В результате перехода в (21)–(22) от интегралов к конечным суммам получим следующую оптимизационную задачу:

$$(26) \quad \sum_{k=1}^K \left(\nu'_{\max} \|\Phi(k)\|_1 + \alpha_{\max} \|C_{\alpha}(k)\Phi(k)\|_1 + \beta_{\max} \|C_{\beta}(k)\Phi(k)\|_1 + \varepsilon_{\max} |y^T(k) D_{\text{init}}^T \Phi(k)| \right) \rightarrow \inf_{\Phi(1), \dots, \Phi(K)}$$

при ограничениях

$$(27) \quad \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^K v(k) \otimes \Phi(k) \\ \sum_{k=1}^K \Phi(k) \end{pmatrix} = a,$$

где векторы $v(k)$ и матрицы $C_{\alpha}(k)$, $C_{\beta}(k)$ зависят от известных аргументов $y(k)$, $s(k)$:

$$\begin{aligned} v(k) &= D_{\text{init}}(s(k)y(k) + y(k)y^T(k)u_x), \\ C_{\alpha}(k) &= (s(k)\hat{y}(k) + y^T(k)u_x\hat{y}(k) - \hat{u}_x y(k)y^T(k)) D_{\text{init}}^T, \\ C_{\beta}(k) &= (s(k)\hat{y}(k) + y^T(k)u_x\hat{y}(k)) D_{\text{init}}^T. \end{aligned}$$

Важно подчеркнуть, что в данной задаче “дискретная сетка” значений $\{(y(k), s(k))\}_{k=1}^K$ считается априори заданной и определению подлежат только значения $\Phi(k)$. Домножив функционал (26) на константу $\nu'^{-1}_{\max}$ и введя обозначения

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{\max}}{\nu'_{\max}} C_{\alpha}(k)\Phi(k) &= x_{\alpha}(k), \\ \frac{\beta_{\max}}{\nu'_{\max}} C_{\beta}(k)\Phi(k) &= x_{\beta}(k), \\ (28) \quad \frac{\varepsilon_{\max}}{\nu'_{\max}} y^T(k) D_{\text{init}}^T \Phi(k) &= x_{\varepsilon}(k), \end{aligned}$$

$$x = \left(\Phi^T(1), \dots, \Phi^T(K), x_{\alpha}^T(1), \dots, x_{\alpha}^T(K), x_{\beta}^T(1), \dots, x_{\beta}^T(K), x_{\varepsilon}(1), \dots, x_{\varepsilon}(K) \right)^T \in \mathbf{R}^{10K},$$

запишем задачу (26)–(27) в сокращенной форме, соответствующей классической проблеме l_1 -аппроксимации

$$(29) \quad \|x\|_1 \rightarrow \inf_{x \in \mathbf{R}^{10K}}$$

при линейных ограничениях $A_{eq}x = a_{eq}$.

Матрица и вектор из уравнения ограничений могут быть представлены в блочном виде:

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} A_\alpha & I_{3K} & 0_{3K \times 3K} & 0_{K \times K} \\ A_\beta & 0_{3K \times 3K} & I_{3K} & 0_{K \times K} \\ A_\varepsilon & 0_{K \times 3K} & 0_{K \times 3K} & I_K \\ A_\Phi & 0_{12 \times 3K} & 0_{12 \times 3K} & 0_{12 \times K} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{(7K+12) \times 10K},$$

$$a_{eq} = \begin{pmatrix} 0_{7K \times 1} \\ a \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{7K+12},$$

где в силу введенных обозначений (27), (28)

$$A_\alpha = \frac{\alpha_{\max}}{\nu_{\max}} \begin{pmatrix} C_\alpha(1) & 0_{3 \times 3} & \dots & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & C_\alpha(2) & \dots & 0_{3 \times 3} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0_{3 \times 3} & \dots & 0_{3 \times 3} & C_\alpha(K) \end{pmatrix},$$

$$A_\beta = \frac{\beta_{\max}}{\nu_{\max}} \begin{pmatrix} C_\beta(1) & 0_{3 \times 3} & \dots & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & C_\beta(2) & \dots & 0_{3 \times 3} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0_{3 \times 3} & \dots & 0_{3 \times 3} & C_\beta(K) \end{pmatrix},$$

$$A_\varepsilon = \frac{\varepsilon_{\max}}{\nu_{\max}} \begin{pmatrix} y^T(1)D_{\text{init}}^T & 0_{1 \times 3} & \dots & 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & y^T(2)D_{\text{init}}^T & \dots & 0_{1 \times 3} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0_{1 \times 3} & \dots & 0_{1 \times 3} & y^T(K)D_{\text{init}}^T \end{pmatrix},$$

$$A_\Phi = \begin{pmatrix} v_1(1) & v_1(2)I_3 & \dots & v_1(K)I_3 \\ v_2(1)I_3 & v_2(2)I_3 & \dots & v_2(K)I_3 \\ v_3(1)I_3 & v_3(2)I_3 & \dots & v_3(K)I_3 \\ I_3 & I_3 & \dots & I_3 \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом может быть сформулирован дискретный аналог скаляризованной модели (24)–(25), в котором ищется минимум суммы модулей компонент неизвестного вектора при линейных ограничениях-равенствах:

$$(30) \quad \sum_{k=1}^K (\nu_{\max} \|D_{\text{init}} y(k)\|_1 + \alpha_{\max} \|\hat{u}_x y(k)\|_1 + \varepsilon_{\max}) |\chi(k)| \rightarrow \inf_{\chi(1), \dots, \chi(K)}$$

при ограничениях

$$(31) \quad \sum_{k=1}^K \chi(k) \begin{pmatrix} v(k) \otimes D_{\text{init}} y(k) \\ D_{\text{init}} y(k) \end{pmatrix} = a.$$

В матричном виде эта задача записывается следующим образом:

$$(32) \quad \|x_\chi\|_1 \rightarrow \inf_{x_\chi \in \mathbf{R}^K}$$

при ограничениях $A_\chi x_\chi = a$.

Здесь введены обозначения

$$x_{\chi k} = \rho_k \chi(k), \quad \rho_k = \nu_{\max} \|D_{\text{init}} y(k)\|_1 + \alpha_{\max} \|\hat{u}_x y(k)\|_1 + \varepsilon_{\max}, \quad k = 1, \dots, K;$$

$$A_\chi = \begin{pmatrix} \rho_1^{-1} v_1(1) D_{\text{init}} y(1) & \rho_2^{-1} v_1(2) D_{\text{init}} y(2) & \dots & \rho_K^{-1} v_1(K) D_{\text{init}} y(K) \\ \rho_1^{-1} v_2(1) D_{\text{init}} y(1) & \rho_2^{-1} v_2(2) D_{\text{init}} y(2) & \dots & \rho_K^{-1} v_2(K) D_{\text{init}} y(K) \\ \rho_1^{-1} v_3(1) D_{\text{init}} y(1) & \rho_2^{-1} v_3(2) D_{\text{init}} y(2) & \dots & \rho_K^{-1} v_3(K) D_{\text{init}} y(K) \\ \rho_1^{-1} D_{\text{init}} y(1) & \rho_2^{-1} D_{\text{init}} y(2) & \dots & \rho_K^{-1} D_{\text{init}} y(K) \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{12 \times K}.$$

Выпуклые оптимизационные задачи вышеуказанного вида могут быть решены при помощи различных численных методов, таких как метод внутренней точки [13], ADMM [14], метод вариационно-взвешенных квадратических приближений [5]. В отличие от задачи для трехмерной модели (29) проблемы (32) характеризуются меньшей размерностью неизвестного вектора и матриц ограничений (в 7–10 раз меньше переменных и ограничений), что делает их более подходящими для решения в случае больших K .

Таким образом, решение проблем l_1 -аппроксимации (29), или (32) позволяет найти оптимальные значения оценщиков $\Phi(k), \chi(k)$, которым соответствуют целевые значения угловой скорости $s(k)y(k)$ вращения блока гироскопов на стенде. Как правило, ненулевым значениям $\Phi(k)$ или $\chi(k)$ соответствует небольшое количество положений угловой скорости вращения (что является распространенным свойством решений гарантирующего оценивания, см. обоснование, например, в книге [5]), обозначим это подмножество индексов через $\mathcal{K}$, $\mathcal{K} \subset \{1, \dots, K\}$.

Алгоритм гарантирующего оценивания для погрешностей блока ДУС представляет собой серию шагов, на каждом из которых для каждого $k \in \mathcal{K}$:

- 1) производится вращение блока гироскопов с угловой скоростью $s(k)y(k)$ и формируется массив показаний гироскопов $\zeta(t) \in \mathbf{R}^3$;
- 2) проводится осреднение сигнала $\zeta(t)$ на отрезке времени T , в течение которого происходило вращение с фиксированной скоростью: $\hat{\zeta} = \left(\sum_{t=0}^T \zeta(t) \right) / (T + 1)$;
- 3) в соответствии с (13)–(17) формируются измерения для линейных моделей оценивания $z(y(k), s(k))$, $z_{\text{scal}}(y(k), s(k))$.

После чего строится оценка неизвестного параметра $a^T q$ в виде

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} \Phi^T(k) z(y(k), s(k)) \quad \text{либо} \quad \sum_{k \in \mathcal{K}} \chi(k) z_{\text{scal}}(y(k), s(k)).$$

5. Численные примеры

Рассмотрим несколько численных примеров, иллюстрирующих применение предложенных методов гарантирующего оценивания. Практическая реализация алгоритма состоит из нескольких этапов: решения проблем гарантирующего оценивания; моделирования сигнала — измерений $\zeta(t)$, при заданных “истинных” значениях погрешностей и неизвестных параметров Γ, ν_0 ; и построения оценок Γ, ν_0 , которые затем сравниваются с “истинными” значениями. Соответствующие программы реализованы на языке Python, а для решения проблем l_1 -аппроксимации (29), (32) используются готовые процедуры из пакета `cvxpy`¹.

Характерные значения погрешностей и параметров модели выбирались согласно табл. 1. Границы допустимых значений величины угловой скорости определены формулами (9), (10): $s_{\min} = 1,25^\circ/\text{с}$, $s_{\max} = 3,28^\circ/\text{с}$. В модельном примере будем считать, что модуль угловой скорости принимает значение $s = 0$ (отсутствие вращения) и два значения из отрезка $[s_{\min}; s_{\max}]$: $s_1 = 1,5^\circ/\text{с}$ и $s_2 = 2^\circ/\text{с}$, векторы $y(k)$ расположены на единичной сфере равномерно, а также $D_{\text{init}} = I_3$. Опишем полученные решения для каждой из групп неизвестных параметров Γ, ν_0 .

Для полной и скаляризованной моделей оптимальные оценщики для диагональных компонент Γ_{ii} имеют вид

$$\begin{aligned}\Phi_{ii}(y, s) &= \chi_0 e_i \delta(y - e_i, s - s_2) - \chi_0 e_i \delta(y + e_i, s - s_2), \\ \chi_{ii}(y, s) &= \chi_0 \delta(y - e_i, s - s_2) + \chi_0 \delta(y + e_i, s - s_2),\end{aligned}$$

где e_i — единичный вектор с i -й компонентой, равной 1, χ_0 — некая величина, численно определяемая в решении оптимизационной задачи.

Иными словами, чтобы оценить, к примеру, компоненту Γ_{11} — масштабный коэффициент ошибки первого гироскопа — необходимо провести две серии измерений, вращая блок вдоль оси чувствительности этого гироскопа с максимальной угловой скоростью $s = s_2$ сначала в одну сторону ($y(1) = (1, 0, 0)^T$), затем в другую ($y(2) = (-1, 0, 0)^T$).

Для внедиагональных элементов $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$ оптимальные оценщики описываются формулами:

$$\begin{aligned}\Phi_{12}(y, s) &= \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta(y - e(\pi/4), s - s_2) + \begin{pmatrix} \Phi_2 \\ -\Phi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta(y - e(3\pi/4), s - s_2) + \\ &+ \begin{pmatrix} -\Phi_2 \\ -\Phi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \delta(y - e(5\pi/4), s - s_2) + \begin{pmatrix} -\Phi_1 \\ \Phi_2 \\ 0 \end{pmatrix} \delta(y - e(7\pi/4), s - s_2), \\ \chi_{12}(y, s) &= \chi_0 \delta(y - e(\pi/4), s - s_2) + \chi_0 \delta(y - e(3\pi/4), s - s_2) + \\ &+ \chi_0 \delta(y - e(5\pi/4), s - s_2) + \chi_0 \delta(y - e(7\pi/4), s - s_2),\end{aligned}$$

¹ Пакет численного решения задач выпуклой оптимизации
<https://web.stanford.edu/boyd/papers/pdf/cvxpyrewriting.pdf>

Таблица 2. Гарантированные ошибки оценки

Модель	Переменная		
	Γ_{ii}	$\Gamma_{ij}, i \neq j$	ν_{0i}
Порядок величин	$[0,7; 1,3] \cdot 10^{-3}$	$[4; 6] \cdot 10^{-3}$	$[2; 3] \cdot 10^{-7}$
Требуемая точность	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-8}$
Модель-1	$2,01 \cdot 10^{-4}$	$5,67 \cdot 10^{-4}$	$7,01 \cdot 10^{-6}$
Модель-2	$2,23 \cdot 10^{-6}$	$3,45 \cdot 10^{-6}$	$5,16 \cdot 10^{-8}$

где $e(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)^T$ — единичные векторы, соответствующие повороту на угол θ в плоскости $e_1 e_2$, Φ_1, Φ_2 — величины, численно определяемые в решении оптимизационной задачи, а χ_0 — то же значение, что и в решении для оценки диагональных элементов. Аналогично, с точностью до перестановки индексов в соответствующих векторах, определяются оценщики для компонент $\Gamma_{13} = \Gamma_{31}$ и $\Gamma_{23} = \Gamma_{32}$. Таким образом, оптимальный эксперимент для оценки углов перекося между осями чувствительности гироскопов состоит в проведении четырех серий измерений, при каждой из которых вращение происходит вдоль биссектрисы угла между координатными осями с максимальной по величине допустимой угловой скоростью.

Оптимальные оценщики для сдвигов нулей ν_{0i} имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned}\Phi_{\nu i}(y, s) &= \phi_1 e_i \delta(y - e_i, s - s_2) + \phi_2 e_i \delta(y + e_i, s - s_2) + \\ &\quad + \phi_3 e_i \delta(y - e_i, s - s_1) + \phi_4 e_i \delta(y + e_i, s - s_1), \\ \chi_{\nu i}(y, s) &= \chi_1 \delta(y - e_i, s - s_2) - \chi_2 \delta(y + e_i, s - s_2) + \chi_3 \delta(y - e_i, s - s_1) - \\ &\quad - \chi_4 \delta(y + e_i, s - s_1),\end{aligned}$$

где значения $\phi_i > 0$, $\chi_i > 0$ численно определяются при решении задачи и близки к величине $1/4$.

Как видим, полученные при помощи гарантирующего оценивания направления вращений и весовые коэффициенты имеют простую геометрическую структуру: оптимальные режимы движения предполагают вращение с максимальной допустимой угловой скоростью, по направлению совпадающей (с точностью до погрешности начальной выставки) либо с осями чувствительности гироскопов, либо с биссектрисами углов между этими осями. Похожий результат был получен при применении метода гарантирующего оценивания в задаче калибровки блока акселерометров [11]. Однако в отличие от указанной задачи в данном случае математическая модель измерений существенно сложнее, зависит от большего количества параметров, поэтому аналитически обосновать оптимальную структуру оценщика сложно и для поиска решений применяются численные методы.

Основной характеристикой качества получаемых решений является гарантированная ошибка оценки, не зависящая от конкретных реализаций погрешностей и измерений. В табл. 2 приведены соответствующие оптимальным оценщикам гарантированные ошибки оценки для компонент Γ , ν_0 .

Таблица 3. Средние погрешности оценки

Модель	Переменная		
	Γ_{ii}	$\Gamma_{ij}, i \neq j$	ν_{0i}
Порядок величин	$[0,7; 1,3] \cdot 10^{-3}$	$[4; 6] \cdot 10^{-3}$	$[2; 3] \cdot 10^{-7}$
Модель-1	$1,25 \cdot 10^{-6}$ (0,13%)	$1,33 \cdot 10^{-6}$ (0,02%)	$4,88 \cdot 10^{-8}$ (22%)
Модель-2	$1,20 \cdot 10^{-6}$ (0,13%)	$1,24 \cdot 10^{-6}$ (0,03%)	$2,89 \cdot 10^{-8}$ (14%)

При заданных в табл. 1 параметрах моделей требуемая точность гарантирующего оценивания достигается для всех компонент матрицы Γ при использовании модели-2, применение модели-1 может приводить к ошибкам порядка 10% от величины оцениваемого параметра, а для компонент ν_{0i} необходимая точность достигается при использовании модели-2.

Приведем результаты оценки компонент Γ , ν_0 , полученные в рамках серии численных экспериментов согласно изложенной выше процедуре при конкретных реализациях систематических погрешностей и шумов в измерениях. “Истинные” значения этих параметров и погрешностей α , β , $\varepsilon(t)$, $\delta\nu(t)$ генерировались с помощью датчика случайных чисел. Для каждого параметра Γ_{ij} , ν_{0i} процедура моделирования и оценки повторялась 20 раз, что позволило оценить типичные отклонения оценки от точного значения. В табл. 3 представим средние абсолютные ($|\Gamma_{ij}^0 - \Gamma_{ij}|$) и относительные ($|\Gamma_{ij}^0 - \Gamma_{ij}|/|\Gamma_{ij}|$ — указаны в скобках) отклонения оценок, полученных при помощи моделей-1 и -2 от истинных значений. В отличие от гарантированных ошибок эти отклонения не задают верхнюю границу ошибки, но зато характеризуют в совокупности и точность моделей, и точность решения задач оценивания. Это важно, потому что входная информация $\zeta(t)$ строится при помощи нелинейной модели исходного сигнала (3), а оптимальное решение ищется путем применения метода гарантирующего оценивания к линеаризованным моделям 1–2. Тем самым данный эксперимент позволяет охарактеризовать влияние на результат оценивания как погрешностей и шумов в измерениях, так и погрешностей, возникших при переходе к более простым линейным моделям.

Серия численных примеров показывает, что формируемые на основании измерительной информации согласно предложенному алгоритму оценки неизвестных параметров оказываются близки к их “истинным” значениям и отклонения лежат в пределах гарантированных ошибок оценки.

Для иллюстрации того, как точность решения зависит от выбора угловой скорости вращения s_2 , рассмотрим эксперимент, при котором для одних и тех же заранее выбранных значений Γ , ν_0 ищется оценка неизвестных параметров при помощи трех вышеописанных моделей при шестнадцати различных значениях s_2 . Относительная точность получаемых оценок показана на графиках ниже: на рис. 1 показаны ошибки определения Γ_{11} (для Γ_{12} результаты похожие), а на рис. 2 — ошибки определения ν_{01} .

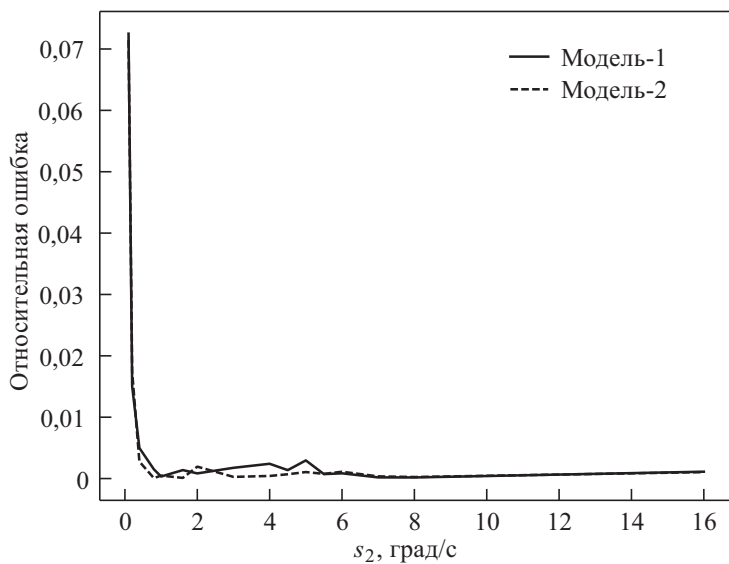


Рис. 1

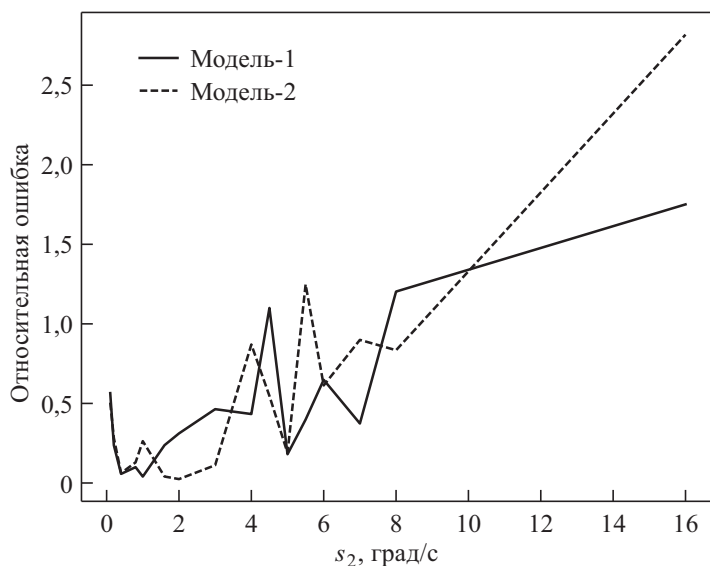


Рис. 2

График показывает, что критическое падение точности наблюдается при минимальных значениях угловой скорости вращения — меньше порога $s_{\min}$, полученного в разделе 2.2. При оценке матрицы Γ используемые подходы оказываются нечувствительны к увеличению скорости вращений s_2 . Однако при оценивании ν_0 точность ухудшается при росте s_2 , особенно при превышении порога $s_2 > s_{\max} = 3,28^\circ/\text{с} = 0,057 \text{ 1/с}$.

6. Заключение

В статье разработан подход к калибровке блока гироскопов, сочетающий в себе три основные идеи: вывод линейных моделей измерения для осредненных сигналов, применение метода скаляризации, использование гарантирующего подхода оценивания. Проблемы гарантирующего оценивания сведены к дискретным задачам l_1 -аппроксимации, которые решаются с помощью численных алгоритмов. Важным преимуществом предложенной методики является возможность получить оптимальный план эксперимента как результат решения задачи оценивания. Применение гарантирующего оценивания приводит к решениям простой структуры: из большого множества допустимых направлений и величин угловой скорости вращения оптимальным является сочетание двух-четырех режимов вращения. Представленная в статье методика и соответствующие программные реализации с минимальными изменениями могут быть распространены на более сложные системы, к примеру предполагающие ограниченное количество направлений вращения, учет влияния зависящих от температуры погрешностей датчиков.

Предложенный подход или его модификации могут найти свое применение не только в инерциальной навигации, но и в иных прикладных задачах, требующих определения оптимального набора измерений для оценки неизвестных параметров либо формирования плана эксперимента из множества допустимых сценариев.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1.

Так как на исследуемом отрезке времени T вращение происходит вокруг фиксированного направления, можно считать, что при осреднении матрица вращения D_{cir} декомпозируется:

$$(П.1) \quad \bar{D}_{\text{cir}} = \bar{D}_{\text{cir1}} + \bar{D}_{\text{cir2}}, \quad \bar{D}_{\text{cir1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{D}_{\text{cir2}} = \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где c_i — результат осреднения во времени функций $\sin \psi(t)$, $\cos \psi(t)$.

С учетом формул (6), (7), (П.1) вектор u_z при осреднении представляется в виде двух слагаемых, одно из которых пропорционально w , а второе ортогонально $D(0)w$:

$$(П.2) \quad \begin{aligned} \bar{u}_z &= \bar{D}u_x = D'\bar{D}_{\text{cir1}}D_{\text{fix}}u_x + D'\bar{D}_{\text{cir2}}D_{\text{fix}}u_x = \\ &= D' \begin{pmatrix} 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} \\ w^T \end{pmatrix} u_x + u^\perp = d'_3 w^T u_x + u^\perp = D_{\text{init}}(I_3 + \hat{\beta})ww^T u_x + u^\perp, \end{aligned}$$

где введено обозначение $u^\perp = D'\bar{D}_{\text{cir2}}D_{\text{fix}}u_x$.

Тот факт, что $u^\perp$ ортогонален направлению $D(0)w = D_{\text{init}}(I_3 + \hat{\beta})w$, можно установить, воспользовавшись формулами (2), (6): $D(0)w = D'D_{\text{cir}}(0)D_{\text{fix}}w = D'(0, 0, 1)^T$, и в явном виде вычислив скалярное произведение:

$$\begin{aligned} w^T D(0)^T u^\perp &= (0, 0, 1) D'^T D' \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} D_{\text{fix}} u_x = \\ &= (0, 0, 1)^T \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 & 0 \\ c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} D_{\text{fix}} u_x = 0. \end{aligned}$$

На примере компоненты c_1 поясним идею, как можно оценить сверху величину, получающуюся при осреднении функции $\cos \psi(t)$. Рассмотрим непрерывный случай осреднения

$$c_1 = \frac{1}{T} \int_0^T \cos \psi(t) dt.$$

Динамика угла ψ описывается дифференциальным уравнением и ограничениями на функции в правой его части:

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = s + \varepsilon(t), \quad \psi(0) = \psi_0, \quad |\varepsilon(t)| \leq \varepsilon_{\max}, \quad s + \varepsilon(t) > 0.$$

Произведем замену переменных $t = t(\psi)$, $\epsilon(\psi) = \varepsilon(t(\psi))$, $|\epsilon(\psi)| \leq \varepsilon_{\max}$ в интеграле:

$$\int_0^T \cos \psi(t) dt = \int_{\psi_0}^{\psi(T)} \frac{\cos \psi}{s + \epsilon(\psi)} d\psi.$$

Данный интеграл можно представить в виде суммы интегралов на отрезках знакопостоянства (полупериодах) функции $\cos \psi$ и двух интегралов, соответствующих отрезкам времени в начале и в конце отрезка $[\psi_0, \psi(T)]$. Например, при $\psi_0 < \pi/2$ этот отрезок представляется в следующем виде:

$$[\psi_0, \psi(T)] = [\psi_0, \pi/2] \cup [\pi/2, 3\pi/2] \cup [3\pi/2, 5\pi/2] \cup \dots \cup [\pi/2 + 2\pi n_{\text{cir}}, \psi(T)],$$

где n_{cir} — количество полных оборотов системы вокруг оси вращения, а длина последнего отрезка не превосходит π , т.е. $\pi/2 + 2\pi n_{\text{cir}} \leq \psi(T) \leq 3\pi/2 + 2\pi n_{\text{cir}}$.

Подынтегральная функция на каждом из таких отрезков имеет постоянный знак, а максимальное значение подынтегрального выражения, и, следовательно, интеграла, достигается при $\epsilon(\psi) = -\text{sign}(\cos \psi) \varepsilon_{\max}$:

$$\int \frac{\cos \psi}{s + \epsilon(\psi)} d\psi \leq \int \frac{\cos \psi}{\min_{|\epsilon| \leq \varepsilon_{\max}} (s + \epsilon)} d\psi = \int \frac{\cos \psi}{s - \text{sign}(\cos \psi) \varepsilon_{\max}} d\psi,$$

что дает возможность оценить каждый интеграл сверху и снизу:

$$\left| \int_{\psi_0}^{\pi/2} \frac{\cos \psi}{s + \epsilon(\psi)} d\psi \right| \leq \frac{2}{s - \epsilon_{\max}}, \quad \left| \int_{\pi/2+2\pi n_{\text{cir}}}^{\psi(T)} \frac{\cos \psi}{s + \epsilon(\psi)} d\psi \right| \leq \frac{2}{s - \epsilon_{\max}},$$

$$\frac{-2}{s - \epsilon_{\max}} \leq \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\cos \psi}{s + \epsilon(\psi)} d\psi \leq \frac{-2}{s + \epsilon_{\max}},$$

$$\frac{2}{s + \epsilon_{\max}} \leq \int_{3\pi/2}^{5\pi/2} \frac{\cos \psi}{s + \epsilon(\psi)} d\psi \leq \frac{2}{s - \epsilon_{\max}}.$$

Следовательно, абсолютное значение интеграла на всем отрезке осреднения оценивается сверху:

$$\left| \int_{\psi_0}^{\psi(T)} \frac{\cos \psi}{s + \epsilon(\psi)} d\psi \right| \leq \left| \int_{\psi_0}^{\pi/2} \frac{\cos \psi}{s + \epsilon(\psi)} d\psi \right| + \left| \int_{\pi/2+2\pi n_{\text{cir}}}^{\psi(T)} \frac{\cos \psi}{s + \epsilon(\psi)} d\psi \right| +$$

$$+ \left| \sum_{j=1}^{n_{\text{cir}}} \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\cos \psi}{s + \epsilon(\psi)} d\psi + \int_{3\pi/2}^{5\pi/2} \frac{\cos \psi}{s + \epsilon(\psi)} d\psi \right) \right| \leq$$

$$\leq \frac{4}{s - \epsilon_{\max}} + \left| \sum_{j=1}^{n_{\text{cir}}} \frac{-2}{s + \epsilon_{\max}} + \frac{2}{s - \epsilon_{\max}} \right| \leq \frac{4}{s - \epsilon_{\max}} + \frac{n_{\text{cir}} 4\epsilon_{\max}}{(s + \epsilon_{\max})(s - \epsilon_{\max})}.$$

Угловая скорость вращения и количество полных оборотов системы связаны равенством $sT = 2\pi n_{\text{cir}} + \Delta\psi$ для некоторого $\Delta\psi \leq 2\pi$, что дает оценку величины c_1 сверху:

$$|c_1| = \left| \frac{1}{T} \int_0^T \cos \psi(t) dt \right| \leq \frac{4}{T(s - \epsilon_{\max})} + \frac{n_{\text{cir}} 4\epsilon_{\max}}{T(s^2 - \epsilon_{\max}^2)} =$$

$$= \frac{4}{T(s - \epsilon_{\max})} + \frac{(sT - \Delta\psi) 4\epsilon_{\max}}{2\pi sT s(1 - \epsilon_{\max}^2/s^2)} =$$

$$= \frac{4}{T(s - \epsilon_{\max})} + \frac{2(1 - \Delta\psi/(sT))}{\pi(1 - \epsilon_{\max}^2/s^2)} \frac{\epsilon_{\max}}{s}.$$

Таким образом, получим

$$|c_1| \leq \frac{4}{T(s - \epsilon_{\max})} + C \frac{\epsilon_{\max}}{s},$$

где параметр $C = \frac{2}{\pi(1-\varepsilon_{\max}^2/s^2)}$ является оценкой сверху для дроби $\frac{2(1-\Delta\psi/(sT))}{\pi(1-\varepsilon_{\max}^2/s^2)}$.

Доказательство утверждения 1. Преобразуем подынтегральное выражение функционала в проблеме (18), подставив в него формулы (12), (13) и введя обозначение $v = v(s, y) = D_{\text{init}}(sy + yy^T u_x)$:

$$\begin{aligned} \Phi^T z = \Phi^T (\Gamma D_{\text{init}}(sy + yy^T u_x) + \nu_0 + r + \delta\nu') &= \Phi^T \Gamma v + \Phi^T \nu_0 + \Phi^T \delta\nu' + \\ &+ \Phi^T D_{\text{init}} \left(-s(\hat{y}\alpha + \hat{y}\beta) + \varepsilon y + y^T u_x (\hat{\alpha} + \hat{\beta})y + yy^T \hat{u}_x \alpha \right) = (v \otimes \Phi)^T \gamma + \\ &+ \Phi^T \nu_0 + \Phi^T \delta\nu' + \Phi^T D_{\text{init}} \left(-s(\hat{y}\alpha + \hat{y}\beta) + \varepsilon y - y^T u_x (\hat{y}\alpha + \hat{y}\beta) + yy^T \hat{u}_x \alpha \right). \end{aligned}$$

Отсюда получим:

$$\begin{aligned} \Phi^T z = (v \otimes \Phi)^T \gamma + \Phi^T \nu_0 + \Phi^T \delta\nu' + \varepsilon \Phi^T D_{\text{init}} y + \\ \text{(П.3)} \quad + \Phi^T D_{\text{init}} \left(-s\hat{y} - y^T u_x \hat{y} + yy^T \hat{u}_x \right) \alpha + \Phi^T D_{\text{init}} \left(-s\hat{y} - y^T u_x \hat{y} \right) \beta. \end{aligned}$$

Здесь воспользовались следующими свойствами матричных операций:

$$\Phi^T \Gamma v = (\Phi^T \otimes v^T) \gamma = (v \otimes \Phi)^T \gamma, \quad \hat{\alpha} y = -\hat{y} \alpha,$$

а также возможностью переноса скалярного произведения $y^T u_x$ в другую часть соответствующей группы множителей: $\hat{\alpha} y y^T u_x = -y^T u_x \hat{y} \alpha$.

Определим матрицы C'_α, C'_β :

$$\begin{aligned} C'_\alpha &= D_{\text{init}} \left(-s\hat{y} - y^T u_x \hat{y} - y^T u_x \hat{y} \right), \\ C'_\beta &= D_{\text{init}} \left(-s\hat{y} - y^T u_x \hat{y} \right), \end{aligned}$$

тогда правая часть (П.3) представляется в виде функции, линейно зависящей от переменных $q, \alpha, \beta, \varepsilon, \delta\nu$:

$$\begin{aligned} \text{(П.4)} \quad \Phi^T(y, s) z(y, s) = \\ = (v \otimes \Phi)^T \gamma + \Phi^T \nu_0 + \Phi^T \delta\nu' + \Phi^T C'_\alpha \alpha + \Phi^T C'_\beta \beta + \varepsilon \Phi^T D_{\text{init}} y. \end{aligned}$$

Подставим формулу (П.4) в функционал исходной проблемы (19):

$$\begin{aligned} I(\Phi) &= \sup_{(q, \alpha, \beta, \varepsilon, \delta\nu') \in B'} |l(\Phi) - a^T q| = \\ &= \sup_{(q, \alpha, \beta, \varepsilon, \delta\nu') \in B'} \left| \int \left((v \otimes \Phi)^T \gamma + \Phi^T \nu_0 + \Phi^T \delta\nu' + \Phi^T C'_\alpha \alpha + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Phi^T C'_\beta \beta + \varepsilon \Phi^T D_{\text{init}} y \right) dy ds - a^T q \right|. \end{aligned}$$

Так как $q = \text{col}(\gamma, \nu_0)$, то функция $l(\Phi) - a^T q$ линейно зависит от q , причем множитель при q равен

$$\left(\frac{\int v \otimes \Phi dyds}{\int \Phi dyds} \right) - a.$$

Поэтому если не выполнено условие (22), то имеем $\sup_{q \in \mathbf{R}^{12}} |l(\Phi) - a^T q| = +\infty$ при фиксированном Φ и произвольных допустимых $\alpha, \beta, \varepsilon, \delta\nu'$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \sup_{(q, \alpha, \beta, \varepsilon, \delta\nu') \in B'} |l(\Phi) - a^T q| = \\ &= \sup_{(q, \alpha, \beta, \varepsilon, \delta\nu') \in B'} \left| \int (\Phi^T \delta\tilde{\nu} + \Phi^T C'_\alpha \alpha + \Phi^T C'_\beta \beta + \varepsilon \Phi^T D_{\text{init}} y) dyds \right|, \end{aligned}$$

т.е. необходимо найти максимум модуля линейной функции, каждое слагаемое которой зависит только от одной переменной, отсутствующей в прочих слагаемых, поэтому максимум можно искать независимо по каждой из переменных. При фиксированном Φ этот максимум ищется в явном виде:

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha: |\alpha_i| \leq \alpha_{\max}} \int \Phi^T C'_\alpha \alpha dyds &= \sup_{\alpha: |\alpha_i| \leq \alpha_{\max}} \int \left(\sum_{i=1}^3 (C'^T_\alpha \Phi)_i \alpha_i \right) dyds = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sup_{\alpha_i: |\alpha_i| \leq \alpha_{\max}} \int (C'^T_\alpha \Phi)_i \alpha_i dyds = \\ &= \int \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_{\max} \text{sign}((C'^T_\alpha \Phi)_i) (C'^T_\alpha \Phi)_i \right) dyds = \int \|C_\alpha \Phi\|_1 dyds. \end{aligned}$$

Аналогичная цепочка выкладок справедлива и для остальных слагаемых в функционале (18). Таким образом, явное вычисление точной верхней грани исходного функционала приводит к оптимизационной задаче (21)–(22).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лидов М.Л.* К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов // Космические исследования. 1964. № 5. С. 713–715.
2. *Красовский Н.Н.* К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. № 1. С. 3–14.
3. *Лидов М.Л.* Минимаксные методы оценивания. М.: Препринт № 71. Ин-т прикл. мат. им. М.В. Келдыша РАН. 2010.
4. *Matasov A.I.* Estimators for Uncertain Dynamic Systems. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1999.

5. Акимов П.А., Деревянкин А.В., Матасов А.И. Гарантирующий подход и l_1 -аппроксимация в задачах оценивания параметров БИНС при стендовых испытаниях. М.: Изд-во МГУ, 2012.
6. Козлов А.В., Парусников Н.А., Вавилова Н.Б., Тарыгин И.Е., Голован А.А. Динамическая стендовая калибровка бескарданных инерциальных навигационных систем в сборе // Известия ЮФУ. Технические науки. 2018. № 1. С. 241–257.
7. Vavilova N.B., Vasineva I.A., Golovan A.A., Kozlov A.V., Papusha I.A., Parusnikov N.A. The Calibration Problem in Inertial Navigation // J. Math. Sci. 2021. V. 253. No. 6. P. 818–836.
8. Веремеенко К.К., Галай И.А. Разработка алгоритма калибровки инерциальной навигационной системы на двухосном испытательном стенде // Труды МАИ. 2013. № 6. С. 1–14.
9. Тарыгин И.Е. Методика калибровки тепловой модели блока чувствительных элементов, состоящего из трех датчиков угловой скорости // Гироскопия и навигация. 2019. № 4. С. 88–102.
10. Kailath T., Sayed A.H., Hassibi B. Linear Estimation. New Jersey, Prentice Hall, 2000.
11. Матасов А.И. Вариационные задачи для калибровки блока ньютонометров // АиТ. 2019. № 12. С. 59–79.
Matasov A.I. Variational problems for calibrating an accelerometer unit // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 12. P. 2135–2151.
12. Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Ч. I. Математические модели инерциальной навигации. М.: МАКС Пресс, 2011.
13. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. Cambridge. Cambridge University Press, 2004.
14. Boyd S., Parikh N., Chu E., Peleato B., Eckstein J. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers // Foundations and Trends in Machine learning. 2010. V. 3. No. 1. P. 1–122.

Статья представлена к публикации членом редколлегии О.А. Степановым.

Поступила в редакцию 07.11.2022

После доработки 14.03.2023

Принята к публикации 30.03.2023