ISSN 0004-6299
Том 101, Номер 3
Март 2024

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

НАУКА
1727

СОДЕРЖАНИЕ

Том 101, номер 3, 2024

Оценка спина сверхмассивной черной дыры в Стрельце A*

А.С. Андрианов, С.В. Чернов 208

Роль батарейного механизма Бирмана в возникновении магнитных полей аккреционных дисков

Р.Р. Андреасян, И.К. Марчевский, Е.А. Михайлов 213

Является ли молодая звездная ассоциация ε Cha двойной?

В.В. Бобылев, А.Т. Байкова 222

Зондирование ионосферы импульсами пульсара B2016+28 на частоте 324 МГц

М.С. Бургин, М.В. Попов 233

Переход от сверхальфвеновского к доальфвеновскому обтеканию экзопланеты звездным ветром на примере HD 209458b

Е.С. Беленькая 244

Принципы детектирования волновой темной материи с помощью экспериментов по измерению гравитационного красного смещения в Солнечной системе

С.В. Пилипенко, Д.А. Литвинов, М.В. Захваткин, А.И. Филеткин 250

Глобальные семейства периодических орбит, примыкающие к точкам либрации в ограниченной задаче трех тел

В.Н. Тхай 263

Отечественный программный комплекс обработки информации космической геодезической системы «спутник–спутник»

А.С. Жамков, С.В. Аюков, А.И. Филеткин, В.К. Милюков, И.Ю. Власов, В.Н. Семенцов, И.В. Гусев, В.Е. Жаров 271

Норма смещения при возмущающем ускорении, меняющемся по закону обратных квадратов, в системе отсчета, связанной с радиусом-вектором

Т.Н. Санникова 284

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2024, том 101, № 3, с. 208–212

ОЦЕНКА СПИНА СВЕРХМАССИВНОЙ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ В СТРЕЛЬЦЕ A*

© 2024 г. А. С. Андрианов[1],*, С. В. Чернов[1],**

[1]*Астрокосмический центр, Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук, Москва, Россия*

**E-mail: andrian@asc.rssi.ru*
***E-mail: chernov@td.lpi.ru*

Поступила в редакцию 01.02.2024 г.
После доработки 11.03.2024 г.
Принята в печать 11.03.2024 г.

В апреле 2017 г. телескоп Горизонта событий получил образ сверхмассивной черной дыры в источнике Стрелец A*. Данный образ состоит из кольцеобразной структуры, которая содержит три области с повышенной яркостью (пятнами). Если предположить, что эти пятна связаны со вспышками вблизи горизонта событий черной дыры, то тогда можно оценить ее спин. Наша оценка дает значение порядка $a \approx 0.9$.

Ключевые слова: сверхмассивные черные дыры, вспышки, спин, Стрелец A*

DOI: 10.31857/S0004629924030017 **EDN:** KKBQQJ

1. ВВЕДЕНИЕ

В апреле 2017 г. телескоп Горизонта событий (ТГС) провел наблюдения сверхмассивной черной дыры (СМЧД) в радиоисточнике Стрелец A* в миллиметровой области спектра на длине волны $\lambda = 1.3$ мм [1]. ТГС разрешил компактный источник излучения с внутренней переменностью порядка часа [1]. Считается, что вокруг СМЧД вращается торообразное распределение двухтемпературной электрон-протонной плазмы [2], которое высвечивает синхротронное излучение. Наблюдения указывают, что миллиметровое излучение происходит из ближайшей окрестности черной дыры с расстояния несколько радиусов Шварцшильда [3]. В результате проведенных наблюдений был получен образ черной дыры, который содержит яркую кольцеобразную структуру, окружающую темное пятно — тень черной дыры [1]. Такая структура предсказывается общей теорией относительности и имеет диаметр порядка ~50 μas[1] [1]. На кольцеобразной структуре отчетливо видны три области повышенной яркости (см. [1, рис. 3]) — яркие пятна, происхождение которых остается неясным. В данной работе сделано предположение, что яркие пятна связаны со вспышечной активностью вблизи внутреннего края аккреционного диска СМЧД и ее отражении в фотонных кольцах. При этом мы не вдаемся в детали конкретного физического механизма, ответственного за вспышечную активность в аккреционном диске.

Известно, что СМЧД в источнике Стрелец A* излучает во всем диапазоне длин волн от радио до гамма. Максимум светимости приходится на субмиллиметровую область спектра с плотностью потока около 3 Янских [4]. Болометрическая светимость приблизительно равна $L_{\rm bol} \sim 10^{35}$ эрг/с, что значительно ниже эддингтоновского предела. Помимо этого, во всем диапазоне от радио до гамма СМЧД проявляет вспышечную активность [5, 6, 7, 8, 9]. Поток в рентгеновском диапазоне во время вспышки может меняться на два порядка величины, в инфракрасном диапазоне — в несколько раз, в миллиметровом диапазоне — на несколько десятков процентов. Продолжительность вспышек составляет от несколько минут до несколько месяцев. Здесь нас будут интересовать вспышки с характерной продолжительностью несколько часов. Такие вспышки соответствуют масштабу порядка несколько гравитационных радиусов, и расположены они в ближайшей окрестности СМЧД. Есть несколько моделей, которые способны объяснить физику вспышек. Это модели генерации вспышечной активности за счет разных видов неустойчивостей в аккреционном диске, из-за пересоединения магнитных силовых линий, вследствие образования и соударения сгустков плазмы, и др. [5].

В течение пяти ночей с 5 по 11 апреля 2017 г. ТГС проводил наблюдения источника Стрелец A* (см. [1, гл. 3]). Параллельно проводились инфракрасные и рентгеновские наблюдения, близкие по времени с наблюдениями ТГС для подтверждения вспышечной активности (см. [1, гл. 4]). Благодаря этому была

[1] μas (micro arc second) — угловая микросекунда дуги.

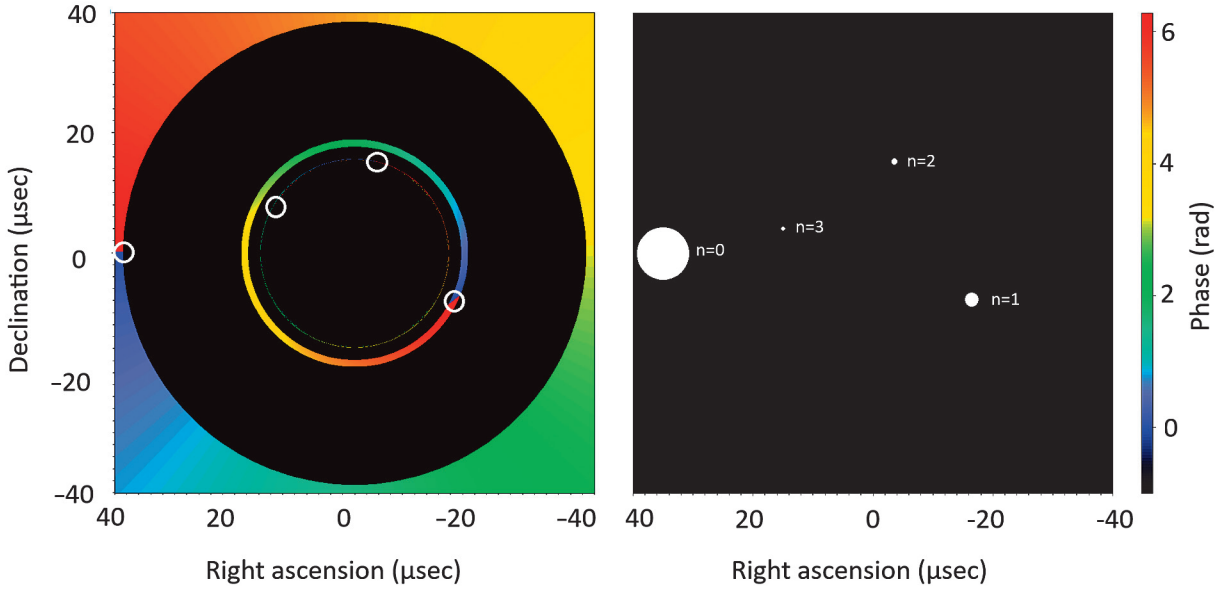

Рис. 1. Вспышка в аккреционном диске СМЧД и ее отражение в первых трех фотонных кольцах.

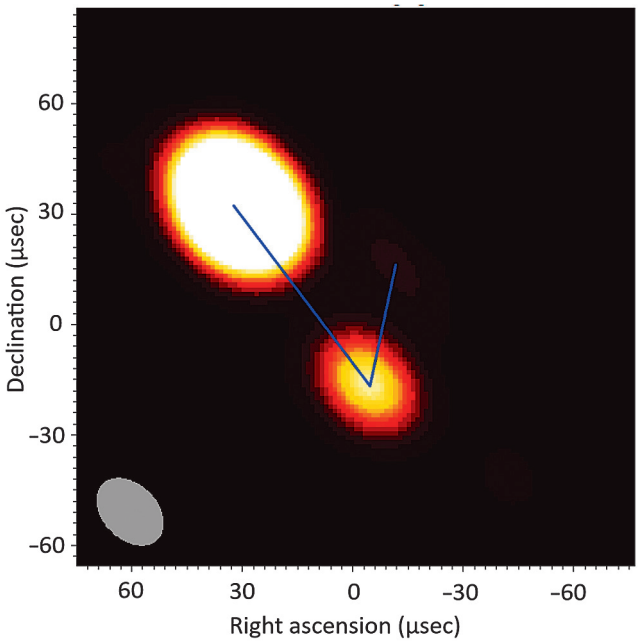

Рис. 2. Восстановленный РСДБ-образ продолжительной вспышки в аккреционном диске и ее отражения в первых двух фотонных кольцах с учетом ограничений РСДБ-сети ngEHT.

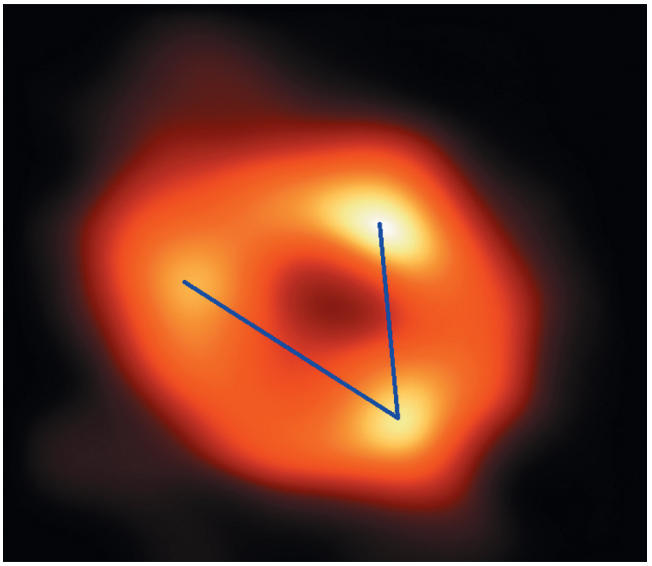

Рис. 3. Образ СМЧД в Стрельце A*, наблюдаемый ТГС [1]. Прямые линии соединяют положение вспышек в диске и в первом и во втором фотонном кольце, образуя угол, который зависит только от спина черной дыры.

подтверждена рентгеновская вспышка, зарегистрированная 11 апреля. Рентгеновские наблюдения 6 и 7 апреля не выявили вспышечной активности [1]. Между тем наблюдения на длине волны $\lambda = 1.3$ мм на радиотелескопах ALMA и SMA, проведенные 7 апреля, показали, что суммарная плотность потока менялась до 13% (см. [1, рис. 2]). Из этого рисунка явно просматривается вспышечная активность продолжительностью несколько часов. В работе [10] был проведен анализ наблюдений, проведенных на ТГС, и было показано, что доля переменности в течение всех дней наблюдений составляет в среднем 9% с вариациями 4–13%. Таким образом, можно предположить, что во время проведенных наблюдений наблюдалась вспышечная активность, и три ярких пятна на кольцеобразной структуре непосредственно связаны со вспышечной активностью СМЧД. Если это действительно так, то, согласно

работе [11], можно оценить спин СМЧД по вспышкам в образе, что и делается в данной работе.

В более ранних работах уже делались оценки спина СМЧД в источнике Стрелец A*. Так, в работе [12] по квазипериодическим осцилляциям была получена оценка, равная $a \approx 0.44$. В другой работе [13] автор получил оценку спина, равную $a \approx 0.65$. В работе [2] по поляризации миллиметрового излучения была получена оценка $a \approx 0.6$.

В данных работах принимаются следующие параметры СМЧД в источнике Стрелец A*: масса приблизительно равна $M \approx 4 \times 10^6 M_\odot$ [1], где $M_\odot$ — масса Солнца, расстояние до него — $R \approx 8.2$ кпк. Характерное динамическое время оценивается величиной $\tau_{dyn} = GM/c^3 \approx 20$ с. Характерное время, за которое фотон облетит СМЧД по неустойчивой орбите в случае невращающейся черной дыры, равно $t_{ph} = 2\pi 3GM/c^3 \approx 370$ с.

2. МОДЕЛЬ ВСПЫШЕК

Предположим, что в ближайшей окрестности СМЧД произошла компактная вспышка в миллиметровой области спектра с продолжительностью $t \gg t_{ph}$ [11]. Тогда наблюдатель увидит суперпозицию вспышек в аккреционном диске и их эха в фотонных кольцах. Другими словами, каждая вспышка вблизи СМЧД будет отображаться на экране наблюдателя в виде последовательности нескольких одновременных вспышек. Возможное расположение вспышек показано слева на рис. 1. Расположение вспышек в фотонных кольцах зависит только от спина черной дыры и угла наклона наблюдателя к ее оси вращения, и не зависит от массы черной дыры. Если бы черная дыра не вращалась, т.е. описывалась бы метрикой Шварцшильда, то и вспышка в аккреционном диске и все ее отражения в фотонных кольцах располагались бы на одной прямой. В этом случае угол между вспышками составлял бы 180°. В случае вращающейся черной дыры, задаваемой метрикой Керра, изображения вспышек в фотонных кольцах перестают располагаться на одной прямой и угол между ними определяется параметром вращения черной дыры (спином). На правой панели рис. 1 показана геометрическая форма вспышки и ее отражение в фотонных кольцах (для случая вращающейся черной дыры с параметром вращения близким к $a \approx 1$). Предполагается, что изначальной формой вспышки в аккреционном диске является круг.

Продолжительная субмиллиметровая вспышка на РСДБ-образе будет представлять из себя суперпозицию вспышки в аккреционном диске и в фотонных кольцах. Пример такой вспышки показан на рис. 2 в предположении, что яркость в фотонном кольце составляет одну десятую от яркости предыдущего фотонного кольца [14]. Здесь показан РСДБ-образ вспышки в аккреционном диске и два эха в двух первых фотонных кольцах. По относительному положению вспышек в образе можно определить спин черной дыры. Линии помечают угол между направлением от вспышки в аккреционном диске к вспышке в первом фотонном кольце и направлением от вспышки в первом фотонном кольце к вспышке во втором фотонном кольце. Данный угол зависит только от спина черной дыры и угла наклона наблюдателя к оси вращения черной дыры. Таким образом, наблюдая мгновенное положение ярких пятен на РСДБ-образе и измеряя угол между яркими пятнами, можно оценить спин черной дыры.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПИНА СМЧД В ИСТОЧНИКЕ СТРЕЛЕЦ A*

В данной главе мы применим теорию, разработанную в работе [11] и кратко изложенную в предыдущей главе, к источнику СМЧД в Стрельце A*.

Как следует из работы [1], во время наблюдений зарегистрирована переменность плотности потока излучения в миллиметровом диапазоне на уровне 4–13%. Также была зафиксирована вспышка в рентгеновском диапазоне. Таким образом, для наших целей такой вспышкой вполне может быть вспышка, приведенная в статье [1, рис. 2]. Продолжительность этой вспышки составляет более двух часов, что значительно больше характерного времени t_{ph}. Данная вспышка в образе СМЧД сначала отобразилась в виде яркого пятна в диске, а спустя некоторое время порядка t_{ph} — в первом фотонном кольце, а затем и во втором. Из-за недостаточного разрешения ТГС им не удалось выделить различные фотонные кольца по радиусу, поэтому все три вспышки изобразились на одном наблюдаемом кольцеподобном образе, изображенном на рис. 3. Три яркие пятна на этом образе образуют систему вспышки в диске и ее отражения в фотонных кольцах и являются излучением от одной физической вспышки в аккреционном диске. Если это так, то относительное положение этих вспышек на данном образе зависит только от спина черной дыры и, следовательно, угол между линиями, соединяющий яркие пятна в кольцеобразной структуре, определяется спином, как изображено на рис. 3. На рис. 4 показана зависимость угла между положениями ярких пятен от спина черной дыры для наблюдателя, расположенного на оси вращения черной

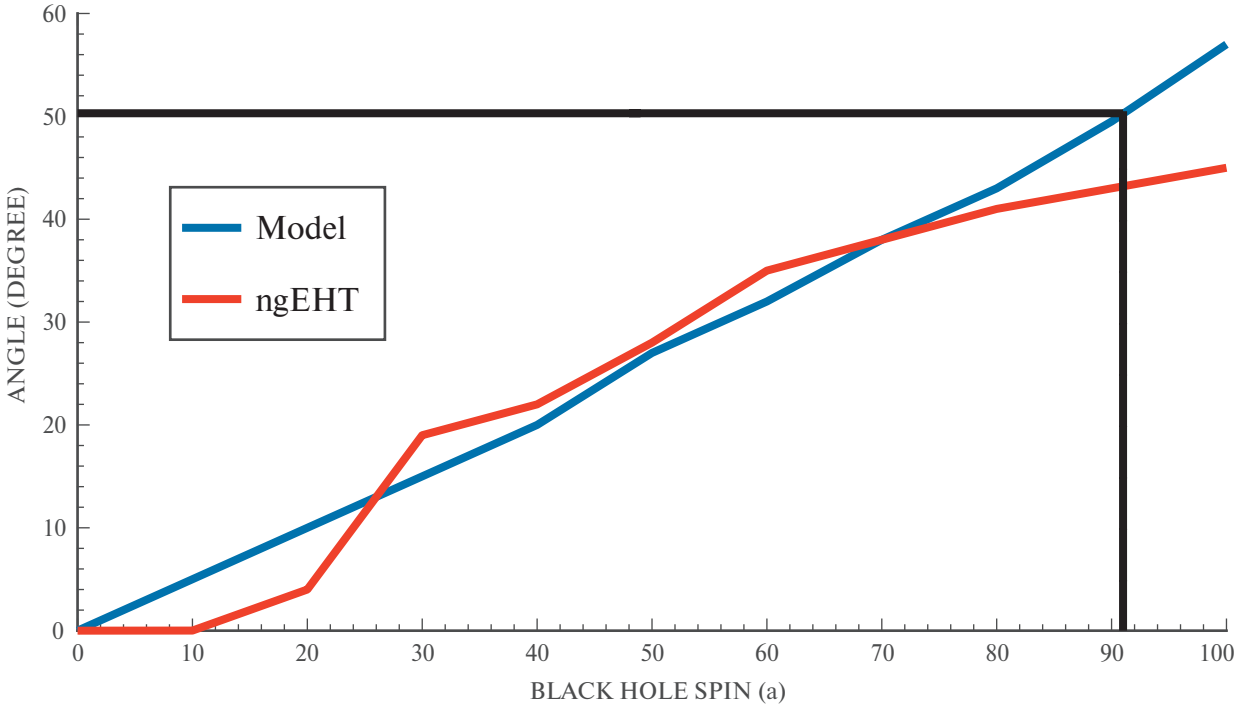

Рис. 4. Зависимость угла между положениями вспышек в диске и в фотонных кольцах от спина черной дыры. Синей линией показана теоретическая зависимость. Красной линией — зависимость, вычисленная с учетом ошибки определения положения ярких пятен на РСДБ-изображениях. Ошибка определяется ограниченным заполнением области пространственных частот в реальных РСДБ-наблюдениях.

дыры. Прямая синяя линия соответствует теоретическим предсказаниям. Измеряя угол на рис. 3 с помощью теоретической кривой, на рис. 4 можно определить спин черной дыры. Угол на рис. 3 приблизительно равен $\alpha \approx 50°$, что соответствует спину на рис. 4, приблизительно равному $a \approx 0.9$. Таким образом, спин СМЧД в источнике Стрелец A* приблизительно равен $a \approx 0.9$.

Данная оценка оказалось больше, чем оценки, полученные в предыдущих работах [2, 12, 13]. Это может быть связано с несколькими причинами. На сегодняшний день остается неизвестным угол наклона наблюдателя к оси вращения черной дыры. Стоить заметить, что зависимость угла между вспышками от наклонения угла наблюдателя есть, но довольно слабая. Поэтому в данной грубой оценке спина ею можно пренебречь. Также достаточно сложно определить центр яркого пятна. Не стоит забывать и про наблюдательные ошибки. Тем не менее, предложенный метод дает вполне разумную оценку.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За последние несколько лет был достигнут значительный прогресс в тестировании общей теории относительности в сильном гравитационном поле. Были открыты двойные черные дыры [15], получены образы черных дыр [1, 16], но проблема определения параметра вращения, спина черной дыры, еще не решена. В данной работе рассматривается метод определения спина черной дыры по вспышкам в аккреционном диске и по их отражениям в фотонных кольцах. Данная модель, развитая в работе [11], применяется к СМЧД в Стрельце A*. Была получена оценка спина, равная $a \approx 0.9$. В дальнейшем, данная оценка может быть скорректирована за счет лучшего разрешения и определения угла наклона наблюдателя к оси вращения черной дыры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *K. Akiyama, A. Alberdi, W. Alef, J.C. Algaba, et al.*, Astrophys. J. Letters **930**(2), id. L12 (2022).
2. *С.В. Чернов*, Астрон. журн. **98**(2), 132 (2021).
3. *R. Fraga-Encinas, M. Moscibrodzka, and H. Falcke*, arXiv:2312.12951 [astro-ph.HE] (2023).
4. *M. Subroweit, M. Garcia-Marin, A. Eckart, A. Borkar, M. Valencia-S., G. Witzel, B. Shahzamanian, and C. Straubmeier*, Astron. and Astrophys. **601**, id. A80 (2017).
5. *M. Garcia-Marin, A. Eckart, A. Weiss, G. Witzel, et al.* **738**(2), id. 158 (2011).
6. *G. Trap, A. Goldwurm, K. Dodds-Eden, A. Weiss, et al.*, Astron. and Astrophys. **528**, id. A140 (2011).

7. *D.P. Marrone, F.K. Baganoff, M.R. Morris, J.M. Moran, et al.*, **682**(1), 373 (2008).
8. *V.L. Fish, S. S. Doeleman, C. Beaudoin, R. Blundell, et al.*, Astrophys. J. Letters **727**(2), id. L36 (2011).
9. *A.M. Ghez, S.A. Wright, K. Matthews, D. Thompson, et al.*, **601**(2), L159 (2004).
10. *M. Wielgus, N. Marchili, I. Marti-Vidal, G.K. Keating, et al.*, Astrophys. J. Letters **930**(2), id. L19 (2022).
11. *A. Andrianov, S. Chernov, I. Girin, S. Likhachev, A. Lyakhovets, and Yu. Shchekinov*, Phys. Rev. D **105**(6), id. 063015 (2022).
12. *Y. Kato, M. Miyoshi, R. Takahashi, H. Negoro, and R. Matsumoto*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **403**, L74 (2010).
13. *V.I. Dokuchaev*, General Relativ. and Gravit. **46**, 1832 (2014).
14. *M.D. Johnson, A. Lupsasca, A. Strominger, G.N. Wong, et al.*, Science Advances **6**(12), eaaz1310 (2020).
15. *B.P. Abbott, R. Abbott, T.D. Abbott, M.R. Abernathy, et al.*, Phys. Rev. Letters **116**(6), id. 061102 (2016).
16. *K. Akiyama, A. Alberdi, W. Alef, K. Asada, et al.*, Astrophys. J. Letters **875**(1), id. L1 (2019).

ESTIMATION OF THE SPIN OF A SUPERMASSIVE BLACK HOLE IN SAGITTARIUS A*

A. S. Andrianov[a], S. V. Chernov[a]

[a]*Astro Space Center, Lebedev Physical Institute, Moscow, Russia*

In April 2017, the Event Horizon telescope received an image of a supermassive black hole in the Sagittarius A* source. This image consists of a ring-like structure that contains three areas with increased brightness (spots). If we assume that these spots are associated with flares near the event horizon of a black hole, then we can estimate its spin. Our estimate gives a value of the order of $a \approx 0.9$.

Keywords: supermassive black holes, flares, spin, Sagittarius A*

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2024, том 101, № 3, с. 213–221

РОЛЬ БАТАРЕЙНОГО МЕХАНИЗМА БИРМАНА В ВОЗНИКНОВЕНИИ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ АККРЕЦИОННЫХ ДИСКОВ

© 2024 г. Р. Р. Андреасян[1], И. К. Марчевский[2], Е. А. Михайлов[3,4]

[1]Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В. А. Амбарцумяна НАН РА, Бюракан, Армения
[2]Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия
[3]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
[4]Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук, Москва, Россия

Поступила в редакцию 10.11.2023 г.
После доработки 11.03.2024 г.
Принята в печать 11.03.2024 г.

В настоящий момент практически не вызывает сомнений, что аккреционные диски, окружающие такие компактные астрофизические объекты, как черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды, могут обладать структурами магнитного поля. Так, они объясняют перенос момента количества движения между различными частями диска и некоторые другие процессы. Существуют различные способы объяснения возникновения данных магнитных полей. В настоящей работе рассмотрена возможность генерации магнитных полей за счет батарейного механизма Бирмана. Он связан с радиальными потоками протонов и электронов. Учитывая их различные массы, они по-разному взаимодействуют с вращающейся средой, создавая круговые токи, порождающие магнитные поля. Ранее подобный процесс изучался для галактических дисков и было показано, что батарейный механизм может порождать начальные магнитные поля в подобных объектах. В данной работе рассмотрено действие батареи Бирмана для аккреционных дисков. Это требует решения интегрального уравнения второго рода, возникающего с учетом самодействия магнитного поля. Показано, что созданные с ее помощью поля оказываются достаточно значимыми и могут играть важную роль в эволюции магнитных полей в дисках.

Ключевые слова: аккреционный диск, батарея Бирмана, магнитное поле

DOI: 10.31857/S0004629924030024 **EDN:** KJZDHM

1. ВВЕДЕНИЕ

Аккреционные диски окружают большое количество компактных астрофизических объектов, таких как черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. Они представляют большой интерес для изучения, и особое значение при их исследовании могут играть магнитные поля [1, 2, 3]. Так, они позволяют объяснить целый ряд важнейших процессов, таких как перенос момента количества движения в аккреционных дисках. Кроме того, магнитные поля могут оказывать определенное влияние на кинематику диска, менять характер движения среды. В связи с этим представляется крайне важным понимание того, за счет чего формируются магнитные поля в аккреционных дисках и какова их структура.

В настоящий момент существуют различные подходы к исследованию магнитных полей аккреционных дисков. Так, в ряде работ предполагается, что их возникновение связано с переносом поля вместе с аккрецирующим веществом [4, 5]. Тем не менее за счет интенсивных процессов перемешивания сложно говорить о том, что данный механизм мог бы приводить к возникновению регулярных структур. Другие работы предполагают возникновение структур поля с учетом влияния центрального объекта. Между тем ряд численных исследований показывает, что роль подобного эффекта в генерации поля не очень значительна [6].

Отдельно следует упомянуть работы, связанные с действием в аккреционных дисках механизма динамо среднего поля [7, 8]. Он основан на совместном действии альфа-эффекта и дифференциального вращения, что при определенном соотношении между параметрами приводит к экспоненциальному росту магнитного поля [9, 10, 11]. Ранее было показано, что разумно было бы использовать модели, первоначально разработанные для галактических дисков [12, 13]. Несмотря на принципиально различные пространственные масштабы, допустимо использовать модельные представления, созданные для тонких астрофизических дисков (так называемое планарное приближение). Безусловно, в таком случае необходимо учитывать ряд особенностей, отличающих галактический диск от аккреционного (так, специфическую роль могут играть граничные условия на внутренней границе диска, наличие радиальных потоков и т.д.). Вместе с тем, хотя механизм динамо весьма удовлетворительно описывает экспоненциальный рост магнитного поля в аккреционном диске, он никак не объясняет возникно-

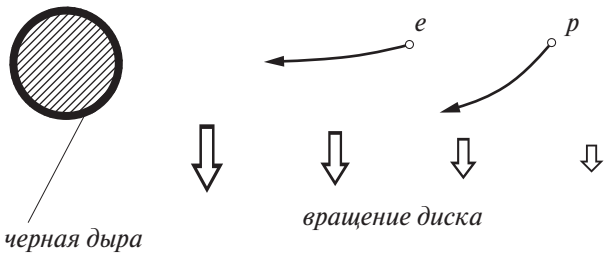

Рис. 1. Схема батарейного механизма Бирмана. Электроны обладают меньшей угловой скоростью, чем протоны.

вение начальных полей, которые должны быть связаны с какими-либо другими механизмами.

В случае галактик возникновение «затравочных» магнитных полей объясняется, как правило, с помощью механизма Бирмана [14]. Он основан на наличии радиальных потоков ионизованной среды в галактическом диске. Ключевую роль играют различные массы протонов и электронов, которые при одинаковой абсолютной величине электрического заряда принципиально по-разному взаимодействуют с вращающейся средой: электроны «приклеиваются» к окружающему потоку, в то время как движение протонов «запаздывает». Это приводит к возникновению различных скоростей, и как следствие — к возникновению круговых токов, порождающих магнитное поле (рис. 1). Особое значение имеет структура поля, при описании которой естественным образом возникает необходимость решения интегральных уравнений [15, 16]. Хотя магнитные поля, создаваемые посредством механизма Бирмана, могут быть достаточно малы, их роль в галактическом магнетизме сложно переоценить — они порождают начальные поля в галактических объектах.

Не меньшую роль могут играть батарейные механизмы и для аккреционных дисков [17]. Магнитные поля могут присутствовать практически во всех дисках, окружающих компактные объекты, однако с точки зрения возможности наблюдательной верификации наибольший интерес представляют диски, окружающие сверхмассивные черные дыры с массами порядка $10^{5,\ldots,10}$ солнечных масс. Плотность числа частиц в них составляет величины порядка $10^{7,\ldots,10}$ см$^{-3}$, а размеры — порядка $10^{15,\ldots,19}$ см. Так, по крайней мере в отдельных случаях, есть данные об измерении мер фарадеевского вращения [18]. Хотя причины его возникновения и являются предметом дискуссий, оно может быть косвенным свидетельством наличия магнитных полей и давать возможность оценить в будущем его величину. Можно предполагать, что для них радиальные потоки будут играть более важную роль, чем в случае галактических дисков [19]. По этой причине представляется, что круговые токи будут даже более интенсивны, а значит они будут связаны с гораздо большими магнитными полями.

В настоящей статье сначала рассмотрены принципиальные особенности механизма Бирмана, описаны базовые характеристики полей, созданных с его помощью. После этого сделана качественная оценка магнитного поля, которое оказывается достаточно велико по меркам аккреционного диска. Затем для уточнения модели построено интегральное уравнение, которое учитывает подавление течений за счет созданного ими магнитного поля. Решение данного интегрального уравнения достаточно сложно и требует применения специальных математических методов. Они позволяют получить детальную структуру поля, в целом соответствующую качественным оценкам.

2. БАЗОВЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим движение потока частиц, падающих на центр аккреционного диска (например, черную дыру). Можно предполагать, что электроны намного сильнее взаимодействуют с излучением, идущим от ядра галактики, чем протоны. По этой причине вращательная скорость электронов сильно уменьшается, и в первом приближении можно ею пренебречь [19]. В то же время движение протонов будет подчиняться следующему уравнению [15, 16]:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{m}{\tau}\left(\mathbf{v} - \mathbf{V}_{rot}\right) + \frac{e}{c}\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right), \qquad (1)$$

где $\mathbf{v}$ — их скорость, $\mathbf{F} = -m\nabla U$ — массовая сила $U = U(r)$ — гравитационный потенциал), τ — характерное время взаимодействия между протонами и средой, $\mathbf{V}_{rot}$ — скорость вращения среды, $\mathbf{B}$ — магнитное поле, e — элементарный заряд, c — скорость света, m — масса протона. Отметим, что скорость вращения среды, в которой движутся протоны и электроны (плотность нейтрального компонента может значительно — более чем на порядок — превышать плотность ионизованного), может быть представлена в форме $\mathbf{V}_{rot} = r\Omega\mathbf{e}_{\varphi}$, где Ω определяется кеплеровским законом [1]:

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}, \qquad (2)$$

где G — универсальная гравитационная постоянная, M — масса центрального объекта.

Отметим, что в предшествующих работах использовалось приближение сплошной среды и связанные с ним уравнения для многофазной среды [20, 21, 22, 23]. Вместе с тем мы используем иной подход, связанный с движением пробной частицы [15, 24]. Важно отметить, что в отличие от ряда других задач, большие электрические поля не образуются, поскольку в любой точке плотность электронов и протонов остается одинаковой (разделения зарядов не происходит), а лишь отличаются азимутальные скорости этих частиц, что и приводит к электрическому току.

Основную роль для нас будет играть азимутальный компонент скорости $v_\varphi = r\omega$, где $\omega = d\varphi/dt$. Изменение ω описывается уравнением [15]:

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{2\omega}{r}\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\tau}(\omega - \Omega) - \frac{e}{rmc}B\frac{dr}{dt}. \qquad (3)$$

где магнитное поле обусловлено движением остальных заряженных частиц.

Будем предполагать, что время релаксации довольно мало по сравнению с другими масштабами задачи:

$$\tau \ll \frac{r}{dr/dt}.$$

(Возьмем в качестве времени релаксации величину порядка 10^{-2} с — эту оценку можно получить с помощью формулы (9), которая будет обсуждаться ниже, скорость dr/dt — порядка 10^7 см/с, а расстояние до центра порядка 10^{19} см. В таком случае данное соотношение выполняется «с запасом».) Это означает, что мы можем положить, что координата и скорость меняются мало, и сделать замену $dr/dt = V$. Тогда можно переписать уравнение в виде [15]:

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{\tau}\left(1 + \frac{2V\tau}{r}\right)\omega = \frac{1}{\tau}\left(\Omega - \frac{e\tau VB}{rmc}\right). \qquad (4)$$

Величина угловой скорости будет достаточно быстро выходить на стационарное значение [15]:

$$\omega \approx \omega_0(r) = \Omega - \frac{V\tau}{r}\left(2\Omega + \frac{eB}{mc}\right). \qquad (5)$$

Если принять во внимание, что циклотронная частота заметно превышает величину угловой скорости вращения аккреционного диска, можно еще больше упростить данное выражение:

$$\omega_0(r) \cong \Omega - \frac{eVB\tau}{rmc}. \qquad (6)$$

С физической точки зрения движение протонов приводит к возникновению круговых токов, которые порождают магнитное поле, направленное перпендикулярно плоскости диска. Действие магнитного поля приводит к уменьшению значения угловой скорости, что в свою очередь влечет замедление роста магнитного поля. Оценить, при каких значениях параметров рост магнитного поля остановится, можно исходя из того, что угловая скорость обратится в нуль: $\omega_0 = 0$.

Нельзя не заметить, что данное предположение является грубым и качественным: в реальности рост поля прекращается на диффузионной школе времени, когда полю противодействует омическая или турбулентная диффузия [20, 21, 24]. Поэтому из данных простых предпосылок возможно получить лишь грубые и завышенные оценки значения поля.

Это будет означать, что:

$$\Omega = \frac{eVB\tau}{rmc}. \qquad (7)$$

Таким образом, оценить магнитное поле, которое может быть создано с помощью механизма Бирмана, можно по следующей формуле:

$$B = \frac{\Omega rmc}{eV\tau}. \qquad (8)$$

Оценим данную величину для аккреционного диска около сверхмассивной черной дыры с массой $M = 10^9 M_\odot$. Так, можно использовать наблюдательные данные, полученные для III Zw 002 [25], а также теоретические оценки для других объектов. В качестве радиуса возьмем величину порядка $r \sim 10^{18}$ см [26, 25]. Тогда для угловой скорости вращения объекта, в соответствии с кеплеровским законом, можно получить значение

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \sim 10^{-9}\ \text{с}^{-1}.$$

Для скорости падения среды на центр аккреционного диска возьмем $V \sim 10^7$ см/с. Такой порядок имеет скорость вращения в центральных областях галактик, и можно использовать ее в качестве грубой оценки для скорости свободного падения среды.

Для времени столкновений можно использовать стандартную оценку, используемую в космической электродинамике [27], согласно которой

$$\tau = \frac{m^2V^3}{16\pi e^4 n \ln\Lambda}, \qquad (9)$$

где m — масса протона, $\ln\Lambda \sim 10^1$ — кулоновский логарифм. Используя плотность частиц порядка $n \sim 10^9$ см$^{-3}$, мы можем получить $\tau \sim 10^{-2}$ с.

Тогда, используя (8), мы получим, что величина магнитного поля составит величину порядка 10^{-2} Гс.

В свою очередь, оценим поле равнораспределения, которое можно получить из равенства плотностей энергии турбулентных движений и магнитного поля, которое определяется по формуле $B^* = v_t\sqrt{4\pi\rho}$, где ρ — плотность среды в диске, v_t — скорость турбулентных движений [26]. Предполагая, что $v \sim 10^8$ см/с (такие оценки соответствуют данным о дисперсии скоростей [26]), можно получить, что для данного случая $B^* \sim 10$ Гс. Таким образом, создаваемое бирмановским механизмом поле на несколько порядков ниже уровня равнораспределения.

3. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИИ ПОЛЯ

Можно видеть, что достаточно быстро угловая скорость частиц становится близкой к значению $\omega_0(R)$. Это приводит к возникновению на расстоянии R от центра кругового тока:

$$I(R) = \frac{e\omega_0(R)}{2\pi}.$$

В соответствии с законом Био-Савара [28], данный ток приводит к возникновению в плоскости диска магнитного поля, направленного перпендикулярно к его плоскости. На расстоянии r от центра его величину можно определить с помощью следующего интеграла [15]:

$$\mathbf{b}(r) = b(r)\mathbf{e}_z = \int_0^{2\pi} \frac{I(R)R(R - r\cos\varphi)\mathbf{e}_z d\varphi}{c(r^2 + R^2 - 2rR\cos\varphi)^{3/2}}.$$

Чтобы выразить магнитное поле, удобно использовать вспомогательную функцию, которая ранее применялась нами в задачах о возникновении поля в галактиках [15] и задается следующим образом:

$$\Phi(\chi) = \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \chi\cos\varphi)d\varphi}{(\chi^2 + 1 - 2\chi\cos\varphi)^{3/2}}. \qquad (10)$$

Тогда величину создаваемого круговым током магнитного поля можно представить с помощью выражения

$$b(r) = \frac{e}{2\pi cR}\Phi\left(\frac{r}{R}\right)\left(\Omega - \frac{eVB\tau}{mcR}\right).$$

Если мы рассмотрим внутри диска кольцо $[R, R+dR]\times[-h, h]$, то количество частиц в нем будет составлять величину (напомним, что здесь $n(r)$ — плотность частиц)

$$dN(R) = 4\pi n(R)h(R)RdR.$$

Данное кольцо создает на расстоянии r от центра поле B:

$$dB(r) = \frac{2en(R)h(R)dR}{c}\Phi\left(\frac{r}{R}\right)\left(\Omega - \frac{eVB\tau}{mcR}\right).$$

Для угловой скорости вращения объекта можно использовать кеплеровский закон вращения [1]:

$$\Omega(R) = \Omega_0\left(\frac{R_{\max}}{R}\right)^{3/2},$$

где $R_{\max}$ — радиус диска, Ω_0 — угловая скорость вращения в его внешних областях.

Для оценки параметров диска возьмем качественные аналитические модели, предложенные в работе [27] и подтверждаемые численными моделями для дисковой аккреции. Так, для плотности числа частиц в диске можно пользоваться следующей формулой [12, 27] (здесь и далее под величинами с нижним индексом «0» будем понимать их характерные значения, соответствующие области около внешней границы диска):

$$n(R) = n_0 Q^{11/20}(R)\left(\frac{R_{\max}}{R}\right)^{15/8},$$

где

$$Q(R) = 1 - q\left(\frac{R_{\min}}{R}\right)^{1/2}, \quad q = 0.9.$$

Полутолщина диска будет зависеть от расстояния до центра по следующему закону [12, 27]:

$$h(R) = h_0 Q^{3/20}\left(\frac{R_{\max}}{R}\right)^{9/8}.$$

Скорость потоков в радиальном направлении выглядит так [12, 27]:

$$V(R) = \frac{V_0}{Q^{7/10}}\left(\frac{R_{\max}}{R}\right)^{1/4}.$$

Если учесть, что $\tau \sim V^3/n$ [29, 30], мы можем получить следующую принципиальную закономерность для величины времени взаимодействия между различными частицами:

$$\tau(R) = \frac{\tau_0}{Q^{16/5}(R)}\left(\frac{R}{R_{\max}}\right)^{9/8}.$$

Тогда уравнение для создаваемого круговым током магнитного поля будет выглядеть так:

$$dB(r) = \frac{2en_0 h_0\Omega_0}{c}Q^{7/10}(R)\left(\frac{R_{\max}}{R}\right)^{9/4}\Phi\left(\frac{r}{R}\right)dR -$$

$$- \frac{2en_0 h_0 eV_0 B(R)\tau_0}{mc^2 R}Q^{-16/5}(R)\left(\frac{R}{R_{\max}}\right)^{1/8}\Phi\left(\frac{r}{R}\right)dR.$$

Интегрируя обе части данного равенства, мы получим интегральное уравнение второго рода:

$$B(r) = \frac{2en_0h_0\Omega_0}{c}\int\limits_{R_{\min}}^{R_{\max}} Q^{\frac{7}{10}}(R)\left(\frac{R_{\max}}{R}\right)^{\frac{9}{4}}\Phi\left(\frac{r}{R}\right)dR -$$

$$-\frac{2en_0h_0eV_0\tau_0}{mc^2}\int\limits_{R_{\min}}^{R_{\max}}\frac{B(R)}{R}Q^{\frac{-16}{5}}(R)\left(\frac{R}{R_{\max}}\right)^{\frac{1}{8}}\Phi\left(\frac{r}{R}\right)dR.$$

Данное уравнение удобно привести к безразмерному виду. Измеряя магнитные поля в единицах $2en_0h_0\Omega_0R_{\max}/c$, а расстояния в единицах $R_{\max}$, мы можем привести уравнение к виду:

$$B(r) = \int\limits_{R_{\min}}^{1}\frac{Q^{7/10}(R)}{R^{9/4}}\Phi\left(\frac{r}{R}\right)dR -$$

$$-\alpha\int\limits_{R_{\min}}^{1}\frac{B(R)}{Q^{16/5}(R)R^{7/8}}\Phi\left(\frac{r}{R}\right)dR,$$

где $\alpha = \dfrac{2e^2n_0h_0V_0\tau_0R_{\min}^{1/8}}{mc^2R_{\max}^{1/8}}$.

Таким образом, после «обезразмеривания» основных величин мы получим следующее уравнение:

$$B(r) = \alpha\int\limits_{R_{\min}}^{1}K(r,R)B(R)dR + F(r), \qquad (11)$$

где ядро и неоднородность представляются в виде следующих безразмерных функций:

$$F(r) = \int\limits_{R_{\min}}^{1}\frac{Q^{7/10}(R)}{R^{9/4}}\Phi\left(\frac{r}{R}\right)dR,$$

$$K(r,R) = -\frac{1}{Q^{16/5}(R)R^{7/8}}\Phi\left(\frac{r}{R}\right).$$

4. ПРОЦЕДУРА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Несмотря на структуру уравнения (11), типичную для интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, рассматриваемое здесь уравнение имеет специфику, которую следует учитывать при его численном решении. Прежде всего, ядро имеет неинтегрируемую в обычном смысле особенность, следующую из определения (10) функции $\Phi(\chi)$, когда ее аргумент приближается к единице. Ее график представлен на рис. 2. Интеграл в (10) можно взять аналитически и представить в виде комбинации полных эллиптических интегралов I и II рода, которые хотя и не являются элементарными функциями в общепринятом смысле, весьма хорошо изучены:

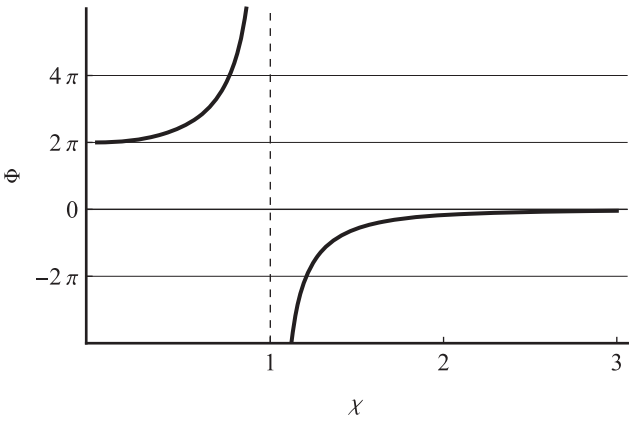

Рис. 2. График функции $\Phi(\chi)$.

$$\Phi(\chi) = 2\mathrm{sign}(1-\chi)\left(\frac{1}{1-\chi}K\left(\frac{-4\chi}{(1-\chi)^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1+\chi}E\left(\frac{-4\chi}{(1-\chi)^2}\right)\right).$$

Знание асимптотического поведения эллиптических интегралов позволяет выделить особенность функции $\Phi(\chi)$ при $\chi \to 1$:

$$\Phi(\chi) = \Phi_{sing}(\chi) + \tilde{\Phi}(\chi) =$$

$$= \frac{2}{1-\chi} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{1-\chi}\right)^2 + \tilde{\Phi}(\chi),$$

где $\tilde{\Phi}(\chi)$ — гладкая ограниченная функция.

Таким образом, подынтегральное выражение в (11) является неограниченным и неинтегрируемым в обычном смысле. Сам интеграл, таким образом, является сингулярным и должен пониматься в смысле главного значения по Коши. Это определяет требования к численному методу решения уравнения. Использовать традиционную схему типа метода коллокаций с вычислением интегралов по какой-либо из известных квадратурных формул (КФ прямоугольников, трапеций, Симпсона и т.д.) в данном случае нельзя, поскольку в зависимости от положения точки коллокации и узлов КФ можно получить любое значение интеграла.

Следует отметить, что похожее по структуре уравнение с аналогичными сложностями при численном решении возникают, к примеру, при решении граничных интегральных уравнений в вихревых методах вычислительной гидродинамики [31]. Наилучшим образом для подобных целей зарекомендовал себя метод Галеркина. Методические расчеты показывают, что представление решения наиболее простым способом — в виде кусочно-постоянного

распределения — эффективно, но лишь в случае существенно неравномерной дискретизации отрезка интегрирования; при равномерной же дискретизации (не представляющей в рассматриваемой здесь задаче никакой сложности и являющейся здесь самой естественной) метод Галеркина не имеет существенных преимуществ перед схемой коллокаций (при «удачном» выборе положения точек коллокаций и КФ). Существенно более полезной оказывается схема Галеркина с кусочно-линейным, причем разрывным, представлением решения [32].

При дискретизации уравнения (11) отрезок интегрирования разбивался на N равных частей — панелей, решение на каждой панели представлялось в виде комбинации постоянной составляющей и линейной функции с нулевым средним значением, а коэффициенты такого разложения определялись из условия ортогональности невязки на панелях тем же функциям, выступающим, таким образом, в качестве проекционных. Особого внимания требует вычисление коэффициентов, соответствующих совпадающим или соседним влияющей и контрольной панелям: если представить матрицу в виде блочной с блоками размером 2×2, то данные коэффициенты образуют три диагонали. Именно для них требуется вычислять сингулярные интегралы; при этом от переменных (r, R) целесообразно перейти к переменным (r, χ), где $\chi = r/R$, что упрощает процедуру выделения особенности. Отметим, что сама вычислительная процедура для рассматриваемого здесь уравнения требует весьма аккуратной и одновременно эффективной реализации, поскольку ни интеграл по χ, ни интеграл по r аналитически взять не удается, все интегралы необходимо вычислять численно. Для численного определения главных значений сингулярных интегралов были использованы КФ типа метода дискретных вихрей [33].

Отмеченная особенность функции Ф потребовала также применения специального приема для регуляризации уравнения вблизи внешней границы отрезка интегрирования, а также обеспечения следующей из физического смысла задачи непрерывности решения.

Для исключения неинтегрируемых особенностей при вычислении коэффициентов матрицы, соответствующих правому краю отрезка (при $r \to 1$), принималось, что решение из области $[r_{\min}, 1]$ продолжается еще на длину 1–2 панелей вправо путем его экстраполяции с крайней правой панели. Такая процедура не вносит существенной погрешности и вполне корректна, обеспечивая при этом исключение сингулярности при вычислении всех коэффициентов матрицы СЛАУ $Ax = f$, представляющей собой дискретный аналог интегрального уравнения.

Получающееся в итоге решение построенной таким образом системы, хотя и обеспечивает наименьшую невязку в пространстве кусочно-линейных функций, но терпит разрывы между панелями, особенно вблизи границ отрезка интегрирования. Чтобы подавить разрывы численного решения, решение исходной задачи можно заменить процедурой минимизации функционала

$$\Psi = \left\| Ax - f \right\|^2 + \gamma \sum_i \left| \Delta B_i \right|^2 \to \min,$$

где ΔB_i — скачок решения между соседними панелями, что в свою очередь эквивалентно решению линейной системы вида

$$\left(A^T A + \gamma R \right) x = A^T f,$$

в которой матрица R, умножаемая на параметр регуляризации γ, имеет простую блочно-трехдиагональную структуру.

Отметим, что описанная процедура позволяет получить численное решение более высокого качества по сравнению, к примеру, с процедурой типа метода конечных элементов, когда решение сразу разыскивается в виде кусочно-линейного непрерывного распределения.

5. СТРУКТУРА МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим решение уравнения (11) для различных соотношений между внутренним и внешним радиусом. Так, вполне типичным является соотношение, составляющее величину порядка 10^2. По этой причине мы рассмотрели два характерных случая (рис. 3 и 4), для которых были построены решения задач.

Коэффициент α в уравнении (11) может принимать различные величины в зависимости от характеристик аккреционного диска, при этом $\alpha \gg 1$. Нами были рассмотрены случаи $\alpha \sim 10^{2,\ldots,3}$. Хотя в реальности данный коэффициент может существенно превышать эту величину (достигая для отдельных аккреционных дисков в окрестностях сверхмассивных черных дыр, обсуждавшихся выше, значений вплоть до 10^{14}), принципиальный характер поведения магнитного поля можно понять уже в данном случае. В то же время рассмотрение больших α оказывается затруднительным с вычислительной точки зрения.

На рис. 3 показано $B(r)$ при соотношении между внутренним и внешним радиусами диска $R_{\min}/R_{\max} = 0.02$. Можно отметить, что пиковое значение маг-

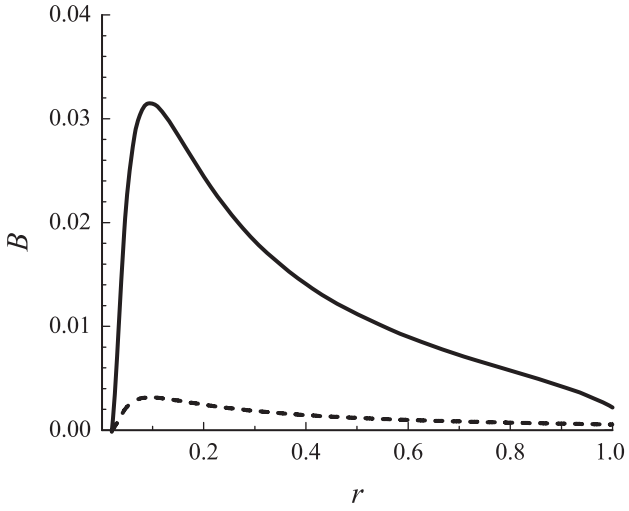

Рис. 3. Магнитное поле для $R_{min}/R_{max}=0.02$. Сплошная линия соответствует $\alpha=10^2$, штриховая — $\alpha=10^3$.

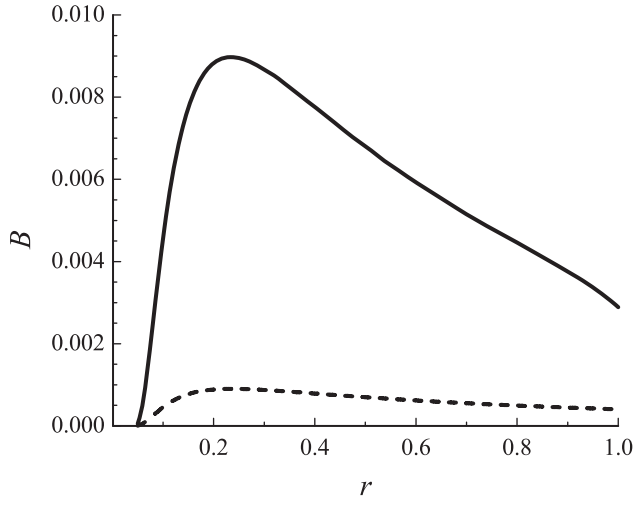

Рис. 4. Магнитное поле для $R_{min}/R_{max}=0.05$. Сплошная линия соответствует $\alpha=10^2$, штриховая — $\alpha=10^3$.

нитного поля достигается достаточно близко к внутренней границе, после чего оно сравнительно быстро убывает по закону, близкому к степенному. При этом величина максимального значения магнитного поля с большой точностью обратно пропорциональна величине коэффициента α. Данный коэффициент описывает подавление магнитного поля в соответствии с правилом Ленца, поэтому логично, что его увеличение приводит к уменьшению поля. Нельзя не заметить, что около внутренней границы поле, вопреки качественным оценкам, сделанным ранее, довольно мало. Это может быть связано с ролью множителя $Q(r)$, принимающего в этой области небольшие значения.

Рис. 4 иллюстрирует случай диска с достаточно большим внутренним радиусом, когда $R_{min}/R_{max}=0.05$. Достаточно интересно, что в таком случае пиковое значение магнитного поля оказывается меньше, но при этом его убывание происходит медленнее. Видно, что поле «размазывается» по плоскости аккреционного диска, и достигает гораздо больших значений на внешней границе (в предыдущем случае можно считать его пренебрежимо малым).

Данный результат кажется по-своему парадоксальным, поскольку процессы, происходящие на внутренней границе аккреционного диска, на деле оказывают намного более существенное влияние на поле во внешних областях, чем можно было бы ожидать.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе был рассмотрен один из возможных механизмов возникновения магнитного поля в аккреционных дисках, окружающих массивные компактные астрофизические объекты, связанный с так называемой батареей Бирмана. Он описывает круговые токи, порожденные различным движением протонов и электронов, их взаимодействием с окружающей их средой в диске. Подобные токи порождают магнитные поля, ориентированные перпендикулярно к плоскости диска, которые могут в дальнейшем играть важную роль в его эволюции. Сделаны базовые оценки, которые показали, что создаваемые магнитные поля будут вполне сопоставимы с полем равнораспределения. Кроме того, с использованием моделей для среды в аккреционных дисках построено интегральное уравнение, решение которого позволяет получить не только качественные оценки, но и описать детальную структуру поля. Представлены результаты для некоторых типичных значений параметров. Можно отметить, что внутренняя граница оказывает достаточно существенное влияние на характеристики магнитного поля во внешней части диска. Хотя это представляется и парадоксальным, подобные закономерности ранее были замечены при изучении действия динамо в аккреционном диске [13].

Отметим, что в настоящей работе мы описали лишь один из возможных механизмов, способствующих появлению магнитного поля в аккреционном диске. Вполне возможно, что он действует совместно с рядом других, таких как магниторотационная неустойчивость (связанная с распространением поля во внешние области диска при наличии градиента угловой скорости) [34, 35, 36], механизм динамо (основанный на одновременном присутствии дифференциального вращения и зеркальной ассиметрии

альфа-аффекта) [7, 8, 13], а также перенос магнитного поля вместе с потоками среды [4]. Нельзя исключить, что реализуется сценарий, который часто рассматривается в галактиках, когда поля, созданные посредством батареи Бирмана, усиливаются с помощью действия крупномасштабного динамо [15, 16]. Так, привлечение других механизмов усиления и генерации поля оказывается желательным для того, чтобы создать поле, лежащее в плоскости диска: рассмотренный нами батарейный механизм позволяет сгенерировать лишь вертикальное магнитное поле, в то время как логично предполагать также существование значительного азимутального компонента.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа Е. А. Михайлова выполнена при поддержке РНФ (проект 19-72-30028).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *N. I. Shakura and R. A. Sunyaev*, Astron. and Astrophys. **337**, 24 (1973).
2. *R. Tylenda*, Acta Astronautica **31**, 127 (1981).
3. *B.T. Gänsicke, T.R. Marsh, J. Southworth, and A. Rebassa-Mansergas*, Science **314** (5807), 1908 (2006).
4. *S.H. Lubow, J.C.B. Papaloizou, and J.E. Pringle*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **267**(2), 235 (1994).
5. *S. Okuzumi, T. Takeuchi, and T. Muto*, **785**(2), id. 127 (2014).
6. *U. Torkelsson and A. Brandenburg*, Astron. and Astrophys. **283**, 677 (1994).
7. *G. Rüdiger, D. Elstner, and T. F. Stepinski*, Astron. and Astrophys. **298**, 934 (1995).
8. *M. Reyes-Ruiz and T. F. Stepinski*, Astron. and Astrophys. **342**, 892 (1999).
9. *С. А. Молчанов, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов*, Успехи физ. наук **145**(4), 593 (1985).
10. *Я. Б. Зельдович, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов*, Магнитные поля в астрофизике (Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютерных исследований, 2006).
11. *Д. Д. Соколов*, Успехи физ. наук **185**(6), 643 (2015).
12. *D. Moss, D. Sokoloff, and V. Suleimanov*, Astron. and Astrophys. **588**, id. A18 (2016).
13. *D. Boneva, E. Mikhailov, M. Pashentseva, D. Sokoloff*, Astron. and Astrophys. **652**, id. A38 (2021).
14. *L. Biermann and A. Schlüter*, Phys. Rev. **82**(6), 863 (1951).
15. *Е.А. Михайлов, Р.Р. Андреасян*, Астрон. журн. **98**, 795 (2021).
16. *E.A. Mikhailov and R.R. Andreasyan*, Open Astronomy **30**(1), 127 (2021).
17. *R.R. Andreasyan, I.K. Marchevsky, V.E. Martynova, and E.A. Mikhailov*, Comm. Byurakan Astrophys. Observ. **69**, 274 (2022).
18. *E. Kravchenko, M. Giroletti, K. Hada, D.L. Meier, M. Nakamura, J. Park, and R.C. Walker*, Astron. and Astrophys. **637**, id. L6 (2020).
19. *R.D. Blandford and R.L. Znajek*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **179**, 433 (1977).
20. *I.W. Roxburgh*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **132**, 201 (1966).
21. *R.E. Pudritz and J. Silk*, **342**, 650 (1989).
22. *R.M. Kulsrud, R. Cen, J.P. Ostriker, and D. Ryu*, **480**, 481 (1997).
23. *N.Y. Gnedin, A. Ferrara, and E.G. Zweibel*, **539**, 505 (2000).
24. *H. Lesch, A. Crusius, R. Schlickeiser, and R. Wielebinsky*, Astron. and Astrophys. **217**, 99 (1989).
25. *T. Arshakian, R. Beck, M. Krause, and D. Sokoloff*, Astron. and Astrophys. **494**, 21 (2009).
26. *A. King*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. Letters **456**(1), L109 (2016).
27. *В. Ф. Сулейманов, Г. В. Липунова, Н. И. Шакура*, Астрон. журн. **84**, 612 (2007).
28. *И.Е. Тамм*, Основы теории электричества (М.: Физматлит, 2003.)
29. *Г. Альвен, К.-Г. Фельтхаммар*, Космическая электродинамика (М.: Мир, 1967).
30. *Р.Р. Андреасян*, Астрофизика **39**(1), 111 (1996).
31. *К.С. Кузьмина, И.К. Марчевский*, Прикладная математика и механика **83**(3), 495 (2019).
32. *И.К. Марчевский, К.С. Сокол, Ю.А. Измайлова*, Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки **6**, 33 (2022).
33. *И.К. Лифанов*, Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (М.: ТОО Янус, 1995).
34. *Е.П. Велихов*, ЖЭТФ **36**, 1399 (1959).
35. *A. Brandenburg and K.J. Donner*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **288**, L29 (1997).
36. *N. Shakura, K. Postnov, D. Kolesnikov, and G. Lipunova*, Physics Uspekhi **66**(12), 1262 (2023), arXiv:2210.15337 [astro-ph.HE].

THE ROLE OF BIERMANN BATTERY MECHANISM IN APPEARANCE OF MAGNETIC FIELDS IN ACCRETION DISCS

R. R. Andreasyan[a], I. K. Marchevsky[b], E. A. Mikhailov[c,d]

[a]*Ambartsumian Byurakan Astrophysical Observatory of NAS RA, Byurakan, Armenia*
[b]*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*
[c]*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[d]*Lebedev Physical Institute of RAS, Moscow, Russia*

At present, there is little doubt that accretion discs surrounding compact astrophysical objects such as black holes, white dwarfs and neutron stars may have magnetic field structures. Thus, they explain the transfer of angular momentum between different parts of the disc and some other processes. There are various ways to explain the occurrence of these magnetic fields. In this paper we study the possibility of generation of magnetic fields due to the Biermann battery mechanism. It is associated with radial flows of protons and electrons. Due to their different masses, they interact differently with the rotating medium, producing circular currents that generate magnetic fields. Previously, a similar process was studied for galactic discs and it was shown that the battery mechanism can generate initial magnetic fields in such objects. Here we discuss the action of the Biermann battery for accretion disks. This requires solving an integral equation of the second kind, which arises if we take into account the self-interaction of the magnetic field. It is shown that corresponding fields are quite significant and can play an important role in the evolution of magnetic fields in discs.

Keywords: accretion disc, Biermann battery, magnetic field

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2024, том 101, № 3, с. 222–232

ЯВЛЯЕТСЯ ЛИ МОЛОДАЯ ЗВЕЗДНАЯ АССОЦИАЦИЯ ε Cha ДВОЙНОЙ?

© 2024 г. В. В. Бобылев[1,*], А. Т. Байкова[1]

[1]*Главная астрономическая обсерватория РАН, Пулково, Россия*

**E-mail: bob-v-vzz@rambler.ru*

Поступила в редакцию 28.01.2024 г.
После доработки 03.03.2024 г.
Принята в печать 11.03.2024 г.

Изучена кинематика близкой к Солнцу молодой звездной ассоциации ε Cha на основе списка звезд-кандидатов из работы [1]. Рабочая выборка состоит из 26 звезд с параллаксами, собственными движениями из каталога Gaia DR3 и лучевыми скоростями, взятыми из литературных источников. Построены орбиты звезд назад в прошлое и определен момент, когда ассоциация имела минимальный пространственный размер, а также проведен анализ зависимостей скоростей U, V, W от координат x, y, z. Показано, что исходная выборка делится на две части, обладающие различными кинематическими свойствами. В первую выборку вошли 9 звезд. На основе построения орбит этих 9 звезд получена оценка возраста $t = 4.9 \pm 0.8$ млн лет. Для них также найден коэффициент расширения в плоскости xz с величиной $K_{xz} = 135 \pm 19$ км/с/кпк, на основе которого получена еще одна оценка возраста $t = 7.2 \pm 1.0$ млн лет. Во вторую выборку вошли 17 звезд. Построение их орбит дало оценку возраста $t = 0.2 \pm 0.3$ млн лет, а на основе градиента $\partial W/\partial z = 707 \pm 248$ км/с/кпк получена вторая оценка их возраста $t = 1.4 \pm 0.5$ млн лет. Это говорит о том, что ассоциация ε Cha либо состоит из двух группировок разного возраста, либо более молодая возникла в результате недавней вспышки звездообразования внутри общей звездной системы. Вопрос о гравитационной связи группировок не рассматривался в рамках данной работы.

Ключевые слова: звездные ассоциации, кинематика, ассоциация ε Cha, звездообразование

DOI: 10.31857/S0004629924030039 **EDN:** KJVOVD

1. ВВЕДЕНИЕ

Около Солнца известен целый ряд небольших ассоциаций и компактных движущихся групп, состоящих из очень молодых (менее примерно 10 млн лет) звезд. Например, β Pic, TW Hya, η Cha, ε Cha, которые расположены в четвертом галактическом квадранте и тесно связаны [2] с обширной OB-ассоциацией Sco-Cen.

Предметом исследования настоящей работы является компактная звездная ассоциация ε Cha, которую иногда обозначают и как молодое рассеянное звездное скопление Feigelson 1. Собственно звезда ε Cha является визуально-двойной (WDS J11596–7813AB) с главным компонентом спектрального класса B9V. Остальные члены ассоциации являются, как правило, маломассивными звездами типа T Тельца. Изучению ассоциации ε Cha посвящено большое количество публикаций, где авторов интересует звездный состав, кинематика, а также фотометрические и спектральные характеристики членов и кандидатов в члены ассоциации [1–12].

Уже в работе [2] на основе интегрирования назад в прошлое было показано общее происхождение таких структур как LCC (Lower Centaurus Crux), UCL (Upper Centaurus Lupus), US (Upper Scorpius), TW Hya, η Cha и ε Cha в момент времени около −10 млн лет. При этом для вычисления средней траектории ассоциации ε Cha были использованы лишь 4 звезды. Также с применением метода интегрирования орбит по небольшому количеству звезд-членов ассоциаций η Cha и ε Cha в работе [5] была получена оценка их возраста — 6.7 млн лет.

Благодаря работам [1, 3–9] количество вероятных членов ассоциации ε Cha существенно увеличилось. Это дало, например, возможность оценивать возраст ассоциации путем подгонки к подходящей теоретической изохроне с использованием большого количества звезд. Так, с использованием фотометрических данных из каталога Gaia DR2 [13] для более чем 20 звезд в недавней работе [1] этим методом была получена оценка 5^{+3}_{-2} млн лет.

Звезды ассоциации ε Cha находятся от Солнца в среднем на расстоянии 102 пк. Из-за близости к Солнцу для исследования этой ассоциации доступны многие кинематические и фотометрические параметры, измеренные с высокой точностью. Практически для всех звезд-кандидатов известны тригонометрические параллаксы из каталога Gaia DR3 [14], полученные с относительными ошибками менее 5%.

Для вычисления пространственных скоростей звезд важны измерения их лучевых скоростей. Несмотря на наличие лучевых скоростей в каталоге Gaia DR3, в настоящее время остается актуальным использование более точных значений лучевых скоростей звезд, полученных в результате наземных наблюдений. Тем более это актуально при наличии большого процента двойных в ассоциации ε Cha (40% согласно [1]). Для этой цели привлекались индивидуальные спектроскопические измерения отдельных звезд-членов ассоциации ε Cha. В ряде случаев [11] использовались обширные каталоги лучевых скоростей, например, RAVE (The Radial Velocity Experiment [15]). Большая база данных о звездах ассоциации ε Cha, которая включает измерения их тригонометрических параллаксов, собственных движений и лучевых скоростей, создана в работе [1].

Молодость ассоциации ε Cha и близость ее к Солнцу позволяет выполнять уникальные работы, например, осуществлять прямыми телескопическими наблюдениями поиск звезд с протопланетными дисками [12], поиск маломассивных коричневых карликов низкой светимости и др.

Целью настоящей работы является изучение кинематики ассоциации ε Cha и кинематическая оценка ее возраста. Метод заключается в построении орбит звезд в прошлом на заданном временном интервале и оценке того момента, когда звездная группировка имела минимальный пространственный размер. Интересно также оценить кинематический возраст на основе эффекта расширения ассоциации.

2. МЕТОДЫ

Используем прямоугольную систему координат с центром в Солнце, где ось x направлена в сторону галактического центра, ось y — в сторону галактического вращения и ось z — в северный полюс Галактики. Тогда

$$x = r\cos l\cos b,$$
$$y = r\sin l\cos b,$$
$$z = r\sin b,$$

где $r = 1/\pi$ — гелиоцентрическое расстояние звезды в кпк, которое мы вычисляем через тригонометрический параллакс звезды π в мсд (миллисекунды дуги).

Из наблюдений известны лучевая скорость V_r и две проекции тангенциальной скорости $V_l = 4.74r\mu_l\cos b$ и $V_b = 4.74r\mu_b$, направленные вдоль галактической долготы l и широты b соответственно, выраженные в км/с. Здесь коэффициент 4.74 является отношением числа километров в астрономической единице к числу секунд в тропическом году. Компоненты собственного движения $\mu_l\cos b$ и μ_b выражены в мсд/год.

Через компоненты V_r, V_l, V_b вычисляются скорости U, V, W, где скорость U направлена от Солнца к центру Галактики, V — в направлении вращения Галактики и W — на северный галактический полюс:

$$\begin{aligned} U &= V_r\cos l\cos b - V_l\sin l - V_b\cos l\sin b,\\ V &= V_r\sin l\cos b + V_l\cos l - V_b\sin l\sin b,\\ W &= V_r\sin b + V_b\cos b. \end{aligned} \qquad (1)$$

Таким образом скорости U, V, W направлены вдоль соответствующих координатных осей x, y, z.

2.1. Построение орбит звезд

Для построения орбит звезд в системе координат, вращающейся вокруг центра Галактики, используем эпициклическое приближение [16]:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{U_0}{\kappa}\sin(\kappa t) + \frac{V_0}{2B}\big(1 - \cos(\kappa t)\big),\\ y(t) &= y_0 + 2A\left(x_0 + \frac{V_0}{2B}\right)t - \frac{\Omega_0}{B\kappa}V_0\sin(\kappa t) +\\ &\quad + \frac{2\Omega_0}{\kappa^2}U_0\big(1 - \cos(\kappa t)\big),\\ z(t) &= \frac{W_0}{\nu}\sin(\nu t) + z_0\cos(\nu t), \end{aligned} \qquad (2)$$

где t — время в млн лет (исходим из соотношения 1 пк/1 млн лет = 0.978 км/с), A и B — постоянные Оорта; $\kappa = \sqrt{-4\Omega_0 B}$ — эпициклическая частота; Ω_0 — угловая скорость галактического вращения местного стандарта покоя, $\Omega_0 = A - B$; $\nu = \sqrt{4\pi G\rho_0}$ — частота вертикальных колебаний, где G — гравитационная постоянная, а ρ_0 — звездная плотность в околосолнечной окрестности.

Параметры x_0, y_0, z_0 и U_0, V_0, W_0 в системе уравнений (2) обозначают современные положения и скорости звезд соответственно. Возвышение Солнца над галактической плоскостью $h_\odot$ принято равным 16 пк согласно работе [17]. Скорости U, V, W вычисляем относительно местного стандарта покоя с использованием значений $(U_\odot, V_\odot, W_\odot) = (11.1, 12.2, 7{,}3)$ км/с, полученных Шонрихом и др. [18]. Мы приняли $\rho_0 = 0.1\mathrm{M}_\odot/\ \text{пк}^3$ [19], что дает $\nu = 74$ км/с/кпк. Используем следующие значения постоянных Оорта: $A = 16.9$ км/с/кпк и $B = -13.5$ км/с/кпк, близкие к современным оценкам. Обзор таких оценок можно найти, например, в работе [20].

Система уравнений (2) позволяет вычислить положение звезды на каждый заданный момент

времени. Значения всех констант определены, решение находится путем подстановки момента времени.

2.2. Анализ мгновенных скоростей звезд

Согласно линейной модели Огородникова–Милна [21], в предположении о том, что пекулярная скорость Солнца $(U,V,W)_\odot$ исключена или равна нулю, скорости U,V,W можно представить в виде следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} U &= \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_0 z, \\ V &= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 z, \\ W &= \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_0 z. \end{aligned} \qquad (3)$$

Здесь нижний индекс «0» означает, что производные взяты в начале системы координат. Отметим, что все девять градиентов, участвующие в системе уравнений (3), можно найти графически.

По трем диагональным градиентам из правых частей системы уравнений (3) можно найти параметры расширения звездной системы K_{xy}, K_{xz} и K_{yz} в трех соответствующих плоскостях:

$$\begin{aligned} K_{xy} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0\right], \\ K_{xz} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_0\right], \\ K_{yz} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_0\right]. \end{aligned} \qquad (4)$$

Коэффициенты K_{xy}, K_{xz} и K_{yz}, имеющие размерность угловой скорости, представляют важное значение для оценки времени, прошедшего с начала расширения звездной системы.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Основу нашей выборки составляют звезды ассоциации ε Cha из списка [1]. Эти авторы изучили кинематические свойства ассоциации с использованием данных из каталога Gaia DR2. В настоящей работе мы снабдили звезды из списка [1] данными из версии Gaia DR3 [14]. Отметим, что в выборку не вошли несколько двойных систем из списка [1], для которых отсутствуют измерения в каталоге [14]. Таким образом в нашей рабочей выборке содержится 26 звезд, отмеченных индексом «M» (member) в работе [1].

Исходные данные об отобранных 26 звездах ассоциации ε Cha содержатся в табл. 1 и 2. Как видно из табл. 2, значения лучевых скоростей из каталога Gaia DR3, измеренные обычно с большими ошибками по сравнению с наземными измерениями, имеются не для всех отобранных звезд. Библиографические ссылки на наземные измерения лучевых скоростей даны в работе [1].

На рис. 1 даны современные положения 26 звезд ассоциации ε Cha и их траектории, построенные назад в прошлое. Дана также траектория кинематического центра ассоциации. Чтобы задать траекторию кинематического центра, были вычислены средние положения и скорости звезд $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ и $\overline{U}_0, \overline{V}_0, \overline{W}_0$. В итоге по 26 звездам были вычислены следующие значения: $\bar{x}_0 = 50.2$ пк, $\bar{y}_0 = -85.8$ пк и $\bar{z}_0 = -24.4$ пк, а также $\overline{U}_0 = -10.11$ км/с, $\overline{V}_0 = -19.90$ км/с и $\overline{W}_0 = -10.18$ км/с.

С использованием разностей (между звездой и кинематическим центром) координат $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ на каждый момент интегрирования для каждой звезды вычисляем значение параметра q следующего вида:

$$q = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}, \qquad (5)$$

которое характеризует отклонение звезды от траектории кинематического центра. Отметим, что траектории звезд вычислены с учетом возвышения Солнца над галактической плоскостью. Таким образом на всех наших рисунках (с траекториями звезд) координата z отражает положение звезд относительно плоскости Галактики.

На рис. 2 для каждой звезды дана зависимость параметра q от времени на интервале интегрирования 10 млн лет. Видно, что размер звездной группировки 10 млн лет в прошлом имел существенно больший пространственный размер по сравнению с настоящим. Однако по положению минимума красной кривой мы должны были бы заключить, что кинематический возраст ассоциации ε Cha составляет около 1 млн лет, что сильно отличается от известных оценок, полученных другими методами.

На рис. 3 даны зависимости скоростей U, V и W от координаты z для 26 звезд ассоциации ε Cha. На всех трех панелях хорошо видны два сгущения звезд, которые разделены границей $z = -25$ пк. Особенно отчетливо они видны на рис. 3(в).

Поэтому далее было решено каждое сгущение проанализировать в отдельности. С использованием всего лишь одного граничного условия $z = -25$ пк были получены две выборки. Выборка, отобранная при условии $z > -25$ пк содержит 9 звезд, а отобран-

Таблица 1. Исходные данные о звездах ассоциации ε Cha

Название	α, град	δ, град	$\pi \pm \sigma$, мсд	$\mu_\alpha \cos\delta \pm \sigma$, мсд	$\mu_\delta \pm \sigma$, мсд
CP-68 1388	164.46	–69.23	8.64 ± 0.01	–34.81 ± 0.01	3.79 ± 0.01
MP Mus	200.53	–69.64	10.22 ± 0.01	–38.35 ± 0.01	–20.00 ± 0.01
RX J1147.7-7842	176.95	–78.70	9.91 ± 0.02	–41.27 ± 0.03	–3.81 ± 0.03
RX J1149.8-7850	177.38	–78.85	9.94 ± 0.02	– 42.03 ± 0.03	–4.00 ± 0.02
T Cha	179.31	–79.36	9.74 ± 0.03	–41.59 ± 0.04	–8.65 ± 0.03
HD 104036	179.65	–77.83	9.54 ± 0.03	–41.23 ± 0.03	–7.73 ± 0.03
RX J1159.7-7601	179.93	–76.02	10.09 ± 0.01	–41.03 ± 0.01	–6.02 ± 0.01
HD 104467	180.41	–78.99	10.18 ± 0.12	–42.11 ± 0.14	–5.05 ± 0.12
RX J1202.1-7853	180.51	–78.88	10.18 ± 0.06	– 43.79 ± 0.07	–4.61 ± 0.06
RX J1204.6-7731	181.15	–77.53	9.91 ± 0.02	–41.45 ± 0.02	–6.22 ± 0.02
RX J1207.7-7953	181.95	–79.88	10.01 ± 0.01	–42.10 ± 0.01	–7.24 ± 0.01
HD 105923	182.91	–71.18	9.47 ± 0.01	–38.78 ± 0.01	–7.34 ± 0.01
RX J1216.8-7753	184.19	–77.89	9.82 ± 0.02	–39.98 ± 0.02	–9.05 ± 0.02
RX J1219.7-7403	184.93	–74.07	9.92 ± 0.01	–40.35 ± 0.01	–9.14 ± 0.01
MASS J12210499-7116493	185.27	–71.28	10.06 ± 0.01	– 40.56 ± 0.01	–9.65 ± 0.02
RX J1239.4-7502	189.84	–75.04	9.70 ± 0.01	– 38.30 ± 0.01	–12.21 ± 0.01
CD-69 1055	194.61	–70.48	10.51 ± 0.01	–41.13 ± 0.01	–16.48 ± 0.01
RX J1158.5-7754A	179.62	–77.91	9.35 ± 0.08	–40.95 ± 0.09	–10.58 ± 0.11
RX J1150.9-7411	177.69	–74.19	9.44 ± 0.03	–38.28 ± 0.04	–3.82 ± 0.05
CXOU J115908.2-781232	179.78	–78.21	9.41 ± 0.03	– 38.95 ± 0.03	–5.48 ± 0.03
MASS J12005517-7820296	180.23	–78.34	9.73 ± 0.04	– 40.75 ± 0.04	– 5.04 ± 0.04
MASS J12014343-7835472	180.43	–78.60	9.55 ± 0.07	– 40.39 ± 0.08	–6.21 ± 0.08
CXOU J120152.8-781840	180.47	–78.31	9.77 ± 0.03	–40.90 ± 0.03	–7.03 ± 0.03
RX J1202.8-7718	180.73	–77.31	9.61 ± 0.01	–39.34 ± 0.02	–6.12 ± 0.02
USNO–B 120144.7-781926	180.43	–78.32	9.79 ± 0.03	– 41.85 ± 0.04	–6.13 ± 0.04
HD 104237A	180.02	–78.19	9.38 ± 0.04	– 39.28 ± 0.05	–5.78 ± 0.05

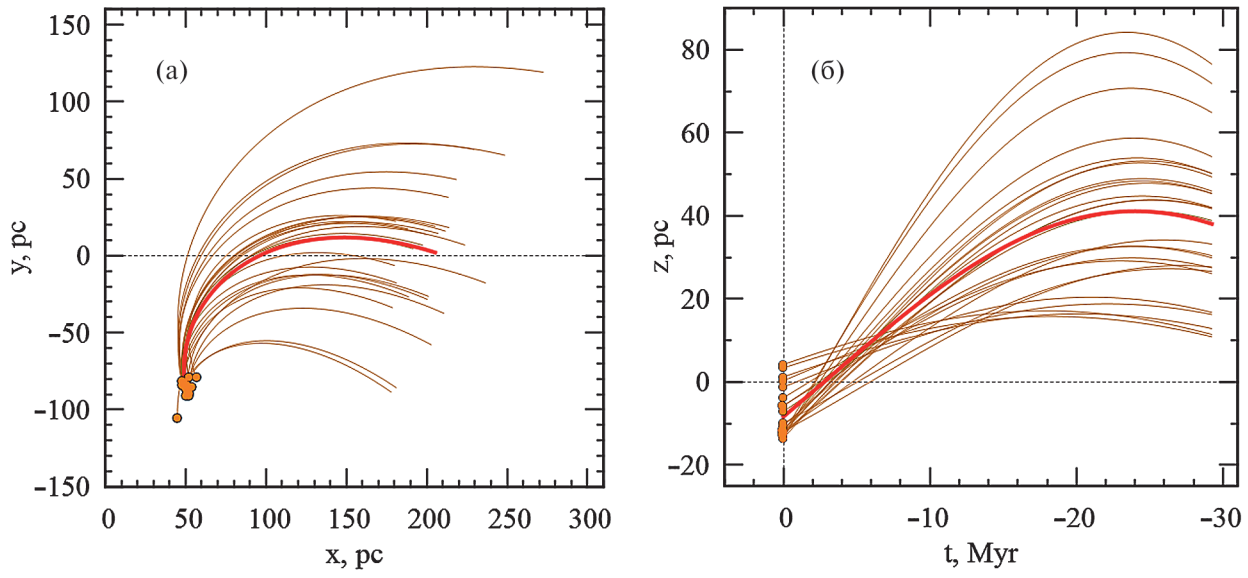

Рис. 1. Распределение 26 звезд ассоциации ε Cha в проекции на галактическую плоскость *xy* и их траектории (а), вертикальное распределение и их траектории, прослеженные назад в прошлое на интервале 30 млн лет (б). Траектория кинематического центра ассоциации показана красным цветом.

Таблица 2. Лучевые скорости звезд ассоциации ε Cha

Название	α, град	δ, град	$V_r \pm \sigma$, км/с	$(V_r \pm \sigma)_G$, км/с
CP–68 1388	164.46	–69.23	15.90 ± 1.00	15.69 ± 0.63
MP Mus	200.53	–69.64	11.60 ± 0.20	7.20 ± 1.65
RX J1147.7–7842	176.95	–78.70	16.10 ± 0.90	18.52 ± 3.40
RX J1149.8–7850	177.38	–78.85	13.40 ± 1.30	14.56 ± 1.60
T Cha	179.31	–76.36	18.00 ± 2.00	17.31 ± 2.63
HD 104036	179.65	–77.83	12.60 ± 0.50	13.55 ± 0.61
RX J1159.7–7601	179.93	–76.02	13.00 ± 3.70	12.68 ± 0.61
HD 104467	180.41	–78.99	12.81 ± 0.96	13.10 ± 0.81
RX J1202.1–7853	180.51	–78.88	17.10 ± 0.20	13.91 ± 1.62
RX J1204.6–7731	181.15	–77.53	10.40 ± 2.00	12.96 ± 4.45
RX J1207.7–7953	181.95	–79.88	15.00 ± 0.70	13.71 ± 2.77
HD 105923	182.91	–71.18	14.34 ± 1.06	14.26 ± 0.69
RX J1216.8–7753	184.19	–77.89	14.00 ± 2.00	13.28 ± 7.23
RX J1219.7–7403	184.93	–74.07	13.86 ± 1.89	13.74 ± 1.49
MASS J12210499–71164	185.27	–71.28	11.44 ± 2.53	11.56 ± 0.68
RX J1239.4–7502	189.84	–75.04	13.62 ± 2.80	12.66 ± 0.59
CD–69 1055	194.61	–70.48	11.18 ± 1.67	10.68 ± 1.00
RX J1158.5–7754A	179.62	–77.91	14.02 ± 1.82	10.25 ± 1.26
RX J1150.9–7411	177.69	–74.19	15.00 ± 1.20	
CXOU J115908.2–781232	179.78	–78.21	15.10 ± 0.20	
MASS J12005517–78202	180.23	–78.34	10.70 ± 1.30	
MASS J12014343–78354	180.43	–78.60	20.00 ± 0.60	
CXOU J120152.8–781840	180.47	–78.31	16.50 ± 1.10	
RX J1202.8–7718	180.73	–77.31	14.40 ± 0.60	
USNO–B 120144.7–78192	180.43	–78.32	14.90 ± 1.10	
HD 104237A	180.02	–78.19	13.52 ± 0.39	

Примечание. $(V_r \pm \sigma)_G$ — лучевые скорости звезд из каталога Gaia DR3.

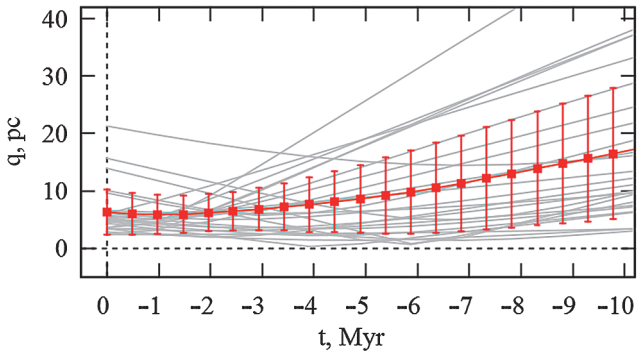

Рис. 2. Отклонения от траектории кинематического центра (параметр q) на интервале интегрирования 10 млн лет для 26 звезд ассоциации ε Cha. Красным цветом показаны усредненные значения и соответствующие дисперсии.

ная при условии $z < -25$ пк содержит 17 звезд. Как оказалось, эти выборки имеют сильно различающиеся кинематические свойства.

При условии $z > -25$ пк были отобраны следующие 9 звезд:

CP–68 1388,	MP Mus,	RX J1159.7–7601,
HD 105923,	RX J1219.7–7403,	2MASS J12210499–7116493,
RX J1239.4–7502,	CD–69 1055,	RX J1150.9–7411.

А при условии $z < -25$ пк были отобраны следующие 17 звезд:

RX J1147.7–7842,	RX J1149.8–7850,	T Cha,
HD 104036,	HD 104467,	RX J1202.1–7853,
RX J1204.6–7731,	RX J1207.7–7953,	RX J1216.8–7753,
RX J1158.5–7754A,	CXOU J115908.2–781232,	2MASS J12005517–78202,
MASS J12014343–78354,	CXOU J120152.8–781840,	RX J1202.8–7718,
USNO–B 120144.7–78192,	HD 104237A.	

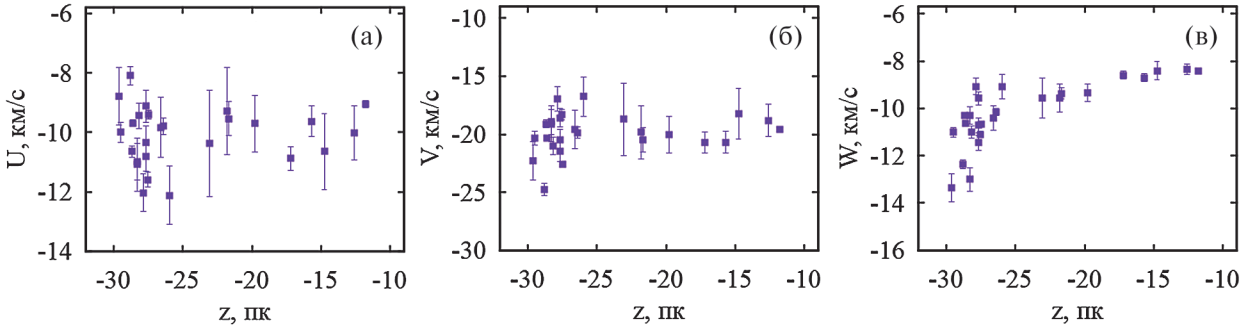

Рис. 3. Зависимости скоростей U (а), V (б) и W (в) от координаты z для 26 звезд ассоциации ε Cha.

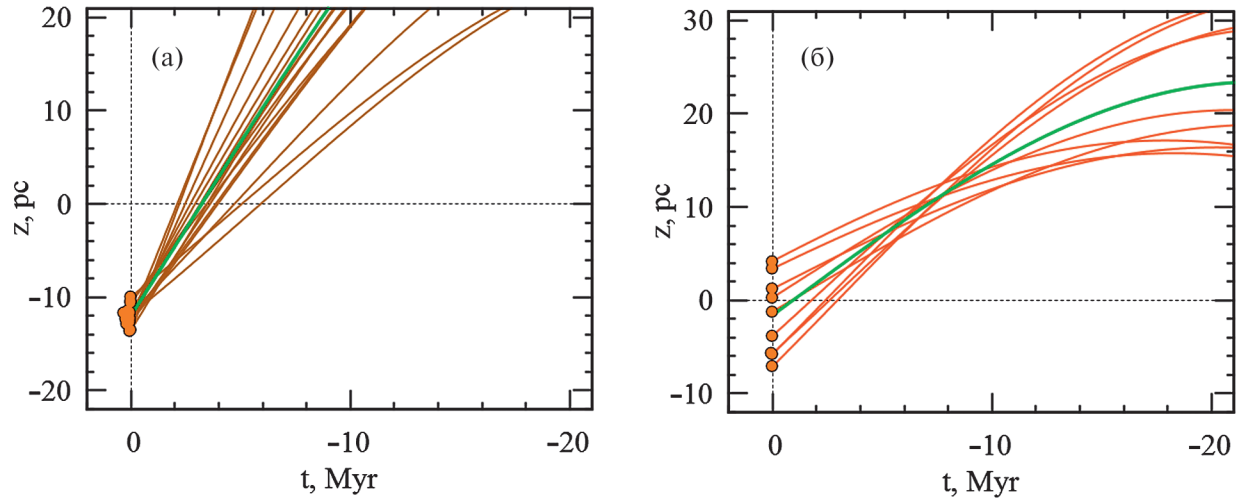

Рис. 4. Вертикальное распределение 17 звезд с $z<-25$ пк и их траектории (а), 9 звезд с $z>-25$ пк и их траектории (б). Траектории кинематических центров, которые вычислены по звездам этих выборок, показаны зеленым цветом.

На рис. 4 дано вертикальное распределение звезд двух выборок и траектории их кинематических центров, вычисленные по звездам каждой выборки. На панели (а) хорошо видно, что звезды совсем недавно (~1 млн лет назад) сошлись вместе, а вот звезды на панели (б) занимали минимальный размер, по крайней мере, вдоль оси z около 8 млн лет назад, и демонстрируют в настоящий момент расширение.

На рис. 5 даны зависимости скоростей U, V, W от координат x, y, z для выборки из 9 звезд, отобранных при условии $z>-25$ пк. На панелях (а) и (i) красными линиями показаны найденные по этим данным методом наименьших квадратов зависимости, соответствующие градиентам $\partial U/\partial x = 159\pm36$ км/с/кпк и $\partial W/\partial z = 120\pm14$ км/с/кпк. Указаны границы доверительных областей, соответствующих уровню 1σ. Других значимо отличающихся от нуля градиентов по этим звездам не обнаружено. На основе соотношения (4) с использованием двух найденных градиентов можем оценить коэффициент угловой скорости расширения этой звездной группировки в плоскости xz:

$$K_{xz} = 135 \pm 19 \text{ км/с/кпк}, \quad (6)$$

и найти промежуток времени, прошедший от начала расширения звездной системы до настоящего момента, $t = 977.5/K_{xz}$:

$$t = 7.2 \pm 1.0 \text{ млн лет}. \quad (7)$$

На рис. 6 даны зависимости скоростей U, V, W от координат x, y, z для выборки из 17 звезд, отобранных при условии $z<-25$ пк. По звездам этой выборки методом наименьших квадратов был найден только один значимо отличающийся от нуля градиент, $\partial W/\partial z = 707 \pm 248$ км/с/кпк. Соответствующая зависимость дана красной линией на рис. 6(и), где доверительная область не показана, так как она слишком широка. Соответствующее значению этого градиента время, прошедшее от начала расширения вдоль оси z звездной системы до настоящего момента, составляет:

$$t = 1.4 \pm 0.5 \text{ млн лет}. \quad (8)$$

На рис. 7 даны орбиты выборки из 9 звезд с $z>-25$ пк, построенные для двух вариантов кинематического центра. На рис. 7(а) использованы па-

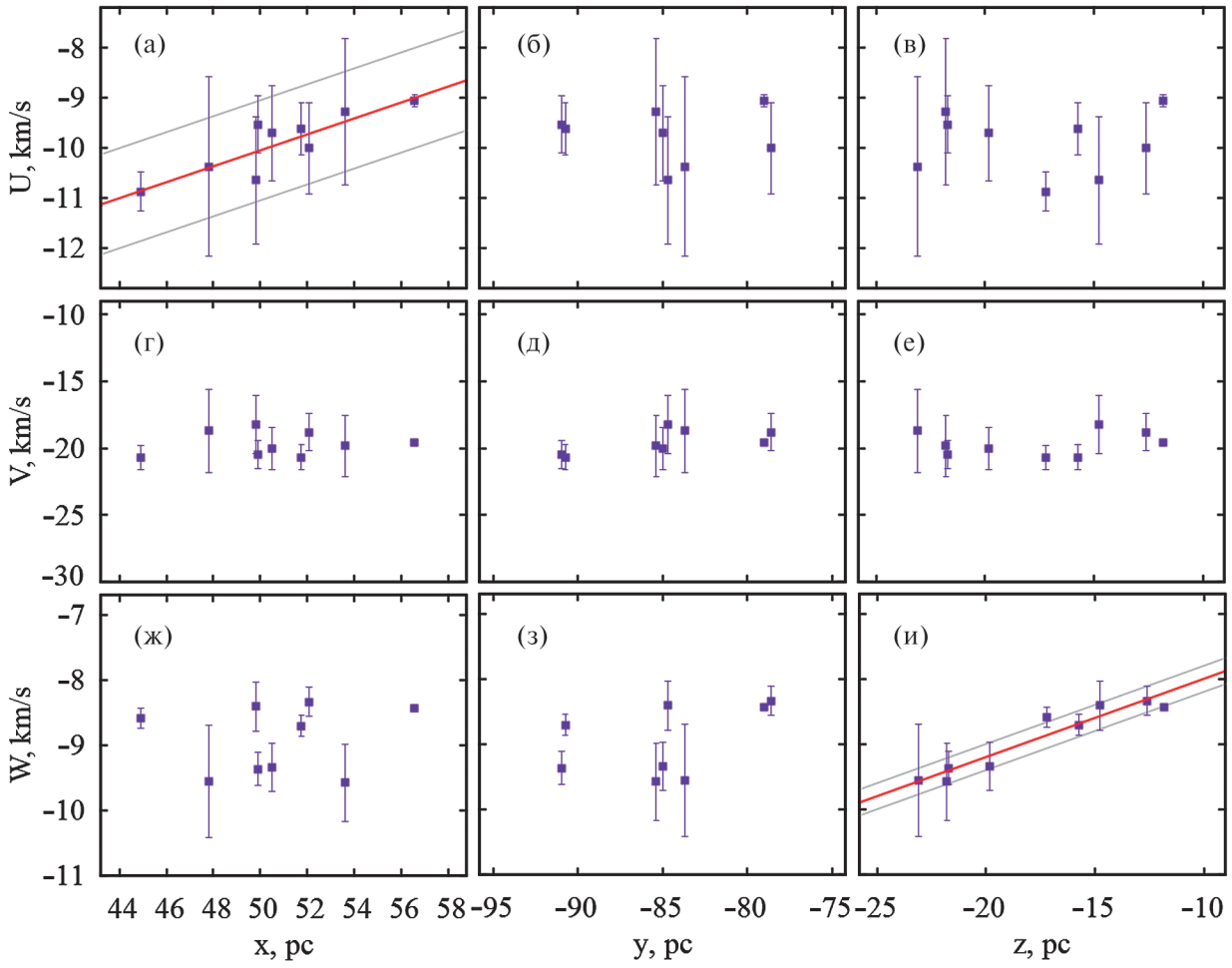

Рис. 5. Зависимости скоростей U, V, W от координат x, y, z для выборки из 9 звезд с $z > -25$ пк (б).

раметры кинематического центра, вычисленные по 9 звездам выборки. На рис. 7(б) были использованы параметры кинематического центра, вычисленные по всем 26 звездам ассоциации. В обоих случаях хорошо виден прогиб линии средних значений в районе 5 млн лет, а в случае рис. 7(б) прогиб более отчетливый. Однако на панели (а) меньшие значения дисперсий в каждом интервале. Анализ показанных на рисунке средних значений и их дисперсий дает возможность оценить момент времени, при котором размер звездной системы в прошлом был минимальным. В итоге было найдено значение

$$t = 4.9 \pm 0.8 \text{ млн лет.} \quad (9)$$

Здесь ошибка момента t была найдена в результате статистического моделирования методом Монте-Карло. При этом предполагалось, что орбиты звезд построены с ошибками 10%, распределенными по нормальному закону.

На рис. 8 даны орбиты выборки из 17 звезд с $z < -25$ пк. Из анализа показанных на рисунке средних значений и их дисперсий получена величина промежутка времени, прошедшего с того момента, когда размер системы был минимальным:

$$t = 0.2 \pm 0.3 \text{ млн лет.} \quad (10)$$

Так же как и при вычислении результата (9), ошибка момента t была найдена в результате статистического моделирования методом Монте-Карло в предположении о том, что орбиты звезд построены с ошибками 10%, распределенными по нормальному закону. Наибольший интерес представляет именно эта группировка молодых звезд, так как найденные для них оценки (8) и (10) сильно отличаются от результатов оценок характерного возраста ассоциации ε Cha, 5–7 млн лет, полученных другими авторами (отмечены нами во Введении).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучена выборка из вероятных членов ассоциации ε Cha. На основе списка звезд-кандидатов из работы [1] составлена рабочая выборка из 26 звезд. Эти звезды снабжены тригонометрическими параллаксами, собственными движениями из ката-

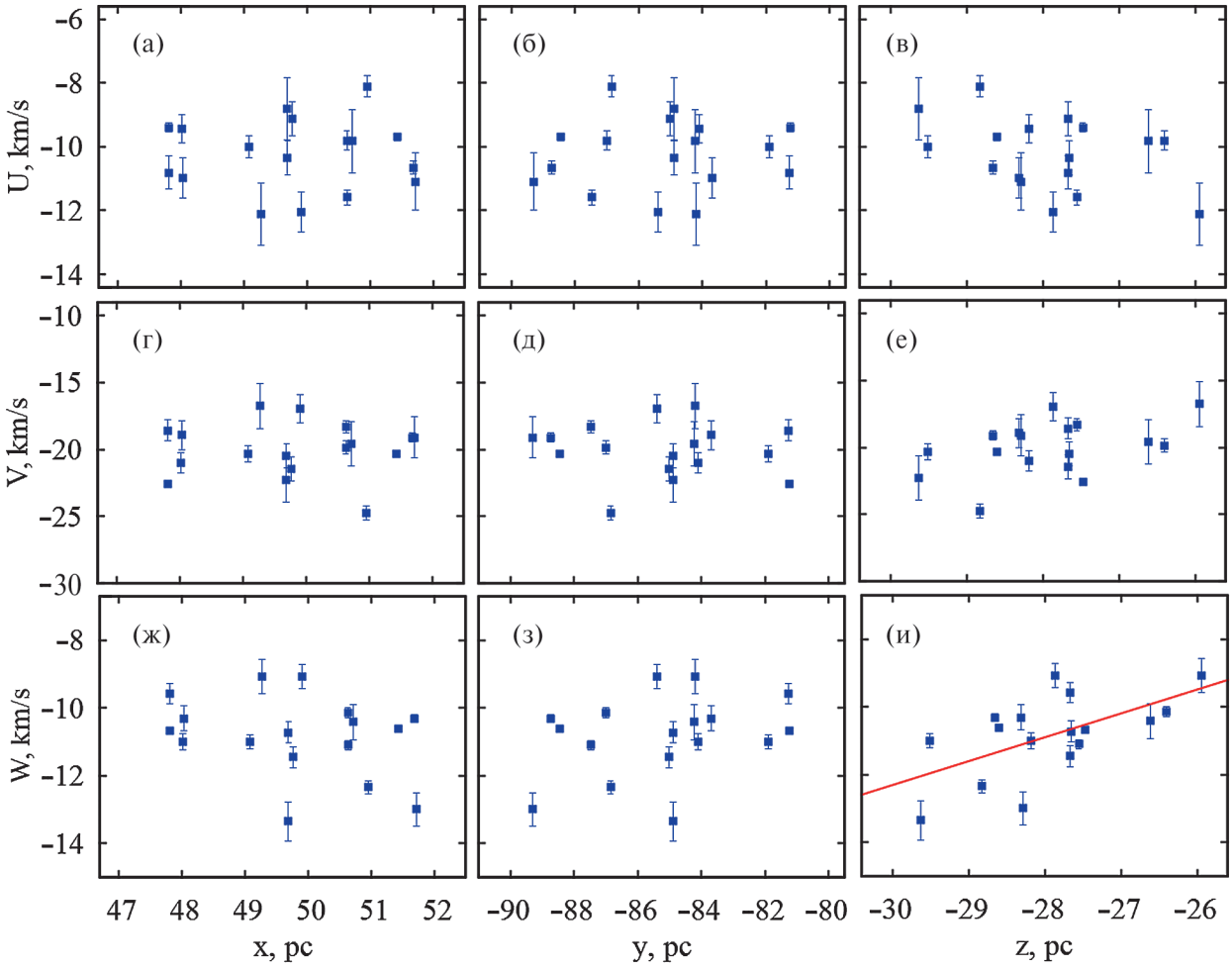

Рис. 6. Зависимости скоростей U, V, W от координат x, y, z для выборки из 17 звезд с $z < -25$ пк (б).

лога Gaia DR3, а также лучевыми скоростями, взятыми из литературных источников.

Для оценки кинематического возраста ассоциации ε Cha были: а) построены орбиты звезд назад в прошлое и определен момент, когда звездная группировка имела минимальный пространственный размер; б) построены зависимости наблюдаемых скоростей U, V, W от координат x, y, z с целью выявления эффекта расширения. Это дало возможность получить оценки возраста ассоциации двумя способами, оба из которых являются кинематическими.

При анализе звездных траекторий и зависимостей скоростей от координат было установлено, что исходная выборка делится на две части. Как оказалось, обе части обладают различными кинематическими свойствами.

В первую выборку вошли 9 звезд. На основе построения орбит звезд назад в прошлое для этих звезд получена оценка возраста $t = 4.9 \pm 0.8$ млн лет (результат (9)). Анализ зависимостей скоростей U, V, W от координат x, y, z показал наличие расширения в плоскости xz с величиной $K_{xz} = 135 \pm 19$ км/с/кпк, на основе которого найден промежуток времени, прошедший от начала расширения звездной системы до настоящего момента $t = 7.2 \pm 1.0$ млн лет (результат (7)). Видим, что обе оценки хорошо согласуются между собой в пределах найденных ошибок.

Во вторую выборку вошли 17 звезд. На основе построения орбит звезд назад в прошлое для этих звезд получена оценка возраста $t = 0.2 \pm 0.3$ млн лет (результат (10)). Анализ зависимостей скоростей U, V, W от координат x, y, z показал наличие одного градиента, который описывает расширение вдоль оси z с величиной $\partial W/\partial z = 707 \pm 248$ км/с/кпк, на основе которого найден промежуток времени, прошедший от начала расширения этой части ассоциации ε Cha до настоящего момента $t = 1.4 \pm 0.5$ млн лет (результат (8)). Видим и здесь неплохое согласие оценок, полученных двумя методами.

В нашей выборке использованы координаты и скорости звезд, измеренные с высокой точностью. При этом с разницей в несколько σ получены раз-

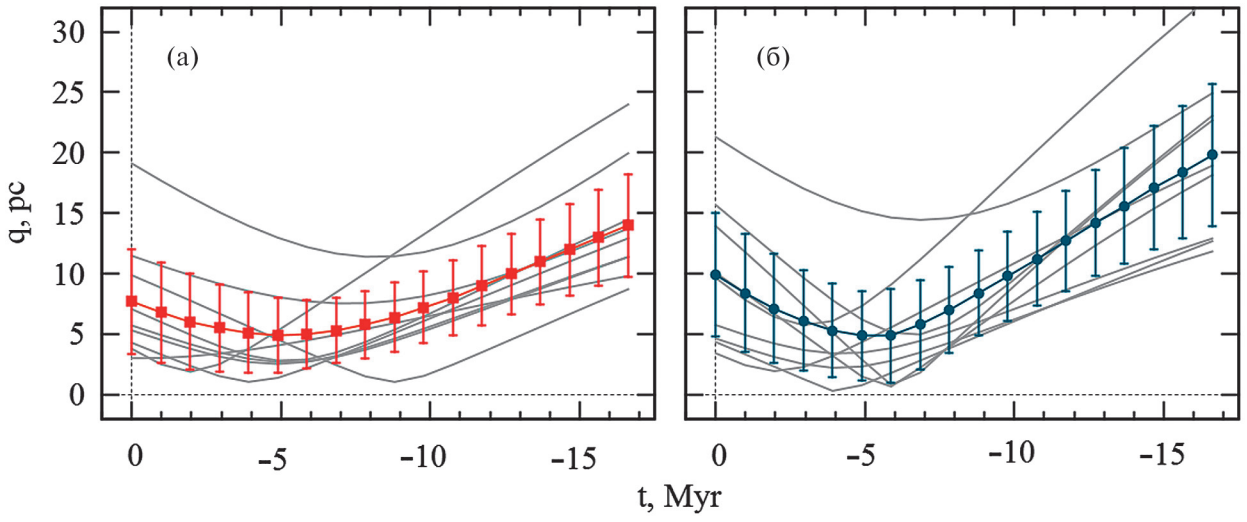

Рис. 7. Зависимость параметра q от времени для выборки из 9 звезд с $z > -25$ пк, орбиты которых построены с использованием кинематического центра, вычисленного по этим 9 звездам (а), и с параметрами кинематического центра, полученными по всем 26 звездам ассоциации (б).

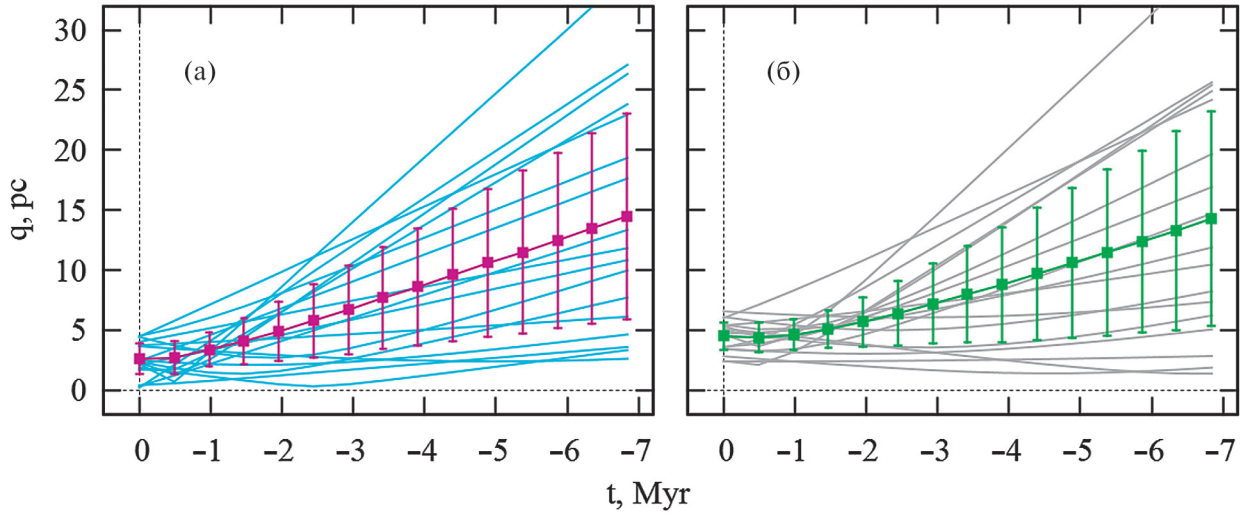

Рис. 8. Зависимость параметра q от времени выборки из 17 звезд с $z < -25$ пк, орбиты которых построены с использованием кинематического центра, вычисленного по этим 17 звездам (а), и с параметрами кинематического центра, полученными по всем 26 звездам ассоциации (б).

личные оценки возраста для двух группировок. Можно предложить два сценария для объяснения полученных результатов. В первом случае представляется возможным вариант, когда ассоциация ε Cha состоит из двух независимых частей разного возраста. Во втором варианте обе группировки имеют общую длительную эволюцию, но более молодая могла возникнуть в результате недавней вспышки звездообразования. Оба этих сценария не противоречат тому, что звездные ассоциации имеют сложную иерархическую структуру [22, 23].

Отметим, например, что на ранних стадиях формирования звездные скопления могут подвергаться быстрой динамической эволюции, приводящей к сильным гравитационным воздействиям и выбросу «убегающих» звезд. Процессы потери звезд в окрестности звездного скопления NGC 1976 (ONC) рассмотрены в работе [24]. В работе [25] с помощью расчетов пространственного движения звезд в прошлые эпохи было сообщено об открытии «старой» звездной «реликтовой нити», связанной с областью звездообразования в Орионе.

Расчеты пространственных движений газовых облаков Орион А и Орион Б показали, что они располагались рядом друг с другом около 6 млн лет назад, а сейчас удаляются радиально из примерно одной и той же области космоса [26]. В работе [27] опубликовано исследование трехмерной структуры,

кинематики и возрастного распределения ассоциации Орион на основе данных Gaia DR2.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания, которые способствовали улучшению работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *D. A. Dickson-Vandervelde, E. C. Wilson, and J. H. Kastner*, Astron. J. **161**(2), id. 87 (2021).
2. *E.E. Mamajek, W.A. Lawson, and E.D. Feigelson*, **544**(1), 356 (2000).
3. *E.D. Feigelson, W.A. Lawson, and G.P. Garmire*, **599**(2), 1207 (2003).
4. *K.L. Luhman*, **616**(2), 1033 (2004).
5. *E. Jilinski, V. G. Ortega, and R. de la Reza*, **619**(2), 945 (2005).
6. *C. A. O. Torres, G. R. Quast, C. H. F. Melo, and M. F Sterzik*, Young Nearby Loose Associations (Handbook of Star Forming Regions, Volume II: The Southern Sky ASP Monograph Publications, Vol. 5, edited by Bo Reipurth, 2008), p. 757.
7. *B. Lopez Marti, F. Jimenez Esteban, A. Bayo, D. Barrado, E. Solano, and C. Rodrigo*, Astron. and Astrophys. **551**, id. A46 (2013).
8. *C. Briceño and A. Tokovinin*, Astron. J. **154**(5), id. 195 (2017).
9. *K. Kubiak, K. Mužić, I. Sousa, V. Almendros-Abad, R. Kohler, and A. Scholz*, Astron. and Astrophys. **650**, id. A48 (2021).
10. *A.-R. Lyo, W. A. Lawson, and M. S. Bessell*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **389**(3), 1461 (2008).
11. *L.L. Kiss, A. Moór, T. Szalai, J. Kovács, et al.*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **411**(1), 117 (2011).
12. *M. Fang, R. van Boekel, J. Bouwman, T. Henning, W.A. Lawson, and A. Sicilia-Aguilar*, Astron. and Astrophys. **549**, id. A15 (2013).
13. *A.G.A. Brown, A. Vallenari, T. Prusti, J.H.J. de Bruijne, et al.*, Astron. and Astrophys. **616**, id. A1 (2018).
14. *A. Vallenari, A. G. A. Brown, T. Prusti, J. H. J. de Bruijne, et al.*, arXiv:2208.00211 [astro-ph.GA] (2022).
15. *A. Kunder, G. Kordopatis, M. Steinmetz, T. Zwitter, et al.*, Astron. J. **153**(2), id. 75 (2017).
16. *B. Lindblad*, Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik, Vol. 20A, No. 17 (1927).
17. *V.V. Bobylev and A.T. Bajkova*, Astron. Letters **42**(1), 1 (2016).
18. *R. Schönrich, J. Binney, and W. Dehnen*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **403**(4), 1829 (2010).
19. *J. Holmberg and C. Flynn*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **352**(2), 440 (2004).
20. *O.I. Krisanova, V.V. Bobylev, and A.T. Bajkova*, Astron. Letters **46**(6), 370 (2020).
21. *K. F. Ogorodnikov*, Dynamics of stellar systems, edited by A. Beer (Oxford: Pergamon, 1965).
22. *S. Ratzenböck, J. E. Großschedl, T. Möller, J. Alves, I. Bomze, and S. Meingast*, Astron. and Astrophys. **677**, id. A59 (2023).
23. *S. Ratzenböck, J. E. Großschedl, J. Alves, N. Miret-Roig, et al.*, Astron. and Astrophys. **678**, id. A71 (2023).
24. *M. Fajrin, J.J. Armstrong, J.C. Tan, J. Farias, and L. Eyer*, arXiv:2402.12258 [astro-ph.SR] (2024).
25. *T. Jerabkova, H.M.J. Boffin, G. Beccari, and R.I. Anderson*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **489**, 4418 (2019).
26. *J. E. Großschedl, J. Alves, S. Meingast, and G. Herbst-Kiss*, Astron. and Astrophys. **647**, id. A91 (2021).
27. *J. A. Caballero, A. de Burgos, F. J. Alonso-Floriano, A. Cabrera-Lavers*, D. Garcia-Alvarez, and D. Montes, Astron. and Astrophys. **629**, id. A114 (2019).

IS THE YOUNG STAR ASSOCIATION ε Cha DOUBLE?

V. V. Bobylev[a], A. T. Bajkova[a]

[a]*Central Astronomical Observatory of the Russian Academy of Sciences, Pulkovo, Russia*

The kinematics of the ε Cha young stellar association close to the Sun has been studied based on a list of candidate stars from the Dickson-Vandervelde work. The working sample consists of 26 stars with parallaxes, proper motions from the Gaia DR3 catalog and radial velocities taken from literary sources. The orbits of the stars back to the past were constructed, and the moment when the association had a minimum spatial size was determined, as well as an analysis of the dependencies of the velocities U, V, W on the coordinates x, y, z was carried out. It is shown that the initial sample is divided into two parts with different kinematic properties. The first sample included 9 stars. Based on the construction of the orbits of these 9 stars, an age estimate of $t = 4.9 \pm 0.8$ million years was obtained. An expansion coefficient in the xz plane with the value $K_{xz} = 135 \pm 19$ km/s/kpc was also found for them, on the basis of which another age estimate $t = 7.2 \pm 1.0$ million years was obtained. The second sample included 17 stars. The construction of their orbits gave an estimate of age $t = 0.2 \pm 0.3$ million years, and based on the gradient $dW/dz = 707 \pm 248$ km/s/kpc, a second estimate of their age $t = 1.4 \pm 0.5$ million years was obtained. This suggests that the ε Cha association either consists of two groupings of different ages, or a younger one arose as a result of a recent outbreak of star formation within a common star system. The question of the gravitational connection of the groupings has not been considered in the framework of this work.

Keywords: stellar associations, kinematics, ε Cha association, star formation

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2024, том 101, № 3, с. 233–243

ЗОНДИРОВАНИЕ ИОНОСФЕРЫ ИМПУЛЬСАМИ ПУЛЬСАРА B2016+28 НА ЧАСТОТЕ 324 МГц

© 2024 г. М. С. Бургин[1,*], М. В. Попов[1,]**

[1]Астрокосмический центр Физического института им. П. Н. Лебедева Российской академии наук, Москва, Россия

**E-mail: mburgin@asc.rssi.ru*

***E-mail: popov069@asc.rssi.ru*

Поступила в редакцию 22.11.2023 г.
После доработки 04.01.2024 г.
Принята в печать 29.01.2024 г.

С использованием данных наземно-космических РСДБ наблюдений из архива проекта РадиоАстрон вычислены вызываемые ионосферой фазовые искажения кросс-спектра и исследовано их влияние на результаты определения функции видности. В качестве наземной станции интерферометра использовалась 300-метровая антенна обсерватории Аресибо. Отделение ионосферных искажений фазы от влияния межзвездной и межпланетной среды и инструментальных погрешностей основано на различных частотных и временных зависимостях этих эффектов. Амплитуда ионосферных вариаций фазы, вызванных флуктуациями электронной плотности в ионосфере над радиотелескопом в Аресибо, составляет несколько радиан за наблюдательный сеанс продолжительностью около одного часа. Структурная функция вариаций фазы указывает на непрерывный спектр мощности флуктуаций электронной плотности на характерных временах $\gtrsim$2–5 мин без ярко выраженных признаков квазипериодических процессов. При наблюдениях пульсаров такие ионосферные флуктуации фазы приводят к расширению максимума амплитуды функции видности как функции остаточной частоты интерференции на 5–10 мГц с уменьшением значения в максимуме на ≈10%. При построении изображений радиогалактик и квазаров по наземным РСДБ наблюдениям подобные фазовые сдвиги могут существенно искажать конечные результаты.

Ключевые слова: пульсары, мерцания, межзвездная среда, ионосфера

DOI: 10.31857/S0004629924030044 **EDN:** KJTMND

1. ВВЕДЕНИЕ

Среда между наземными радиотелескопами и космическими радиоисточниками оказывает сильное влияние на распространение излучения от этих источников. Взаимодействие радиоволн с неоднородностями среды вызывает целый ряд эффектов, влияющих на результаты интерферометрических измерений со сверхдлинными базами (РСДБ): рефракцию, которая приводит к изменению направления распространения излучения и, тем самым, смещению видимого положения источника, и рассеяние, вызывающее размытие изображения компактных источников и флуктуации их яркости — мерцания.

Одной из основных научных задач наземно-космического радиоинтерферометра РадиоАстрон [1] являлись наблюдения пульсаров. Эти наблюдения проводились в основном на частоте 316 МГц. Поскольку излучающие области пульсаров не разрешаются даже на максимальных проекциях базы РадиоАстрона, то при интерпретации результатов этих наблюдений пульсары можно считать точечными источниками, а наблюдаемая структура изображения полностью определяется влиянием среды. При этом в процессе наблюдений на частотах ниже 1 ГГц основные искажения возникают при прохождении излучения через ионизованные компоненты среды: межзвездную плазму, плазму солнечного ветра и ионосферу.

Описание основных эффектов, вызываемых рассеянием излучения пульсаров на неоднородностях межзвездной плазмы (временная и частотная модуляция потока, затягивание импульсов и т.п.), можно найти в обзорах Рикетта [2, 3]. Основные параметры межзвездных мерцаний — полоса декорреляции $\Delta f_{\rm dif}$ и характерное время мерцания $\Delta t_{\rm dif}$ — определяются характеристиками межзвездной среды на луче зрения, меняются в широких пределах для разных объектов и для ряда пульсаров показывают заметную переменность.

Основной эффект, вызываемый влиянием неоднородностей плазмы солнечного ветра на распространение излучения компактных радиоисточников, это межпланетные мерцания, т.е. флуктуации потока, вызванные рассеянием. Описание результатов наблюдений межпланетных мерцаний и сделанных на их основе выводов о параметрах флуктуаций электронной плотности в солнечном ветре можно найти в работах [4, 5].

Существенное влияние на результаты РСДБ наблюдений на низких частотах оказывают фазовые искажения, возникающие при прохождении радиоволн через ионосферу. Изучение этих искажений необходимо для корректной интерпретации наблюдательных данных об астрономических объектах, а также позволяет получить информацию о процессах, происходящих в ионосфере над телескопами, участвующими в наблюдениях.

Ионосферные эффекты, влияющие на распространение радиоволн, изучались во многих публикациях различными методами. Обзор работ по этой тематике можно найти, например, в работе [6]. Применение РСДБ к рассматриваемой проблеме описано Чжи-Ханом и Йонгом [7], Хобигером, Кондо и Шухом [8] и Хейнкельманном, Хобигером и Шмидтом [9]. В работе Журавлева с соавторами [10] можно найти более современный обзор публикаций, касающихся влияния ионосферы на распространение радиосигналов.

В контексте наземно-космических РСДБ наблюдений влияние ионосферной и межпланетной плазмы впервые обсуждалось Денисоном и Бусом [11] еще в 1987 г. при обсуждении международной программы создания наземно-космического радиоинтерферометра. Они рассмотрели целесообразность установки на борту космического телескопа приемника диапазона 327 МГц в связи с искажениями, вызываемыми неоднородностями в ионосфере и в солнечном ветре.

Были выделены три типа ионосферных вариаций: медленные суточные изменения, движущиеся ионосферные возмущения, и быстрые случайные флуктуации электронной плотности, и изучено влияние, оказываемое зависимостью фазовых искажений от частоты и от времени на амплитуду функции видности. Расчеты показали, что поскольку в рассматриваемом диапазоне ионосферные искажения слабо зависят от частоты, то при наблюдениях в зените вызываемой ими частотной декорреляцией можно пренебречь в полосе частот до 18 МГц в дневное время и в полосе до 58 МГц в ночное время. По приведенным в [11] оценкам медленные суточные вариации электронной плотности в ионосфере дают размытие функции видности по частоте интерференции в пределах 20 мГц, а вклад случайных флуктуаций пренебрежимо мал ($\ll 1$ радиана). Заметное влияние на амплитуду функции видности могли бы оказать, по мнению авторов, только движущиеся ионосферные возмущения, которые возникают при определенных геофизических явлениях, связанных с большим энерговыделением (магнитные бури, грозовые штормы и проч.). Характерное время этих возмущений составляет от нескольких минут до десятков минут.

Также в работе [11] было изучено влияние неоднородностей солнечного ветра, ответственных за межпланетные мерцания, на результаты РСДБ наблюдений. Оценка искажений фазы флуктуациями плотности межпланетной плазмы для использованной в этой работе конфигурации наземно-космического интерферометра дала значение $\lesssim 0.3$ рад при наблюдениях в антисолнечной полусфере.

В рамках проекта РадиоАстрон [1] проведены многочисленные РСДБ наблюдения пульсаров с наземно-космическими базами, и их результаты подтвердили предсказания Денисона и Буса. Шишов с соавторами [12] при наблюдениях пульсара B1919+21 на базе Грин Бэнк-Вестерборк обнаружили заметные периодические вариации фазы гармоник кросс-спектра с характерным периодом ≈ 70 с. По их оценкам, эти вариации не оказывают существенного влияния на результаты измерения функции видности на наземно-космических базах.

Журавлев с соавторами [10] целенаправленно оценили влияние ионосферы на результаты РСДБ наблюдений пульсара B0950+08 с наземно-космическим интерферометром РадиоАстрон. Авторы обнаружили значительные синхронные получасовые вариации полного содержания электронов (ПСЭ) в ионосфере на межконтинентальном расстоянии между станциями Аресибо и Вестерборк. Оказалось, что значения ПСЭ в обнаруженных структурах примерно в два раза превышают значения ПСЭ вне этих структур. По предварительному анализу, обнаруженные структуры наблюдались во время геомагнитной бури.

Попов с соавторами [13] обнаружили заметные квазипериодические вариации фазы сцинтилей в кросс-спектре пульсара B0329+54 на базе между космическим радиотелескопом и 110-м радиотелескопом обсерватории Грин Бэнк с характерными временны́ми масштабами 12 и 10 минут и амплитудами до 6.9 радиан. Наблюдения проводились в диапазоне частот 316–332 МГц в часовых сеансах 26, 27, 28 и 29 ноября 2012 г. с постепенно возрастающими проекциями базы в 60, 90, 180 и 240 тысяч километров. В двух сеансах из четырех обнаружены квазипериодические фазовые вариации. Авторы связывают эти изменения с влиянием перемещающихся ионосферных возмущений среднего масштаба. Измеренная амплитуда соответствует вариациям вертикального полного содержания электронов в ионосфере около 0.1×10^{16} м$^{-2}$. Такие изме-

нения заметно ограничили бы время когерентного интегрирования при РСДБ-исследованиях компактных радиоисточников.

В настоящей работе мы продолжаем анализ влияния ионосферных возмущений на результаты наземно-космической радиоинтерферометрии, используя данные, полученные при наблюдениях пульсара B2016+28 в проекте РадиоАстрон.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ, НАБЛЮДЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ РЕДУКЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Результаты интерферометрических наблюдений межзвездного рассеяния обычно представляются в виде динамического кросс-спектра

$$Z = \left\langle \tilde{E}_A(f,t)\tilde{E}_B^*(f,t)\right\rangle, \qquad (1)$$

где $\tilde{E}_A(f,t)$ и $\tilde{E}_B(f,t)$ — Фурье-компоненты электрических полей сигналов, принимаемых на станциях A и B, верхний индекс * означает комплексное сопряжение, а $\langle ... \rangle$ — усреднение по времени. Ионосферные эффекты не влияют на амплитуду поля сигнала, так что источником информации о них может служить только фаза кросс-спектра.

Из (1) видно, что фаза Z равна разности фаз принимаемых на станциях сигналов. Если все наблюдения проводятся с поверхности Земли, то разделить вклады в вариации фазы кросс-спектра, относящиеся к разным телескопам, можно только с привлечением дополнительной информации. Такое разделение становится тривиальным в том случае, когда одно из плеч интерферометра вынесено в космос, так как в этом случае фазовые искажения зависят только от состояния ионосферы над наземной станцией.

В настоящей работе использованы результаты наблюдений, проведенных 22 мая 2015 г. в полосе 316–332 МГц. Полное описание эксперимента приведено в работе [14], там же путем анализа динамического спектра, полученного на наземном телескопе, рассчитаны значения полосы декорреляции $\Delta f_{\rm dif} = 43 \pm 2$ кГц и времени мерцания $\Delta t_{\rm dif} = 2125$ с. Ионосферные вариации фазы оценивались путем обработки измерений, полученных на базе КРТ-Аресибо в левой круговой поляризации.

2.1. Корреляционная обработка и предварительное усреднение сигнала

При корреляционной обработке, которая проводилась с помощью описанного в работе [15] коррелятора АКЦ ФИАН, полоса разбивалась на 4096 каналов шириной $\Delta^c f \approx 3.91$ кГц, а интервал по времени выдачи данных коррелятора (время опроса) был равен периоду пульсара и составлял $\Delta^c t \approx 0.56$ с при полной продолжительности наблюдений 55 мин. Накопление результата корреляции (время интегрирования) осуществлялось в двух окнах в периоде пульсара: в «сигнальном» окне, включающем основной импульс, и в «шумовом» окне вне импульса, которое использовалось для оценки вклада шумов системы в наблюдаемый сигнал; длительность каждого окна составляла 28 мс. Авто-спектр, полученный в шумовом окне на телескопе в Аресибо, использовался для очистки обрабатываемых данных от помех. Частотные каналы с номерами 992–1048 и 1472–1548, в которых на Аресибо регистрировался интенсивный, сильно переменный сигнал вне импульса, были полностью исключены из обработки.

Далее для увеличения отношения сигнал/шум полученные на выходе коррелятора динамические кросс-спектры были усреднены по времени с продолжительностью интервала усреднения $\Delta^a t = 16\Delta^c t \approx 8.96$ с и по частоте с полосой усреднения $\Delta^a f = 8\Delta^c f \approx 31.3$ кГц. Ниже для краткости для области усреднения динамического кросс-спектра будет использоваться термин «пиксель». Усредненный кросс-спектр в сигнальном окне представляет собой функцию $Z^{(a)}(j,k)$, где $j = 1...512$ и $k = 1...325$ — номера интервалов усреднения по частоте и времени соответственно. Результаты вычисления $Z^{(a)}$ проиллюстрированы на верхнем графике рис. 1.

На рисунке цвет каждого пикселя определяется фазой кросс-спектра $\arg(Z(a))$, а яркость — его модулем $|Z^{(a)}|$. Горизонтальные черные полосы соответствуют межсутковым промежуткам, а вертикальные — частотам, выброшенным из обработки из-за помех на наземной станции. Размеры пикселя выбраны так, чтобы выполнялись неравенства $\Delta^a f < \Delta f_{\rm dif}$ и $\Delta^a t < \Delta t_{\rm dif}$ и усреднение не искажало заметным образом картину переменности динамического кросс-спектра, вызванную межзвездными мерцаниями.

Для оценки ошибок, вносимых шумами системы, описанный выше алгоритм предварительного усреднения был применен к динамическому кросс-спектру, полученному при корреляции сигнала вне импульса пульсара. Статистический анализ полученного таким образом шумового кросс-спектра системы показал, что его действительная и мнимая части, как и следовало ожидать при нормальном функционировании аппаратуры, являются независимыми нормально распределенными случайными величинами. Среднеквадратичное отклонение этих

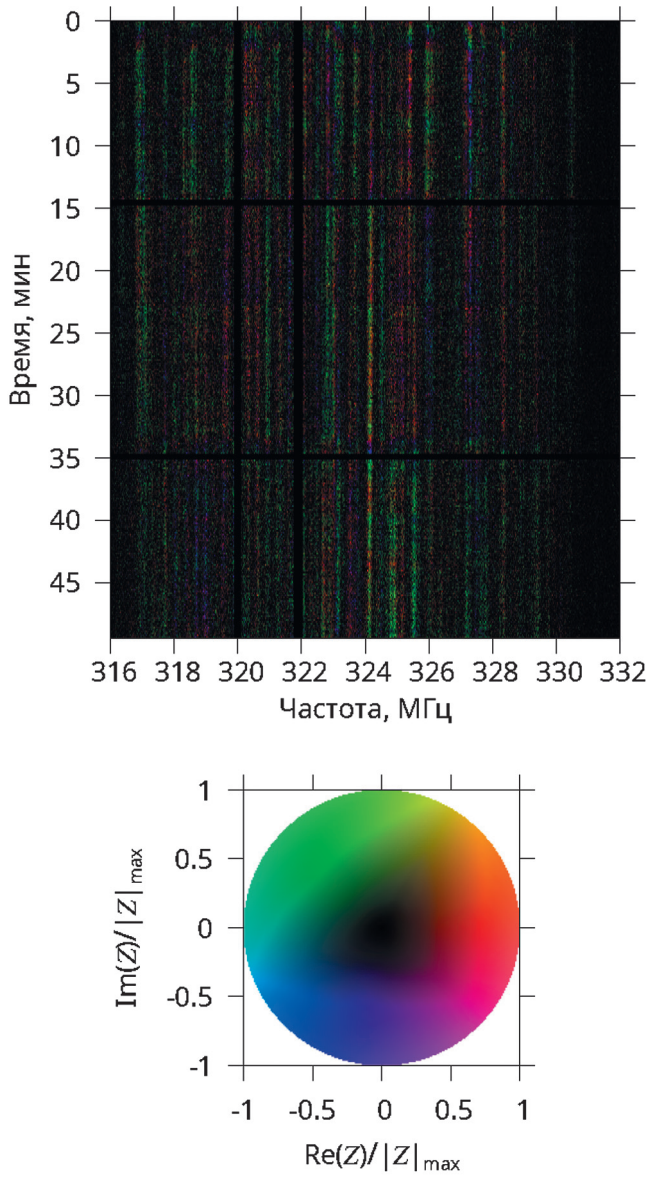

Рис. 1. Верхний график — наблюдаемый динамический кросс-спектр на базе RA-AR. Для каждой точки кросс-спектра усредненное комплексное значение $Z^{(a)}(f,t)$ отображается в точку единичного цветового круга так, как это проиллюстрировано на нижнем графике, $|Z^{(a)}|_{\max}$ — максимальное значение модуля кросс-спектра.

случайных величин, обозначенное ниже как $\sigma(t,f)$, не зависит от времени t, но заметно меняется с частотой f (см. рис. 2).

2.2. Вариации фазы в сцинцилях

Общая картина распределения яркости в приведенном на рис. 1 динамическом кросс-спектре аналогична распределению яркости в динамическом авто-спектре, полученном в [14] по измерениям в Аресибо: в обоих спектрах наблюдается ряд сцинцилей — областей повышенной яркости — с временем жизни, сравнимым с продолжительностью сеанса, и практически не дрейфующих по частоте.

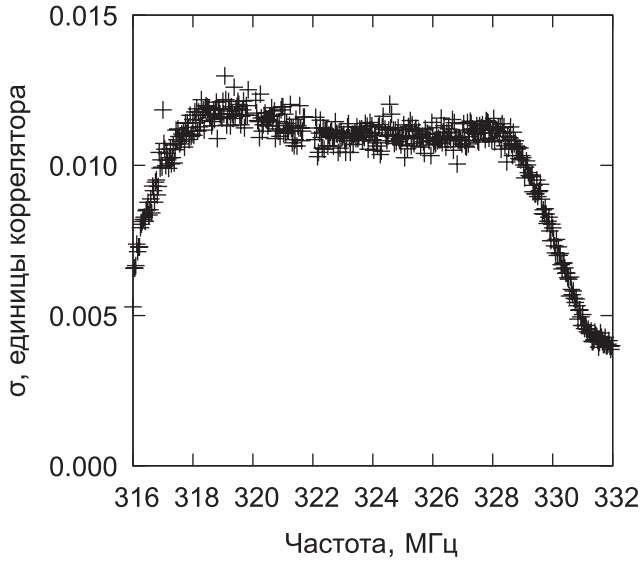

Рис. 2. Зависимость шума системы σ от частоты.

Сцинцили, наблюдаемые в динамических спектрах, являются одним из проявлений микроструктуры дисков рассеяния. Поскольку наблюдения на больших наземно-космических базах могут разрешать спеклы (элементы микроструктуры) в диске рассеяния, вклады индивидуальных спеклов в наблюдаемый кросс-спектр могут иметь разные фазы. Соответственно, фаза функции видности может быть различна для сцинцилей, формируемых излучением разных спеклов.

То, что фаза $Z^{(a)}$ действительно сильно меняется от сцинциля к сцинцилю, легко видеть на рис. 1. Более тщательный анализ показывает также, что внутри почти всех сцинцилей фаза слабо зависит от частоты. Исключением являются несколько наиболее протяженных по частоте сцинцилей. По-видимому, эти протяженные сцинцили являются наложением двух или более случайно совпавших по частоте сцинцилей, которые имеют разную фазу, т. к. формируются излучением различных спеклов.

В дальнейшем анализе использовались результаты измерений в $M=20$ выделенных сцинцилях, которые аппроксимировались прямоугольниками $j_l(s) \le j \le j_u(s)$, $k_l(s) \le k \le k_u(s)$ в усредненном кросс-спектре. Здесь и далее индекс $s=1,...,M$ идентифицирует сцинциль.

Для каждого выделенного сцинциля были вычислены усредненные по сечению $t=\text{const}$ кросс-спектры

$$Z_s\big(k(t)\big) = \frac{1}{L_s}\sum_{j=j_1(s)}^{j_u(s)} Z^{(a)}(j,k), \qquad (2)$$

где $L_s = j_u(s) - j_1(s) + 1$ — протяженность сцинциля s по частоте в пикселях, $k(t)$ — номер интервала усреднения по времени, соответствующего времени t. Поскольку выделялись только сцинцили с малой протяженностью по частоте и фазой кросс-спектра, слабо меняющейся между низко- и высокочастотными границами сцинциля, то внутри сцинциля s изменение фазы кросс-спектра полностью описывается зависимостью $Z_s(k)$, а шум системы $\sigma(f)$ можно считать постоянным и принять $\sigma(f) = \sigma_s$.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИОНОСФЕРНОГО ВКЛАДА В ФАЗУ КРОСС-СПЕКТРА

Измереное значение кросс-спектра в сцинциле s может быть представлено в виде $Z_s(t) = Z(f_s,t) + z_s(t)$, где Z — кросс-спектр сигнала, принимаемого антеннами интерферометра, z_s — ошибки измерений, f_s — средняя частота сцинциля. Для дальнейшего анализа представим кросс-спектр в показательной форме $Z(t) = |Z(t)|\exp(i\varphi(t))$ и аналогично для $Z^{(a)}(t)$ и $Z_s(t)$.

Вариации Z вызываются собственной переменностью пульсара, межзвездными и межпланетными мерцаниями и ионосферными возмущениями, причем изменение ионосферного содержания электронов не влияет на $|Z(t)|$, а собственная переменность пульсара на $\varphi(t)$. При наблюдениях вблизи зенита, как это имело место в нашем случае на Аресибо, ионосферный сдвиг фазы дается соотношением [16, 17]

$$\varphi_{\rm atm} = -8.45\frac{C_{\rm e}}{10^{16}\ {\rm м}^{-2}}\frac{1\ {\rm ГГц}}{f}\sec\zeta, \qquad (3)$$

где ζ — зенитный угол пульсара, $C_{\rm e}$ — полное содержание электронов (ПСЭ) в ионосфере,

$$C_{\rm e} = \int_0^\infty n_{\rm e}(h)dh, \qquad (4)$$

а $n_{\rm e}(h)$ — зависимость электронной плотности в ионосфере от высоты.

При наблюдениях, проводимых в узком диапазоне частот, абсолютные измерения ионосферного сдвига фазы принципиально невозможны, поскольку значения $\varphi^{(a)}(t)$, которые являются единственным источником информации о переменности $C_{\rm e}$, определяются неоднозначно, с точностью до слагаемого $2n\pi$, где n — неизвестное целое. Именно эта ситуация имеет место в рассматриваемом случае, так как $B/f_0 < 0.05$, где $B = 16$ МГц — ширина полосы, $f_0 = 324$ МГц — центральная частота.

Если, однако, в качестве измеряемой величины рассматривать не саму фазу $\varphi(t)$, а ее производную $d\varphi(t)/dt$, аппроксимируемую разделенной разностью между двумя последовательными измерениями, то при достаточно малом интервале между измерениями указанная неоднозначность не влияет на результат. Так как значения $Z^{(a)}$ измерялись с периодом ≈ 8.96 с, существенно меньшим, чем характерное время изменения $\varphi(t)$, то $2\pi n$-неоднозначность легко разрешается при измерении $d\varphi(t)/dt$.

Поскольку целью описываемых ниже расчетов будет оценка $d\varphi(t)/dt$, то основными величинами, фигурирующими в дальнейшем анализе, будут

$$\Delta\varphi\big(t',t''\big) = \varphi\big(t'\big) - \varphi\big(t'\big) \qquad (5)$$

— изменение фазы истинного кросс-спектра между двумя моментами t' и t'', и соответствующие непосредственно получаемые из измерений величины

$$\Delta\varphi_s\big(t',t''\big) = \varphi_s\big(t''\big) - \varphi_s\big(t'\big). \qquad (6)$$

Далее мы в основном будем рассматривать разность фаз для двух подряд идущих пикселей (t'' и $t' = 8.96$). Как правило, в этом случае для краткости аргументы t' и t'' не будут указываться в явном виде.

3.1. Разделение вкладов ионосферы и межзвездной среды в вариации фазы

Поскольку фаза кросс-спектра меняется не только из-за вариаций $C_{\rm e}$, но и из-за межзвездного и межпланетного рассеяния, то для дальнейшего анализа представим изменение фазы на частоте сцинциля s в виде

$$\Delta\varphi(f_s) = \theta(f_s) + \eta(f_s), \qquad (7)$$

где θ — сумма вкладов ионосферы и межпланетной плазмы, а η — вклад межзвездной среды.

Природа физических процессов, определяющих значения $\theta(f_s)$ и $\eta(f_s)$, одна и та же — взаимодействие излучения пульсара с флуктуациями коэффициента преломления, вызванными вариациями электронной плотности. Однако количественно решения уравнения переноса излучения, описывающие эти два слагаемых, отвечают двум противоположным асимптотическим режимам. А именно, в используемом нами диапазоне частот межзвездные мерцания пульсара B2016+28 описывается приближением сильного рассеяния, в то время как межпланетные и ионосферные эффекты описываются приближением слабого рассеяния. Для двух указанных режимов рассеяния частотная зависимость

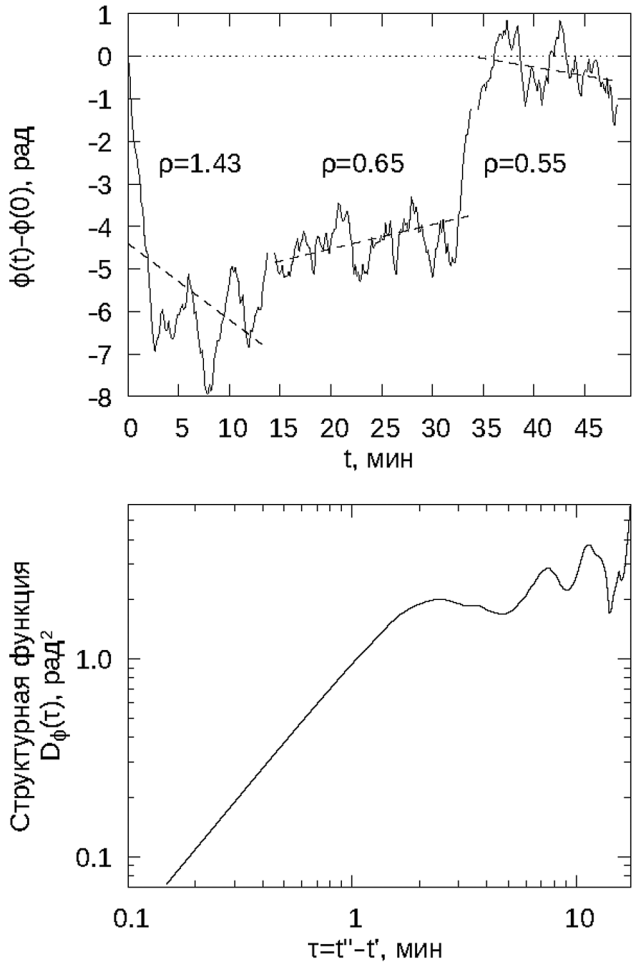

Рис. 3. Верхний график: зависимость атмосферного вклада в вариацию фазы кросс-спектра φ_{atm} от времени (сплошная линия), его аппроксимация линейными функциями времени на каждом скане (штриховые линии) и значения ρ — среднеквадратичных отклонений линейной аппроксимации от наблюдений. Нижний график: структурная функция $D_\varphi(\tau)$.

свойств рассеяного излучения сильно различается (см., напр., [3]), что и позволяет разделить вклад двух слагаемых в правой части (7).

Сильное рассеяние в межзвездной плазме вызывает глубокую — с амплитудой почти 100% — модуляцию сигнала как функции времени и частоты, что приводит к формированию сцинцилей в динамических авто- и кросс-спектрах пульсаров (см. рис. 1). Индивидуальные сцинцили формируются излучением, приходящим из геометрически разнесенных и физически независимых областей межзвездной среды. Поэтому значения $\eta(f_s)$ для различных значений индекса s являются независимыми случайными величинами и усреднение по большому числу сцинцилей, наблюдаемых в динамическом кросс-спектре пульсара B2016+28, позволяет уменьшить вклад, вносимый межзвездным рассеянием в измерения $\Delta\varphi(f_s)$.

При слабом рассеянии характеристики рассеянного излучения мало меняются внутри сравнительно узкого диапазона частот, используемого в описываемых здесь наблюдениях. Поэтому усреднение по индивидуальным сцинцилям практически не влияет на вклад слагаемого $\theta(f_s)$ в сумму (7).

Отделить аналогичным образом влияние рассеяния на неоднородностях солнечного ветра от ионосферного вклада в значение $\theta(f_s)$ невозможно, поскольку частотная зависимость слаба для обоих этих эффектов. Следующие соображения показывают, однако, что в рассматриваемой в настоящей работе задаче влиянием межпланетной плазмы можно, по-видимому, полностью пренебречь.

Во-первых, поскольку плотность солнечного ветра убывает примерно как $1/r^2$ с возрастанием расстояния от Солнца r, то все эффекты, связанные с межпланетным рассеянием, быстро убывают с увеличением углового расстояния наблюдаемого источника от Солнца и становятся крайне слабыми при наблюдениях в антисолнечной полусфере. По техническим ограничениям на ориентацию космического радиотелескопа в проекте РадиоАстрон угловое расстояние между лучом зрения и Солнцем должно быть больше 90°; в нашем случае этот угол составлял ≈98°.

Во-вторых, ионосферные флуктуации и переменность, связанная с неоднородностью солнечного ветра, имеют существенно различные временны́е характеристики. Это различие использовалось, в частности, в работе [18] для разделения ионосферных и межпланетных мерцаний в наблюдениях на телескопе LOFAR. Согласно [19], коэффициент корреляции плотности межпланетной плазмы как функции пространственных координат r близок к $\exp(-r^2/a^2)$, где $a \approx 250$ км на орбите Земли. Это означает, что временная структурная функция флуктуаций, вызванных межпланетной плазмой, в наших данных должна быстро выходить на асимптотическое постоянное значение при задержках $\gtrsim 1$ с. Приведенные ниже (рис. 3) результаты показывают монотонный рост структурной функции вплоть до задержек ≈120 с, что свидетельствует о доминирующем влиянии ионосферной составляющей и возможности пренебречь влиянием межпланетных мерцаний в нашем рассмотрении.

В используемом нами диапазоне частот вблизи зенита $\theta(f) \propto 1/f$ и в силу малой относительной ширины полосы отличия $\theta(f)$ от $\theta(f_0)$ — значения на центральной частоте — не превышают 2.5% во всем

диапазоне частот. Поэтому в первом приближении можно считать ионосферный вклад одинаковым для всех сцинцилей. Далее мы будем пользоваться этим приближением и полагать $\theta(f) = \theta$.

Используемый далее алгоритм определения ионосферного вклада в вариации фазы состоит из двух шагов: (1) вычисление $\Delta\varphi_s$ индивидуально для каждого выделенного сцинциля и (2) оценка θ путем усреднения полученных значений $\Delta\varphi_s$ для каждого момента времени t по всей совокупности тех сцинцилей, у которых t входит в период существования.

Скорости изменения фаз индивидуальных сцинцилей легко находятся непосредственно из наблюдательных данных с помощью формул (2) и (6), они оказались заключенными в основном в интервале ± 0.1 рад/с. Это соответствует модулю изменения фазы за время $\Delta^a t$ меньшему, чем 0.9 рад, так что 2π-неоднозначность не влияет на дальнейший анализ.

Для уменьшения погрешностей, вызываемых шумом системы и влиянием межзвездного рассеяния, необходимо усреднение значений $\Delta\varphi_s$, вычисленных для индивидуальных сцинцилей. Процедура усреднения, однако, представляет некоторые трудности и требует применения нестандартного подхода.

3.2. Оценка θ по значениям $\Delta\varphi_s$

Одним из первоисточников трудностей, возникающих при оценке θ путем усреднения по сцинцилям измеренных значений $\Delta\varphi_s$, является то, что значения $|Z|$ сильно меняются как от сцинциля к сцинцилю, так и в зависимости от времени. Как следствие, влияние шумового компонента на $\Delta\varphi_s$ меняется в широких пределах, что необходимо учитывать при усреднении. Если ошибки индивидуальных измерений различаются, то обычный подход состоит в том, что усреднение производится с весами.

В стандартной ситуации оптимальным является приписывание каждому измерению $\Delta\varphi_s$ в индивидуальном сцинциле веса $v_s = 1/(\mathrm{D}(\Delta\varphi_s))$. Здесь и далее $\mathrm{D}\xi$ обозначает дисперсию случайной величины ξ.

Однако в нашем случае такой подход не применим. Дело в том, что стандартные статистические методы ориентированы на анализ случайных величин и процессов, принимающих значение в евклидовом пространстве. Так как значение фазы определяется лишь по модулю 2π, то областью значений случайного процесса, описывающего ее переменность, является окружность. Вследствие этого статистический анализ вариаций фазы требует применения специализированных методов. Ниже рассматривается один из возможных подходов к решению этой задачи.

Прежде всего, для фиксированного момента времени изучим влияние шума системы на точность аппроксимации $\varphi(f_s)$ — фазы истинного кросс-спектра в сцинциле s — значением $\varphi_s = \arg(Z_s)$, где Z_s определено в (6).

Если выполняется условие $|Z| \gg \sigma_s$, т.е. при сигнале в импульсе большем по сравнению с уровнем шума, то $Z \approx Z_s$ и ошибка определения фазы мала. В этом случае тем фактом, что область значений случайной величины $\varphi(f_s) - \varphi_s$ является окружность, а не множество действительных чисел, можно пренебречь, и применить стандартный подход. Дисперсия вносимой шумом ошибки определения фазы в этом пределе дается выражением

$$\mathrm{D}\phi_s \approx \sigma_s^2 \,/\, \left(L_s |Z_s|^2 \right) \ll 1, \tag{8}$$

и в выражения для различных взвешенных средних значение Z_s входит с весом

$$w_s = L_s |Z_s|^2 / \sigma_s^2. \tag{9}$$

Если условие (8) выполняется для всех сцинцилей, учитываемых при расчете ионосферного сдвига фазы, то применима стандартная процедура усреднения с весами. А именно, можно положить

$$\theta = \frac{1}{u} \sum_s v_s \Delta\phi_s, \tag{10}$$

где

$$\frac{1}{v_s(t', t'')} = \frac{1}{w_s(t')} + \frac{1}{w_s(t'')} \tag{11}$$

и

$$u = \sum_s v_s. \tag{12}$$

Если же в усреднении участвуют сцинцили, для которых условие (8) не выполняется, то стандартные методы оценки параметров случайных распределений неприменимы. Это проявляется, в частности, в том, что в предельном случае когда $Z \to 0$ и, следовательно, $Z_s \approx z_s$, веса, вычисленные в соответствии с (9), не уменьшаются. Как следствие, в усреднении участвуют измерения, содержащие только шум, что уменьшает точность результатов.

Для минимизации влияния измерений с низким отношением сигнал/шум алгоритм вычисления весов должен быть модифицирован. При анализе наблюдений пульсара B0329+54 в [13] эта задача решалась путем отбора для обработки только самых

сильных импульсов. В наших обозначениях использованный в указанной работе алгоритм эквивалентен тому, что веса вычисляются по формуле $w_s = H(|Z_s| - |Z|_{\rm th})$, где H — функция Хевисайда, $|Z|_{\rm th}$ — некоторое пороговое значение, обеспечивающее выполнение условия (8).

В наблюдениях, обрабатываемых в настоящей работе, доля измерений, для которых условие (8) выполняется, слишком мала. Поэтому необходимо использовать многочисленные отсчеты с низким уровнем сигнала, компенсируя малую индивидуальную точность каждого отдельного измерения усреднением по их большому числу. Алгоритмически эта задача решается использованием в (10) вместо (9) надлежащим образом выбраной функции $w_s(Z_s)$.

Для выбора $w_s(Z_s)$ можно использовать следующие соображения. При $Z_s \to \infty$, как указано выше, для оптимальной функции $w_s(Z_s)$ должно асимптотически выполняться равенство (9). В противоположном случае малого по сравнению с шумом сигнала, т.е. при выполнении условия

$$|Z| \ll \sigma \qquad (13)$$

оптимальным является $w_s = 0$. Поскольку непосредственно измеряемой величиной является $Z_s = Z + z_s$, то установить, что условие (13) выполняется, можно только с той или иной степенью вероятности, проверяя гипотезу $Z = 0$ с помощью какого-либо статистического критерия. При этом для подавления вклада сильно зашумленных измерений с $|Z| \ll \sigma$ следует в функцию $w_s(Z_s)$ ввести фактор, стремящийся к нулю для тех измерений, у которых используемый критерий принимает проверяемую гипотезу на больших уровнях значимости.

Если гипотеза $Z = 0$ верна, то $Z_s = z_s$, сумма

$$X_s^2 = \frac{1}{\sigma_s^2}\sum_{j=1}^{L_s}\left|Z^{(a)}\right|^2 = \frac{1}{\sigma_s^2}\sum_{j=1}^{L_s}\left|z^{(a)}\right|^2 \qquad (14)$$

распределена как $\chi^2_{2L_s}$, и для проверки гипотезы о малости отношения сигнал/шум мы использовали критерий χ^2. Для расчета весов значений фазы измеренных в индивидуальных сцинцилях использовалось выражение:

$$w_s = 2\Big(\max\Big(0, P(X_s^2) - 1/2\Big)\Big)L_s|Z_s|^2/\sigma_s^2, \qquad (15)$$

где $P(X_s^2)$ — вероятность того, что случайная величина с функцией распределения $\chi^2_{2L_s}$ принимает значение, меньшее X_s^2. При этом для $X_s^2 \to \infty$ асимптотически выполняется равенство (9). Измерения Z_s с настолько малыми значениями X_s^2, что гипотеза $Z = 0$ принимается на уровне значимости $\alpha = 0.5$, считаются не несущими полезной информации. Для них $w_s = 0$, и тем самым они исключаются из рассмотрения.

После того, как веса w_s индивидуальных измерений φ_s вычислены согласно (15), расчет $\theta(t)$ проводится так же, как и в случае применимости стандартного подхода, с помощью уравнений (10).

3.3. Вычисление структурных функций фазы и ее производной

Дальнейшее изучение статистических свойств $\theta(t)$ выполнялось методом, близким к использованному в работе [13] и основанном на оценке временной структурной функции производной фазы

$$D_\theta(\tau) = \left\langle \delta^2\left(t', t''\right)\right\rangle, \qquad (16)$$

где $\delta\left(t', t''\right) = \theta\left(t''\right) - \theta\left(t'\right)$, а $\langle ... \rangle$ обозначает усреднение по всем парам измерений $\theta(t'')$, $\theta(t')$ с $t'' - t' = \tau$. В отличие от [13], усреднение в (16) проводилось с учетом неравноточности измерений θ.

Построить алгоритм усреднения с весами, подобный тому, который описывается уравнениями (10) и (15), в данном случае невозможно по двум причинам. Во-первых, из-за квадратичной зависимости структурной функции от индивидуальных значений $\theta(t)$ нельзя воспользоваться аналогией с результатами для линейных статистических моделей. Во-вторых, наблюдаемые различия $\delta(t', t'')$ при одних и тех же значениях $t'' - t' = \tau$, но различных значениях t' связаны не только с ошибками измерений, но и с реальной переменностью ионосферного вклада в фазу кросс-спектра, причем сколько-нибудь детальное статистическое описание этой переменности отсутствует.

Из-за указанных трудностей при расчете $D_\theta(\tau)$ веса, приписываемые при усреднении в (16) индивидуальным значениям $\delta^2(t', t'')$, выбирались простейшим способом, отражающим качественную зависимость погрешности $\delta^2(t', t'')$ от погрешностей $\theta(t'')$ и $\theta(t')$. А именно, значению $\delta^2(t', t'')$ приписывался вес $\min(u(t'), u(t''))$, где $u(t)$ определено в (10). Результаты расчетов $D_\theta(\tau)$ по описаному выше алгоритму показали, что в отличие от аналогичной структурной функции, полученной в [15], здесь не наблюдается явных признаков квазипериодических осцилляций фазы.

Для оценки влияния ионосферных эффектов на функцию видности необходимо рассмотреть поведение фазы, а не ее производной. Поэтому на следующем этапе обработки для каждого скана путем численного интегрирования функции $\theta(t) = \varphi'_{\rm atm}$ была

получена временна́я зависимость атмосферного вклада в вариацию фазы и вычислена соответствующая структурная функция D_φ. Результаты расчетов проиллюстрированы на рис. 3. Поскольку в межсковых промежутках $13.9 < t < 15.5$ мин и $33.0 < t < 34.5$ мин измерения отсутствуют, то однозначное восстановление фазы на всем интервале невозможно. При построении графика зависимости $\varphi_{atm}(t)$ предполагалось, что в межсковых интервалах фаза постоянна. При расчете $D_\varphi(t'' - t')$ мы включали в усреднение только те слагаемые $(\varphi_{atm}(t') - \varphi_{atm}(t''))^2$, для которых оба момента t' и t'' принадлежат одному и тому же скану, поэтому неоднозначность сдвига фазы между сканами на результат не влияет.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В нашей работе проанализированы наблюдения пульсара B2016+28, выполненные на радиотелескопе в Аресибо 22 мая 2015 г. в совместном эксперименте с космическим телескопом РадиоАстрон. Так как радиотелескоп в Аресибо является транзитным инструментом, то зенитное расстояние направления на источник не превышало величины в 15°. Наблюдения проводились в ночное время, примерно в 4 часа местного времени, т.е. по крайней мере за 2 часа до восхода солнца. Таким образом, при невозмущенной ионосфере проявление ионосферных эффектов в данном случае должно было быть минимальным.

Структурная функция фазы содержит информацию о статистических свойствах полного содержания электронов в ионосфере, однако изучение влияния ионосферных эффектов на результаты обработки РСДБ наблюдений проще проводить в терминах самой функции $\varphi_{atm}(t)$. Этапом такой обработки, следующим за получением кросс-спектра, обычно является расчет зависимости интерферометрической функции видности $V(f_{res}, \Delta t)$ от остаточной частоты интерференции f_{res} и запаздывания Δt. В нашем случае такой расчет проводился отдельно для каждого скана. Для того, чтобы проанализировать влияние ионосферных возмущений на диаграмму "$f_{res} - \Delta t$", измеренные в каждом скане ионосферные искажения фазы были представлены в виде

$$\varphi_{atm}(t) = \varphi_{lin}(t) + (\varphi_{atm}(t) - \varphi_{lin}(t)), \qquad (17)$$

где $\varphi_{lin}(t)$ — наилучшая (в смысле МНК) аппроксимация функции $\varphi_{atm}(t)$ линейной функцией времени, и было вычислено среднеквадратичное отклонение линейной аппроксимации от наблюдений $\rho = \sqrt{\langle(\varphi_{atm}(t) - \varphi_{lin}(t))^2\rangle}$ (см. рис. 3).

Влияние слагаемых $\varphi_{lin}(t)$ и $\varphi_{atm}(t) - \varphi_{lin}(t)$ в (17) на вид функции $V(f_{res}, \Delta t)$ совершенно различно. Эта функция обычно рассчитывается путем двойного Фурье-преобразования от динамического кросс-спектра (обратное преобразование по частоте и прямое преобразование по времени). Так как в используемом нами приближении сдвиг фазы происходит синхронно во всей полосе приема, то искажения, соответствующие линейной аппроксимации, эквивалентны сдвигу $V(f_{res}, \Delta t)$ по частоте интерференции без изменения формы и не изменяют внутреннюю структуру пятна рассеяния, выводимую из функции видности на последующих этапах обработки.

В отличие от этого, слагаемое, описывающее нелинейность зависимости ионосферного сдвига фазы от времени, приводит к искажению формы функции $V(f_{res}, \Delta t)$, в частности, к «расплыванию» максимума модуля функции видности. Эти искажения тем заметнее, чем выше значение ρ, и увеличивают погрешность определения структуры пятна рассеяния. Простого способа скомпенсировать ионосферные искажения, описываемые нелинейным слагаемым в (17), путем применения того или иного преобразования функции видности, по-видимому, не существует. Такая коррекция может быть выполнена лишь путем компенсации обнаруженных нами фазовых вариаций до выполнения преобразования Фурье по времени, являющегося составной частью алгоритма вычисления $V(f_{res}, \Delta t)$.

На рис. 4 показаны сечения модуля функции видности по f_{res} при $\Delta t = 0$ для трех наблюдательных сканов. Видно, что в первом скане, в котором значение ρ более чем в два раза превосходит значения для двух других сканов, максимум $|V(f_{res}, 0)|$ несколько шире и ниже. Сравнение амплитуд функции видности для трех сканов обнаруживает различие в пределах 10%.

Таким образом, мы делаем заключение, что ионосферные эффекты в данном эксперименте не должны существенно влиять на измерения амплитуды функции видности в зависимости от проекции базы наземно-космического интерферометра. Такие измерения были представлены в работе Фадеева с соавторами [14]. Они получили значение амплитуды функции видности для этого пульсара на уровне 0.26 при проекциях базы от 89 000 км до 96 000 км и определили угловой диаметр кружка рассеяния 2.1 mas[1].

[1] mas (milli arc second) — угловая миллисекунда дуги.

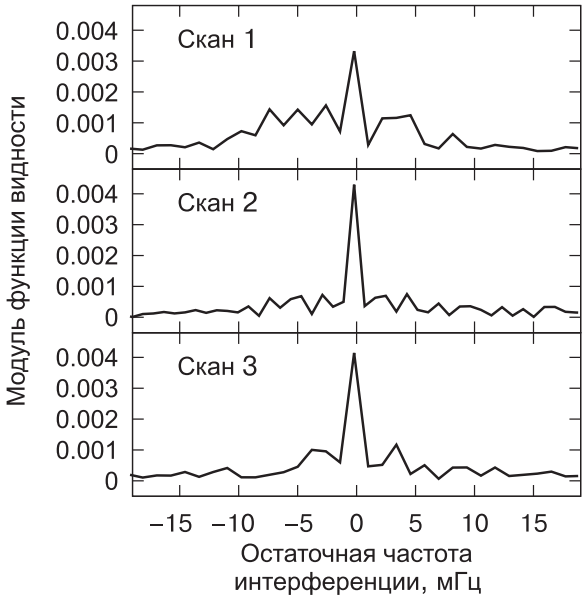

Рис. 4. Сечение диаграммы «остаточная частота интерференции-запаздывание» по частоте интерференции при нулевом запаздывании.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использованы открытые архивные данные проекта РадиоАстрон, содержащие результаты корреляционной обработки РСДБ наблюдений пульсаров. Мы выбрали часовой сеанс наблюдений пульсара B2016+28, проведенный 22 мая 2015 г. на наземно-космических базах от 60 000 км до 90 000 км. В качестве наземного радиотелескопа был задействован 300-м радиотелескоп в Аресибо. Как было показано в работе [14], этот пульсар имеет медленные межзвездные мерцания с характерным временем больше 30 минут, и это обстоятельство облегчает разделение ионосферных и межзвездных эффектов. Так как 10-м космический радиотелескоп находится далеко за пределами земной ионосферы, то влияние ионосферы сказывается в чистом виде на радиоизлучении пульсара, регистрируемого на наземном телескопе. С помощью оригинальной методики усреднения комплексных кросс-спектров проанализировано временные поведение фазы частотных сцинтилей. Амплитуда этих временных изменений фазы не превышает нескольких радиан за время всего интерферометрического сеанса. Структурная функция фазы показывает, что характерное время фазовых флуктуаций составляет 2–5 минут.

Анализ влияния ионосферных возмущений на результаты наблюдений пульсара показывает, что вызываемые ими искажения модуля функции видности не превышают 10%. Однако обнаруженные нами ионосферные искажения фазы функции видности могут оказаться критическими для задачи построения изображений протяженных радиоисточников по наблюдениям на наземных РСДБ-сетях в метровом диапазоне радиоволн. Метод замыкания фазы, например, окажется неприменим. Нам представляется интересным вариант РСДБ наблюдений в этом диапазоне с использованием пульсара в качестве калибровочного источника.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность рецензенту за ценные замечания и обсуждение.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Проект РадиоАстрон осуществлен Астрокосмическим центром Физического института им. П.Н. Лебедева Российской академии наук и Научно-производственным объединением им. С.А. Лавочкина по контракту с Госкорпорацией «РОСКОСМОС» совместно с многими научно-техническими организациями в России и других странах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Н. Кардашев, В. Хартов, В. Абрамов, В. Авдеев и др.*, Астрон. журн. **90**(3), 179 (2013).
2. *B. J. Rickett*, Ann. Rev. Asron. Astropys. **15**, 479 (1977).
3. *B. J. Rickett*, Ann. Rev. Asron. Astropys. **28**, 561 (1990).
4. *J. R. Jokipii*, Ann. Rev. Asron. Astropys. **11**, 1 (1973).
5. *S. K. Alurkar*, Solar and Interplanetary Disturbances, Astron. and Astrophys. Series (World Scientific, 1997).
6. *J. Aarons*, Proc. IEEE **70**, 360 (1982).
7. *Q. Zhi-Han and Z. Yong*, in Developments in astrometry and their impact on astrophysics and geodynamics, Proc. of the 156th Symp. IAU held in Shanghai, China, September 15–19, 1992; edited by I. I. Mueller and B. Kolaczek (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993), IAU Symp. **156**, 207 (1993).
8. *T. Hobiger, T. Kondo, and H. Schuh*, Radio Science **41**(1), id. RS1006 (2006).
9. *R. Heinkelmann, T. Hobiger, and M. Schmidt*, in *EGU* General Assembly 2009, held 19-24 April, 2009 in Vienna, Austria; Abstracts, p. 5715; http://meetings.copernicus.org/egu2009, p. 5715 .
10. *V.I. Zhuravlev, Y.I. Yermolaev, and A.S. Andrianov*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **491**, 5843 (2020).
11. *B. Dennison and R. S. Booth*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **224**, 927 (1987).
12. *V.I. Shishov, T.V. Smirnova, C.R. Gwinn, A.S. Andrianov, M.V. Popov, A.G. Rudnitskiy, and V.A. Soglasnov*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **468**, 3709 (2017).
13. *M.V. Popov, N. Bartel, M.S. Burgin, T.V. Smirnova, and V.A. Soglasnov*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **506**, 4101 (2021).

14. *E.N. Fadeev, A.S. Andrianov, M.S. Burgin, M.V. Popov, A.G. Rudnitskiy, V.I. Shishov, T.V. Smirnova, and V.A. Zuga*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **480**, 4199 (2018).
15. *S.F. Likhachev, V.I. Kostenko, I.A. Girin, A.S. Andrianov, A.G. Rudnitskiy, and V.E. Zharov*, J. Astron. Instrument. **6**(3), id. 1750004 (2017).
16. *M. Mevius, S. van der Tol, V.N. Pandey, H.K. Vedantham et al.*, Radio Science **51**(7), 927 (2016).
17. *A.R. Thompson, J.M. Moran, and J.W. Swenson*, Jr., Interferometry and Synthesis in Radio Astronomy, 3rd ed. (Springer, Cham, 2017).
18. *R.A. Fallows, M.M. Bisi, B. Forte, T. Ulich, A.A. Konovalenko*, G. Mann, and C. Vocks, Astrophys. J. Letters **828**(1), id. L7 (2016).
19. *A.C.S. Readhead, M.C. Kemp, and A. Hewish*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **185**, 207 (1978).

PROBING THE IONOSPHERE WITH PULSES FROM THE PULSAR B2016+28 AT A FREQUENCY OF 324 MHz

M. S. Burgin[a], M. V. Popov[a]

[a]*Astrospace Center of P.N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

Using ground-space VLBI data from the RadioAstron project archive, the phase distortions of the cross-spectrum caused by the ionosphere have been calculated and their influence on the results of determination of the visibility function has been studied. The Arecibo Observatory's 300-meter antenna served as the ground station for the interferometer. The separation of ionospheric phase distortions from the influence of the interstellar and interplanetary medium and instrumental errors is based on different frequency dependencies of these effects. The amplitude of ionospheric phase variation caused by electron density fluctuations in the ionosphere above the Arecibo radio telescope is several radians per observation session of about one hour. The structure function of phase variations indicates a continuous spectrum of electron density fluctuations at typical times of 2–5 min with no pronounced signs of quasi-periodic processes. Ionospheric phase fluctuations during pulsar observations increase the width of the maximum of the amplitude of the visibility function as a function of the residual interference frequency by 5–10 mHz with a decrease in the value at the maximum of ≈ 10%. When constructing images of radio galaxies and quasars from ground-based VLBI observations, these phase shifts can significantly distort the final results.

Keywords: pulsars, scintillation, interstellar medium, ionosphere

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2024, том 101, № 3, с. 244–249

ПЕРЕХОД ОТ СВЕРХАЛЬФВЕНОВСКОГО К ДОАЛЬФВЕНОВСКОМУ ОБТЕКАНИЮ ЭКЗОПЛАНЕТЫ ЗВЕЗДНЫМ ВЕТРОМ НА ПРИМЕРЕ HD 209458b

© 2024 г. Е. С. Беленькая[1,*]

[1]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына (НИИЯФ МГУ), Москва, Россия

**E-mail: elena@dec1.sinp.msu.ru*

Поступила в редакцию 28.01.2024 г.
После доработки 18.02.2024 г.
Принята в печать 11.03.2024 г.

В зависимости от расстояния между экзопланетой и центральной звездой и от свойств этой звезды возникают разные режимы обтекания звездным ветром. Если экзопланета находится на расстоянии до альфвеновского радиуса, на котором скорость ветра равна альфвеновской скорости, или альфвеновское число Маха $M_A = 1$, то экзопланета генерирует альфвеновские крылья. Если она расположена за альфвеновским радиусом, возникает кометообразная магнитосфера, как у планет Солнечной системы. В работе рассматривается, как переход от одного режима обтекания к другому может быть описан в рамках параболоидной модели магнитного поля магнитосферы на примере экзопланеты HD 209458b.

Ключевые слова: магнитосфера, экзопланета, альфвеновские крылья, звездный ветер

DOI: 10.31857/S0004629924030053 **EDN:** KJSTYR

1. ВВЕДЕНИЕ

Обтекание небесного тела сверхальфвеновским или доальфвеновским потоком плазмы приводит к возникновению разных типов магнитосфер: кометообразной с головной ударной волной перед ней или в виде альфвеновских крыльев наподобие двух трубок, вытянутых вдоль силовых линий магнитного поля обтекающего потока. Обтекание магнитных экзопланет звездным ветром в этих двух различных режимах рассмотрено во многих работах. Например, в работе [1] авторы исследовали этот вопрос применительно к экзопланетам в зоне обитаемости вокруг M карликов. В работе [2] была проанализирована реакция магнитосферных токовых систем на изменение альфвеновского числа Маха (M_A), равного отношению скорости потока, обтекающего планету, к альфвеновской скорости и на изменение собственного магнитного поля планеты. Авторы [2] рассматривали изменение M_A за счет вариации скорости потока. Фишер и Саур [3] описали нелинейное взаимодействие альфвеновских крыльев от двух экзопланет. Были выбраны две ближайшие экзопланеты в системе TRAPPIST-1 (TRAPPIST-1b и 1c). Вычисления проводились в МГД модели, облака нейтрального газа имитировали планеты. Авторы пришли к выводу, что детальное знание взаимодействия звезда-планета необходимо для изучения экзопланет.

В настоящей работе мы рассматриваем один из вопросов этого взаимодействия — переход альфвеновского числа Маха в звездном ветре через единицу и соответствующие изменения в структуре магнитосферы экзопланеты на примере горячего юпитера HD 209458b. Стоит отметить, что в работах [4–6] уже рассматривалась подобная задача по отношению к этому объекту (HD 209458b) с использованием 3D МГД моделирования и с учетом магнитного поля горячего юпитера и обтекающего его звездного ветра. Авторы [4–6] отмечали, что обсуждаемый вопрос актуален почти для всех горячих юпитеров из-за их близкого расположения к родительской звезде. Авторы [6] дополнительно рассмотрели влияние прохождения коронального выброса массы через магнитосферу HD 209458b на смену режимов обтекания экзопланеты. В работах [4–6] представлены результаты МГД моделирования в основном в экваториальной плоскости или в плоскости орбиты экзопланеты для радиального и азимутального компонентов магнитного поля звездного ветра, в то время как в нашей работе проводится моделирование только магнитного поля магнитосферы HD 209458b в параболоидной модели с учетом вертикального компонента магнитного поля звездного ветра, результаты моделирования представлены в меридиональной плоскости магнитосферы полдень-полночь. Газовая оболочка планеты, рассчитанная в МГД моделировании, не определяется в параболоидной модели. Это относится также к расчетам плотности, скорости, температуры и полости Роша.

Кроме того, в работах [4–6] учитывается только магнитное поле экзопланеты в качестве источника магнитосферного поля, в то время как в параболоидную модель включены магнитные поля магнитосферных токовых систем помимо внутреннего поля планеты, а именно: поле токовой системы хвоста и поле токов магнитопаузы, для которых определяются модельные параметры, исходя из условий в звездном ветре.

2. СМЕНА РЕЖИМОВ ОБТЕКАНИЯ

Магнитное число Маха $M_A = V_{sw}/V_A$ равно отношению скорости звездного ветра V_{sw} к альфвеновской скорости $V_A = B_{sw}/(\mu_0 n_{sw} m_{sw})^{1/2}$, где B_{sw} — магнитное поле звездного ветра, или межпланетное магнитное поле (ММП), $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная проницаемость вакуума, n_{sw} — плотность плазмы в звездном ветре, m_{sw} — средняя масса частицы звездного ветра. Произведение $n_{sw} m_{sw}$ — массовая плотность плазмы звездного ветра.

В работе [2] исследовано изменение структуры, возникающей при обтекании небесного тела типа Луны при изменении скорости набегающего потока плазмы. Уменьшение скорости вызывало переход от сверхальфвеновского режима обтекания к доальфвеновскому. Расчеты проводились в трехмерной гибридной модели. Авторы отмечали, что при этом изменении режимов происходило также переключение токов от сконцентрированных, в основном в экваториальной плоскости, к вертикальным, распределенным вдоль магнитных силовых линий.

Чан и др. [7] исследовали зарегистрированный экстремальный случай, когда обычная магнитосфера Земли вместе с ударной волной исчезли и образовались альфвеновские крылья длиной в $600 R_E$, где R_E — радиус Земли. При этом M_A и магнитозвуковое число Маха были меньше 1. Авторы утверждали, что это был первый случай наблюдения альфвеновских крыльев, генерируемых Землей. Переход от сверхальфвеновского к доальфвеновскому режиму обтекания был вызван чрезвычайно низкой плотностью плазмы солнечного ветра. В это время почти не наблюдалась авроральная активность на Земле. ММП было близко к горизонтальному направлению средней величины 9.8 нТл.

Ридли [8] численно показал, что при увеличении южного ММП магнитосфера Земли может превратиться в альфвеновские крылья. В качестве примера рассматривался корональный выброс массы (КВМ), внутри которого было очень сильное южное магнитное поле и очень низкая плотность плазмы. Это привело к тому, что солнечный ветер стал доальфвеновским ($M_A < 1$). Ридли [8] проводил расчеты в МГД модели Мичиганского Университета. ММП менялось от –5 нТл до –60 нТл, плотность и скорость солнечного ветра оставались постоянными: 5 см$^{-3}$ и 400 км/с при температуре 250 000 K. При этом M_A менялось от 8.2 до 0.7. Ридли [8] показал, что переход от сверх- к доальфвеновскому режимам происходит непрерывно без резкого изменения состояния магнитосферы обтекаемого тела.

M_A зависит от трех параметров: скорости обтекающего потока плазмы V_{sw}, плотности заряженных частиц в нем n_{sw} и его магнитного поля B_{sw}. Считаем, что масса заряженных частиц в потоке m_{sw} не меняется. В задаче, рассматриваемой в этой работе, мы фиксируем найденное экспериментально в работе [9] расстояние от центра планеты до подзвездной точки магнитопаузы (R_1). Это расстояние находится из баланса динамического давления звездного ветра P_{dynsw} и магнитного давления магнитосферы. Это означает, что P_{dynsw} должно быть постоянным, соответствующим оцененному масштабу магнитосферы R_1 ($P_{dynsw} = n_{sw} m_{sw} V_{sw}^2 = \text{const}$). При этом либо n_{sw} и V_{sw} не меняются, либо $n_{sw} V_{sw}^2 = \text{const}$. Предположив, что выполняется первое условие (из которого следует и второе), исследуем, как меняется магнитосфера с изменением M_A за счет вариации компонента ММП, параллельного магнитному моменту экзопланеты. Выберем ориентацию диполя планеты на юг, как у Земли.

3. ЭКЗОПЛАНЕТА HD 209458b

Экзопланета HD 209458b выбрана нами потому, что это одна из немногих экзопланет, для которых оценен магнитный момент ($\sim 1.6 \cdot 10^{26}$ А м^2 [9]). Она обнаружена методом радиальных скоростей. Поскольку радиус планеты $R_{pl} = 1.38 R_{Jup} = 9.54 \cdot 10^7$ м [9], где $R_{Jup} = 69\,911$ км — радиус Юпитера, магнитное поле на экваторе этого газового гиганта, соответствующее оцененному магнитному моменту, $B_{pl} = 18\,400$ нТл.

HD 209458b является горячим юпитером, она находится очень близко от центральной звезды HD 209458, на расстоянии $d = 0.047$ а.е. $= 7.1 \cdot 10^9$ м. Орбитальный период $T = 3.52$ дня. Центральная звезда — желтая, подобная Солнцу, ее спектральный класс G0V, возраст 4 Gyr, расстояние от Солнца 47 пк.

Параметры звездного ветра были оценены в работе [9]: скорость звездного ветра $V_{sw} \sim 400 \cdot 10^3$ м/с, концентрация частиц звездного ветра $n_{sw} \sim 5 \cdot 10^9$ м$^{-3}$. Согласно результатам работы [10], магнитное поле на поверхности подобной Солнцу звезды составляет

~143 000 нТл. Если считать, что свойства звездного ветра HD 209458 аналогичны свойствам солнечного, то $m_{sw} = 1.92 \cdot 10^{-27}$ кг [10]. Расчеты показывают, что при перечисленных параметрах на близкой орбите экзопланеты альфвеновская скорость V_A порядка скорости звездного ветра V_{sw} (учет орбитального движения экзопланеты не меняет V_{sw} по порядку величины). Следовательно, альфвеновское число Маха M_A близко к единице. В зависимости от условий в звездном ветре M_A может быть больше или меньше 1.

В этой работе мы будем имитировать прохождение звездного ветра на орбите HD 209458b через альфвеновский радиус (где $M_A = 1$) за счет вариации магнитного поля звездного ветра B_{sw} и исследовать соответствующие изменения структуры магнитосферы экзопланеты на базе параболоидной модели. Стоит отметить, что вблизи границы магнитосферы полученный результат будет некорректен, поскольку в используемой модели предполагалось заранее, что параболоидная магнитопауза ограничивает магнитосферу, что неверно в случае образования альфвеновских крыльев. Учитывая это, мы рассмотрим общий характер изменения структуры магнитного поля магнитосферы экзопланеты при изменении альфвеновского числа Маха.

4. ПАРАБОЛОИДНАЯ МОДЕЛЬ МАГНИТОСФЕРЫ ЭКЗОПЛАНЕТЫ HD 209458B

Параболоидная модель магнитосферы экзопланеты [11] является развитием модели магнитосфер магнитных планет Солнечной системы [12]. Помимо магнитного поля планеты, она содержит крупномасштабные токовые системы: токовую систему хвоста, токи экранировки на магнитопаузе, частично проникающее ММП с коэффициентом $k \le 1$: $b = kB_{sw}$. Для экзопланет, содержащих магнитодиск (или мощный кольцевой ток) модель магнитосферы включает также систему, связанную с магнитодиском. Поскольку расстояние до подзвездной точки магнитопаузы для HD 209458b мало́ ($R_1 \sim 2.9R_{pl}$), и авторы [9] не предполагали наличия магнитодиска у HD 209458b, последняя токовая система не вводилась в модель.

Для токовой системы хвоста в параболоидной модели использовался параметр $R_2 \sim 0.7R_1$, описывающий расстояние от центра планеты до внутренней границы токового слоя хвоста. Величина магнитного поля токовой системы хвоста на расстоянии $R_2 \sim 0.7R_1$ (внутреннем крае токового слоя, расположенного в экваториальной плоскости хвоста

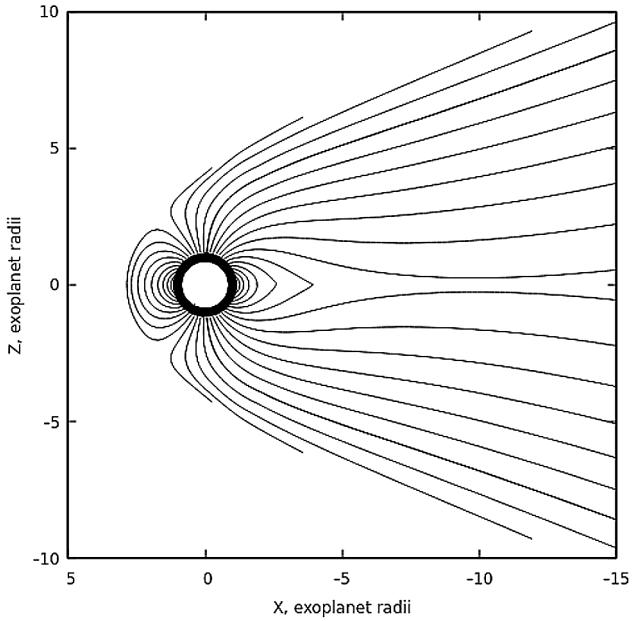

Рис. 1. Меридиональное сечение магнитосферы экзопланеты HD 209458b день-ночь. Параметры модели описаны в тексте. Межпланетное магнитное поле представлено в звездно-магнитосферной системе координат (X, Y, Z) с компонентами {0,0,–90} нТл, соответствующими $M_A > 1$.

магнитосферы), может быть грубо оценена по формуле: $B_t = -1.2B_{pl}(R_{pl}/R_1)^3$.

Таким образом, для модели магнитосферы экзопланеты HD 209458b получены в первом приближении следующие параметры:

$$R_{pl} = 9.5 \cdot 10^7 \text{ м}, \quad (1)$$

$$R_1 = 2.9R_{pl}, \quad (2)$$

$$B_{pl} = 18400 \text{ нТл}, \quad (3)$$

$$R_2 = 0.7R_1 = 2R_{pl}, \quad (4)$$

$$B_t = 1.2B_{pl}(R_{pl}/R_1)^3 = 905.3 \text{ нТл}. \quad (5)$$

В этой работе мы полагаем коэффициент проникновения ММП в магнитосферу k равным 1.

На рис. 1 показано сечение магнитосферы экзопланеты HD 209458b полдень-полночь для умеренного (относительно слабого) ММП. При этом альфвеновское число Маха очень большое, и получается кометообразная магнитосфера с головной ударной волной, не показанной на рисунке. Замкнутые силовые линии идут из одного полушария ионосферы в другое, пересекая экватор. Открытые силовые линии пересекают магнитопаузу и вытянуты в далекий хвост. При ММП, равном нулю, они нигде не пересекают магнитопаузу, уходя в торец хвоста. В долях

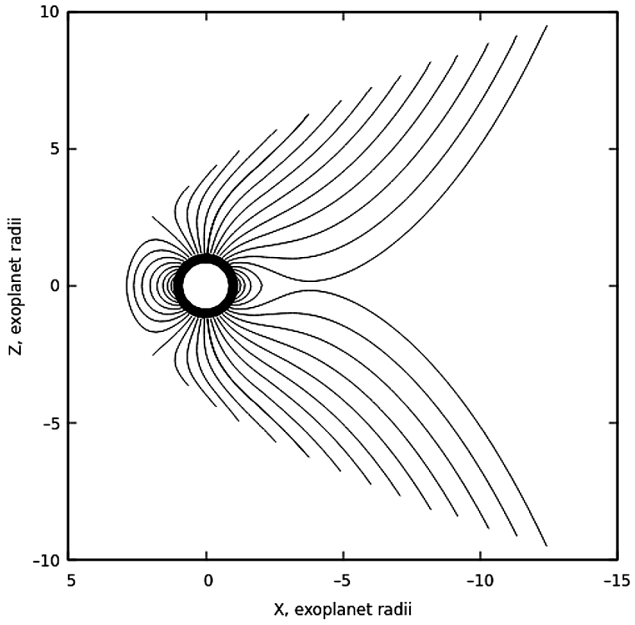

Рис. 2. То же, что на рис. 1, но для ММП: {0,0,–1389 нТл, соответствующего $M_A = 1$.

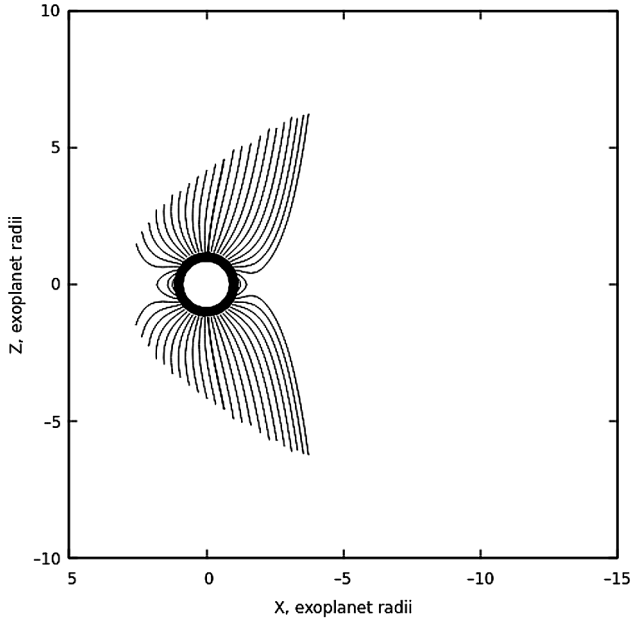

Рис. 3. То же, что на рис. 1, но для ММП: {0,0,–13 890} нТл, соответствующего $M_A < 1$.

хвоста направления магнитного поля противоположны в северном и южном полупространствах, этому соответствует ток в экваториальном хвосте (нейтральный токовый слой).

Рассмотрим, при каком южном ММП альфвеновская скорость становится порядка $V_{sw} = 400 \cdot 10^3$ м/с, учитывая, что концентрация частиц звездного ветра $n_{sw} \sim 5 \cdot 10^9$ м$^{-3}$ и $m_{sw} = 1.92 \cdot 10^{-27}$ кг. $V_A = B_{sw}/(\mu_0 n_{sw} m_{sw})^{1/2} \sim V_{sw}$, значит $B_{sw}^2/(\mu_0 n_{sw} m_{sw}) = V_{sw}^2$ или $B_{sw}^2 = \mu_0 n_{sw} m_{sw} V_{sw}^2$. Для приведенных значений $B_{sw}^2 = 1\,929\,211 \cdot 10^{-18}$ Тл^2, следовательно $B_{sw} = -1389$ нТл. Эта величина порядка величины магнитного поля звездного ветра на орбите HD 209458b (~1440 нТл). Если южное поле звездного ветра будет такой величины (ММП: 0, 0, –1389 нТл), то картина поля магнитосферы примет вид, показанный на рис. 2.

Предположим, вслед за Ридли [8], что при столкновении экзопланеты с корональным выбросом массы (КВМ) южное ММП возросло на порядок по сравнению с обычным значением. При этом M_A становится меньше единицы и изменившаяся структура магнитосферного магнитного поля принимает вид, показанный на рис. 3.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пока $M_A > 1$ параболоидная модель кометообразной магнитосферы экзопланеты описывает следующие источники магнитосферного магнитного поля: поле планеты, поле токов экранировки на магнитопаузе, поле токовой системы хвоста и частично проникающее в магнитосферу ММП. В долях хвоста, примыкающих друг к другу в экваториальной плоскости (рис. 1), магнитные поля антипараллельны друг другу, и их скачок соответствует величине тока в нейтральном токовом слое хвоста.

При переходе к $M_A < 1$ (рис. 2 и 3) эти доли хвоста раздвигаются вверх и вниз, расходясь между собой, и исчезает соответствующий экваториальный ток поперек хвоста вместе с θ-образной структурой токовой системы хвоста. Вместе с тем исчезают и осцилляции заряженных частиц относительно плоскости прежнего нейтрального слоя. Сам хвост становится очень коротким, состоящим из замкнутых силовых линий, а доли хвоста с открытыми силовыми линиями превращаются в альфвеновские крылья. На низких широтах конвекция из дальнего хвоста от точки ночного пересоединения заменяется конвекцией из ближней точки на ночной границе короткого хвоста. Пересоединения на дневной и ночной стороне магнитосферы сохраняются при параллельных направлениях ММП и магнитного момента диполя экзопланеты. В точках пересоединения происходит ускорение частиц за счет магнитной энергии, ускоренные пучки в продольных токах вызывают авроральные сияния на экзопланете (по аналогии с Ганимедом).

Альфвеновские волны генерируются при торможении обтекающего потока плазмы препятствием (экзопланетой). Альфвеновские крылья вызваны

взаимодействием альфвеновских волн с обтекающим потоком. Альфвеновские волны распространяются вдоль межпланетного магнитного поля в противоположных направлениях со скоростями $\pm V_A$ и одновременно сносятся потоком плазмы со скоростью V_{sw}. В результате магнитное поле искажается движением плазмы и силовые линии наклоняются на угол $\beta = \mathrm{arctg}(1/M_A)$, образуя две трубы — альфвеновские крылья, представляющие собой магнитосферу небесного тела [8]. Если $M_A > 1$, то поток наклоняет силовые линии магнитосферы к экваториальной плоскости, два крыла сближаются, соединяясь в экваториальной ночной магнитосфере, и получается вытянутый хвост с центральным токовым слоем. Если $M_A < 1$, то наклон силовых линий магнитного поля к экваториальной плоскости резко возрастает, доли хвоста расходятся, исчезают антипараллельные поля по обе стороны экватора вместе с центральным токовым слоем.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На примере изучения взаимодействия звездного ветра от звезды спектрального класса G0V HD 209458 с горячим юпитером HD 209458b, предположительно обладающим магнитным полем, показано изменение структуры магнитосферы экзопланеты при смене режима обтекания от сверхальфвеновского к доальфвеновскому.

В зависимости от того, больше или меньше единицы альфвеновское число Маха, возникают разные структуры магнитного поля в окружающей небесное тело области и разные системы токов. При $M_A > 1$ вокруг экзопланеты образуется кометообразная магнитосфера с головной ударной волной перед ней. При $M_A < 1$ образуются альфвеновские крылья, вытянутые вдоль магнитных силовых линий, идущих к центральной звезде. На границах альфвеновских крыльев (характеристиках) меняется наклон силовых линий. При этом исчезает токовый слой хвоста в экваториальной ночной магнитосфере и резко расходятся доли хвоста, заполненные открытыми силовыми линиями, образующими альфвеновские крылья.

На базе параболоидной модели магнитосферы экзопланеты продемонстрирован переход от одного режима к другому за счет изменения величины межпланетного магнитного поля, параллельного магнитному моменту планеты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *A. A. Vidotto, M. Jardine, J. Morin, J. F. Donati, P. Lang, and A. Russell*, Astron. and Astrophys. **557**, id. A67 (2013).
2. *Y. Vernisse, J.A. Riousset, U. Motschmann, and K.H. Glassmeier*, Planet. Space Sci. **137**, 40 (2017).
3. *C. Fischer and J. Saur*, Astron. and Astrophys. **668**, id. A10 (2022).
4. *А.Г. Жилкин, Д.В. Бисикало*, Астрон. журн. **96**(7), 547 (2019).
5. *А.Г. Жилкин, Д.В. Бисикало*, Астрон. журн. **97**(7), 538 (2020).
6. *А.Г. Жилкин, Д.В. Бисикало, П.В. Кайгородов*, Астрон. журн. **97**(2), 145 (2020).
7. *E. Chané, J. Saur, F. M. Neubauer, J. Raeder, and S. Poedts*, J. Geophys. Res. Space Physics **117**(A9), id. A09217 (2012).
8. *A. J. Ridley*, Ann. Geophysicae **25**(2), 533 (2007), https://www.ann-geophys.net/25/533/2007.
9. *K. G. Kislyakova, M. Holmström, H. Lammer, P. Odert, and M. L. Khodachenko*, Science **346**, 981 (2014).
10. *J. Nichols and S. E. Milan*, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **461**, 2353 (2016).
11. *E.S. Belenkaya, I.I. Alexeev, and M.S. Blokhina*, Universe **8**, 231 (2022).
12. *I.I. Alexeev*, Moscow University Phys. Bull. **65**, 300 (2010).

TRANSITION FROM SUPER-ALFVENIC TO SUB-ALFVENIC STELLAR WIND FLOW PASSING BY AN EXOPLANET, USING THE EXAMPLE OF HD 209458b

E. S. Belenkaya[a]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Skobeltsyn Institute of Nuclear Physics (SINP MSU), Moscow, Russia*

Depending on the distance of the exoplanet from the central star and on the properties of this star, different regimes of stellar wind flow around it arise. If the exoplanet is at a distance up to the Alfven radius at which the wind speed is equal to the Alfven speed, or the Alfven Mach number $M_A = 1$, then the exoplanet generates Alfven wings. If it is located beyond the Alfven radius, a comet-like magnetosphere appears, like that of the planets of the Solar System. The paper examines how the transition from one flow regime to another can be described on the base of a paraboloid model of the magnetospheric magnetic field using the example of exoplanet HD 209458b.

Keywords: magnetosphere, exoplanet, alfven wings, stellar wind

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2024, том 101, № 3, с. 250–262

ПРИНЦИПЫ ДЕТЕКТИРОВАНИЯ ВОЛНОВОЙ ТЕМНОЙ МАТЕРИИ С ПОМОЩЬЮ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО ИЗМЕРЕНИЮ ГРАВИТАЦИОННОГО КРАСНОГО СМЕЩЕНИЯ В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ

© 2024 г. С. В. Пилипенко[1,*], Д. А. Литвинов[1], М. В. Захваткин[1,2], А. И. Филеткин[1,3]

[1]Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук, Москва, Россия
[2]Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук, Москва, Россия
[3]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга, Москва, Россия

**E-mail: spilipenko@asc.rssi.ru*

Поступила в редакцию 08.11.2023 г.
После доработки 28.11.2023 г.
Принята в печать 27.12.2023 г.

Исследована возможность использования измерений эффекта гравитационного красного смещения для ограничения параметров волновой темной материи — класса моделей, в которых темная материя состоит из легких скалярных частиц, которые ведут себя подобно волнам классической материи. Построен математический аппарат для оценки констант взаимодействия волновой темной материи с полями частиц Стандартной модели в экспериментах с удаленными часами. С его помощью показано, что точность эксперимента по детектированию темной материи гало Галактики с помощью двух спутников, оснащенных точными и стабильными атомными часами и находящихся на эллиптических околосолнечных орбитах, не превышает точности наземных экспериментов по сравнению скоростей хода колоцированных часов различных типов. Причиной ограничения точности космического эксперимента является необходимость компенсации нерелятивистского эффекта Доплера, что приводит к уменьшению амплитуды полезного сигнала. Обсуждаются пути решения данной проблемы.

Ключевые слова: темная материя, гравитационное смещение частоты

DOI: 10.31857/S0004629924030062 **EDN:** KJSRRG

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из перспективных кандидатов на роль темной материи (ТМ) являются легкие скалярные частицы, описываемые действительным скалярным полем ϕ и обладающие длинами волн де Бройля, намного превышающими расстояние между частицами. Из-за очень больших чисел заполнения этот вид ТМ может быть описан с помощью волн классического поля ϕ, в силу чего такую ТМ часто называют волновой. Массы частиц для этого типа ТМ лежат в диапазоне от 10^{-24} эВ до 1 эВ. Волновая ТМ приводит к ряду интересных явлений, таких как бозонные звезды, колебания плотности и вихри ТМ (см., напр., обзор [1]). Поле ϕ может взаимодействовать с другими полями материи и колеблется с комптоновской частотой в диапазоне от 10^{-10} до 10^{14} Гц, что стимулирует проведение экспериментов по прямому детектированию этих колебаний. На константы связи был наложен ряд ограничений с помощью экспериментов с атомными часами на основании данных гравитационно–волновых детекторов, пульсарного тайминга, планетных эфемерид, тестов эйнштейновского принципа эквивалентности (ЭПЭ), экспериментов типа Этвеша и др. [2–11].

Новое поколение атомных часов с параметрами точности и стабильности 10^{-18}–10^{-19} [12, 13] делает возможным проведение новых типов высокоточных экспериментов по обнаружению волновой ТМ. Одной из таких возможностей является наблюдение за относительной скоростью хода двух или нескольких атомных часов различных типов с целью поиска периодических модуляций их сигнала, вызванных колебаниями поля ϕ [2, 3, 14]. Было также предложено использовать сеть часов, расположенных на космических аппаратах, для обнаружения поля ϕ гало темной материи Галактики путем поиска его когерентных осцилляций на масштабах, превышающих диаметр Земли [15]. Такие сети часов можно использовать также для поиска топологических дефектов, таких как доменные стенки, состоящие из ϕ. Подобные поиски уже начаты с помощью данных бортовых часов спутников глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) [16]. Планируются специальные эксперименты такого типа с использованием более совершенных часов и сравнения

скоростей хода как бортовых, так и наземных часов [17]. Далее было показано, что взаимодействие ϕ с полями материи может приводить к образованию гало ϕ не только вокруг галактик, но и вокруг тел звездных и планетарных размеров [18, 19]. Предложен эксперимент по исследованию гало Солнца с помощью двух часов разного типа на борту одного спутника [20]. Было выяснено, что для ряда типов взаимодействий имеет место эффект экранирования, из-за которого наземные эксперименты по детектированию ϕ с данными типами связей являются менее чувствительными, чем космические [18]. Наконец, отметим инициативу по детектированию ТМ из легких скалярных частиц с помощью близкой к атомным часам технологии атомных интерферометров, с размещением их на двух спутниках на средних околоземных орбитах [21].

В настоящей работе мы изучаем возможность исследования свойств образующего волновую ТМ скалярного поля ϕ с помощью пары спутников, оснащенных высокоточными и высокостабильными часами и обращающихся по эллиптическим орбитам вокруг Солнца. Взаимодействие ϕ с обычной материей приводит к тому, что колебания поля ϕ и его пространственная неоднородность изменяют значения фундаментальных констант природы в точках расположения часов. Это, в свою очередь, приводит к коррелированным изменениям частот генерируемых часами сигналов. Данные частоты могут быть сравнены с помощью радио- или оптических линий связи между спутниками. Наша задача состоит в оценке достижимой точности измерения констант связи ϕ с полями частиц Стандартной модели (СМ) с помощью данного типа эксперимента.

Предлагаемый нами эксперимент имеет сходство с предложенным в работе [15], где для поиска коррелированных сигналов, связанных с ϕ, была рассмотрена возможность использования сети удаленных друг от друга детекторов, в частности, атомных часов. Существенной особенностью схемы измерений [15] является то, что предполагается возможность автономной записи сигналов, связанных с ϕ, на каждом из узлов сети. В случае сети атомных часов это означает две возможности. Первая состоит в том, что в каждом узле сети должны находиться двое (или больше) часов различных типов, и в роли связанного с ϕ сигнала будет выступать разностный сигнал этих часов, как в исходном предложении данного типа экспериментов [14]. Вторая возможность состоит в использовании единственных часов в каждом узле сети и записи сигнала расстройки частот используемого в часах резонатора и атомного перехода. Обе эти возможности, очевидно, представляют собой эксперименты отличного от рассматриваемого нами типа. Первый относится к классу дифференциальных, или нуль-редшифт тестов, в которых измерению доступна лишь разность констант связи. Второй же представляет собой сравнение типа часы-резонатор, а не часы-часы.

Предлагаемая нами схема — один или несколько оснащенных часами спутников на эллиптических орбитах — используется или предлагается к использованию и в других типах гравитационных экспериментов, в частности, классических тестах по измерению эффекта гравитационного красного смещения, направленных на поиск нарушений ЭПЭ [22]. (Рассматриваемый нами эксперимент, очевидно, также является проверкой ЭПЭ.) Как осуществленные [23–26], так и большинство реализуемых и предложенных [27–31] экспериментов такого рода предполагают использование спутников на околоземных орбитах. Возможность проведения различного типа фундаментальных экспериментов на околосолнечных орбитах, позволяющих достичь более высокой точности измерений благодаря большей модуляции гравитационного потенциала, также рассматривалась [32–34]. Большинство этих экспериментов имеют совместимые друг с другом параметры орбит и требуют высокостабильных бортовых атомных часов. Поэтому проект с околосолнечными спутниками, который будет в итоге принят к реализации, по-видимому, будет направлен на решение нескольких фундаментальных задач. Мы рассматриваем нашу работу как шаг к разработке концепции такого проекта.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 описана пространственно–временна́я структура поля ϕ и его взаимодействие с полями обычной материи СМ. В разделе 3 рассматривается влияние констант связи поля ϕ на наблюдаемый сдвиг частоты сигналов, которыми обмениваются спутники, а также обсуждается компенсация эффекта Доплера. В разделе 4 описана разработанная нами методика оценки точности эксперимента. В разделе 5 представлены результаты оценки точности предлагаемого эксперимента с двумя спутниками на околосолнечных орбитах. Здесь же для сравнения мы рассматриваем применение разработанной нами методологии к случаю эксперимента с двумя колоцированными часами на поверхности Земли. В разделе 6 подведены итоги исследования. В Приложении приведен вывод формулы, которую мы используем для оценки чувствительности детектирования одного нестационар-

ного случайного сигнала на фоне нестационарного шума.

2. ВОЛНОВАЯ ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ

Волновая темная материя, составляющая гало Галактики, вдали от массивных тел ведет себя как осциллирующее классическое поле:

$$\phi(t,\mathbf{x}) = \phi_0 \cos(\omega_\phi t - \mathbf{k}_\phi \mathbf{x} + \varphi_0), \quad (1)$$

где $\omega_\phi = (m_\varphi c^2)/\hbar + (m_\varphi v_{\rm obs}^2)/(2\hbar)$ — комптоновская частота, смещенная за счет эффекта Доплера, связанного с движением наблюдателя со скоростью $\mathbf{v}_{\rm obs}$, m_ϕ — масса бозона, $\mathbf{k}_\varphi = (m_\varphi \mathbf{v}_{\rm obs})/\hbar$, φ_0 — фаза, ϕ_0 — амплитуда, экспоненциально распределенная около $\Phi_0 = \sqrt{2\rho_0}(\hbar/m_\varphi c)$, ρ_0 — равновесная плотность ТМ в месте нахождения наблюдателя [14, 15, 35, 36].

В настоящей работе мы используем Стандартную Модель Гало (SHM) [37], для которой распределение частиц ТМ по скоростям вблизи Солнца является обрезанным максвелловским. В настоящее время имеются более совершенные модели, например, SHM++ [38, 39], но для наших целей достаточно точности SHM, так как погрешности, присущие нашему анализу, например, связанные с нестабильностью часов, являются более значительными. Согласно SHM, локальная плотность ТМ составляет $\rho_0 = 0.3$ ГэВ/см^3, а круговая скорость в месте расположения Солнца — $v_0 = 220$ км/с. Мы предполагаем, что скорость вращения гало ТМ мала по сравнению со скоростью вращения звезд. Также мы полагаем, что направление движения Солнца в эклиптических координатах составляет $l = 347°$, $b = 60°$ (в направлении созвездия Лебедя).

Стохастические свойства поля ϕ описываются корреляционной функцией [15]:

$$g(\tau,\mathbf{d}) = \frac{1}{2}\Phi_0^2 \mathcal{A}(\tau,\mathbf{d}) \cos(\omega_\phi \tau - \mathbf{k}_\phi \mathbf{d} + \Psi(\tau,\mathbf{d})), \quad (2)$$

где

$$\mathcal{A}(\tau,\mathbf{d}) = \frac{\exp\left(-\dfrac{|\,\mathbf{d} - \mathbf{v}_{\rm obs}\tau\,|^2}{2\lambda_c^2}\dfrac{1}{1+(\tau/\tau_c)^2}\right)}{(1+(\tau/\tau_c)^2)^{3/4}},$$

$$\Psi(\tau,\mathbf{d}) = -\frac{|\,\mathbf{d} - \mathbf{v}_{\rm obs}\tau\,|^2}{2\lambda_c^2}\frac{\tau/\tau_c}{1+(\tau/\tau_c)^2} + \frac{3}{2}\tan^{-1}(\tau/\tau_c),$$

длина когерентности

$$\lambda_c = \xi^{-1}\lambda_\phi, \quad (3)$$

а время когерентности

$$\tau_c = (\xi^2 \omega_\phi)^{-1}. \quad (4)$$

Множитель $\xi = v/c \approx 10^{-3}$ представляет собой вириальную скорость внутри гало.

Связь ϕ с полями обычной материи проявляется в том, что фундаментальные константы природы приобретают зависимость от амплитуды ϕ. Минимальный сценарий подразумевает связь скалярного поля с сектором квантовой электродинамики. Более общий сценарий включает также связь ϕ с сектором квантовой хромодинамики. Этот вид скалярного поля иногда называют дилатоном. В релаксионном сценарии скалярное поле взаимодействует с полем Хиггса, что индуцирует взаимодействия с другими полями. Последний сценарий, на наш взгляд, является менее общим, поскольку фиксирует соотношения между константами связей с различными полями [40]. В дальнейшем мы рассматриваем дилатонный сценарий, как наиболее общий.

Часть действия, описывающая поля материи и их взаимодействие с полем ϕ, выглядит следующим образом [18, 41]:

$$S = \frac{1}{c}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\mathcal{L}_{SM}(g_{\mu\nu},\Psi_j) + \mathcal{L}_{\rm int}(g_{\mu\nu},\phi,\Psi_j)\right], \quad (5)$$

где $g_{\mu\nu}$ — метрика пространства–времени, g — определитель $g_{\mu\nu}$, $\mathcal{L}_{SM}$ — лагранжева плотность полей частиц СМ, Ψ_j — поля частиц СМ, $\mathcal{L}_{\rm int}$ описывает взаимодействие полей материи и скалярного поля ϕ. Мы будем рассматривать две модели $\mathcal{L}_{\rm int}$ — линейную и квадратичную относительно ϕ [18, 41, 42]. Обе они описываются следующим образом:

$$\mathcal{L}_{\rm int}^{(i)} = \frac{\phi^i}{i}\left[\frac{d_e^{(i)}}{4\mu_0}F^2 - \frac{d_g^{(i)}\beta_3}{2g_3}(F^A)^2 - \right.$$
$$\left. - \sum_{j=e,u,d}(d_{m_j}^{(i)} + \gamma_{m_j} d_g^{(i)}) m_j \bar{\psi}_j \psi_j\right], \quad (6)$$

где $F_{\mu\nu}$ — тензор напряженностей электромагнитного поля; μ_0 — магнитная постоянная; $F_{\mu\nu}^A$ — тензор напряжённостей глюонного поля; g_3 — константа связи квантовой хромодинамики; β_3 — бета-функция константы g_3; m_j — массы фермионов; e — электрон, u — u-кварк, d — d-кварк (более тяжелые кварки нет необходимости учитывать [43]); γ_{m_j} — аномальная размерность, ψ_j — спиноры соответствующих фермионов; $d_j^{(i)}$ — безразмерные константы связи поля ϕ с соответствующими полями материи; наконец, i обозначает вид связи: $i = 1$ — линейная, $i = 2$ — квадратичная.

Следствием лагранжиана (6) является то, что следующие пять фундаментальных констант природы приобретают зависимость от величины скалярного поля ϕ:

$$\alpha_{EM}(\varphi) = \alpha_{EM}\left(1 + d_e^{(i)}\frac{\varphi^i}{i}\right), \quad (7)$$

$$m_j(\varphi) = m_j\left(1 + d_{m_j}^{(i)}\frac{\varphi^i}{i}\right), \quad (8)$$

$$\Lambda_3(\varphi) = \Lambda_3\left(1 + d_g^{(i)}\frac{\varphi^i}{i}\right), \quad (9)$$

где α_{EM} — постоянная тонкой структуры; m_j — массы фермионов e, u, d; Λ_3 — параметр шкалы квантовой хромодинамики.

Для нашего анализа можно пренебречь различием масс u- и d-кварков [18]. В соответствии с этим мы определим их среднюю массу,

$$\hat{m}_q = \frac{m_u + m_d}{2}, \quad (10)$$

и соответствующую ей константу связи:

$$d_{\hat{m}_q}^{(i)} = \frac{m_u d_{m_u}^{(i)} + m_d d_{m_d}^{(i)}}{m_u + m_d}. \quad (11)$$

Тогда зависимость $\hat{m}_q$ от поля ϕ будет иметь вид:

$$\hat{m}_q(\varphi) = \hat{m}_q\left(1 + d_{\hat{m}_q}^{(i)}\frac{\varphi^i}{i}\right). \quad (12)$$

Лагранжиан (6), описывающий взаимодействие материи с полем ϕ на микроскопическом уровне, приводит к соответствующей зависимости лагранжианов, описывающих материю на макроскопическом уровне. Например, действие для системы материальных точек приобретает вид

$$S_{\text{mat}}[g_{\mu\nu}, \varphi, \Psi_i] = -c^2 \sum_{\mathcal{P}} \int_{\mathcal{P}} d\tau\, m_{\mathcal{P}}(\varphi), \quad (13)$$

где $d\tau$ — интервал собственного времени, $c^2 d\tau^2 = -g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, $\mathcal{P}$ нумерует материальные точки. Функция $m_{\mathcal{P}}(\phi)$ зависит от элементного состава материальной точки $\mathcal{P}$ и, таким образом, не является фундаментальной. Зависимость этой функции от дилатонного поля ϕ, определяемую взаимодействием ϕ с фундаментальными полями материи (7)–(9), удобно характеризовать с помощью константы связи

$$\alpha_{\mathcal{P}}^{(i)}(\varphi) = \frac{\partial \ln m_{\mathcal{P}}(\varphi)}{\partial \varphi^i}. \quad (14)$$

В работах [41, 42] было получено, что $\alpha_{\mathcal{P}}^{(i)}$ является суммой двух величин,

$$\alpha_{\mathcal{P}}^{(i)} = d_g^{*(i)} + \bar{\alpha}_{\mathcal{P}}^{(i)}, \quad (15)$$

Таблица 1. Дилатонные заряды для некоторых веществ, используемых в конструкциях космических аппаратов [18]

Вещество	$-Q'_{\hat{m}_q}$ [$\times 10^{-3}$]	Q'_e [$\times 10^{-3}$]	$-Q'_{m_e}$ [$\times 10^{-5}$]
Fe	9.94	2.32	1.89
SiO_2	13.70	1.26	0.027
Be	17.64	0.45	3.05
Al	12.30	1.47	1.00
Ti	10.42	2.01	2.24
^{238}U	7.63	4.28	6.24
Cu	9.63	2.46	2.18
Pb	7.73	4.06	5.82

одна из которых, $d_g^{*(i)}$, является универсальной для всех веществ, а вторая, $\bar{\alpha}_{\mathcal{P}}^{(i)}$, зависит от элементного состава тела $\mathcal{P}$. Универсальная константа $d_g^{*(i)}$ выражается через фундаментальные константы связи полей материи и поля ϕ следующим образом:

$$d_g^{*(i)} = d_g^{(i)} + 0.093\left(d_{\hat{m}_q}^{(i)} - d_g^{(i)}\right) + 2.75 \times 10^{-4}\left(d_{m_e}^{(i)} - d_g^{(i)}\right) + 2.7 \times 10^{-4} d_e^{(i)}. \quad (16)$$

Константа $\bar{\alpha}_{\mathcal{P}}^{(i)}$ имеет вид:

$$\bar{\alpha}_{\mathcal{P}}^{(i)} = \left[Q'_{\hat{m}_q}\right]_{\mathcal{P}}\left(d_{\hat{m}_q}^{(i)} - d_g^{(i)}\right) + \left[Q'_{m_e}\right]_{\mathcal{P}}\left(d_{m_e}^{(i)} - d_g^{(i)}\right) + \left[Q'_e\right]_{\mathcal{P}} d_e^{(i)}, \quad (17)$$

где коэффициенты $[Q'_j]_{\mathcal{P}}$ зависят от состава тела $\mathcal{P}$ и называются его дилатонными зарядами (штрихи обозначают, что эти коэффициенты являются приближенными значениями точных дилатонных зарядов $[Q_j]_{\mathcal{P}}$ [41]). Значения $[Q'_j]_{\mathcal{P}}$ для некоторых веществ, используемых в конструкциях космических аппаратов, приведены в табл. 1.

Частота $\nu_{\mathcal{C}}$ некоторого атомного перехода $\mathcal{C}$, на котором функционируют данные атомные часы, зависит от значений фундаментальных констант природы. Возможные вариации последних приводят к вариациям $\nu_{\mathcal{C}}$, что обычно параметризуют следующим образом:

$$d\ln\nu_{\mathcal{C}} = \left[k_\alpha\right]_{\mathcal{C}} d\ln\alpha_{EM} + \left[k_\mu\right]_{\mathcal{C}} d\ln\mu + \left[k_q\right]_{\mathcal{C}} d\ln\hat{m}_q/\Lambda_3, \quad (18)$$

где $\mu = m_e/m_p$ — отношение масс электрона и протона, k_i — коэффициенты, определяющие чувствительность перехода $\mathcal{C}$ к соответствующей комбинации фундаментальных констант, и снова предположено равенство масс легких кварков [18]. Значения данных коэффициентов для некоторых атомных

Таблица 2. Коэффициенты чувствительности некоторых атомных переходов, используемых в современных атомных часах, к вариациям констант α_{EM}, $\mu = m_e/m_p$ и $\hat{m}_q/\Lambda_3$

Переход	k_α	k_μ	k_q
^{87}Rb	2.34	1	–0.019
^{133}Cs	2.83	1	0.002
$^{1}H_{hfs}$	2.0	1	–0.100
^{1}H(1S–2S)	~0	0	0
$^{171}Yb^+$	1.0	0	0
$^{199}Hg^+$	–2.94	0	0
^{87}Sr	0.06	0	0
$^{27}Al^+$	0.008	0	0

Примечание. Переходы между уровнями сверхтонкой структуры: ^{87}Rb, ^{133}Cs, $^{1}H_{hfs}$. Оптические переходы: ^{1}H(1S–2S), $^{171}Yb^+$, $^{199}Hg^+$, ^{87}Sr, $^{27}Al^+$.

переходов, полученные с помощью квантово-механических расчетов, приведены в табл. 2 [44].

Подстановка (7)–(9) в (18) приводит к следующему выражению [18] для зависимости ν_C от ϕ:

$$d\ln\nu_C = \kappa_C^{(i)} d(\varphi^i), \tag{19}$$

где константа связи,

$$\kappa_C^{(i)} = \frac{1}{i}\left[k_q\right]_C\left(d_{\hat{m}_q}^{(i)} - d_g^{(i)}\right) + \\ + \frac{1}{i}\left[k_\mu\right]_C\left(d_{m_e}^{(i)} - d_g^{(i)}\right) + \frac{1}{i}\left[k_\alpha\right]_C d_e^{(i)}, \tag{20}$$

является аналогом (17).

3. ГРАВИТАЦИОННОЕ СМЕЩЕНИЕ ЧАСТОТЫ

Предположим, что находящийся в точке $(t_B,\mathbf{x}_B)$ спутник с элементным составом, которому соответствует константа связи с дилатонным полем $\alpha_{\mathcal{P}}^{(i)}$, посылает электромагнитный сигнал, синхронизированный по его бортовым часам, работающим на атомном переходе типа C. Другой спутник, который для простоты будем считать идентичным первому и оснащенным такими же часами, принимает данный сигнал в точке $(t_A,\mathbf{x}_A)$. Как показано в [45], смещение частоты ν данного сигнала за счет гравитационного и дилатонного полей описывается формулой:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{U_A - U_B}{c^2} + \\ + (\kappa_C^{(i)} + \alpha_{\mathcal{P}}^{(i)})(\phi^i(t_A,\mathbf{x}_A) - \phi^i(t_B,\mathbf{x}_B)), \tag{21}$$

где U — наблюдаемое значение гравитационного потенциала в соответствующих точках (т. е. определенное по предшествующим наблюдениям за движениями небесных тел и космических аппаратов [45]); $\kappa_C^{(i)}$ и $\alpha_{\mathcal{P}}^{(i)}$ — константы связи с полем ϕ, описанные в предыдущем разделе. Для удобства в дальнейшем обозначим:

$$\gamma^{(i)} \equiv (\kappa_C^{(i)} + \alpha_{\mathcal{P}}^{(i)}). \tag{22}$$

Важность величины $\gamma^{(i)}$ определяется тем, что с помощью (21) ее значение может быть определено экспериментально. Для этого требуется измерить фактическое смещение частоты сигнала $\Delta\nu/\nu$, вычислить значения гравитационного потенциала U в точках A и B и воспользоваться формулами, описывающими корреляционные свойства поля ϕ. Подробности данной процедуры описаны в следующем разделе.

Отметим, что для экспериментов с часами, основанными на оптических переходах, которые в настоящее время достигли наибольшей точности и стабильности среди атомных часов, коэффициенты чувствительности k_μ и k_q равны 0 (см. табл. 2). При этом для часов, основанных на переходах иттербия и ртути, $k_\alpha \sim 1$. В то же время все дилатонные заряды для веществ, приведенных в табл. 1, имеют порядок $\lesssim 10^{-2}$. Если предположить, что все фундаментальные константы связи $d_j^{(i)}$ поля ϕ с полями материи имеют один порядок, то на основании изложенного и уравнений (17) и (20) для данного типа часов можно положить:

$$\gamma^{(i)} \approx \frac{1}{i}\left[k_\alpha\right]_C d_e^{(i)}, \tag{23}$$

где $[k_\alpha]_C \approx 1$. То есть эксперименты с данными типами оптических часов позволяют непосредственно измерять константу связи дилатонного поля ϕ с электромагнитным полем. Данный пример не является общим, однако, в дальнейшем мы воспользуемся им для сравнения полученных нами оценок достижимой точности измерения $\gamma^{(i)}$ с уже полученными в других экспериментах ограничениями на константы связи $d^{(i)}$ поля ϕ.

Практическая сложность реализации эксперимента, основанного на использовании (21), состоит в том, что, помимо приведенных в этой формуле слагаемых, имеется множество других эффектов, приводящих к изменению частоты передаваемого сигнала и имеющих различные порядки по v/c и $\Delta U/c^2$, где v — скорость спутников (см., напр., [46, 47]). Эффект первого порядка по c^{-1} (классический эффект Доплера) вносит наибольший вклад в сдвиг частоты, на много порядков превосходящий возможные эффекты от волновой ТМ, которые мы

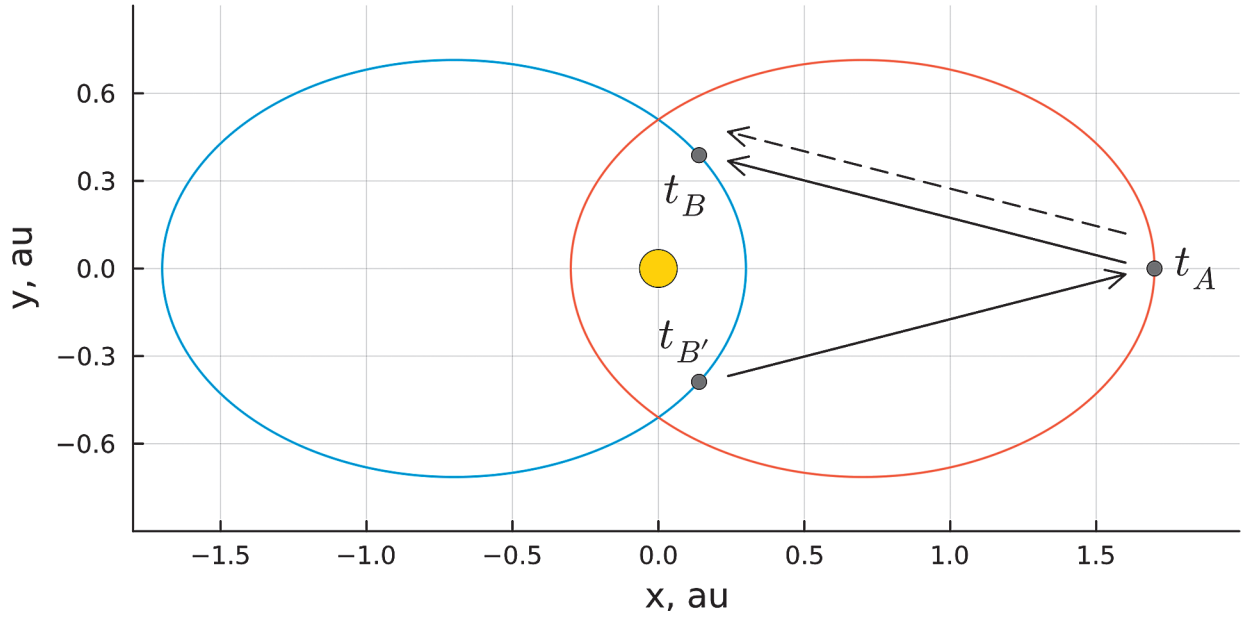

Рис. 1. Конфигурация орбит двух спутников. Оба спутника движутся против часовой стрелки. Первый спутник показан в моменты времени отправки $t_{B'}$ и приема сигнала t_B (интервал времени между этими моментами многократно увеличен для наглядности). Второй спутник показан в момент ретрансляции принятого сигнала t_A. Сплошными стрелками показан двухпутевой сигнал, штриховой стрелкой – однопутевой.

хотели бы измерить. Основной проблемой, однако, является не величина нерелятивистского эффекта Доплера, а доступная точность его оценки путем расчета на основе эфемерид космических аппаратов. На настоящий момент она позволяет рассчитывать вклад нерелятивистского эффекта Доплера с точностью до $\sim 10^{-16}$ (см. обсуждение в работе [48]), что недостаточно для уже имеющихся — правда, пока лишь в наземном исполнении — образцов часов со стабильностью 10^{-18}–10^{-19}.

Решение данной проблемы возможно путем компенсации нерелятивистского эффекта Доплера с помощью дополнительного двухпутевого канала связи по схеме Gravity Probe A [24, 49]. В данном режиме часы B в момент $t_{B'}$ посылают сигнал в направлении часов A; данный сигнал принимается часами A в момент t_A и когерентно ретранслируется назад в направлении часов B (двухпутевой сигнал, «2w»). Дополнительно к ретранслированному сигналу часы A посылают собственный (однопутевой, «1w») сигнал в направлении часов B. Оба сигнала, двух- и однопутевой, принимаются часами B в момент t_B ($t_B > t_A > t_{B'}$), см. рис. 1. Компенсация нерелятивистского эффекта Доплера достигается путем формирования следующей комбинации частот этих двух сигналов:

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_B = \left(\frac{\nu_B}{\nu_A}\right)_{1w} - \frac{1}{2}\left(\frac{\nu_B}{\nu_{B'}}\right)_{2w} - \frac{1}{2}. \qquad (24)$$

Аналогом формулы (21) в данном режиме является

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_{GP-A} = \frac{U_A - \frac{1}{2}(U_B + U_{B'})}{c^2} + \left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_\varphi, \qquad (25)$$

где

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_\varphi = \gamma^{(i)}\left(\varphi^i_A - \frac{1}{2}\left(\varphi^i_B + \varphi^i_{B'}\right)\right). \qquad (26)$$

Именно с помощью последней формулы мы будем проводить оценку достижимой точности измерения $\gamma^{(i)}$.

В эксперименте с двумя космическими аппаратами в Солнечной системе схема компенсации (24) привносит два пространственных масштаба, на которых измеряется степень коррелированности поля ϕ: расстояние от A до B, имеющее для предлагаемой нами ниже конфигурации орбит порядок 1 а. е. и расстояние от B' до B, имеющее порядок 30 000 км.

Имеется еще один источник гравитационного красного смещения частоты, связанный со скалярным полем: осцилляции гравитационного потенциала [50]. Данный эффект не зависит от констант связи скалярного поля, однако, по нашим оценкам, для расстояний между спутниками ~ 1 а. е. его величина имеет амплитуду $\Delta\nu/\nu < 10^{-24}$, которая слишком мала, чтобы быть обнаруженной с помощью имеющихся на сегодня часов.

4. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТА

Для получения оценки точности измерения параметра $\gamma^{(i)}$ мы используем метод максимального правдоподобия (ММП) по аналогии с [30]. Измеренные значения частоты $d(t) = \Delta\nu/\nu$ представляют собой смесь сигнала

$$s(t) = \varphi^i_A - \frac{1}{2}\left(\varphi^i_B + \varphi^i_{B'}\right)$$

и гауссового шума $n(t)$: $d(t) = \gamma^{(i)}s(t) + n(t)$. Сигнал зависит от конфигурации эксперимента, т. е. выбора орбит спутников. В идеализированном случае, который мы будем рассматривать, единственным источником шума являются флуктуации скорости хода (частоты) часов. Природа этих флуктуаций такова, что шум является окрашенным, т. е. случайный процесс $n(t)$ является нестационарным. В формулировке с дискретным временем процессу $n(t)$ соответствует ковариационная матрица $\mathcal{N}$.

4.1. Конфигурация эксперимента

Мы предполагаем, что эксперимент осуществляется с помощью двух спутников на околосолнечных орбитах, плоскости которых совпадают с плоскостью эклиптики. Также мы полагаем, что орбиты являются кеплеровыми. Для экспериментов по измерению эффекта гравитационного замедления времени требуются орбиты с большим эксцентриситетом, так как они обеспечивают модуляцию измеряемого эффекта и тем самым позволяют избавиться от значительного количества систематических ошибок, в частности, постоянной расстройки частоты между часами. Поэтому для нашего случая мы также используем высокоэллиптические орбиты. В качестве примера мы взяли орбиты с перигелием 0.3 а. е. и большой полуосью 1 а. е. (эксцентриситет $e = 0.7$). Использование орбит с меньшими перигелиями представляется затруднительным из-за тепловых ограничений, а с более высокими афелиями приведет к увеличению периода обращения и более медленному накоплению модулированного сигнала. Для увеличения глубины модуляции мы выбрали параметры орбит таким образом, чтобы моменты прохождения одним спутником перигелия совпадали с моментами прохождения другим афелия. Для обеспечения непрерывной связи между спутниками мы выбрали ориентацию орбит так, что их перигелии находятся по разные стороны от Солнца, см. рис. 1. Таким образом, наш выбор орбит аналогичен тому, что был использован в работе [30], но для околосолнечного, а не околоземного случая. Это делает предлагаемый нами эксперимент полностью совместимым с классическим типом экспериментов по измерению гравитационного замедления времени, рассмотренным в [30]. Мы пренебрегаем возмущающим воздействием на орбиты спутников со стороны планет Солнечной системы. В частности, мы пренебрегаем колебаниями положения центра Солнца относительно барицентра Солнечной системы, так как влияние данного эффекта на форму сигнала от скалярного поля ϕ пренебрежимо мало.

Мы выбрали продолжительность эксперимента равной $T = 10$ лет. Предполагается, что измерения частоты выполняются с постоянным шагом Δt. В реальном эксперименте шаг сырых частотных измерений может составлять миллисекунды, однако, моделирование эксперимента продолжительностью 10 лет с таким шагом затруднительно и не является необходимым. Достаточно использовать шаг Δt, удовлетворяющий теореме Котельникова. Более подробно выбор Δt обсуждается далее.

В качестве примера часов мы используем лабораторные стронциевые часы JILA SrI [12], которые будем характеризовать с помощью спектральной плотности мощности (СПМ) шума флуктуаций относительной частоты следующего вида [30]:

$$S(\nu) = 2.0 \times 10^{-31}\nu^0 + 2.1 \times 10^{-36}\nu^{-1}. \qquad (27)$$

Данная СПМ содержит две компоненты: белый (ν^0) и фликкер-шум (ν^{-1}). Как и большинство других оптических часов, шум JILA SrI не содержит броуновской компоненты (ν^{-2}). Кроме того, учитывая высокую абсолютную точность оптических часов, $\sim 10^{-18}$ и выше [12, 13], мы пренебрегаем возможной постоянной расстройкой частоты между часами двух спутников. Учитывая скорость развития технологий создания атомных часов, в том числе в бортовом исполнении [51], мы полагаем, что в ближайшие 10 лет можно ожидать появления бортовых оптических часов с такими параметрами.

Ковариационная матрица шума $\mathcal{N}$, соответствующая (27), рассчитана нами, согласно [30], как сумма ковариационных матриц для белого и фликер-шумов:

$$\mathcal{N}_{ij} = 2.0 \cdot 10^{-31}\Delta t^{-1}\delta_{ij} + \\ + 2.1 \cdot 10^{-36}\sum_{m=1}^{i} 2\pi\varphi_m\varphi_{i-j+m}, \qquad (28)$$
$$\varphi_m = \frac{\Gamma(m + 1/2)}{m!\Gamma(1/2)},$$

где δ_{ij} — единичная матрица. Форма и статистические свойства сигнала различны для случаев линейной ($i = 1$) и квадратичной связи ($i = 2$), поэтому ниже мы их рассматриваем отдельно.

4.2. Сигнал: линейная связь

В настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением гало ТМ Галактики и не учитываем возможные вклады от гало, которые могут образовываться вокруг объектов звездных и планетарных масс [18]. В этом случае сигнал для линейной связи, согласно (26), имеет вид:

$$s(t) = \frac{1}{2}\phi_B + \frac{1}{2}\phi_{B'} - \phi_A, \qquad (29)$$

где $\varphi_A = \varphi(t_A, \mathbf{x}_A)$, $\varphi_B = \varphi(t_B, \mathbf{x}_B)$, $\varphi_{B'} = \varphi(t_{B'}, \mathbf{x}_{B'})$, выражение для $\phi(t, \mathbf{x})$ приведено в (1), а события A, B и B' пояснены в разделе 3.

Так как масса поля m_φ и фаза φ_0 неизвестны, то точная форма сигнала (29) также неизвестна. Поэтому поиск сигнала в экспериментальных данных необходимо осуществлять для различных значений m_φ и φ_0. Подобный поиск удобно осуществлять в частотной области, так как в этом случае сигнал имеет определенную форму, сдвинутую на величину комптоновской частоты [15].

Амплитуда и фаза осциллирующего сигнала (29) представляют собой нестационарные случайные процессы. Нестационарность связана с тем, что сигнал зависит от координат спутников, из-за чего корреляционная функция сигнала $\langle s(t)s(t+\tau)\rangle$ зависит как от t, так и от τ. В дискретном времени мы характеризуем сигнал ковариационной матрицей $\mathcal{S}$.

В случае, когда сигнал является стационарным процессом, точность эксперимента может быть оценена с помощью формулы (15) из [15]. Однако для нестационарного процесса Фурье-преобразование ковариационной матрицы не является диагональным, поэтому данная формула, строго говоря, не может быть применена. В Приложении мы выводим обобщение формулы (15) из [15] для случая нестационарного сигнала[1]:

$$\sigma_\gamma = 2^{1/4}\left(\mathrm{tr}(\mathcal{N}^{-1}\mathcal{S}\mathcal{N}^{-1}\mathcal{S})\right)^{-1/4}. \qquad (30)$$

Выражение для ковариационной матрицы $\mathcal{S}_{ij} = \langle s(t_i)s(t_j)\rangle$ может быть получено непосредственно с помощью определения (29). В качестве дискретных моментов времени t_i, входящих в определение $\mathcal{S}_{ij}$, мы выбираем дискретизированные с постоянным шагом моменты координатного времени приема спутником B одно- и двухпутевых сигналов (см. раздел 3), посланных спутником A: $t_i \equiv t_{B_i}$. Моменты $t_{B_i'}$ и t_{A_i} соответствуют моментам посылки одно- и двухпутевых сигналов, которые принимаются спутником B в моменты t_{B_i}. Полагая

$$g(A,B) \equiv g(t_B - t_A, \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A), \qquad (31)$$

где g определено в (2), мы получаем для линейной связи ϕ с полями материи:

$$\mathcal{S}_{ij}^{(1)} = \frac{1}{4}(g(B_i,B_j) + g(B_i,B_j') - 2g(B_i,A_j) + g(B_i',B_j) + g(B_i',B_j') - 2g(B_i',A_j) - 2g(A_i,B_j) - 2g(A_i,B_j') + 4g(A_i,A_j)). \qquad (32)$$

4.3 Сигнал: квадратичная связь

В случае квадратичной связи сигнал, согласно (26), имеет вид:

$$s(t) = \frac{1}{2}\varphi_B^2 + \frac{1}{2}\varphi_{B'}^2 - \varphi_A^2. \qquad (33)$$

Так как случайное поле ϕ является гауссовым, то любая его N-точечная корреляционная функция выражается через 2-точечную, например:

$$\langle \varphi_A^2 \varphi_B^2 \rangle = g^2(0,0) + 2g^2(A,B). \qquad (34)$$

Тогда для ковариационной матрицы сигнала для случая квадратичной связи получаем:

$$\mathcal{S}_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2}(g^2(B_i,B_j) + g^2(B_i,B_j') - 2g^2(B_i,A_j) + g^2(B_i',B_j) + g^2(B_i',B_j') - 2g^2(B_i',A_j) - 2g^2(A_i,B_j) - 2g^2(A_i,B_j') + 4g^2(A_i,A_j)). \qquad (35)$$

Как и в линейном случае, для оценки точности эксперимента по измерению $\gamma^{(2)}$ мы будем использовать (30).

4.4. Наземный эксперимент с колоцированными часами

Рассмотрим также применение разработанного нами выше формализма к эксперименту с наземными часами. Если часы находятся в одной лаборатории и основаны на одном типе квантового перехода, то, как легко видеть из (21), сигнал от поля ϕ отсутствует. Для получения ненулевого сигнала необходимо использовать различные типы часов. В этом случае получаем:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \Delta\kappa^{(i)}\phi^i, \qquad (36)$$

где $\Delta\kappa^{(i)} = \kappa_{C_1}^{(i)} - \kappa_{C_2}^{(i)}$ есть разность констант связи (20) для двух выбранных часов. Для увеличения амплитуды сигнала, очевидно, необходимо использовать часы со значительно различающимися коэффициентами чувствительности k (см. табл. 2), вхо-

[1] Подобная формула может быть получена также из более общих соотношений, приведенных в [52], однако для данной задачи наш вывод является более простым.

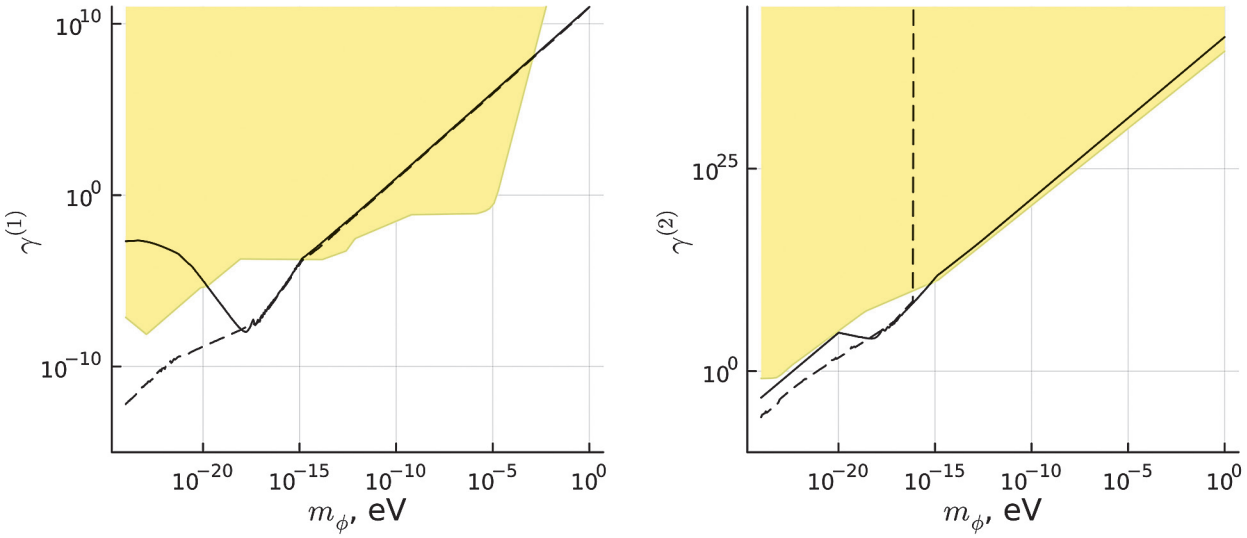

Рис. 2. Ограничения на константу связи $\gamma^{(i)}$ дилатонного поля ϕ, отождествляемого с ТМ. Слева — линейная связь ($i=1$), справа — квадратичная ($i=1$). Константа $\gamma^{(i)}$ определена согласно (22). Сплошная линия — эксперимент с двумя спутниками на околосолнечных орбитах, штриховая — эксперимент с двумя колоцированными часами на Земле (результаты данной работы). В последнем случае учтено экранирование, предсказанное в работе [18]. Закрашенная область — полученные ранее ограничения на $\gamma^{(i)}$ в экспериментах с атомными часами и тестах ЭПЭ. Сравнение с полученными ранее ограничениями сделано в предположении (23), с наземным экспериментом — в предположении (37).

дящими в выражение (20). Для получения количественных оценок положим, что

$$\Delta\kappa^{(i)} \approx \gamma^{(i)}, \tag{37}$$

где $\gamma^{(i)}$ определяется по результатам эксперимента с двумя спутниками. Соотношение (37), например, удовлетворяется при сравнении в наземном эксперименте часов, основанных на переходах иттербия и алюминия (см. табл. 2).

Ковариационная матрица сигнала как для линейной, так и квадратичной связи в данном случае имеет простой вид:

$$\mathcal{S}_{ij}^{(1)} = g(i,j), \tag{38}$$

$$\mathcal{S}_{ij}^{(2)} = 2g^2(i,j), \tag{39}$$

где $g(i,j)=g(t_i-t_j,0)$, g приведено в (2). В целях дополнительного упрощения расчетов мы также будем предполагать, что часы находятся в центре Земли.

4.5. Выбор шага дискретизации

Корреляционная функция (2) содержит осциллирующий во времени с комптоновской частотой множитель, причем частота осцилляций увеличивается с массой поля m_ϕ. Таким образом, для получения корректных оценок и, в частности, при вычислении ковариационных матриц (32) и (35), шаг дискретизации Δt должен быть выбран меньше половины периода осцилляций. Для выбранного времени накопления $T=10$ лет при большой массе поля это оказывается невозможным. Так, для $m_\phi=1$ эВ период осцилляций составляет $4\cdot10^{-15}$ с, а размер ковариационной матрицы получается $10^{22}\times10^{22}$ элементов. Такая матрица не поместится в памяти современных компьютеров, а вычисление обратной матрицы на лучшем современном суперкомпьютере по версии TOP500[2] заняло бы 10^{30} возрастов Вселенной. Поэтому точная формула (30) может быть использована лишь для достаточно малых масс. Для выбранного нами ограничения в 8000 отсчетов это соответствует $\Delta t\geq4\cdot10^4$ с и $m_\phi\leq1.7\cdot10^{-20}$ эВ.

Для диапазона масс $m_\phi\leq1.7\cdot10^{-20}$ эВ нами установлено следующее эмпирическое соотношение между корректной оценкой σ_γ, вычисленной для интервала Δt_K, соответствующего теореме Котельникова, и σ'_γ, вычисленной для $\Delta t>\Delta t_K$:

$$\sigma_\gamma = \sigma'_\gamma\sqrt{\frac{\Delta t}{\Delta t_K}}. \tag{40}$$

Соответственно, для диапазона масс $m_\phi>1.7\times10^{-20}$ эВ мы вычисляли σ' для $\Delta t=4\cdot10^4$ с и затем корректировали его с помощью (40).

5. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Наши основные результаты представлены на рис. 2, на котором изображены оценки точности измерения параметра $\gamma^{(i)}$, определенного в (22), для

[2] https://www.top500.org/lists/top500/2023/11/

случаев линейной ($i=1$) и квадратичной ($i=2$) связи поля ϕ, отождествляемого с ТМ, с полями обычной материи. Для сравнения здесь же изображены оценки для эксперимента с двумя наземными колоцированными часами, основанными на различных квантовых переходах.

Полученные результаты показывают, что для случая линейной связи в сделанных нами предположениях (23) и (37) эксперимент с часами на космических аппаратах для диапазона масс $m_\phi \gtrsim 10^{-18}$ эВ достигает такой же точности измерения параметра $\gamma^{(1)}$, что и наземный эксперимент с двумя различными колоцированными часами. Для $m_\phi \lesssim 10^{-18}$ эВ наземный эксперимент оказывается более чувствительным, чем космический. Примерно такая же ситуация имеет место для случая константы связи квадратичного типа. Исключение состоит в том, что для случая достаточно больших масс возникает эффект экранирования [18] при $\gamma^{(2)} \gtrsim 4.8\cdot 10^{8}$, в связи с чем наземные эксперименты перестают быть чувствительными к наличию скалярного поля ϕ для $m_\phi \gtrsim 8\cdot 10^{-17}$ эВ (этому соответствует вертикальный участок штриховой кривой на рис. 2). Тем не менее уже существующие ограничения на $\gamma^{(2)}$, полученные в экспериментах по проверке ЭПЭ (цветная область), в большей части диапазона масс дают сравнимые или лучшие результаты, чем космический эксперимент.

Причина того, что космический эксперимент с часами не позволяет (в сделанных предположениях) достичь большей точности, чем наземные, заключается в необходимости использования схемы компенсации нерелятивистского эффекта Доплера (см. (24) и (25)). Действительно, выражение (25) представляет собой конечно-разностный аналог второй производной сигнала для шага ≈1000 с, соответствующего времени распространения сигнала между спутниками. Когда комптоновский период оказывается больше величины данного шага, операция взятия производной приводит к уменьшению амплитуды сигнала. Именно поэтому для $m_\phi \lesssim 10^{-18}$ эВ наземный эксперимент оказывается более чувствительным, чем космический.

Возможным решением данной проблемы может быть отказ от использования схемы компенсации (24). Активно развивающиеся в последнее время интерферометрические способы измерения радиальной скорости между космическими аппаратами уже достигли точности измерения 0.1 мкм/с, что соответствует точности измерения нерелятивистского эффекта Доплера $3.3\cdot 10^{-16}$ [53]. В ближайшее время ожидается улучшение данного показателя до $1.7\cdot 10^{-17}$ [54], что уже достаточно близко к необходимым $\sim 10^{-18}$.

Тем не менее успешное детектирование сигнала от ϕ в космическом эксперименте является более достоверным, чем в эксперименте с различными часами в одной лаборатории. В последнем случае трудно исключить возможное наличие внешних факторов, не связанных с ТМ, и приводящих к периодическим модуляциям выходного сигнала часов. Преимуществом описанного нами эксперимента является также его высокая степень совместимости с другими космическими гравитационными экспериментами, а также наблюдениями по схеме РСДБ, для которых требуются высокостабильные часы и спутники на эллиптических орбитах [30, 55].

Наконец, в настоящей работе мы рассмотрели лишь возможность детектирования гало ТМ Галактики. Как отмечалось выше, как для линейного, так и квадратичного типа связи вокруг достаточно массивных планет и звезд может происходить конденсация поля ϕ с образованием локальных гало [18]. Исследование пространственной структуры таких гало невозможно с поверхности Земли и требует использования космических аппаратов на эллиптических орбитах. Получение возможных ограничений на константы связи ϕ с полями материи для этих случаев является предметом нашего дальнейшего исследования. Также мы планируем рассмотреть случай размещения на космических аппаратах часов различных, а не одинаковых типов.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы рассмотрели возможность детектирования волновой ТМ в эксперименте с двумя космическими аппаратами, оснащенными высокоточными и высокостабильными часами и движущимися по эллиптическим околосолнечным орбитам. Существенной особенностью данного типа ТМ являются осцилляции поля ϕ частиц ТМ, которые описываются корреляционной функцией (2). Нами был разработан математический аппарат для оценки точности данного эксперимента (30), учитывающий особенности сравнения удаленных друг от друга часов с помощью радио (или оптических) линий связи. В предшествующих работах, исследовавших возможность детектирования волновой ТМ с помощью сетей из пространственно удаленных часов [15], предполагалось, что запись сигнала от ТМ в каждом узле сети происходит локально: путем сравнения двух колоцированных в каждом узле часов либо использования частоты отстройки атомного перехода часов и используемого в них резонатора.

Разработанный нами аппарат был применен к случаю двух спутников на околосолнечных эллип-

тических орбитах с высокостабильными часами. Точность данного эксперимента по детектированию гало волновой ТМ Галактики оказалась такой же или меньшей, чем у наземного эксперимента с двумя колоцированными часами различных типов. Данный результат связан с необходимостью использования в космическом эксперименте схемы компенсации нерелятивистского эффекта Доплера типа Gravity Probe A [49], которая приводит к уменьшению амплитуды полезного сигнала.

Рассмотренный эксперимент совместим с другими космическими проектами, требующими высокостабильных часов на эллиптических орбитах вокруг Земли и Солнца [30, 48, 55], в связи с чем представляет интерес дальнейшее исследование его особенностей. В частности, интересно получение ограничений на константы связи поля ϕ при учете гало частиц ТМ, которые могут конденсироваться вокруг Солнца и Земли за счет взаимодействия ϕ с полями обычной материи [18].

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Проект выполнен при поддержке гранта РНФ 22-22-00861.

Приложение

ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЙ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим набор данных $\{d_k\}$, полученных в моменты времени $\{t_k\}$, $k=1,\ldots,N$. Вектор $\mathbf{d}$ содержит сигнал $\mathbf{s}$ и шум $\mathbf{n}$: $d_k=\gamma s_k+n_k$, где γ — константа, подлежащая оценке. Мы полагаем, что сигнал и шум являются гауссовыми процессами с нулевым средним:

$$p(\mathbf{n})=\frac{1}{\sqrt{2\pi\det\mathcal{N}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{n}^T\mathcal{N}^{-1}\mathbf{n}\right),$$
$$p(\mathbf{s})=\frac{1}{\sqrt{2\pi\det\mathcal{S}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{s}^T\mathcal{S}^{-1}\mathbf{s}\right), \quad (41)$$

где $\mathcal{N}$ и $\mathcal{S}$ — ковариационные матрицы шума и сигнала соответственно. Тогда вектор данных $\mathbf{d}$ также является гауссовым:

$$p(\mathbf{d}\mid\Gamma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\det\mathcal{D}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{d}^T\mathcal{D}^{-1}\mathbf{d}\right), \quad (42)$$

где $\mathcal{D}=\Gamma\mathcal{S}+\mathcal{N}$ и параметром модели является $\Gamma\equiv\gamma^2$.

Следуя [15], применим теорему Байеса:

$$p(\Gamma\mid\mathbf{d})=\frac{p(\Gamma)p(\mathbf{d}\mid\Gamma)}{p(\mathbf{d})}, \quad (43)$$

где $p(\Gamma)$ — априорное распределение, которое может быть взято равномерным для достаточно широкого интервала, а $p(\mathbf{d})$ — константа нормировки.

В ММП апостериорное распределение:

$$p(\Gamma|\mathbf{d})=C\exp\left(-\frac{(\Gamma-\hat{\Gamma})^2}{2\hat{\sigma}_\Gamma^2}\right), \quad (44)$$

где $\hat{\Gamma}$ и $\hat{\sigma}_\Gamma$ — ММП-оценки, C — константа, не зависящая от Γ. Нашей целью является определить $\hat{\sigma}_\Gamma=\sigma_\gamma^2$ при условии $\hat{\Gamma}\to 0$. Для этого мы решаем следующие уравнения:

$$\frac{d}{d\Gamma}\ln(p(\mathbf{d}\mid\Gamma))\Big|_{\Gamma=\hat{\Gamma}}=0, \quad (45)$$

$$\frac{d^2}{d\Gamma^2}\ln(p(\mathbf{d}\mid\Gamma))\Big|_{\Gamma=\hat{\Gamma}}=\frac{1}{\hat{\sigma}_\Gamma{}^2}. \quad (46)$$

Здесь мы выразили апостериорное распределение $p(\Gamma|\mathbf{d})$ через $p(\mathbf{d}|\Gamma)$ с помощью (43).

Раскрывая (45), получаем:

$$0=\frac{d}{d\Gamma}\mathbf{d}^T(\mathcal{N}+\Gamma\mathcal{S})^{-1}\mathbf{d}+\frac{\frac{d}{d\Gamma}\det(\mathcal{N}+\Gamma\mathcal{S})}{\det(\mathcal{N}+\Gamma\mathcal{S})}. \quad (47)$$

Дифференцируя $(\mathcal{N}+\Gamma\mathcal{S})^{-1}(\mathcal{N}+\Gamma\mathcal{S})$, нетрудно получить, что

$$\frac{d}{d\Gamma}(\mathcal{N}+\Gamma\mathcal{S})^{-1}=-(\mathcal{N}+\Gamma\mathcal{S})^{-1}\mathcal{S}(\mathcal{N}+\Gamma\mathcal{S})^{-1}. \quad (48)$$

С помощью известного правила дифференцирования определителя получаем также

$$\frac{d}{d\Gamma}\det(\mathcal{N}+\Gamma\mathcal{S})=\det(\mathcal{N}+\Gamma\mathcal{S})\mathrm{tr}\left((\mathcal{N}+\Gamma\mathcal{S})^{-1}\mathcal{S}\right). \quad (49)$$

Используя уравнения (48) и (49), мы наконец получаем из (45):

$$0=\mathbf{d}^T(\mathcal{N}+\Gamma\mathcal{S})^{-1}\mathcal{S}(\mathcal{N}+\Gamma\mathcal{S})^{-1}\mathbf{d}-$$
$$-\mathrm{tr}((\mathcal{N}+\Gamma\mathcal{S})^{-1}\mathcal{S}). \quad (50)$$

Предполагая, что амплитуда сигнала Γ мала, получаем

$$(\mathcal{N}+\Gamma\mathcal{S})^{-1}=\mathcal{N}^{-1}-\Gamma\mathcal{N}^{-1}\mathcal{S}\mathcal{N}^{-1}. \quad (51)$$

Производя аналогичные выкладки с (46), получаем:

$$\hat{\Gamma}=\frac{\hat{\sigma}_\Gamma^2}{2}\left(\mathbf{d}^T\mathcal{N}^{-1}\mathcal{S}\mathcal{N}^{-1}\mathbf{d}-\mathrm{tr}(\mathcal{N}^{-1}\mathcal{S})\right), \quad (52)$$

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_\Gamma^2}=\left(\mathbf{d}^T\mathcal{N}^{-1}\mathcal{S}\mathcal{N}^{-1}\mathcal{S}\mathcal{N}^{-1}\mathbf{d}-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathcal{N}^{-1}\mathcal{S}\mathcal{N}^{-1}\mathcal{S})\right). \quad (53)$$

Приравнивая $\hat{\Gamma}=0$, получаем итоговое выражение для оценки точности:

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_\Gamma^2}=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathcal{N}^{-1}\mathcal{S}\mathcal{N}^{-1}\mathcal{S}), \qquad (54)$$

из которого следует (30).

Формула (30) может быть использована и в частотной области (для этого надо лишь заменить операцию транспонирования на эрмитово сопряжение во всех выкладках, начиная с (41)). В случае стационарного сигнала ковариационная матрица в частотном пространстве является диагональной, что позволяет непосредственно получить из (30) формулу (15) из [15]. На первый взгляд может показаться, что между этими формулами есть различие на фактор $2^{1/4}$. Легко заметить, однако, что в [15] суммирование производится лишь до $N/2$, так как данные являются действительными, в то время как в нашем уравнении (30) матричные операции подразумевают суммирование до N.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *L. Hui*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **59**, 247 (2021), arXiv:2101.11735 [astro-ph.CO].
2. *K. Van Tilburg, N. Leefer, L. Bougas, and D. Budker*, Phys. Rev. Letters **115**, id. 011802 (2015), arXiv:1503.06886 [physics.atom-ph].
3. *A. Hees, J. Guéna, M. Abgrall, S. Bize, and P. Wolf*, Phys. Rev. Letters **117**(6), id. 061301 (2016), arXiv:1604.08514 [gr-qc].
4. *P. Wcisło, P. Ablewski, K. Beloy, S. Bilicki et al.*, Science Advances **4**(12), id. eaau4869 (2018).
5. *C.J. Kennedy, E. Oelker, J.M. Robinson, T. Bothwell, et al.*, Phys. Rev. Letters **125**(20), id. 201302 (2020), arXiv:2008.08773 [physics.atom-ph].
6. *S.M. Vermeulen, P. Relton, H. Grote, V. Raymond, et al.*, Nature **600**(7889), 424 (2021), arXiv:2103.03783 [gr-qc].
7. *D.E. Kaplan, A. Mitridate, and T. Trickle*, Phys. Rev. D **106**(3), id. 035032 (2022).
8. *L. Bernus, O. Minazzoli, A. Fienga, A. Hees, M. Gastineau, J. Laskar, P. Deram, and A. Di Ruscio*, Phys. Rev. D **105**(4), id. 044057 (2022).
9. *S. Schlamminger, K.Y. Choi, T.A. Wagner, J.H. Gundlach, and E. G. Adelberger*, Phys. Rev. Letters **100**, id. 041101 (2008), arXiv:0712.0607 [gr-qc].
10. *T.A. Wagner, S. Schlamminger, J.H. Gundlach, and E.G. Adelberger*, Classical and Quantum Gravity **29**(18), id. 184002 (2012), arXiv:1207.2442 [gr-qc].
11. *J. Bergé, P. Brax, G. Métris, M. Pernot-Borrás, P. Touboul, and J.-P. Uzan*, Phys. Rev. Letters **120**(14), id. 141101 (2018), arXiv:1712.00483 [gr-qc].
12. *T. Bothwell, D. Kedar, E. Oelker, J.M. Robinson, S.L. Bromley, W. L. Tew, J. Ye, and C. J. Kennedy*, Metrologia **56**(6), id. 065004 (2019).
13. *K. Kim, A. Aeppli, T. Bothwell, and J. Ye*, Phys. Rev. Letters **130**(11), id. 113203 (2023).
14. *A. Arvanitaki, J. Huang, and K. Van Tilburg*, Phys. Rev. D **91**(1), id. 015015 (2015), arXiv:1405.2925 [hep-ph].
15. *A. Derevianko*, Phys. Rev. A **97**(4), id. 042506 (2018), arXiv:1605.09717 [physics.atom-ph].
16. *B.M. Roberts, G. Blewitt, C. Dailey, M. Murphy, et al.*, Nature Comm. **8**, id. 1195 (2017), arXiv:1704.06844 [hep-ph].
17. *V. Schkolnik, D. Budker, O. Fartmann, V. Flambaum, et al.*, Quantum Sci. Technology **8**(1), id. 014003 (2023), arXiv:2204.09611 [physics.atom-ph].
18. *A. Hees, O. Minazzoli, E. Savalle, Y.V. Stadnik, and P. Wolf*, Phys. Rev. D **98**(6), id. 064051 (2018), arXiv:1807.04512 [gr-qc].
19. *J. Veltmaat, B. Schwabe, and J.C. Niemeyer*, Phys. Rev. D **101**(8), id. 083518 (2020), arXiv:1911.09614 [astro-ph.CO].
20. *Y.-D. Tsai, J. Eby, and M.S. Safronova*, Nature Astron. **7**, 113 (2023), arXiv:2112.07674 [hep-ph].
21. *Y.A. El-Neaj, C. Alpigiani, S. Amairi- Pyka, H. Araújo, et al.*, EPJ Quantum Technology **7**(1), id. 6 (2020).
22. *C.M. Will*, Liv. Rev. Relativity **17**(1), 4 (2014).
23. *R.F.C. Vessot, M.W. Levine, E.M. Mattison, E.L. Blomberg*, Phys. Rev. Letters **45**, 2081 (1980).
24. *D.A. Litvinov, V.N. Rudenko, A.V. Alakoz, U. Bach, et al.*, Phys. Letters A **382**(33), 2192 (2018).
25. *P. Delva, N. Puchades, E. Schönemann, F. Dilssner, et al.*, Phys. Rev. Letters **121**(23), id. 231101 (2018), arXiv:1812.03711 [gr-qc].
26. *S. Herrmann, F. Finke, M. Lülf, O. Kichakova, et al.*, Phys. Rev. Letters **121**(23), id. 231102 (2018).
27. *P. Jetzer*, Intern. J. Modern Physics D **26**(5), 1741014 (2017).
28. *B. Altschul, Q.G. Bailey, L. Blanchet, K. Bongs, et al.*, Adv. Space Research **55**(1), 501 (2015), arXiv:1404.4307 [gr-qc].
29. *M.P. Heß, L. Stringhetti, B. Hummelsberger, K. Hausner, et al.*, Acta Astronautica, **69**, 929 (2011).
30. *D. Litvinov and S. Pilipenko*, Classical and Quantum Gravity **38**(13), id. 135010 (2021), arXiv:2108.09723 [gr-qc].
31. *A. Derevianko, K. Gibble, L. Hollberg, N.R. Newbury, C. Oates, M.S. Safronova, L.C. Sinclair, and N. Yu*, Quantum Sci. Technology **7**(4), id. 044002 (2022).
32. *J. Jaffe and R.F. Vessot*, Phys. Rev. D **14**(12), 3294 (1976).
33. *S. Turyshev, M. Shao, K. Nordtvedt, H. Dittus, et al.*, Exp. Astron. **27**, 27 (2009).
34. *W.-T. Ni*, Intern. J. Modern Physics D **17**(7), 921 (2008).
35. *Y.V. Stadnik and V.V. Flambaum*, Phys. Rev. Letters **115**(20), id. 201301 (2015).
36. *G. P. Centers, J.W. Blanchard, J. Conrad, N.L. Figueroa, et al.*, Nature Comm. **12**, id. 7321 (2021), arXiv:1905.13650 [astro-ph.CO].

37. *A.K. Drukier, K. Freese, and D.N. Spergel*, Phys. Rev. D **33**(12), 3495 (1986).
38. *N.W. Evans, C.A.J. O'Hare, and C. McCabe*, Phys. Rev. D **99**(2), id. 023012 (2019).
39. *C.A.J. O'Hare, N.W. Evans, C. McCabe, G. Myeong, and V. Belokurov*, Phys. Rev. D **101**, id. 023006 (2020).
40. *T. Flacke, C. Frugiuele, E. Fuchs, R.S. Gupta, and G. Perez*, J. High Energy Phys. **2017**(6), id. 50 (2017).
41. *T. Damour and J.F. Donoghue*, Phys. Rev. D **82**(8), id. 084033 (2010), arXiv:1007.2792 [gr-qc].
42. *T. Damour and J.F. Donoghue*, Classical and Quantum Gravity **27**(20), id. 202001 (2010).
43. *V. Dzuba and V. Flambaum*, Phys. Rev. A **77**(1), id. 012515 (2008).
44. *J. Guéna, M. Abgrall, D. Rovera, P. Rosenbusch, M.E. Tobar, P. Laurent, A. Clairon, and S. Bize*, Phys. Rev. Letters **109**(8), id. 080801 (2012), arXiv:1205.4235 [physics.atom-ph].
45. *A. Hees, O. Minazzoli, E. Savalle, Y. V. Stadnik, P. Wolf, and B. Roberts*, arXiv:1905.08524 [gr-qc] (2019).
46. *N. Ashby*, in Proc. of the 1998 IEEE Intern. Frequency Control Symp. (Cat. No.98CH36165), p. 320 (1998).
47. *L. Blanchet, C. Salomon, P. Teyssandier, and P. Wolf*, Astron. and Astrophys. **370**(1), 320 (2001).
48. *D. Litvinov*, Astron. Letters **50**(4), 55 (2024).
49. *R.F.C. Vessot and M.W. Levine*, General Relativ. and Gravit. **10**, 181 (1979).
50. *A. Khmelnitsky and V. Rubakov*, J. Cosmology and Astroparticle Phys. **2014**(2), id. 019 (2014), arXiv:1309.5888 [astro-ph.CO].
51. *L. Liu, D.-S. Lü, W.-B. Chen, T. Li, et al.*, Nature Comm. **9**(1), 2760 (2018).
52. *H.L. van Trees, K.L. Bell, and Z. Tian*, Detection, Estimation, and Modulation Theory. Part 1. Detection, Estimation, and Filtering Theory, 2nd ed. (New York, USA: Wiley, 2013).
53. *Z. Kang, S. Bettadpur, P. Nagel, H. Save, S. Poole, and N. Pie*, J. Geodesy **94**(9), id. 85 (2020).
54. *K. Abich, A. Abramovici, B. Amparan, A. Baatzsch, et al.*, Phys. Rev. Letters **123**(3), id. 031101 (2019).
55. *P. Kurczynski, M.D. Johnson, S.S. Doeleman, K. Haworth, et al.*, in Space Telescopes and Instrumentation 2022: Optical, Infrared, and Millimeter Wave **12 180**, 189 (2022).

PRINCIPLES OF THE WAVE DARK MATTER DETECTION IN GRAVITATIONAL REDSHIFT EXPERIMENTS IN THE SOLAR SYSTEM

S.V. Pilipenko[a], D.A. Litvinov[a], M.V. Zakhvatkin[a,b], A.I. Filetkin[a,c]

[a] *P. N. Lebedev Physical Institute of the Russian academy of Sciences, Moscow, Russia*
[b] *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russia*
[c] *Lomonosov Moscow State University, Sternberg Astronomical Institute, Moscow, Russia*

We explore the possibility of using measurements of the gravitational redshift effect as a means to constrain wave dark matter – a class of models in which the dark matter is accounted for by light scalar particles that behave like classical waves. We construct a mathematical framework that is appropriate for clock comparison experiments with remote clocks and can be used to determine the values of the coupling constants of such dark matter with particles of the Standard Model. Using this framework, we consider an experiment to detect dark matter of the Galactic halo using two satellites equipped with accurate and stable atomic clocks and placed into elliptical heliocentric orbits. We demonstrate that, in most cases, the accuracy of this experiment turns out to be not better than that of ground-based experiments with colocated clocks. The limitation of theaccuracy of the space-based experiment is found to be due to the non-relativistic Doppler compensation system, required when using moving clocks, which decreases the amplitude of the useful signal. Possible solutions to this problem are discussed.

Keywords: dark matter, gravitational redshift

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2024, том 101, № 3, с. 263–270

ГЛОБАЛЬНЫЕ СЕМЕЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ, ПРИМЫКАЮЩИЕ К ТОЧКАМ ЛИБРАЦИИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

© 2024 г. В. Н. Тхай[1,*]

[1]*Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук, Москва, Россия*

**E-mail: tkhai@ipu.ru*

Поступила в редакцию 30.11.2023 г.
После доработки 29.01.2024 г.
Принята в печать 29.01.2024 г.

Исследуется ограниченная круговая задача трех тел. Установлены все глобальные семейства периодических орбит, примыкающие к точкам либрации. Приведен сценарий эволюции орбит в семействе. Выделены цепочки глобальных семейств: цепочка начинается в треугольной точке либрации, содержит глобальные семейства для треугольной и всех коллинеарных точек либрации, заканчивается семейством, орбиты которого «прижимаются» к основным телам. Описана эволюция глобальных семейств в цепочке, связанная с изменением энергии системы. Изучены плоские и пространственные орбиты.

Ключевые слова: задача трех тел, обратимая механическая система, точки либрации, семейство Ляпунова, глобальное семейство, периодическая орбита, эволюция, цепочки глобальных семейств

DOI: 10.31857/S0004629924030074 **EDN:** KJHOAK

1. ВВЕДЕНИЕ

Ограниченная задача трех тел описывает движение пассивно гравитирующей точки m в поле двух основных тел M_0 и M_1. Точка m не влияет на движение основных тел, динамика которых описывается задачей двух тел. Задача введена в небесную механику Л. Эйлером при изучении движения Луны [1]. Данная модель стала основной задачей небесной механики по исследованию орбит [2].

Движение точки m с малой массой можно изучать также в рамках неограниченной (общей) задачи трех тел с учетом взаимного притяжения всех трех тел. На сегодня несоответствие в динамиках двух задач обнаружено только при резонансной неустойчивости треугольных точек либрации [3].

Во вращающейся системе координат задачи двух тел M_0 и M_1 точка m может занимать равновесные положения — точки либрации. Три из них, называемые коллинеарными точками либрации, L_1, L_2, L_3, принадлежат прямой, соединяющей тела M_0 и M_1. Остальные две — треугольные точки либрации L_4 и L_5, образуют равносторонние треугольники с основными телами.

Ограниченная круговая задача трех тел описывается автономными уравнениями. Согласно теореме Ляпунова о центре [4], к равновесию консервативной системы в случае пары чисто мнимых корней характеристического уравнения примыкает локальное семейство нелинейных периодических движений (семейство Ляпунова). Поэтому к коллинеарной точке либрации примыкает одно семейство Ляпунова [5], а к треугольной точке либрации могут примыкать два ляпуновских семейства. Вопрос о глобальном семействе периодических орбит, содержащего все орбиты семейства, в данной задаче ранее не ставился.

Теорема А.М. Ляпунова о центре (1892 г.) находит многочисленные приложения. В них всегда встает вопрос о границе применимости семейства Ляпунова. Сейчас стало понятно, что вопрос разрешается знанием о глобальном семействе периодических решений, которое включает в себя локальное ляпуновское семейство. Прогресс в задаче о границе наметился с исследований А. А. Зевина [6, 7]. В работе [6] даны условия на гамильтониан, гарантирующие в компакте $\Omega \in \mathrm{R}^{2n}$ продолжение ляпуновского семейства на границу $\partial\Omega$, в работе [7] предложены строго звездообразные (strictly starshaped) гамильтонианы, для которых условия продолжения выполняются.

Обратимая механическая система выделяется свойством пространственно-временно́й симметрии, однако в общем случае она не допускает первый интеграл. В системе рассматриваются симметричные периодические движения (СПД), для которых справедлив аналог теоремы Ляпунова о центре [8]. Проблема границы СПД в работах [9, 10] решалась путем продолжения невырожденного СПД обратимой механической системы на глобальное семейство СПД. Наиболее общий результат изложен в работе [11], где снимаются ограничения, наложенные в статьях [9, 10]. Для автономной системы общего

вида, не стесненной дополнительными ограничениями типа консервативности, обратимости, гамильтоновости и т.п., двумерное глобальное семейство невырожденных периодических решений построено в работе [12]. На глобальном семействе период меняется монотонно вместе с параметром семейства; оно содержит все связное множество невырожденных периодических решений семейства.

В данной статье показано, что каждое ляпуновское семейство, примыкающее к точке либрации, продолжается на глобальное семейство периодических орбит. Приведены сценарии образования глобальных семейств. Описаны плоские и пространственные семейства. Найдены цепочки глобальных семейств, в которых одно семейство переходит в другое с изменением энергии системы.

Цепочки глобальных семейств впервые исследованы в работе [13].

Круговая ограниченная задача трех тел допускает интеграл Якоби, для нее можно использовать формализм Гамильтона. Однако в работах [6, 7] не достигнуто глобальное семейство периодических орбит.

В статье применяется ранее развитая теория [9, 10, 11, 12]. При этом глобальное семейство для коллинеарных точек либрации можно получить также из результатов для систем общего вида [12]. Теория позволяет вывести в фазовом пространстве симметричность орбит глобального семейства [9, 10, 11].

2. ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ. ОБРАТИМОСТЬ

Уравнения круговой ограниченной задачи трех тел[1] в безразмерных переменных и времени записываются в виде

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x},$$
$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y},$$
$$\ddot{z} = \frac{\partial \Omega}{\partial z},$$
$$\Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_0} + \frac{\mu}{r_1}, \qquad (1)$$
$$\Omega(x, y, z) = \Omega(x, -y, \pm z),$$
$$r_0^2 = (x+\mu)^2 + y^2 + z^2,$$
$$r_1^2 = (x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2.$$

[1] Изложение задачи трех тел следует учебному пособию для университетов [5].

Они содержат единственный безразмерный массовый параметр μ.

Положения относительного равновесия (точки либрации) находятся из системы уравнений

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0.$$

Задача допускает 5 точек либрации L_i, $i = 1, ..., 5$, все они принадлежат плоскости (x, y). При этом L_1, L_2, L_3 лежат на оси абсцисс x, а точки L_4 и L_5 расположены симметрично относительно оси x и образуют равносторонние треугольники с основными телами, расположенными на оси x.

Особенностью системы уравнений (1) является ее инвариантность относительно замен

$$(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \to (x, -y, \pm z, -\dot{x}, \dot{y}, \mp\dot{z}, -t).$$

Система принадлежит к классу обратимых механических систем [14]:

$$\dot{u} = U(u, v),$$
$$\dot{v} = V(u, v),$$
$$u \in \mathrm{R}^l, v \in \mathrm{R}^n, l \geq n, \qquad (2)$$
$$U(u, -v) = U(u, v),$$
$$V(u, -v) = -V(u, v),$$

с неподвижным множеством $\{u, v: v = 0\}$. В силу симметричности уравнений по координате z для определенности далее рассматривается неподвижное множество

$$R = \{x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}: y = 0, \dot{x} = 0, \dot{z} = 0\}.$$

Тогда в системе (1), записанной в виде (2), размерности $l = n = 3$, а для векторов u и v получаем: $u = (x, \dot{y}, z)$, $v = (\dot{x}, y, \dot{z})$.

Фазовый портрет системы (2) симметричен относительно неподвижного множества R. Постоянные решения системы (2), принадлежащие R, называются равновесиями обратимой механической системы. Для них справедливо $v = 0$, $V(u, 0) = 0$. Траектории, пересекающие неподвижное множество, будут симметричными относительно R. Симметричная траектория, дважды пересекающая множество R, называется СПД. В системе (1) она представляет собой симметричную периодическую орбиту.

Коллинеарные точки либрации принадлежат множеству R, и их ляпуновские семейства являются симметричными. В плоской задаче ($z \equiv 0$) характеристическое уравнение для точки L_i ($i = 1, 2, 3$) имеет пару действительных корней противоположного знака и два чисто мнимых корня [5]. Паре чисто мнимых корней, согласно аналогу [8] теоремы Ля-

пунова о центре, соответствует локальное нелинейное семейство симметричных периодических орбит, примыкающее к коллинеарной точке либрации. Период на ляпуновском семействе монотонно зависит от постоянной энергии, поэтому семейство, по определению, является невырожденным. Следовательно, в соответствии с результатами работ [9, 10, 11], эти орбиты продолжаются на глобальное семейство симметричных периодических орбит.

Треугольные точки либрации не принадлежат неподвижному множеству R. Характеристическое уравнение для них допускает чисто мнимые корни только при выполнении условия

$$1 - 27\mu(1-\mu) > 0, \qquad (3)$$

т.е. если произведение двух конечных масс меньше 1/27 [5]. При выполнении неравенства (3) квадраты λ_j^2 корней будут отрицательными и вычисляются по формуле

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}{2}. \qquad (4)$$

Обозначим за λ_1 меньший по модулю корень. Тогда корню λ_1, по теореме Ляпунова о центре [4], всегда будет отвечать локальное ляпуновское семейство орбит. При условии, что корень λ_2 не будет кратным λ_1, второму корню также отвечает ляпуновское семейство.

Глобальные семейства периодических орбит для треугольных точек либрации строятся продолжением локального ляпуновского семейства с применением теории [12] для систем общего вида.

3. ГЛОБАЛЬНОЕ СЕМЕЙСТВО ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Система (1) записывается также как система автономных дифференциальных уравнений общего вида

$$\dot{w} = W(w), \quad w \in \mathrm{R}^k, \quad k = 6. \qquad (5)$$

Тогда орбиты близ точек либрации анализируются как периодические решения системы (5) близ равновесия. Период на семействе ляпуновских орбит монотонно зависит от постоянной энергии h. Поэтому ляпуновские орбиты в (5) образуют семейство по параметру h периодических решений.

Для произвольного семейства периодических решений по скалярному параметру $\hat{h}$ вводятся следующие понятия [12].

Определение 1. Семейство периодических решений называется невырожденным, если на нем период $T(\hat{h})$ монотонно зависит от параметра $\hat{h}$.

Определение 2. Невырожденное семейство периодических решений, на котором параметр $\hat{h}$ принимает всевозможные для решений семейства значения, называется глобальным семейством.

Глобальное семейство периодических решений обозначается через Σ.

Определения 1 и 2 справедливы как для обратимых механических систем (2), так и для автономного уравнения общего вида (5). При этом в (2) рассматриваются СПД. Независимо от вида рассматриваемой системы справедлив следующий результат.

Теорема (о глобальном семействе). Пусть система допускает семейство невырожденных периодических решений по параметру $\hat{h}$. Тогда оно продолжается по периоду T на глобальное семейство Σ. На Σ период $T(\hat{h})$ монотонно зависит от параметра семейства $\hat{h}$. Семейство Σ заполняет глобальную область $\hat{\Sigma}$; Σ описывается редуцированной системой второго порядка.

Доказательство теоремы для уравнения (5) приведено в работе [12], для системы (2) оно дано в статье [11] (см. также [9, 10]).

Заметим, что, согласно приведенной теореме, при подходе к границе семейства период T может стремится к нулю, ненулевому числу T^* или к бесконечности. Нуль получается для семейства с убывающим периодом; для центра период $T \to T^*$; для седла $T \to +\infty$ [9, 10, 11, 12]. Многообразие $\hat{\Sigma}$ многомерной системы в общей ситуации не будет плоским.

В задаче трех тел применяются следствия из приведенной теоремы.

Следствие 1. Ляпуновское семейство продолжается на глобальное семейство невырожденных периодических решений (глобальная теорема Ляпунова о центре для консервативной системы).

Следствие 1 применяется для периодических орбит близ треугольных точек либрации $L_{4,5}$.

Такой же вывод получается для симметричного ляпуновского семейства обратимой механической системы.

Следствие 2. Симметричное ляпуновское семейство обратимой механической системы продолжается на глобальное семейство невырожденных симметричных периодических решений (глобальная теорема Ляпунова о центре для обратимой механической системы).

Следствие 2 применяется для симметричных периодических орбит близ коллинеарных точек либрации $L_{1,2,3}$.

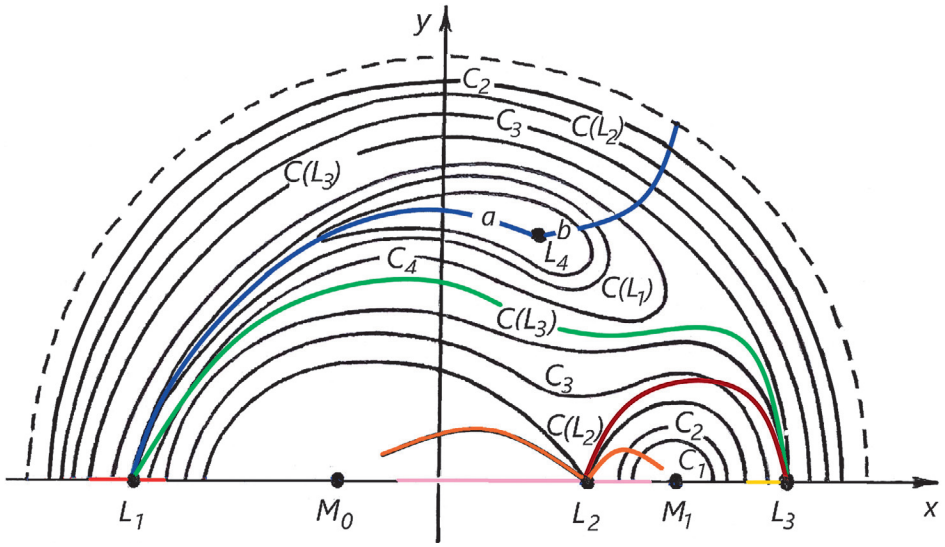

Рис. 1. Кривая Г нулевой скорости на орбитах глобального семейства, пересекающая кривые Хилла.

4. ГЛОБАЛЬНЫЕ СЕМЕЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ, СВЯЗЫВАЮЩИЕ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ

4.1. Кривая Г *нулевой скорости точек на глобальном семействе*

На каждой периодической орбите скорость точки в некоторый момент времени обращается в нуль. Существование на плоскости (x, y) точечного следа периодической орбиты лежит в основе метода построения глобального семейства периодических орбит.

Согласно теореме раздела 3, глобальное семейство периодических орбит описывается редуцированной системой. Для консервативной системы выводится редуцированная консервативная система с одной степенью свободы.

На периодическом решении скорость точки в некоторый момент обращается в нуль, причем существуют, по крайнем мере, два таких момента. При изменении параметра семейства $\hat{h}$ в фазовом пространстве системы (1) получается кривая нулевой скорости точек. Она обозначается через $\Gamma(\hat{h})$. Для описания глобального семейства иногда достаточно привести одну из кривых $\Gamma(\hat{h})$.

В плоской ограниченной задаче область возможных движений точки m при рассматриваемом значении параметра C выделяется неравенством $2\Omega(x, y) \geq C$, где $C = -2h$, $h < 0$ — постоянная интеграла энергии. Кривая Хилла представляет собой линию уровня $2\Omega(x, y) = C$ функции $\Omega(x, y)$ на плоскости (x, y); на ней скорость точки m равна нулю. На рис. 1 кривые Хилла изображены с учетом симметрии относительно оси x: приведена верхняя полуплоскость. Как и в работе [5], значения C_j уменьшаются при росте номера j, а кривые Хилла для значений C, превосходящих C_2, обозначены штриховой замкнутой линией.

Точке либрации L_i соответствует значение параметра $C(L_i)$. Поэтому для точек глобального семейства периодических орбит, рожденного из точки L_i, значения параметра $C > C(L_i)$. С изменением параметра C происходит переход от одной к другой периодической орбите. На каждой периодической орбите семейства скорость точки в некоторый момент времени становится нулевой. В этот момент времени периодическая орбита оставляет точечный след на кривой Хилла с параметром C. В результате монотонного изменения C получается кривая Г нулевой скорости для орбит глобального семейства. Кривая Г начинается в точке либрации. Она пересекает кривые Хилла. Для глобального семейства имеется, по крайней мере, две кривые Г.

Проекция точек неподвижного множества R на плоскость (x, y) совпадает с осью x. Поэтому для симметричных периодических орбит одна из кривых Г принадлежит оси x, примыкая к соответствующей коллинеарной точке либрации.

Для гладкого по параметру C глобального семейства на рис. 1 изображена гладкая кривая Г. Она выделена цветом. Треугольной точке либрации $L_{4,5}$ отвечают два глобальных семейства, поэтому от точки либрации отходят две кривые $\Gamma(C)$ синего цвета: левая (a) и правая (b). Кривые нулевой скорости для орбит, рожденных из точек L_1, L_2 и L_3, на рис. 1 выделены зеленым, оранжевым и коричневым

цветами соответственно. Кривые Г, принадлежащие оси x, выделены красным, розовым и желтым цветами.

Для определенности полагаем, что масса тела M_0 больше или равна массе тела M_1. Сначала рассмотрим диапазон $0 < \mu < 1/2$. Тогда для точек либрации выполняются неравенства

$$C(L_2) > C(L_3) > C(L_1) > C(L_4) = C(L_5).$$

4.2. Двойственный характер коллинеарных точек либрации

Характеристическое уравнение для коллинеарной точки либрации L_i ($i = 1, 2, 3$) содержит пару чисто мнимых корней и пару действительных корней противоположного знака. Поэтому в фазовом пространстве точка либрации L_i раздваивается на пару центр-седло. Окрестность точки L_i содержит два двумерных многообразия, одно из которых отвечает центру, другое — седловой точке. В седловой точке начинаются сепаратрисы — устойчивые (направленные к седловой точке) и неустойчивые (исходящие из седловой точки). При локальном изучении седловой точки сепаратрисы представлены двумя парами «усов».

Что касается чисто мнимых корней, то на втором многообразии, согласно аналогу [8] теоремы Ляпунова о центре, к точке L_i примыкает симметричное ляпуновское семейство периодических орбит. Это семейство локальное. По следствию 2 [11] оно продолжается на глобальное семейство Σ_1 симметричных периодических орбит.

Двойственный характер коллинеарной точки либрации L_i отмечается мысленным разделением ее на L_i^+ (центр) и L_i^- (седло).

4.3. Голобальные симметричные семейства периодических орбит

В данном разделе описано формирование глобального семейства периодических орбит для коллинеарной точки либрации L_1. Семейство Σ_1 состоит из периодических орбит, симметричных относительно неподвижного множества R, на котором $y = 0$, $\dot{x} = 0$. На плоскость (x, y) точки множества R для Σ_1 проецируются (см. рис. 1) как отрезок X_1 (выделен красным цветом на оси x), содержащий точку L_1. Сам отрезок расположен между двумя пересечениями кривой $C = C(L_3)$ с осью абсцисс. Следовательно, орбиты семейства Σ_1 занимают на рис. 1 область, ограниченную кривыми $C = C(L_1)$ и $C = C(L_3)$.

Кривая нулевой скорости $\Gamma(C)$ (зеленого цвета) для орбит семейства Σ_1 берет начало в точке L_1 и с увеличением параметра C стремится к кривой со значением $C = C(L_3)$. Она получается сдвигом вдоль траекторий правой от L_1 части отрезка X_1. Правая граница отрезка X_1 принадлежит $C = C(L_3)$, на которой расположена равновесная точка L_3. Поэтому при $C \to C(L_3)$ кривая $\Gamma(C)$ входит в точку L_3, скорость в которой также равна нулю. Многообразие $\hat{\Sigma}_1$ содержит центр L_1^+, период на Σ_1 меняется монотонно, орбиты семейства Σ_1 стремятся к кривой $C = C(L_3)$ с одновременным стремлением кривой $\Gamma(C)$ к точке L_3. Поэтому равновесие L_3 становится седлом L_3^- для семейства Σ_1. Глобальное семейство Σ_1 ограничено в фазовом пространстве. Границы глобального семейства образуют центр L_1^+ и седло L_3^-. С учетом нижней половины рис. 1 получаем вывод: глобальное множество Σ_1 ограничено сепаратрисами, которые начинаются в точке L_3^-. Период на Σ_1 увеличивается неограниченно.

Точка L_3 имеет двойственный характер. Центру L_3^+ отвечает симметричное локальное ляпуновское семейство, которое продолжается, согласно следствию 2, на глобальное семейство симметричных периодических орбит Σ_3. Здесь проекцией на плоскость (x, y) множества точек R для Σ_3 является отрезок X_3 (желтого цвета). На внешней от кривой $C = C(L_2)$ области нет равновесия, поэтому начальные точки для СПД принадлежат левосторонней окрестности точки L_3 на оси x. В результате получается двумерное многообразие $\hat{\Sigma}_3$ в пространстве.

Семейство Σ_3 начинается в точке L_3^+. Второй равновесной точкой на двумерном многообразии $\hat{\Sigma}_3$ становится седло L_2^-. На Σ_3 период увеличивается от центра L_3^+ к седлу L_2^- неограниченно. С учетом нижней половины рис. 1 получается, что орбиты Σ_3 проецируются на плоскость (x, y) в виде симметричной фигуры, связывающей точки L_3 и L_2.

Третье глобальное симметричное семейство Σ_2 периодических орбит начинается в точке L_2^+. Оно качественно повторяет поведение глобальных семейств Σ_1 и Σ_3 с тем лишь отличием, что орбиты семейства не ограничиваются точкой либрации. На рис. 1 кривая Г нулевой скорости (оранжевого цвета) для орбит семейства Σ_2 начинается в точке L_2 и с увеличением C стремится к телу M_1. Вторая такая же кривая стремится к телу M_0: на рис. 1 изображены две кривые Г для одного глобального семейства. Проекцией на плоскость (x, y) множества точек R для Σ_2 является отрезок X_2 (розового цвета).

Орбиты глобального семейства Σ_2 «прижимаются» к основным телам. Качественная оценка поведения орбит при подходе к границе глобального семейства связана с особенностями задачи трех тел

в точках M_0 и M_1. При подходе к ним реализуется сценарий, когда в теореме о глобальном семействе параметр C ограничивается конечным числом. На рис. 1 «прижимание» отражено в прерывании кривых Γ (оранжевого цвета) и двустороннем ограничении длины отрезка X_2.

Вывод 1. Глобальные семейства симметричных орбит Σ_i ($i = 1, 2, 3$) существуют при $0 < \mu < 1/2$. На них период возрастает. Семейство Σ_1 связывает точки L_1^+ и L_3^-, семейство Σ_3 связывает точки L_3^+ и L_2^-, семейство Σ_3 начинается в точке L_2^+ и «прижимается» к основным телам M_0 и M_1. Семейства Σ_1, Σ_3 и Σ_2 образуют цепочку с растущим на ней параметром $C = -2h$.

4.4. Случай $\mu(1 - \mu) < 1/27$

При выполнении условия (3) к коллинеарным точкам либрации добавляются треугольные точки либрации $L_{4,5}$, расположенные на плоскости (x, y) симметрично относительно оси x. Их глобальные семейства $\Sigma_{4,5}$ периодических орбит также расположены на плоскости (x, y) симметрично относительно x.

Обратимся к точке либрации L_4, которая в фазовом пространстве представлена двумя центрами. К точке L_4 примыкают два ляпуновских семейства, которые, согласно следствию 1, продолжаются на свои глобальные семейства. На рис. 1 кривая Γ нулевой скорости для периодических орбит начинается в точке L_4, на ней параметр C увеличивается, начиная со значения $C = C(L_4)$.

Предположим, что при увеличении параметра C кривая $\Gamma(C)$ не покидает область Ψ, ограниченную замкнутой кривой $C = C(L_1)$. Тогда получается глобальное семейство, для которого параметр C ограничен снизу и сверху. Нижнее значение C отвечает центру (в точке L_4), верхнее значение — седлу L_1^-. Существование семейства не зависит от условия нерезонансности частот $|\lambda_1|$ и $|\lambda_2|$, следовательно, оно соответствует меньшей частоте $|\lambda_1|$. Глобальное семейство $\Sigma_4^{(1)}$ орбит качественно ведет себя как семейства Σ_1 и Σ_3. Кривая Γ нулевых скоростей для семейства $\Sigma_4^{(1)}$ на рис. 1 изображена синим цветом, обозначена буквой a и идет влево от точки L_4.

Симметричное семейству $\Sigma_4^{(1)}$ глобальное семейство $\Sigma_5^{(1)}$ также имеет седлом L_1^-. Тем самым обе пары «усов» седла L_1^- заполняются.

Пусть выполнено условие нерезонансности для корня $\lambda_2 \neq p\lambda_1$, $p = N$. Тогда, по теореме Ляпунова о центре, к точке либрации L_4 (L_5) примыкает второе ляпуновское семейство. По следствию 1 оно продолжается по периоду T на глобальное семейство, обозначаемое через $\Sigma_4^{(2)}$ ($\Sigma_{5,4}^{(2)}$). Седла L_1^- и L_3^- не содержат свободной пары «усов», а одной пары «усов» седла L_2^- недостаточно для примыкания двух равноправных семейств.

Таким образом, семейства ($\Sigma_{4,5}^{(2)}$) или покидают любую ограниченную в фазовом пространстве область, или «прижимаются» к основным телам.

На рис. 1 кривая b нулевых скоростей синего цвета идет вправо от точки L_4.

Вывод 2. При выполнении условия (3) из точек либрации $L_{4,5}$ начинаются глобальные семейства периодических орбит $\Sigma_{4,5}^{(1)}$, отвечающие меньшей частоте $|\lambda_1|$ малых колебаний. На $\Sigma_{4,5}^{(1)}$ параметр C возрастает, периоды орбит стремятся к бесконечности, а орбиты неограниченно подходят к точке L_1^-. Глобальные семейства $\Sigma_{4,5}^{(2)}$, соответствующие большей частоте $|\lambda_2|$, существуют, если частота $|\lambda_2| \neq p|\lambda_1|$, $p \in \mathrm{N}$. На $\Sigma_{4,5}^{(2)}$ параметр C возрастает, сопровождаясь монотонным изменением периода орбит на семействе. Орбиты семейств $\Sigma_{4,5}^{(2)}$ уходят на бесконечность или «прижимаются» к основным телам M_0 и M_1.

4.5. Задача с основными телами одинаковой массы

При $\mu = 1/2$ основные тела имеют равные массы. Условие (3) не выполняется: глобальные семейства, примыкающие к треугольным точкам либрации, в задаче отсутствуют. Точка L_2 находится в центре масс. Семейство Σ_3 по-прежнему существует. Точки L_1 и L_3 равноправны, поэтому точки L_1^+ и L_2^- (L_3^+ и L_2^-) связываются глобальным семейством Σ_1. На общей границе глобальных семейств Σ_1 и Σ_3 находится седло L_2^-. Семействами Σ_1 и Σ_3 заполняются обе пары «усов» седловой точки L_2^-.

Вывод 3. В плоской ограниченной задаче с основными телами M_0 и M_1 с одинаковой массой глобальные семейства Σ_1 и Σ_3, начинающиеся из разных точек либрации, идентичны друг другу, заканчиваются в точке L_2^- и разнесены в фазовом пространстве. В задаче реализуются две цепочки $\Sigma_1 - \Sigma_2$ и $\Sigma_3 - \Sigma_2$, на них параметр C возрастает, а орбиты семейства Σ_2 «прижимаются» к основным телам M_0 и M_1.

5. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ГЛОБАЛЬНЫЕ СЕМЕЙСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ

В пространственной ограниченной круговой задаче трех тел для точек либрации вычисляется производная

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = -a_k z, \quad a_k = \frac{1-\mu}{r_0^3} + \frac{\mu}{r_1^3}, \quad k = 1,\ldots,5.$$

При этом для коллинеарных точек либрации выполняется неравенство $a_{1,2,3} > 1$, для треугольных точек либрации получаем $a_{4,5} = 1$ [5]. В результате для всех точек либрации выводятся пары чисто мнимых корней, соответствующие малым пространственным колебаниям.

Характеристическое уравнение для коллинеарной точки либрации L_k в плоской задаче записывается в виде

$$\sigma^4 + (2 - a_k)\sigma^2 + (1 - a_k)(1 + 2a_k) = 0,$$

а квадраты корней вычисляются по формуле

$$\sigma_{1,2}^2 = \frac{a_k - 2}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2}, \quad D = (9a_k - 8)a_k > 0.$$

Эти формулы связывают частоты малых пространственных и плоских колебаний.

Сравним квадраты частот a_k и $|\sigma_2^2|$. Для чисто мнимых корней получаем $|2\sigma_2|^2 = 2 - a_k + \sqrt{D}$. Поэтому условие $a_k > |\sigma_2^2|$ приобретает вид $\sqrt{D} < 3a_k - 2$. Оно выполняется только при $a_k > 2/3$. При извлечении квадратного корня получается также условие $a_k < 1$.

Таким образом, для всех коллинеарных точек либрации частота малых пространственных колебаний меньше частоты малых плоских колебаний. Поэтому, согласно аналогу [8] теоремы Ляпунова о центре, к каждой коллинеарной точке либрации примыкает симметричное семейство пространственных ляпуновских орбит. Эти орбиты по следствию 2 продолжаются на глобальное семейство пространственных периодических орбит. В семействе период орбит меняется монотонно, само семейство стремится к бесконечности.

Для треугольных точек либрации частота пространственных колебаний равна 1. При этом частоты плоских колебаний вычисляются по формуле (4) и не превышают единицы. Значит, для применения теоремы Ляпунова о центре [4] необходимо исключить два счетных ряда значений параметра μ: $p|\lambda_{1,2}| = 1$, $p \in \mathrm{N}$. В явном виде условия записываются с применением формулы (4).

Вывод 4. Пространственные глобальные семейства периодических орбит примыкают к точкам либрации, на них параметр C и период меняются монотонно, а сами семейства уходят в бесконечность. Семейства существуют для всех коллинеарных и треугольных точек либрации.

При этом для коллинеарной точки либрации L_i ($i = 1, 2, 3$) пространственное глобальное семейство состоит из симметричных орбит. Для треугольных точек либрации пространственные глобальные семейства реализуются для всех значений массового параметра μ, подчиняющихся неравенству (3), таких, что

$$p^2(1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}) \neq 2, \quad p \in \mathrm{N}.$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ограниченной круговой задаче трех тел существуют глобальные семейства периодических орбит, примыкающие к точкам либрации и содержащие в себе локальные ляпуновские семейства орбит. Семейства делятся на плоские и пространственные, симметричные и несимметричные.

В плоской задаче при $0 < \mu < 1/2$ из точки L_1 начинается глобальное семейство Σ_1, которое приходит к точке L_3; из точки L_3 начинается глобальное семейство Σ_3, приходящее к точке L_2, из которой начинается глобальное семейство Σ_2. Каждое семейство ограничено в пространстве, на семействах Σ_1 и Σ_3 период неограниченно возрастает, орбиты семейства Σ_2 «прижимаются» с ростом C к основным телам M_0 и M_1; эволюция глобальных семейств происходит с изменением энергии системы h. Семейства Σ_j, $j = 1, 2, 3$, состоят из симметричных относительно оси x орбит и образуют цепочку $\Sigma_1 - \Sigma_3 - \Sigma_2$ с растущим на ней параметром C, где $C = -2h$, $h < 0$.

Для точек либрации $L_{4,5}$ периодические орбиты глобального семейства несимметричны, но сами семейства являются симметричными относительно оси x на плоскости (x, y). Семейства существуют, если массовый параметр μ удовлетворяет условию (3). К треугольным точкам либрации примыкают два глобальных семейства, одно из которых $\Sigma_{4,5}^{(1)}$ существует всегда и соответствует меньшей частоте $|\lambda_1|$ малых колебаний в окрестности точки либрации, другое семейство — $\Sigma_{4,5}^{(2)}$, реализуется при выполнении условий $|\lambda_2| \neq p|\lambda_1|$, $p \in \mathrm{N}$ на большую частоту. Глобальные семейства $\Sigma_{4,5}^{(1)}$ приходят с неограниченно возрастающим периодом к точке L_1. На семействах $\Sigma_{4,5}^{(2)}$ период орбит меняется монотонно. Орбиты семейств $\Sigma_{4,5}^{(2)}$ уходят на бесконечность или «прижимаются» к основным телам M_0 и M_1.

Глобальные семейства образуют цепочки; цепочка начинается в треугольной точке либрации, содержит глобальные семейства для треугольной и всех коллинеарных точек либрации, заканчивается семейством, орбиты которого «прижимаются» к основным телам. На цепочках семейств $\Sigma_{4,5}^{(1)} - \Sigma_1 - \Sigma_3 - \Sigma_2$ параметр C возрастает. На семействах $\Sigma_{4,5}^{(1)}$, Σ_1 и Σ_3 на двумерном многообразии связываются центр и седло.

При $\mu = 1/2$ семейства Σ_1 и Σ_3, начинающиеся из разных точек либрации, идентичны друг другу, примыкают к одной конечной точке L_2 и разнесены в фазовом пространстве.

Пространственные глобальные семейства периодических орбит примыкают к точкам либрации, на них параметр C и период меняются монотонно, а сами семейства уходят в бесконечность. При этом для коллинеарной точки либрации L_k $(k = 1, 2, 3)$ пространственное глобальное семейство состоит из симметричных орбит относительно неподвижных множеств $\{x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\colon\ y = 0,\ \dot{x} = 0,\ \dot{z} = 0\}$ и $\{x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\colon\ y = 0,\ z = 0,\ \dot{x} = 0\}$ одновременно. Для треугольных точек либрации пространственные глобальные семейства реализуются, когда массовый параметр μ принадлежит диапазону (3) и выполняются условия

$$p^2(1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}) \neq 2,\ p \in \mathrm{N}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Л. Эйлер*, Новая теория движения Луны (Л.: Изд-во АН СССР, 1934).
2. *V. Szebehely*, Theory of Orbits (New York: Academic Press, 1967).
3. *В.Н. Тхай*, Прикладная математика и механика **42**, 1026 (1978).
4. *А.М. Ляпунов*, Общая задача об устойчивости движения, Собр. соч. Т. 2 (М.: Изд-во АН СССР, 1956).
5. *Г.Н. Дубошин*, Небесная механика. Аналитические и качественные методы (М.: Наука, 1964).
6. *A.A. Zevin*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Appl. **28**(9), 1499 (1997).
7. *A.A.* Zevin, Nonlinearity **12**, 1339 (1999).
8. *В.Н. Тхай*, Прикладная математика и механика **55**, 56 (1998).
9. *В.Н. Тхай*, Вестн. СПбГУ. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. № 4, 709 (2021).
10. *V.N. Tkhai*, in 2022 16th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), held on June 1–3, 2022 in Moscow, Russia (IEEE Xplore, 2022), INSPEC Accession Number: 21844085.
11. *В.Н. Тхай*, Изв. РАН. Механика твердого тела № 6, 197 (2023).
12. *В.Н. Тхай*, Автоматика и телемеханика № 5, 22 (2023).
13. *V.N. Tkhai*, in 2020 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), held on June 3–5, 2020 in Moscow, Russia (IEEE Xplore, 2020), INSPEC Accession Number: 19772903.
14. *В.Н. Тхай*, Прикладная математика и механика **55**, 578 (1991).

GLOBAL FAMILIES OF PERIODIC ORBITS ADJACENT TO LIBRATION POINTS IN THE RESTRICTED THREE-BODY PROBLEM

V. N. Tkhai[a]

[a] *Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

The restricted circular three-body problem is studied. All global families of periodic orbits adjacent to the libration points are found. A scenario for the evolution of orbits in the family is given. Chains of global families will be highlighted; the chain begins at the triangular libration point, contains global families for the triangular and all collinear libration points, and ends with a family whose orbits are pressed against the main bodies. The evolution of global families in the chain associated with changes in the energy of the system is described. Planar and spatial orbits are studied.

Keywords: three-body problem, reversible mechanical system, libration points, Lyapunov family, global family of periodic orbits, evolution, chains of global families

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2024, том 101, № 3, с. 271–283

ОТЕЧЕСТВЕННЫЙ ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ “СПУТНИК – СПУТНИК”

© 2024 г. А. С. Жамков[1,*], С. В. Аюков[1,], А. И. Филеткин[1,***]
В. К. Милюков[1,4*], И. Ю. Власов[1,5*], В. Н. Семенцов[1,6*],
И. В. Гусев[1,7*], В. Е. Жаров[2,8*]**

[1]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга, Москва, Россия

[2]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, физический факультет, Москва, Россия

**E-mail: zhamkov@physics.msu.ru*
***E-mail: s.ayukov@gmail.com*
****E-mail: alex-filyotkin@mail.ru*
*[4]*E-mail: vmilyukov@yandex.ru*
*[5]*E-mail: i.vlasov78@mail.ru*
*[6]*E-mail: valera@sai.msu.ru*
*[7]*E-mail: GIV-WR@yandex.ru*
*[8]*E-mail: vladzh2007@yandex.ru*

Поступила в редакцию 02.12.2023 г.
После доработки 25.12.2023 г.
Принята в печать 29.01.2024 г.

В статье представлены принцип действия, основные компоненты и результаты применения созданного в ГАИШ МГУ программного комплекса (ПК) обработки больших объемов данных космической геодезической информации. ПК был использован для обработки межспутниковых измерений космической группировки, предназначенной для определения параметров гравитационного поля Земли (ГПЗ). Экспериментальный образец ПК позволяет работать как с модельными данными, так и с реальными наблюдениями. Проведены тестовые испытания данного ПК по восстановлению параметров ГПЗ на реальных данных миссий GRACE и GRACE-FO. Решения построены как для отдельных месяцев проведения измерений в период с 2010 по 2021 гг., так и для длительных интервалов времени (4.3 года и 7.6 лет). Произведено сравнение полученных решений с результатами восстановления ГПЗ другими исследователями.

Ключевые слова: гравитационное поле Земли, космическая гравиметрия, математическое программирование, восстановление гравитационного поля

DOI: 10.31857/S0004629924030087 **EDN:** KIOJHM

1. ВВЕДЕНИЕ

17 марта 2002 г. произошло знаменательное событие, которое открыло новую эпоху в развитии космической геодезии: с российского космодрома Плесецк были выведены на околоземную близполярную орбиту два спутника-близнеца миссии GRACE с первоначальной высотой орбиты порядка 500 км и наклонением 89.0°, на расстоянии около 200 км друг от друга [1]. Близполярная орбита обеспечивала полное и относительно однородное покрытие земной поверхности измерениями. Начальная высота орбиты 500 км обеспечивала, с одной стороны, достаточный уровень гравитационного сигнала для уточнения ГПЗ, а с другой — подходила для исследований атмосферы и ионосферы. Спутники GRACE были связаны между собой высокоточной межспутниковой микроволновой системой, работающей в диапазонах K (24 ГГц) и Ka (32 ГГц) [2, 3]. Каждый космический аппарат (КА), помимо микроволновой системы измерений межспутникового расстояния, был оснащен GPS приемниками [4], звездными датчиками и прецизионными акселерометрами [5]. Высота орбиты спутников вследствие торможения в верхних слоях атмосферы уменьшалась в среднем на ≈ 30 м/сут, поэтому проекция трасс КА на поверхность Земли не была фиксированной и менялась со временем. В штатном режиме измерений положение спутников стабилизировалось по всем трем осям, поэтому антенны микроволновой системы удерживались точно на-

правленными друг на друга. Микроволновый интерферометр K/Ka диапазона позволял измерять изменения межспутникового расстояния с микрометровой точностью. В сочетании с GPS измерениями, а также измерениями негравитационных ускорений и вращений, которые регистрировались бортовыми акселерометрами и звездными датчиками, микроволновая система, в конечном итоге, регистрировала воздействие вариаций ГПЗ на расстояние между спутниками.

Основной научной задачей миссии GRACE было создание ежемесячных моделей ГПЗ с пространственным разрешением порядка 400 км. За 15-летний срок активного существования миссия GRACE обеспечила мировое научное сообщество информацией о вариациях глобального гравитационного поля Земли и перемещениях больших масс во всех геосферах. Наблюдения GRACE легли в основу новых данных об изменениях климата [6], эволюции криосферы [7], океанов [8, 9, 10], гидрологических циклов [11, 12], а также тектонических событий [13].

Миссия GRACE доказала свою эффективность не только в получении моделей ГПЗ высокого пространственного разрешения, впервые по данным миссии было начато построение ежемесячных моделей. Поэтому в продолжение миссии GRACE 22 мая 2018 г. состоялся запуск двух спутников-близнецов GRACE Follow On. Основной целью миссии является обеспечение поступления данных для ежемесячных глобальных моделей ГПЗ высокого разрешения, начатых в миссии GRACE, т. е. мониторинг медленных временны́х вариаций ГПЗ. Параметры орбит спутников GRACE-FO практически те же самые, что и для спутников GRACE. С учетом опыта работы GRACE многие бортовые приборы и датчики были модернизированы [14]. Основным инструментом для измерения межспутникового расстояния по-прежнему является микроволновая система K-диапазона. Однако принципиальным моментом миссии является то, что спутники также оснащены лазерной интерферометрической системой, которая позволяет поднять точность измерений на нанометровый уровень. Первые данные обработки лазерных измерений превзошли все ожидания в отношении точности определения межспутникового расстояния [15], а также показали хорошее согласие с данными основной измерительной системы микроволнового диапазона [16].

С началом поступления данных GRACE, а с 2019 г. и данных GRACE-FO, в различных научных центрах мира начали создаваться модели ГПЗ (гравитационного поля Земли), как статические, так и ежемесячные. Полный список таких моделей ГПЗ, который регулярно пополняется, публикуется на сайте Международного центра глобальных моделей Земли (International Centre for Global Earth Models, ICGEM) [17]. Как правило, статические модели создаются на основе комбинации различных данных, которые могут включать данные космических геодезических миссий (CHAMP, GOCE, GRACE), данные альтиметрии и наземной гравиметрической съемки. В качестве примера можно указать одну из последних моделей ГПЗ — модель WHU-SWPU-GOGR2022S 2023 г., созданную китайскими учеными по данным GOCE и GRACE в разложении до степеней и порядков 300. Наиболее полной комбинированной глобальной моделью ГПЗ является модель XGM2019e, реализованная в разложениях 760, 2190 и 5540 сферических гармоник. Последнее соответствует пространственному разрешению около 4 км [18].

Тем не менее существуют статические модели ГПЗ, построенные только по данным миссии GRACE. Самой последней моделью, в которой были использованы все наблюдения GRACE, начиная с апреля 2002 г., является модель ITSG-Grace2018. Модель создана в Техническом университете города Грац (Австрия) и полна до степеней и порядков 200 [19, 20]. В 2016 г. были опубликованы две модели, созданные в университетах Китая Tongji (Шанхай) и HUST (Ухань): модель Tongji-Grace02s в разложении до 180 сферических гармоник [21] и модель HUST-Grace2016s в разложении до 160 сферических гармоник [22]. Глобальная модель ГПЗ ITU_GRACE16, основанная также только на данных миссии GRACE, разработана коллаборацией ряда научных организаций Турции в разложении до степеней и порядков 160 [23]. Можно также упомянуть более ранние модели ГПЗ, основанные только на данных GRACE. Это две модели, разработанные в Институте геодезии и геоинформации Университета Бонна: модель ITG-Grace2010s [24] и модель ITG-Grace03 [25]. Обе модели представлены в разложении до 180 сферических гармоник.

Очевидно, что модели ГПЗ, меняющиеся во времени на интервалах один месяц, могут быть построены только по данным GRACE и GRACE-FO. Такие модели создаются в трех международных центрах: Center for Space Research at University of Texas, Austin (CSR), Helmholtz Centre Potsdam German Research Centre for Geosciences (GFZ), Jet Propulsion Laboratory JPL). Решения, полученные в этих центрах, также доступны на сайте ICGEM [17].

В данной работе мы представляем первый отечественный программный комплекс, разработанный в ГАИШ МГУ, предназначенный для обработки данных наблюдений космической группировки типа GRACE, с целью решения обратной задачи по восстановлению гравитационного поля Земли и получения новой независимой модели ГПЗ.

2. ПРИНЦИП РАБОТЫ И ОСНОВНЫЕ КОМПОНЕНТЫ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА

Программный комплекс обработки космической геодезической информации системы «спутник–спутник» предназначен для моделирования и решения целевых задач по восстановлению ГПЗ в среднечастотной области спектра. Термин «среднечастотный» означает, что рассматривается разложение ГПЗ в ряд по сферическим функциям до степени $N_{\max} \leqslant 200$, определенное выражением:

$$R = \left(U - U_0\right) \approx \frac{GM}{r}\left[\begin{array}{l}\sum\limits_{n=2}^{N_{\max}}\sum\limits_{m=0}^{n}\left(\frac{a_E}{r}\right)^n \overline{P}_{nm}(\sin\varphi)\times \\ \times\left(\overline{C}_{nm}\cos m\lambda + \overline{S}_{nm}\sin m\lambda\right)\end{array}\right]. \quad (1)$$

В выражении (1): GM — гравитационный параметр Земли; r, φ, λ — сферические координаты точки в системе координат, жестко связанной с Землей (система ITRF); U_0 — потенциал Земли в представлении материальной точки, $U_0 = GM/r$; a_E — средний экваториальный радиус Земли; $\overline{P}_{nm}(\sin\varphi)$ — присоединенные функции Лежандра; $\overline{C}_{nm}$, $\overline{S}_{nm}$ — нормированные коэффициенты Стокса ($m = 0$ — зональные гармоники, $m > 0$ — тессеральные); n, m — степень и порядок разложения.

Блок-схема ПК, поясняющая его работу, представлена на рис. 1. В самом начале задаются параметры работы ПК (дата, количество восстанавливаемых гармоник ГПЗ, состав действующих сил на КА и т. д.), которые прописываются в отдельном текстовом файле. Этот файл считывается головной программой ПК, после чего идет обращение к файлам моделей, эфемерид, орбит КА (при наличии) и т. д., для выборки и записи в оперативную память ЭВМ необходимых данных для расчета. Условно эту часть ПК можно назвать модулем инициализации необходимых переменных.

Далее при использовании в модели сил, действующих на КА, приливных воздействий, в модуле расчета приливов ПК происходит корректировка коэффициентов Стокса, и затем рассчитывается матрица перехода из земной в небесную систему координат (матрицы прецессии, нутации, поворота Земли, перевод шкал времени).

Таблица 1. Состав моделей сил, используемых в ПК

№	Тип модели	Наименования модели
1	Глобальная модель ГПЗ в виде сферических гармоник геопотенциала	EGM96 [27], ITG-Grace03, EGM2008 и другие с ресурса ICGEM [17]
2	Модель океанических приливов	FES2004/2014 [28, 29]
3	Модель приливов в теле Земли, включая полюсные приливы	Согласно IERS2010 [26]
4	Модель атмосферы	NRLMSISE-00 [30]
5	Модель гравитационного воздействия со стороны Луны, Солнца и планет	Согласно [31] на основе эфемерид DE421 [32]
6	Модель радиационного давления Солнца	Согласно [31], форма КА в виде прямоугольного параллелепипеда
7	Эффекты общей теории относительности	Согласно IERS2010 [26]

С учетом заданного состава сил формируется вектор правых частей дифференциальных уравнений движения КА, и посредством модуля интегратора рассчитываются необходимые величины системы «спутник–спутник», включая межспутниковые величины: координаты и компоненты скорости двух КА, межспутниковые расстояния, скорости и ускорения.

Рассчитанные величины позволяют составить матрицу условных и нормальных уравнений для дальнейшего восстановления ГПЗ методом наименьших квадратов (МНК).

Если в ПК задана одна итерация восстановления, то результаты восстановления попадают в модуль выдачи и представления результатов расчетов, где они записываются в выходной текстовый файл. Если же в ПК задано более одной итерации уточнения ГПЗ, то результат восстановления ГПЗ перезаписывается в файл, содержащий исходную модель ГПЗ, и алгоритм повторяется вновь.

Все воздействия сил на КА, а также алгоритм перехода из земной в небесную систему координат рассчитываются в ПК в соответствии со стандартами IERS2010 [26]. Состав используемых моделей приведен в табл. 1.

ПК имеет два основных режима работы:

- работа с синтетическими (модельными) данными;
- работа с реальными данными.

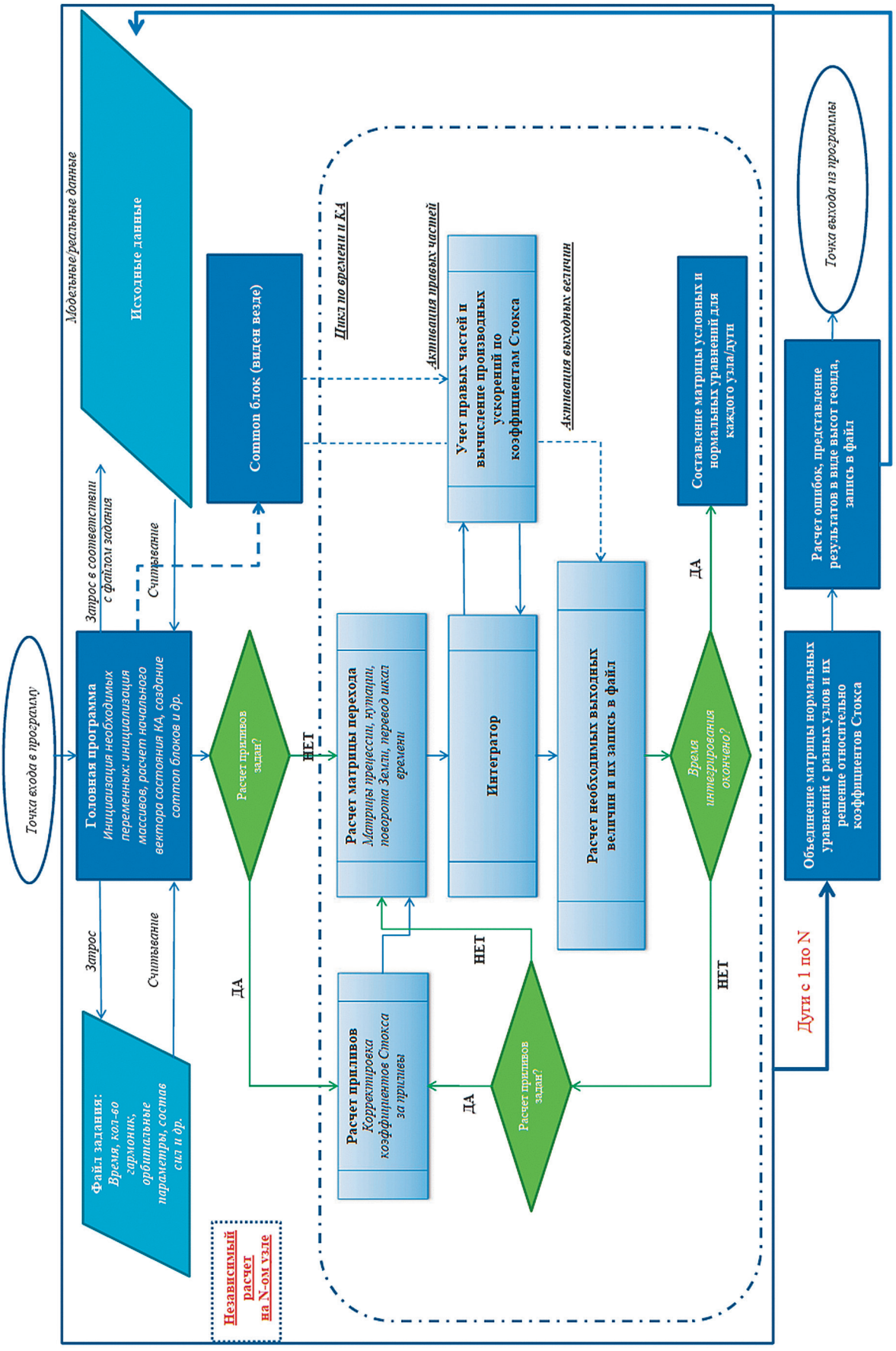

Рис. 1. Блок-схема работы ПК.

Режим работы с синтетическими данными предназначен для расчета орбит и межспутниковых величин, в том числе расстояний и ускорений между двумя КА. Параметры орбиты задаются в виде кеплеровых элементов или в виде координат и скоростей в геоцентрической инерциальной системе координат. В результате выполнения программы формируется файл, содержащий положения, скорости и относительные ускорения.

Далее запускается восстановление коэффициентов ГПЗ на основе рассчитанного файла. При восстановлении делается предположение, что все измерения можно распределить на группы так, чтобы внутри каждой группы измерения можно было считать равноточными. Можно предположить, что группа таких измерений может быть выполнена в течение некоторого времени, когда условия измерений не изменяются. Таким образом, все измерения группировки КА разбиваются на небольшие интервалы (дуги) продолжительностью 30 минут. После этого рассчитываются дуги и матрицы коэффициентов для восстановления ГПЗ. Коэффициенты записываются в отдельные файлы в рабочем каталоге программы. Каждая дуга состоит из набора положений, скоростей, ускорений. Для каждой точки дуги производится расчет относительных ускорений, рассчитанное значение сравнивается с измеренным и формируется матрица условных уравнений для коэффициентов ГПЗ.

Матрицы коэффициентов могут записываться на диск для каждой дуги, а могут суммироваться в процессе расчета и записываться один раз в конце работы процесса. ПК позволяет эффективно распараллелить расчет, так как каждая дуга рассчитывается независимо. ПК разбивает весь диапазон дуг на N частей и запускает одновременно N процессов, каждый из которых рассчитывает свою часть. Головная программа при этом ждет завершения расчетов и суммирует дуги вместе, что и продемонстрировано на схеме на рис. 1.

После расчетов запускается непосредственно восстановление коэффициентов ГПЗ. Восстановление коэффициентов производится с помощью МНК с использованием методов библиотеки LAPACK [33] — библиотеки с открытым исходным кодом, содержащей методы для решения основных задач линейной алгебры. После выполнения МНК записывается новый файл коэффициентов ГПЗ. Запись коэффициентов идет до степени N_{max}, заданной в файле инициализации, в котором также можно задать выдачу разницы высот геоида получившегося и базового (начального) поля, а также дисперсию степенно́й разности, о которой более подробно будет сказано далее.

При работе с реальными данными вместо расчетных орбит и межспутниковых расстояний используются величины из оригинальных файлов миссий GRACE и GRACE-FO уровня 1B. В остальном режим аналогичен режиму с синтетическими данными.

3. СТРУКТУРА РЕАЛЬНЫХ ДАННЫХ

В качестве реальных данных были использованы данные миссий GRACE и GRACE-FO. Эти данные обладают схожей структурой (детальное описание структуры данных содержится в [34, 35]). Основной массив информации разделен на уровни, названные 1A и 1B. Уровень 1A содержит сырые данные, полученные со спутников, предварительно обработанные для приведения к читаемому стандартному виду. При этом учитывается калибровка приборов, в результате чего данные из бинарного формата переводятся в приборные значения и осуществляется их привязка к бортовой шкале времени. На уровне 1B данные профильтрованы и обработаны до вида, пригодного для восстановления гравитационного поля тем или иным методом. В частности, исключаются выбросы в показаниях приборов и все данные привязываются к единой шкале времени GPS с одинаковым шагом. Каждый уровень состоит из наборов посуточных файлов, в которых сгруппированы данные схожего типа.

Для решения основной задачи о восстановлении ГПЗ, в ПК были использованы следующие данные уровня 1B (приводятся аббревиатуры, с которых начинаются имена файлов данного типа): ACT1B — данные акселерометров; GNI1B и GNV1B — навигационные данные; KBR1B — данные измерения межспутникового расстояния микроволновой системой K/Ka диапазона; SCA1B — данные звездных датчиков.

Главный массив наблюдательных данных содержится в файлах типа KBR1B. Дальномерные микроволновые измерения, проводимые на борту с дискретностью 0.1 с., пересчитываются в межспутниковые расстояния с дискретностью 5 с. Этот массив данных содержит межспутниковое расстояние с точностью порядка 1 мкм, его первую и вторую производные по времени, световую и релятивистскую поправку к этим трем величинам, а также поправку за сдвиг фазового центра микроволнового излучателя относительно центра масс КА. В реализованном нами методе восстановления поля по межспутниковым ускорениям в качестве реальных данных использовались ускорения из KBR1B (фактически для

каждого момента времени это сумма межспутникового ускорения, релятивистской поправки к нему и ускорения излучателя относительно центра масс).

Данные о кинематических орбитах спутников содержатся в файлах типов GNI1B и GNV1B. Отличаются эти типы системами отсчета, которые используются для представления данных. В GNI1B даны положения и скорости обоих аппаратов в земной системе отсчета GCRF (Geocentric Celestial Reference Frame), связанной с центром масс Земли и не вращающейся относительно барицентрической системы ICRF (International Celestial Reference Frame). В GNV1B положения и скорости даются во вращающейся вместе с Землей системе ITRF (International Terrestrial Reference Frame). В обоих типах файлов шаг данных составляет 1 с. Описанные орбитальные данные обоих типов использовались как для модельных вычислений, так и для вычислений по реальным данным.

Файлы типа ACT1B содержат данные акселерометров. Основная часть данных представляет собой негравитационные ускорения каждого спутника по показаниям бортовых акселерометров, которые приводятся с шагом 1 с. Негравитационные ускорения возникают главным образом в результате сопротивления атмосферы и воздействия солнечного излучения, прямого и отраженного от Земли. Нами были реализованы два режима учета такого рода эффектов: непосредственным вычислением по моделям негравитационных сил, а также путем использования данных акселерометров из файлов ACT1B.

Стоит отметить, что негравитационные ускорения в ACT1B приведены в системах отсчета SRF (Science Reference Frame), индивидуальных для каждого спутника, и требуют корректного пересчета в основную (невращающуюся) систему отсчета. Каждая такая спутниковая система жестко связана со своим спутником и устроена следующим образом. Начало отсчета помещено в центр масс пробного тела акселерометра (эта точка всегда находится в пределах 0.1 мм от центра масс спутника). Ось X направлена к фазовому центру микроволнового излучателя (по этой причине угол между вектором скорости летящего вторым спутника и его осью X всегда близок к 0°, а для летящего первым спутника этот угол близок к 180°). Ось Z перпендикулярна к оси X и к главной плоскости с оборудованием спутника, с направлением в сторону локального надира, то есть к поверхности Земли. Ось Y дополняет оси X и Z до правой тройки.

Преобразование от SRF к GCRF осуществляется с помощью информации от бортовых звездных датчиков, затабулированной в файлах типа SCA1B. По своей сути там дается ориентация каждого спутника (то есть направления осей его SRF) относительно земной невращающейся GCRF. В качестве способа задания такой ориентации выбрано представление в виде кватернионов. Как и орбитальные данные, так и данные акселерометров задаются с дискретностью 1 с. Каждый кватернион представляет собой набор из четырех чисел, с помощью которых по стандартным формулам (см., напр., [35]) делаются преобразования векторов от одной системы координат к другой (здесь от SRF к GCRF). При использовании в программе данных от акселерометров (ACT1B), так осуществляются необходимые повороты векторов негравитационных ускорений. В другом режиме, при вычислении модели негравитационных сил, данные файлов SCA1B применяются для нахождения ориентации отдельных элементов корпуса спутника относительно земной системы, что необходимо для корректного учета сопротивления воздуха и светового давления.

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ АЛГОРИТМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

На основе представленной модели в результате численного моделирования вычисляется межспутниковое расстояние между двумя КА. В реальности межспутниковые расстояния получаются из фазовых измерений, а потом они пересчитываются в межспутниковые ускорения, с которыми дальше продолжается работа. Поэтому в ПК, помимо межспутниковых расстояний, сразу вычисляются межспутниковые ускорения. Для межспутниковых ускорений могут быть составлены условные уравнения

$$\begin{gathered}\ddot{\mathbf{r}}_i^o - \ddot{\mathbf{r}}_i^c = \sum_{n=2}^{N_{\max}} \sum_{m=0}^{n} a_{nm}^i \Delta p_{nm}, \\ a_{nm}^i = \left(\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}^c}{\partial p_{nm}} \right)_i, \\ p_{nm} = C_{nm}, S_{nm},\end{gathered} \tag{2}$$

где $\ddot{\mathbf{r}}_i^o$ — измеренное взаимное ускорение между двумя КА, а $\ddot{\mathbf{r}}_i^c$ — рассчитанное на основе модели исходного гравитационного поля с помощью алгоритма Беликова и Тайбаторова, используемого в ПК [36]; C_{nm}, S_{nm} — уточняемые коэффициенты ГПЗ. Выражение для расчета $\ddot{\mathbf{r}}_i^c$ имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\ddot{\mathbf{r}}^c = \ddot{\mathbf{r}}_{12}\mathbf{e}_{12} + \frac{1}{D}\dot{\mathbf{r}}_{12}\dot{\mathbf{r}}_{12} - \frac{\dot{D}^2}{D}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_{12} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1, \\ \dot{\mathbf{r}}_{12} = \dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1,\end{gathered} \tag{3}$$

где $\mathbf{r}_i = \{X_i, Y_i, Z_i\}_{i=1,2}$ — радиус-вектор каждого КА в инерциальной системе координат GCRS; $\dot{\mathbf{r}}_i = \{V_{x_i}, V_{y_i}, V_{z_i}\}_{i=1,2}$ — вектор скорости каждого КА; $\ddot{\mathbf{r}}_i = \{a_{x_i}, a_{y_i}, a_{z_i}\}_{i=1,2}$ — вектор ускорения каждого КА; $D = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2}$ — расстояние между КА; $\dot{D}$ — скорость изменения расстояния между КА.

Для производных a^i_{nm} получим:

$$a^i_{nm} = \left(\frac{\partial \ddot{r}^c}{\partial p_{nm}}\right)_i = \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{D}\frac{\partial(\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2)}{\partial p_{nm}}; \quad p_{nm} = C_{nm}, S_{nm}. \tag{4}$$

Производные вектора ускорения по коэффициентам Стокса вычисляются на основе алгоритма Беликова и Тайбаторова.

Веса наблюдений w_i, $(i = 1, 2, ..., n_{obs})$, где n_{obs} — количество наблюдений, вводятся на этапе составления условных уравнений

$$\Delta\xi_i\sqrt{w_i} = \sum_{k=1}^{n_{def}} \sqrt{w_i}\, a^{(i)}_k \Delta x_k, \quad i = 1, 2, ..., n_{obs};$$

$$a^{(i)}_k = \frac{\partial \ddot{r}^c_i}{\partial x_k} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{D}\frac{\partial(\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2)}{\partial x_k}, \quad x_k = C_{nm}, S_{nm}; \tag{5}$$

$$\Delta\xi_i = \ddot{r}^o_i - \ddot{r}^c_i,$$

$$\Delta\mathbf{x} = \left(\Delta C_{nm}, ..., \Delta C_{n_{\max} m_{\max}}, \Delta S_{nm}, \ldots, \Delta S_{n_{\max} m_{\max}}\right)^T,$$

где n_{def} — количество восстанавливаемых параметров, которое зависит от максимальной восстанавливаемой степени $n_{\max}$ следующим образом:

$$n_{def} = n^2_{\max} + 2n_{\max} - 3.$$

Ковариационная матрица ошибок наблюдений будет иметь равные диагональные элементы, если ошибки левых частей условных уравнений будут примерно одинаковыми для всех i. Сделать так можно было бы, если бы погрешности величин $\Delta\xi_i$ были бы известными. Достичь указанного свойства ковариационной матрицы можно, если положить:

$$\sqrt{w_i} = \frac{1}{\sigma_i}, \tag{6}$$

где σ_i есть ошибка измерения с номером i.

Проблема в том, что обычно мы не знаем ошибок σ_i, поэтому приходится принимать какую-нибудь подходящую гипотезу относительно ошибок измерений. Именно поэтому все измерения разбиваются на дуги, о которых шла речь выше, для которых могут быть составлены нормальные уравнения:

$$N_i \Delta\mathbf{x} = \mathbf{b}_i, \tag{7}$$

где

$$N_i = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \ldots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \ldots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \ldots & l_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_i = \left(b_1, b_2, \ldots b_n\right)^T, \tag{8}$$

$$l_{kj} = \sum_{i=1}^{m} w_i a^{(i)}_k a^{(i)}_j, \quad k, j = 1, 2, \ldots n,$$

$$b_k = \sum_{i=1}^{m} w_i a^{(i)}_k \Delta\xi_i, \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

На данном этапе такие уравнения не могут быть решены в отдельности, поскольку они недоопределены, т. е. количество измерений может быть меньше числа уточняемых параметров. По этой причине после наблюдения на i дугах достаточной суммарной продолжительности (около 30 дней), нормальные уравнения объединяются в одну общую систему

$$N\Delta\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{9}$$

где

$$N = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\sigma^2_k} N_k, \quad \mathbf{b} = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\sigma^2_k} \mathbf{b}_k. \tag{10}$$

Это возможно сделать в силу предположения, что ковариационные матрицы каждой из групп наблюдений независимы. Величина σ_k — ошибка измерений группы наблюдений k. После чего может быть найдено решение

$$\Delta\mathbf{x} = N^{-1}\mathbf{b}. \tag{11}$$

Для анализа полученных результатов и сравнения различных моделей ГПЗ принято использовать разность полученного решения и эталонной модели в терминах высот геоида. Для разности высот геоида в представлении сферических функций используется выражение

$$\Delta N(\theta, \lambda) = R_e \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} \sum_{m=0}^{n} \left[\Delta C_{nm} \cos(m\lambda) + \Delta S_{nm} \sin(m\lambda)\right] \overline{P}_{nm}(\cos\theta). \tag{12}$$

В выражении (12) величины ΔC_{nm} и ΔS_{nm} могут означать разности между коэффициентами Стокса разных моделей, либо коэффициентами Стокса полученного решения и эталонной модели. R_e — средний радиус Земли (опорный эллипсоид), n и m — степень и порядок разложения геопотенциала,

$\overline{P}_{nm}(\cos\theta)$ — присоединенные функции Лежандра. Выражение (12) очень часто используется для представления результатов уточнения гравитационного поля Земли в силу своей наглядности. Но иногда бывает удобным описать точность решения по степеням гармоник, в этом случае дисперсия степенной разности (degree difference variance — DDV), выраженная в высотах геоида, есть

$$DDV(n) = R_e\sqrt{\sum_{m=0}^{n}\left(\Delta C_{nm}^2 + \Delta S_{nm}^2\right)}. \qquad (13)$$

Оба этих похода к представлению результатов используются в ПК, однако далее в статье все результаты будут представлены в терминах дисперсии степенно́й разности.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ ПРИМЕНЕННИЯ ПК К ВОССТАНОВЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ГПЗ ПО ДАННЫМ МИССИЙ GRACE И GRACE-FO

При работе с синтетическими данными результат восстановления ГПЗ сравнивается с исходным ГПЗ, которое закладывается при расчете синтетических данных. При решении задачи восстановления по реальным данным точное решение неизвестно, поэтому выполняется сравнение с опубликованными результатами, полученными другими группами исследователей на тех же спутниковых данных. В качестве критерия близости двух моделей гравитационных полей используется дисперсия степенной разности, показывающая отклонение моделей друг от друга на разных пространственных масштабах.

В настоящее время единственными данными для определения гравитационного поля Земли методом межспутниковых измерений являются ряды данных, полученные с 2002 г. по настоящее время в экспериментах GRACE и GRACE-FO.

Расчетная схема устроена следующим образом. В ПК задаются параметры восстановления ГПЗ, далее запускается непосредственно восстановление ГПЗ. Восстановленное поле затем сравнивается с неким эталонным. Разность между этими полями характеризует точность восстановления.

В рамках настоящей работы были выбраны следующие эталонные поля.

1) ITSG-Grace2018s.gfc [37]: получено путем обработки измерений GRACE с 2002/04 до 2017/10, содержит коэффициенты до $n = m = 200$.

2) ITG-Grace2010s [37]: получено путем обработки измерений GRACE с 2002/08 до 2009/08, содержит коэффициенты до $n = m = 180$.

3) ITG-Grace03 [37]: получено путем обработки измерений GRACE с 2002/08 до 2007/04, содержит коэффициенты до $n = m = 180$.

4) Ежемесячные поля, публикуемые в рамках GRACE/GRACE-FO лабораториями GFZ, CSR, JPL (файлы Level 2 формата GSM), эти поля содержат коэффициенты до $n = m = 60$ или $n = m = 96$.

Все указанные эталонные поля получены только по данным GRACE и GRACE-FO без привлечения других спутниковых данных или наземных измерений.

5.1. Восстановление ГПЗ по данным GRACE на разных временны́х интервалах

На приведенных ниже рисунках, помимо дисперсии степенной разности восстановленного и эталонного гравитационных полей, приводится также кривая «geo», соответствующая кумулятивному гравитационному сигналу на степень (в терминах высоты геоида) эталонного ГПЗ без учета второй зональной гармоники C_{20}.

На рис. 2 представлен результат восстановления ГПЗ по данным GRACE на разных временных интервалах. В качестве эталонного поля использована модель ITSG-Grace2018s.gfc. Полученное решение на всех временны́х интервалах выглядит вполне достаточным, в среднечастотной части спектра ($n = 40$–50) разность между восстановленным и эталонным полями не превосходит долей миллиметра, в худшем случае ($n \approx 100$) достигает единиц сантиметров.

5.2. Восстановление ГПЗ по данным GRACE и GRACE-FO на 30-дневных интервалах

Ежемесячные модели GSM, рассчитанные по данным GRACE, содержат коэффициенты сферических гармоник до $n = m = 90$, а рассчитанные по данным GRACE-FO — до $n = m = 96$. В рамках тестовых расчетов выполнено восстановление для каждого из 12 месяцев 2010 и 2021 гг., сравнение осуществлялось с соответствующими моделями GSM (лаборатория GFZ).

Помесячное восстановление по данным GRACE (2010 г., рис. 3) показывает, что качество результата восстановления ПК достаточно стабильно, хотя в данных GRACE в целом довольно много пропусков измерений. В ПК реализован алгоритм исключения какой-либо дуги, если она содержит пропуск в данных. Если задать длину дуги в 2 часа, то, например, в марте 2010 г. отбрасывается 80% дуг, в мае — 74%, в июне — 63%; результат восстановления при этом

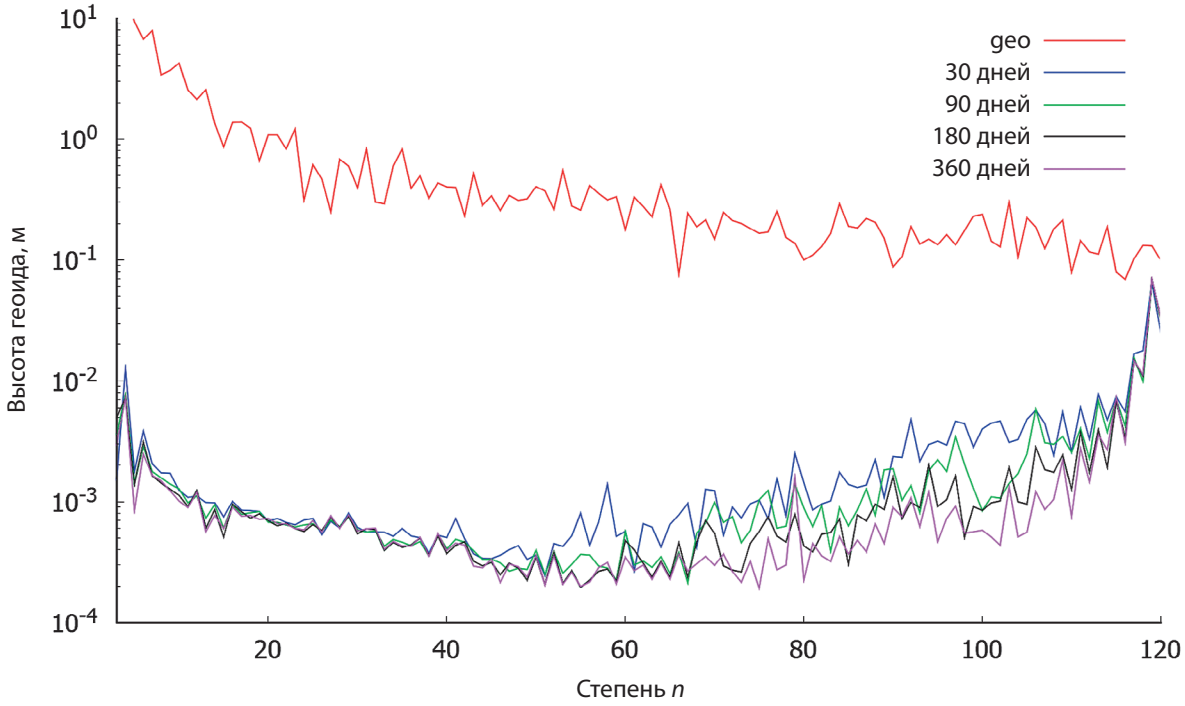

Рис. 2. Результаты восстановления ГПЗ по данным GRACE до $n = 100$ в сравнении с моделью ITSG-Grace2018s.gfc.

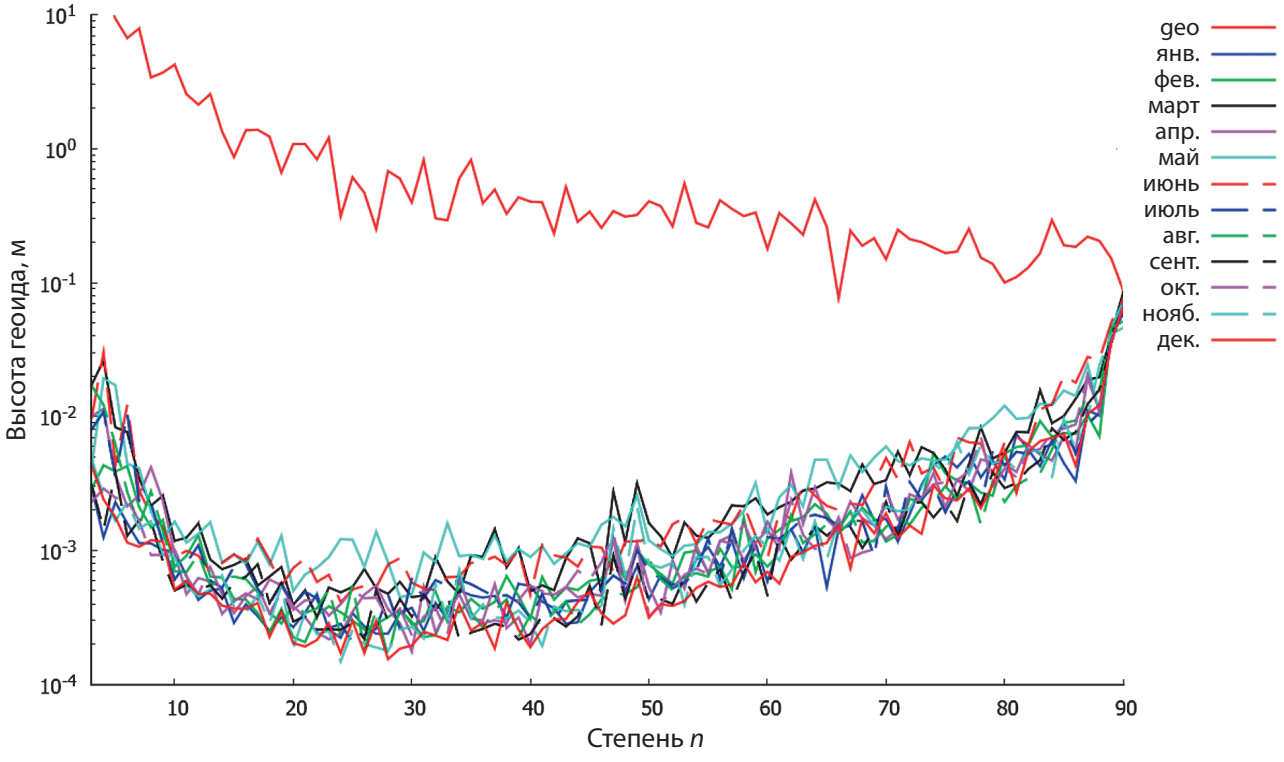

Рис. 3. Результаты восстановления ГПЗ до $n = 90$ на 30-дневных интервалах по данным GRACE за 2010 г. в сравнении с моделями GSM (GFZ).

становится ошибочен из-за недостаточности данных. Для результатов, приведенных на рис. 3, взята длина дуги равная 5 минутам.

На рис. 4 представлены помесячные модели восстановленного ГПЗ по данным GRACE-FO за 2021 г. Качество данных у GRACE-FO выше, чем у GRACE,

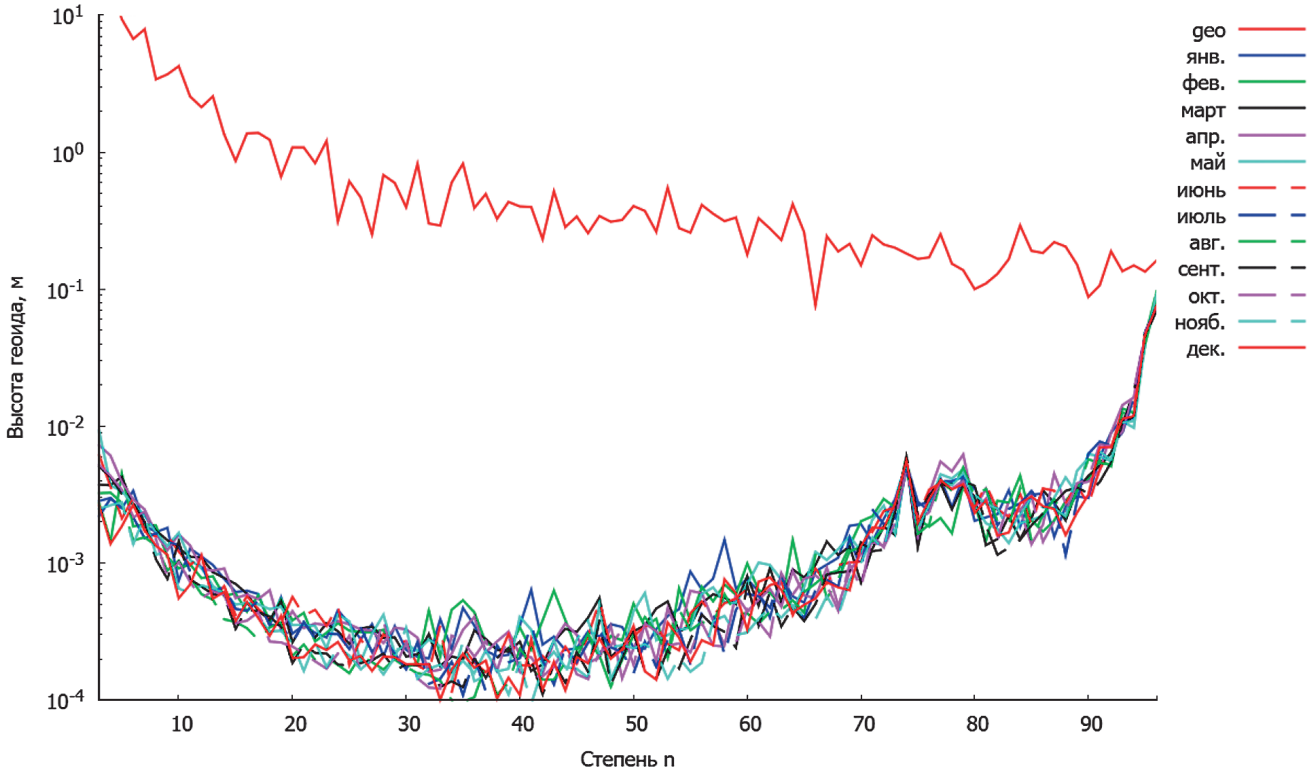

Рис. 4. Результаты восстановления ГПЗ до $n = 96$ на 30-дневных интервалах по данным GRACE-FO за 2021 г. в сравнении с моделями GSM (GFZ).

количество пропусков в данных значительно меньше. Соответственно, восстановленные модели ГПЗ лучше согласуются с моделями GSM, чем по данным GRACE. Разность между восстановленными моделями и моделями GSM в среднечастотной части спектра ($n = 30$–50) не превосходит 0.1–0.3 мм. Качество восстановления также стабильно.

5.3. Восстановление ГПЗ по данным GRACE-FO на длительных интервалах

В рамках тестовых расчетов было выполнено восстановление ГПЗ на длительных интервалах времени. Были использованы данные GRACE начиная с января 2003 г., поскольку качество данных в 2002 г., полученных в самом начале работы GRACE, заметно ниже и требует специальных подходов при обработке. Для сравнения были выбраны глобальные модели ITG-Grace03 и ITG-Grace2010s, которые были построены по данным GRACE, доступным на момент их разработки. Поэтому восстановление ГПЗ по данным миссии GRACE было выполнено на интервале 4.3 года, что соответствует модели ITG-Grace03, и на интервале 7.6 лет, что соответствует модели ITG-Grace2010s. Самой последней моделью, в которой были использованы все данные GRACE (15 лет наблюдений), является модель ITSG-Grace2018s. Однако восстановление гравитационного поля на интервале 15 лет нами не проводилось. Восстановление ГПЗ на указанных временны́х интервалах в сравнении с эталонными моделями ITG-Grace03 и ITG-Grace2010s в разложении до тех же степеней ($n = 180$) показано на рис. 5. Для сравнения на рис. 5 также показаны дисперсии степенных разностей моделей ITG-Grace2010s и XGM2019e, а также ITSG-Grace2018s и XGM2019e. Напомним, что модель XGM2019e является на сегодняшний день наиболее полной комбинированной глобальной моделью ГПЗ [18].

Дисперсии степенны́х разностей восстановленного поля и эталонных моделей демонстрируют характерное поведение ошибок коэффициентов сферических гармоник: сначала они уменьшаются, достигая минимального значения в низкочастотной и начале среднечастотной частей спектра, затем они возрастают, достигая соответствующих значений гравитационного сигнала (кривая «geo») (см., напр., [38]). Минимальных значений высот геоида (≈ 0.1 мм) эти разности достигают для степеней $n = 20$–60. Формально разложение имеет смысл, пока величина ошибки сферической гармоники не станет равной значению самой сферической гармоники. В данном случае это происходит при $n = 160$.

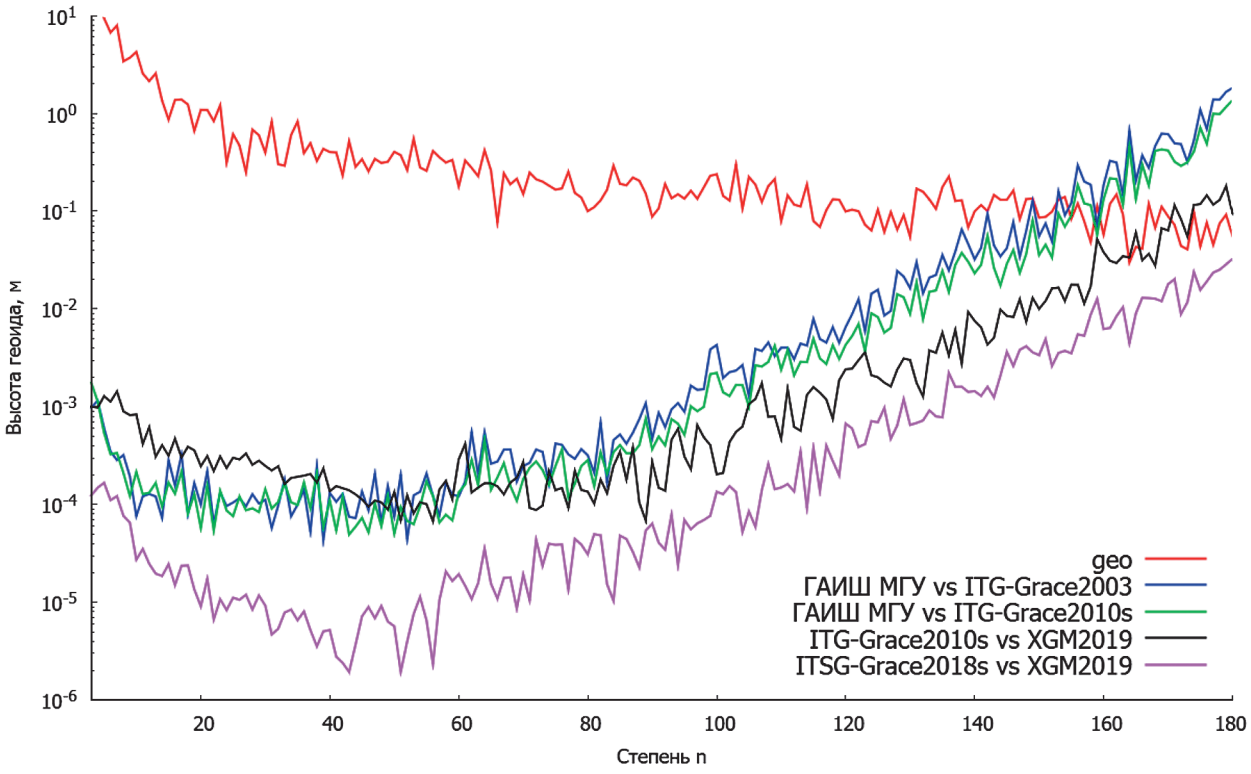

Рис. 5. Результаты восстановления ГПЗ до $n = 180$ по данным GRACE на интервалах 4.3 года и 7.6 лет в сравнении с моделями ITG-Grace03 и ITG-Grace2010s. Показано также сравнение моделей ITG-Grace2010s и ITSG-Grace2018s с комбинированной моделью XGM2019e.

Таким же образом меняется поведение дисперсий степенны́х разностей эталонных моделей в сравнении комбинированной моделью XGM2019e (кривые Grace2010s vs XGM2019e и Grace2018s vs XGM2019e). В целом изменение дисперсий степенны́х разностей восстановленного поля и эталонных моделей соответствует кривой Grace2010s vs XGM2019e, что говорит об адекватном восстановлении ГПЗ на длительных временны́х интервалах с использованием разработанного ПК.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Космическая гравиметрия играет важную роль в изучении глобальных процессов, происходящих в различных геосферах Земли. Эти исследования опираются на модели гравитационного поля Земли, как статические, так и меняющиеся во времени, создаваемые в первую очередь по данным миссий GRACE и GRACE-FO. Моделей ГПЗ в настоящее время насчитывается несколько десятков. Активно в создании моделей ГПЗ участвуют различные университеты. Среди них два университета Китая — Tongji University (модель Tongji-Grace02s) и Huazhong University of Science and Technology (модель HUST-Grace2016s). Самой последней моделью, в которой были использованы все наблюдения GRACE, начиная с апреля 2002 г., является модель ITSG-Grace2018, созданная в Техническом университете города Грац (Австрия).

В ГАИШ МГУ разработан программный комплекс, позволяющий по данным космических миссий, аналогичных GRACE и GRACE-FO, восстанавливать параметры ГПЗ, и, таким образом, также строить различные модели ГПЗ. Результаты восстановления ГПЗ по данным миссий GRACE и GRACE-FO, полученные с использованием ПК ГАИШ МГУ, показали, что в целом решения соответствуют эталонным моделям как на длительных временных интервалах, так и на интервалах длительностью 1 месяц. На интервалах 4.3 года и 7.6 лет дисперсии степенных разностей восстановленного поля и эталонных моделей ITG-Grace03 и ITG-Grace2010s достигают минимальных значений высот геоида (≈ 0.1 м) для степеней $n = 20$–60. На 30-дневных интервалах разность высот геоида между восстановленными моделями и эталонными моделями GSM в среднечастотной части спектра ($n = 30$–50) не превосходит 0.1–0.3 мм.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, Грант № 23-42-00055.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *B.D. Tapley, B.E. Schutz, and G.H. Born*, Statistical Orbit Determination. Chap. 4, p. 159 (Elsevier Academic Press, 2004), https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/B9780126836301500230
2. *M. Watkins and S. Bettadpur*, in Proc. of the *International Symposium on Space Dynamics*, Biarritz, France (Centre National dTEtudes Spatiales (CNES), Delegation a la Communication), p. 1 (2000), https://hdl.handle.net/2014/15034.
3. *B. D. Tapley and C. Reigber*, Amer. Geophys. Union, Fall Meeting 2001, id. G41C-02 (2001), https://api.semanticscholar.org/CorpusID:129565719.
4. *C. Dunn, W. Bertiger, Y. Bar-Sever, S. Desai, et al.*, GPS World 14(2), 16 (2003).
5. *P.J. Touboul, E. Willemenot, B. Foulon, and V. Josselin*, Bollettino Di Geofisica Teorica Ed Applicata **40**, 321 (1999), https://api.semanticscholar.org/CorpusID:130340650.
6. *B.D. Tapley, M.M. Watkins, F. Flechtner, C. Reigber, et al.*, Nature Climate Change **9**, 358 (2019), https://api.semanticscholar.org/CorpusID:145864321.
7. *B.C. Gunter, R.E.M. Riva, T. Urban, R. Harpold, B. Schutz, P. Nagel, and M. Helsen*, in *Gravity, Geoid and Earth Observation*, edited by S. P. Mertikas (Berlin, Heidelberg: Springer, 2010), Intern. Association of Geodesy Symposia **135**, 563 (2010), https://doi.org/10.1007/978-3-642-10634-7_75.
8. *J.A. Bonin and H. Save*, Ocean Science **16**(2), 423 (2020), https://api.semanticscholar.org/CorpusID:226208015.
9. *J. Chen, B. Tapley, K.-W. Seo, C. Wilson, and J. Ries*, Geophys. Res. Letters **46**(23), 13984 (2019).
10. *F. Landerer, D. Wiese, K. Bentel, C. Boening, and M. Watkins*, Geophys. Res. Letters **42**(19), 8114 (2015).
11. *M. Girotto and M. Rodell*, Extreme hydroclimatic events and multivariate hazards in a changing environment (Elsevier, 2019), p. 41.
12. *B. Scanlon, Z. Zhang, H. Save, D. Wiese, F. Landerer, D. Long, L. Longuevergne, and J. Chen*, Water Resources Res. **52**(12), 9412 (2016).
13. *K. Ghobadi-Far, S.-C. Han, S. Allgeyer, P. Tregoning, et al.*, J. Geodesy **94**, 9 (2020).
14. *F. Landerer, F. Flechtner, H. Save, F. Webb, et al.*, Geophys. Res. Letters **47**(12), id. e88306 (2020).
15. *K. Abich, A. Abramovici, B. Amparan, A. Baatzsch, et al.*, Phys. Rev. Letters **123**(3), id. 031101 (2019), https://api.semanticscholar.org/CorpusID:195766777.
16. *N. Pie, S. Bettadpur, M. Tamisiea, B. Krichman, et al.*, J. Geophys. Res. Solid Earth **126**(12), id. e2021JB022392 (2021).
17. International Centre for Global Earth Models, ICGEM, http://icgem.gfz-potsdam.de/home.
18. *P. Zingerle, R. Pail, T. Gruber, and X. Oikonomidou*, J. Geodesy **94**(7), id. 66 (2020).
19. *A. Kvas, S. Behzadpour, M. Ellmer, B. Klinger, S. Strasser, N. Zehentner, and T. Mayer-Gürr*, J. Geophys. Res. Solid Earth **124**(8), 9332 (2019).
20. *T. Mayer-Gürr, S. Behzadpur, M. Ellmer, A. Kvas, B. Klinger, S. Strasser, and N. Zehentner*, *ITSG-Grace2018 — Monthly, Daily and Static Gravity Field Solutions from GRACE*, https://graz.elsevierpure.com/en/publications/itsg-grace2018-monthly-daily-and-static-gravity-field-solutions-f.
21. *Q. Chen, Y. Shen, W. Chen, X. Zhang, and H. Hsu*, J. Geodesy **90**(6), 503 (2016).
22. *H. Zhou, Z. Luo, Z. Zhou, Q. Li, B. Zhong, and H. Hsu*, A new time series of GRACE monthly gravity field models: HUST-Grace2016, https://doi.org/10.5880/ICGEM.2016.009.
23. *O. Akyilmaz, A Ustun, C. Aydin, N. Arslan, et al.*, ITU_GRACE16 The global gravity field model including GRACE data up to degree and order 180 of ITU and other collaborating institutions, https://dataservices.gfz-potsdam.de/icgem/showshort.php?id=escidoc:1640888.
24. *T. Mayer-Gürr, E. Kurtenbach, and A. Eicker*, in European Geosciences Union General Assembly 2012: EGU 2012 held April 23–27 2012, Vienna, https://graz.elsevierpure.com/en/publications/itg-grace2010-the-new-grace-gravity-field-release-computed-in-bon.
25. *T. Mayer-Gürr, A. Eicker, and K. H. Ilk*, in Observation of the Earth System from Space, edited by J. Flury, R. Rummel, C. Reigber, M. Rothacher, G. Boedecker, and U. Schreiber (Berlin, Heidelberg: Springer, 2006), p. 131.
26. *G. Petit and B. Luzum*, IERS Technical Note № 36, 1 (2010), https://www.iers.org/IERS/EN/Publications/TechnicalNotes/tn36.html-1.htm.
27. *F.G. Lemoine, S.C. Kenyon, J.K. Factor, R.G. Trimmer, et al.*, The development of the joint nasa gsfc and the national imagery and mapping agency (nima) geopotential model egm96, https://cddis.nasa.gov/926/egm96/.
28. *F. Lyard, F. Lefevre, T. Letellier, and O. Francis*, Ocean Dynamics **56**(5–6), 394 (2006).
29. *F. Lyard, D. Allain, M. Cancet, L. Carrere, and N. Picot* (2020), Ocean Sci. (EGU) discussion, https://www.aviso.altimetry.fr/en/data/products/auxiliary-products/global-tide-fes/description-fes2014.html.
30. *J. Picone, A. Hedin, D. Drob, and A. Aikin*, J. Geophys. Res. Space Physics **107**(A12), id. 1468 (2002), https://doi.org/10.1029/2002JA009430.
31. *O. Montenbruck and E. Gill*, Satellite Orbits. Models, Methods, and Applications (Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2000).
32. *W.M. Folkner, J.G. Williams, and D.H. Boggs*, Interplanetary Network Progress Report 42–178, 1 (2009), https://ipnpr.jpl.nasa.gov/progress_report/42-178/178C.pdf.

33. *E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, et al.*, LAPACK User's Guide. 3d Edition, Software, Environments, and Tools **9**, pp. 1-424 (1999).
34. *H.Y. Wen, G. Kruizinga, M. Paik, F. Landerer, W. Bertiger, C. Sakumura, T. Bandikova, and C. Mccullough*, Gravity Recovery and Climate Experiment Follow-On (GRACE-FO) Level-1. Data Product User Handbook (2019), ftp://isdcftp.gfz-potsdam.de/grace-fo/DOCUMENTS/Level-1/.
35. *S.-C. Wu, G. Kruizinga, and W. Bertiger*, Algorithm Theoretical Basis Document for GRACE Level-1B. Data Processing V1.2 (2006), ftp://isdcftp.gfz-potsdam.de/grace/DOCUMENTS/Level-1/.
36. *М. Беликов and К. Тайбаторов*, Кинематика и физика небесн. тел **6**, 24 (1990).
37. Global gravity field models (2023), http://icgem.gfz-potsdam.de/changes.
38. *А. Жамков, В. Милюков*, Физика Земли **57**, 139 (2021).

NATIONAL SOFTWARE FOR PROCESSING INFORMATION OF THE SATELLITE–SATELLITE SPACE GEODETIC SYSTEM

A. S. Zhamkov[a], S. V. Ayukov[a], A. I. Filetkin[a], V. K. Milyukov[a], I. Yu. Vlasov[a], V. N. Sementsov[a], I. V. Gusev[a], V. E. Zharov[b]

[a] *Lomonosov Moscow State University, Sternberg Astronomical Institute, Moscow, Russia*
[b] *Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Moscow, Russia*

The paper presents the principle of operation, the main components and the results of the work of the software designed for processing large amounts of space geodetic information created at SAI MSU. The developed PC was used to process inter-satellite measurements of a space constellation intended to measure the parameters of the Earth's gravitational field (EGF). The experimental option of the software enables working with both simulated data and real data of GRACE and GRACE-FO missions. This experimental version was used to recover the EGF parameters on real GRACE and GRACE-FO mission data. Solutions were developed for every month within the measurement periods of 2010 and 2021, as well as for extended periods of 4.3 years and 7.6 years. A comparison of the obtained solutions with the results of the EGF recovering obtained by other researchers is presented.

Keywords: Earth's gravitational field, space gravimetry, gravitational field recovery

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2024, том 101, № 3, с. 284–296

НОРМА СМЕЩЕНИЯ ПРИ ВОЗМУЩАЮЩЕМ УСКОРЕНИИ, МЕНЯЮЩЕМСЯ ПО ЗАКОНУ ОБРАТНЫХ КВАДРАТОВ, В СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА, СВЯЗАННОЙ С РАДИУСОМ-ВЕКТОРОМ

© 2024 г. Т. Н. Санникова[1,*]

[1]ФГБУН Крымская астрофизическая обсерватория РАН, п. Научный, Крым, Россия

**E-mail: tnsannikova@craocrimea.ru*

Поступила в редакцию 10.11.2023 г.
После доработки 12.01.2024 г.
Принята в печать 29.01.2024 г.

Рассмотрена задача движения точки нулевой массы под действием притяжения к центральному телу и малого возмущающего ускорения $\mathbf{P}' = \mathbf{P}/r^2$, где r — расстояние до притягивающего центра, компоненты вектора $\mathbf{P}$ полагаются постоянными в системе отсчета с осями, направленными по радиусу-вектору, трансверсали и вектору площадей. Ранее для данной задачи найдены уравнения движения в средних элементах и формулы перехода от оскулирующих элементов к средним в первом порядке малости; величинами второго порядка мы пренебрегаем. В данной работе получена евклидова (среднеквадратичная по средней аномалии) норма смещения $\|d\mathbf{r}\|^2$, где $d\mathbf{r}$ представляет разность векторов положения на оскулирующей и средней орбите. Оказалось, что $\|d\mathbf{r}\|^2$ зависит только от компонентов вектора $\mathbf{P}$ (положительно определенная квадратичная форма), большой полуоси (пропорционально второй степени) и эксцентриситета оскулирующего эллипса. Норма $\|d\mathbf{r}\|^2$ получена в виде рядов по степеням $\beta = e/(1+\sqrt{1-e^2})$ и по степеням эксцентриситета e. Результаты применены к задаче о движении астероидов под действием возмущающего ускорения, обратно пропорционального квадрату гелиоцентрического расстояния, в частности, под влиянием эффекта Ярковского.

Ключевые слова: давление солнечного света, эффект Ярковского, негравитационные параметры, среднеквадратичная норма, смещение оскулирующей орбиты от средней, астероиды, сближающиеся с Землей

DOI: 10.31857/S0004629924030096 **EDN:** KIENHG

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье [1] сформулирована задача о движении точки нулевой массы $\mathcal{A}$ под действием притяжения к центральному телу $\mathcal{S}$ (например, к Солнцу) и возмущающего ускорения $\mathbf{P}'$, которое подчиняется закону обратных квадратов $\mathbf{P}' = \mathbf{P}/r^2$, где $r = |\mathbf{r}|$ — модуль радиуса-вектора $\mathbf{r} = \mathcal{SA}$. Компоненты S, T, W вектора $\mathbf{P}$ постоянны в системе отсчета $\mathcal{O}$, орты которой направлены по радиусу-вектору, трансверсали (перпендикуляру к радиусу-вектору в плоскости оскулирующей орбиты в сторону движения) и бинормали (направленной по вектору площадей) соответственно.

Отношение модулей возмущающего ускорения $|\mathbf{P}'|$ и вызванного притяжением к центральному телу основного ускорения $\varkappa^2/r^2$ считается малым порядка μ:

$$\max\frac{|\mathbf{P}'|}{\varkappa^2 r^{-2}} = \max\frac{|\mathbf{P}|}{\varkappa^2} = \mu \ll 1,$$

где $\varkappa^2$ — произведение постоянной тяготения на массу $\mathcal{S}$. Величинами порядка μ^2 пренебрегаем.

В работе [1] к уравнениям движения описанной задачи применено осредняющее преобразование, найдены уравнения движения в средних элементах и формулы перехода от оскулирующих элементов к средним.

Если возмущающие силы малы, то средняя орбита слабо отклоняется от оскулирующей. Разность $d\mathbf{r}$ положений небесного тела на средней и оскулирующей орбитах является квазипериодической функцией времени. Данная статья посвящена определению евклидовой (среднеквадратичной по средней аномалии) нормы смещения $\|d\mathbf{r}\|^2$ оскулирующей орбиты относительно средней, что позволит оценить величину периодических возмущений, возникающих вследствие сил, обратно пропорциональных квадрату расстояния от Солнца (например, эффект Ярковского, давление солнечного света), и принять решение о необходимости их учета либо возможности ограничиться только вековыми дрейфами.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть элементы орбиты ω, e, i, Ω, σ, M — среднее движение, эксцентриситет, наклон, долгота восходящего узла, аргумент перицентра и средняя аномалия соответственно.

Переход от оскулирующих элементов к средним выполняется по формуле

$$\epsilon_n = \bar{\epsilon}_n + u_n. \quad (1)$$

Здесь ϵ_n — шесть оскулирующих элементов, взятых в указанном выше порядке; $\bar{\epsilon}_n$ — шесть средних элементов. Величины u_n считаются функциями средних элементов $\bar{\epsilon}_k$, но в первом приближении безразлично, считать ли аргументы u_n средними или оскулирующими.

Явные выражения u_n найдены в [1] и приведены в Приложении А (формулы (35)).

Далее в качестве основной системы элементов орбиты будем использовать a, e, i, Ω, σ, M, где a — большая полуось. Используя связь среднего движения и большой полуоси $\omega = \varkappa a^{-3/2}$, $d\omega = (-3/2)\varkappa a^{-5/2} da$, заменим u_1 в системе уравнений (35) на выражение, относящееся к большой полуоси:

$$u_1 = -\frac{2a}{\varkappa^2\eta^2}\left[e(\cos\theta + e)S - (e\sin\theta + \theta - M)T\right]. \quad (2)$$

Здесь и ниже $\eta = \sqrt{1-e^2}$, $\beta = e/(1+\eta)$, θ — истинная аномалия, E — эксцентрическая аномалия.

Запишем (2) и пять последних уравнений (35) как приращения элементов и выразим их через эксцентрическую аномалию, учитывая соотношения, приведенные в Приложении Б.

В результате

$$\delta a = -\frac{2aeS}{\eta^2\varkappa^2}\left(\frac{a}{r}(\cos E - e) + e\right) + \frac{2aT}{\eta^2\varkappa^2}\left(e\sin E\left(1 + \frac{a}{r}\eta\right) + 2A(\beta, E)\right),$$

$$\delta e = -\frac{S}{\varkappa^2}\left(\frac{a}{r}(\cos E - e) + e\right) + \frac{T}{e\varkappa^2}\left(e\sin E\left(1 - \eta + \frac{a}{r}\eta\right) + 2A(\beta, E)\right),$$

$$\delta i = \frac{W}{e\eta\varkappa^2}\left(\cos\sigma\left[e\sin E(\eta - 1) + 2\eta A(\beta, E)\right] + \eta\sin\sigma\left[1 - \eta - L(\beta, E)\right]\right),$$

$$\delta\Omega = \frac{W}{e\eta\varkappa^2\sin i}\left(\sin\sigma\left[e\sin E(\eta - 1) + 2\eta A(\beta, E)\right] - \eta\cos\sigma\left[1 - \eta - L(\beta, E)\right]\right),$$

$$\delta\sigma = -\frac{\eta S}{e\varkappa^2}\frac{a}{r}\sin E - \frac{T}{e^2\varkappa^2}\times\left(e\frac{a}{r}(\cos E - e) + e^2 + 1 - \eta - L(\beta, E)\right) - \delta\Omega\cos i,$$

$$\delta M = \frac{S}{\varkappa^2}\left(e\sin E + \frac{\eta^2}{e}\frac{a}{r}\sin E\right) + \frac{T}{\eta^2\varkappa^2}\left[\frac{(\eta+2)\eta^3}{\eta+1} + \frac{\eta^3}{e}\frac{a}{r}(\cos E - e) - \frac{3}{4}e^2\cos 2E + 3e(\eta+1)\left(\frac{e}{2} + \cos E\right) - \frac{\eta^3}{e^2}L(\beta, E) + \frac{3\beta(2+\beta^2)}{1+\beta^2}\times\left(\frac{e}{2} + \cos E\right) - \frac{6}{1+\beta^2}S(\beta, E)\right], \quad (3)$$

где введены обозначения

$$A(\beta, E) = \operatorname{arctg}\frac{\beta\sin E}{1 - \beta\cos E},$$
$$L(\beta, E) = \ln(1 - 2\beta\cos E + \beta^2), \quad (4)$$
$$S(\beta, E) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n + 1 - (n-1)\beta^2}{n^2(n^2-1)}\beta^n\cos nE.$$

Оценим вклад периодических возмущений (3).

3. РАЗНОСТЬ ОСКУЛИРУЮЩЕГО И СРЕДНЕГО РАДИУСА-ВЕКТОРА

Согласно [2], разность оскулирующего и среднего радиуса-вектора может быть выражена через разности элементов орбиты:

$$(d\mathbf{r})^2 = \delta r^2 + r^2(\delta u + \cos i\delta\Omega)^2 + r^2(\sin u\,\delta i - \sin i\cos u\,\delta\Omega)^2, \quad (5)$$

где u — аргумент широты,

$$\delta r = \frac{r}{a}\delta a + \frac{a^2}{r}(e - \cos E)\delta e + \frac{a^2}{r}e\sin E\delta M,$$
$$r(\delta u + \cos i\delta\Omega) = \frac{a^2}{\eta r}(2 - e^2 - e\cos E)\sin E\delta e + r\delta\sigma + r\cos i\,\delta\Omega + \frac{a^2\eta}{r}\delta M, \quad (6)$$
$$r(\sin u\,\delta i - \sin i\cos u\,\delta\Omega) = a\left[(\cos E - e)\sin\sigma + \eta\sin E\cos\sigma\right]\delta i - a\sin i\left[(\cos E - e)\cos\sigma - \eta\sin E\sin\sigma\right]\delta\Omega.$$

Подставляя (3) в (6), получим:

$$\delta r = \frac{Sa^3}{4\varkappa^2 r^2}\Phi_1 + \frac{Ta^3}{\varkappa^2 r^2}\Phi_2,$$
$$r(\delta u + \cos i\,\delta\Omega) = \frac{Ta^3}{\varkappa^2 r^2}\Phi_3, \quad (7)$$
$$r(\sin u\,\delta i - \sin i\cos u\,\delta\Omega) = \frac{Wa}{\varkappa^2 e}\Phi_4.$$

Функции Φ_i приведены в Приложении В (формулы (37)).

С учетом (5) и (7)

$$(d\mathbf{r})^2 = \frac{S^2a^6}{16\varkappa^4r^4}\Phi_1^2 + \frac{STa^6}{2\varkappa^4r^4}\Phi_1\Phi_2 + \\ + \frac{T^2a^6}{\varkappa^4r^4}(\Phi_2^2 + \Phi_3^2) + \frac{W^2a^2}{\varkappa^4e^2}\Phi_4^2. \quad (8)$$

В знаменателях первых трех слагаемых (8) содержится r^4, но после возведения в квадрат и приведения подобных слагаемых результирующие выражения сократятся на r^3:

$$(d\mathbf{r})^2 = \frac{S^2a^2}{16\varkappa^4}\frac{a}{r}\Psi_1 + \frac{T^2a^2}{\varkappa^4}\frac{a}{r}\Psi_2 + \\ + \frac{W^2a^2}{\varkappa^4e^2}\Psi_3 + \frac{STa^2}{\varkappa^4}\frac{a}{r}\Psi_4, \quad (9)$$

где

$$\Psi_1 = 8(2+3e^2) - 12e(4+e^2)\cos E + \\ + 24e^2\cos 2E - 4e^3\cos 3E, \\ \Psi_2 = \psi_{21} + \psi_{22} + \psi_{23} + \psi_{24} + \psi_{25} + \psi_{26} + \\ + \psi_{27} + \psi_{28} + \psi_{29} + \psi_{2,10}, \quad (10) \\ \Psi_3 = \psi_{31} + \psi_{32} + \psi_{33} + \psi_{34} + \psi_{35} + \psi_{36}, \\ \Psi_4 = \psi_{41} + \psi_{42} + \psi_{43} + \psi_{44}.$$

Выражения ψ_{ij} приведены в Приложении В (формулы (38)).

Оставшиеся в знаменателях (9) r сократятся при вычислении среднеквадратичной нормы по средней аномалии

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dM = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(1-e\cos E)dE = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2\frac{r}{a}dE. \quad (11)$$

Подставив (9) в (11), получим:

$$\rho^2 = \|d\mathbf{r}\|^2 = \frac{S^2a^2}{16\varkappa^4}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_1\,dE + \\ + \frac{T^2a^2}{\varkappa^4}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_2\,dE + \frac{W^2a^2}{\varkappa^4e^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_3\frac{r}{a}dE + \\ + \frac{STa^2}{\varkappa^4}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_4\,dE. \quad (12)$$

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Согласно (12), вычисление ρ^2 сводится к нахождению интегралов функций, встречающихся в выражениях (10). Вычислим эти интегралы.

Функция Ψ_4 является нечетной, так как $\sin kE$ и $A(\beta,E)$ — нечетные, а $L(\beta,E)$ и $S(\beta,E)$ — четные, поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_4\,dE = 0. \quad (13)$$

Перейдем к интегралам четных функций. Некоторые вспомогательные формулы, используемые далее в разделе 4, приведены в Приложениях Г и Д.

4.1. Функции, содержащие тригонометрический многочлен, $A(\beta,E)$, $L(\beta,E)$ или $S(\beta,E)$

С помощью формул (39) и (42) найдем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Psi_1\,dE = 8\left(3e^2+2\right),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_{21}\,dE = \frac{8+769\beta^2+2818\beta^4+3348\beta^6}{2(1-\beta^2)^4(1+\beta^2)^2} + \\ + \frac{2077\beta^8+587\beta^{10}+91\beta^{12}+2\beta^{14}}{2(1-\beta^2)^4(1+\beta^2)^2},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_{22}\,dE = \frac{96+2406\beta^2+4684\beta^4+3665\beta^6}{24(1-\beta^2)^4(1+\beta^2)} + \\ + \frac{2240\beta^8+900\beta^{10}+348\beta^{12}+13\beta^{14}}{24(1-\beta^2)^4(1+\beta^2)}, \quad (14)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_{23}\,dE = \frac{96+534\beta^2+886\beta^4+397\beta^6+13\beta^8}{24(1-\beta^4)},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_{31}\frac{r}{a}dE = \frac{1}{8}(4+29e^2)(1-\eta)^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_{32}\frac{r}{a}dE = -\frac{\beta^4(1-\beta^2)(30+16\beta^2-\beta^4)}{2(1+\beta^2)^4},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_{33}\frac{r}{a}dE = -\frac{\beta^4(138+486\beta^2+89\beta^4-3\beta^6)}{6(1+\beta^2)^4}.$$

Перейдем к более сложной функции ψ_{24}, содержащей сумму $S(\beta,E)$. Учитывая, что с помощью (43) произведение косинусов кратных аргументов сводится к сумме косинусов кратных аргументов, а также вторую формулу в (39), получим, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S(\beta,E)\cos kE\,dE =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1-(n-1)\beta^2}{2n^2(n^2-1)}\beta^n \times$$

$$\times \int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n-k)E + \cos(n+k)E]dE =$$

$$= \frac{k+1-(k-1)\beta^2}{2k^2(k^2-1)}\beta^k, \qquad (15)$$

так как интеграл справа в (15) принимает ненулевое значение только при $n = k$ и не зависит от количества учитываемых членов суммы по n. Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_{24}\,dE = -\frac{\beta^4(45+77\beta^2-22\beta^4-3\beta^6)}{6(1-\beta^2)^4}. \qquad (16)$$

4.2. Функции, содержащие $A(\beta, E)^2$

Интегралы более сложных функций вычислены с использованием разложений в ряд, поэтому результаты приведены с точностью до такой степени β, которая позволяет получить как минимум 6 верных знаков в численном значении вплоть до $\beta = 0.9$, что было проверено путем сравнения со значением, полученным методом численного интегрирования средствами компьютерной алгебры.

Учитывая разложение в ряд [3, п. **1.448**.1]:

$$A(\beta, E) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\beta\sin E}{1-\beta\cos E}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^n}{n}\sin nE, \qquad (17)$$

а также формулу (44) получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A^2(\beta, E)\cos kE\,dE =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A(\beta, E)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^n}{n}\sin nE\cos kE\,dE =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^n}{2n}\int_{-\pi}^{\pi}A(\beta, E)\left[\sin(n-k)E + \sin(n+k)E\right]dE. \qquad (18)$$

Интеграл (18) приведем к сумме интегралов вида (42). В результате

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_{25}\,dE = \frac{(\beta^2+1)}{(1-\beta^2)^4}\times$$

$$\times\left(\frac{13}{8} + \frac{191}{16}\beta^2 + \frac{4333}{288}\beta^4 + \right.$$

$$+\frac{14701}{960}\beta^6 + \frac{1711}{2880}\beta^8 + \frac{3359}{3600}\beta^{10} - \frac{7573}{235200}\beta^{12} -$$

$$\left. -\frac{29473}{8467200}\beta^{14} - \frac{17491}{25401600}\beta^{16} + \mathcal{O}(\beta^{18})\right),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_{34}\,dE = \frac{\beta^2(1-\beta^2)^2}{(1+\beta^2)^3}\times$$

$$\times\left(\frac{3}{2} + \frac{5\beta^2}{12} - \frac{\beta^4}{72} - \frac{\beta^6}{720} - \frac{\beta^8}{3600} - \frac{\beta^{10}}{12600} + \mathcal{O}(\beta^{12})\right). \qquad (19)$$

4.3 Функции, содержащие $L(\beta, E)^2$

Далее учтем следующее разложение в ряд [3, п. **1.448**.2]:

$$L(\beta, E) = \ln\left(1 - 2\beta\cos E + \beta^2\right) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^n}{n}\cos nE, \qquad (20)$$

а также формулу (43). Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}L^2(\beta, E)\cos kE\,dE =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}L(\beta, E)\left(-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^n}{n}\cos nE\right)\cos kE\,dE =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^n}{n}\int_{-\pi}^{\pi}L(\beta, E)[\cos(n-k)E +$$

$$+\cos(n+k)E]dE. \qquad (21)$$

Таким образом, интеграл (21) приходит к виду, приведенному в (42). В результате

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_{26}\,dE = \frac{13}{8} + \frac{29}{16}\beta^2 + \frac{85}{288}\beta^4 + \frac{377}{2880}\beta^6 +$$

$$+\frac{1}{32}\beta^8 + \frac{11}{960}\beta^{10} + \frac{737}{141120}\beta^{12} +$$

$$+\frac{4619}{1693440}\beta^{14} + \frac{3977}{2540160}\beta^{16} + \mathcal{O}(\beta^{18}), \qquad (22)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_{35}\,dE = \frac{\beta^2}{\left(\beta^2+1\right)^3}\times$$

$$\times\left(\frac{3}{2} + \frac{229}{12}\beta^2 + \frac{797}{72}\beta^4 - \right.$$

$$-\frac{229}{720}\beta^6 + \frac{59}{3600}\beta^8 + \frac{37}{25200}\beta^{10} +$$

$$\left. +\frac{11}{44100}\beta^{12} + \frac{127}{2116800}\beta^{14} + \mathcal{O}(\beta^{16})\right).$$

4.4. Функции, содержащие $S(\beta, E)^2$

С помощью (47) найдем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S^2(\beta, E)(1 + e\cos E)\,dE =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(a_n^2 + ea_na_{n+1}), \qquad (23)$$

где

$$a_n = \frac{n+1-(n-1)\beta^2}{2n^2(n^2-1)}\beta^n.$$

С учетом (23) получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_{27}\,dE = \frac{\beta^4(\beta^2+1)}{(1-\beta^2)^4}\times$$
$$\times\left(\frac{9}{8}+\frac{67}{72}\beta^2-\frac{127}{128}\beta^4+\frac{30857}{240000}\beta^6+\frac{8843}{720000}\beta^8+\right.$$
$$\left.+\frac{1210691}{576240000}\beta^{10}+\frac{1551849}{3073280000}\beta^{12}+\mathcal{O}(\beta^{14})\right). \quad (24)$$

4.5. Функции, содержащие $A(\beta,E)L(\beta,E)$

В функциях ψ_{28} и ψ_{36} встречаются три варианта интегралов:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A(\beta,E)L(\beta,E)\sin kE\,dE \quad \text{при} \quad k=1,2,3.$$

С учетом (17) и (20) запишем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A(\beta,E)L(\beta,E)\sin kE\,dE = \frac{1}{2\pi}\times$$
$$\times\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^n}{n}\sin nE\left(-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\beta^m}{m}\cos mE\right)\sin kE\,dE =$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\beta^n}{n}\frac{\beta^m}{m}\sin nE\cos mE\sin kE\,dE. \quad (25)$$

Для нахождения интеграла справа в (25) используем формулы (49) и (50) для s_k при $a_n=\beta^n/n$, $a_m=\beta^m/m$. Подставляя (50) в (25) и приводя подобные слагаемые, найдем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A(\beta,E)L(\beta,E)\sin E\,dE = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}s_1\,dE = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A(\beta,E)L(\beta,E)\sin 2E\,dE =$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}s_2\,dE = -\frac{a_1^2}{2} = -\frac{\beta^2}{2},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A(\beta,E)L(\beta,E)\sin 3E\,dE =$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}s_3\,dE = -a_1a_2 = -\frac{\beta^3}{2}.$$

В итоге

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_{28}\,dE = \frac{3-4\beta^2-5\beta^4+2\beta^6}{4(1-\beta^2)},$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_{36}\,dE = \frac{\beta^2+4\beta^4-5\beta^6}{(\beta^2+1)^3}. \quad (26)$$

Выражения (26) точные. Значения, полученные с их помощью, отличаются от найденных путем численного интегрирования исходных выражений для ψ_{28} и ψ_{36} (38) не более чем на $7\cdot10^{-9}$ вплоть до $e=0.99$.

4.6. Функции, содержащие $A(\beta,E)S(\beta,E)$

С учетом (4):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A(\beta,E)S(\beta,E)\sin kE\,dE =$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A(\beta,E)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1-(n-1)\beta^2}{n^2(n^2-1)}\times$$
$$\times\beta^n\cos nE\sin kE\,dE. \quad (27)$$

Применение формулы (45) приводит интеграл (27) к виду, приведенному в (42):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A(\beta,E)S(\beta,E)\sin kE\,dE =$$
$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1-(n-1)\beta^2}{2n^2(n^2-1)}\beta^n\times$$
$$\times\int_{-\pi}^{\pi}A(\beta,E)\left[\sin(n+k)E-\sin(n-k)E\right]dE.$$

В результате получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_{29}\,dE = \frac{\beta^2\left(\beta^2+1\right)}{\left(1-\beta^2\right)^4}\times$$
$$\times\left(\frac{3}{2}+\frac{11}{3}\beta^2+\frac{17}{24}\beta^4+\frac{629}{600}\beta^6-\frac{17}{20}\beta^8+\frac{547}{14700}\beta^{10}+\right.$$
$$\left.+\frac{207}{39200}\beta^{12}+\frac{1}{864}\beta^{14}+\frac{1}{3024}\beta^{16}+\mathcal{O}(\beta^{18})\right). \quad (28)$$

4.7. Функции, содержащие $L(\beta,E)S(\beta,E)$

По аналогии с п. 4.6, учитывая (43):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}L(\beta,E)S(\beta,E)\cos E\,dE =$$
$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1-(n-1)\beta^2}{2n^2(n^2-1)}\beta^n\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi} L(\beta,E)\left[\cos(n-k)E+\cos(n+k)E\right]dE. \quad (29)$$

Интеграл (29) перепишем как сумму интегралов, приведенных в (42). Вычисления дают

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi_{2,10}\,dE=-\frac{\beta^2(\beta^2+1)}{1-\beta^2}\times$$
$$\times\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\beta^2-\frac{1}{8}\beta^4-\frac{2}{75}\beta^6-\frac{1}{120}\beta^8-\frac{4}{1225}\beta^{10}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{672}\beta^{12}-\frac{1}{1323}\beta^{14}-\frac{1}{2400}\beta^{16}-\mathcal{O}(\beta^{18})\right). \quad (30)$$

5. НОРМА РАЗНОСТИ ОСКУЛИРУЮЩИХ И СРЕДНИХ ЭЛЕМЕНТОВ

С учетом результатов раздела 4, подставляя (13), (14), (16), (19), (22), (24), (26), (28) и (30) в (12) и суммируя, в итоге получим норму разности оскулирующих и средних элементов:

$$\varrho^2=\frac{a^2}{\varkappa^4}(V_1S^2+V_2T^2+V_3W^2), \quad (31)$$

где

$$V_1=\frac{1+8\beta^2+\beta^4}{(\beta^2+1)^2},$$
$$V_2=\frac{1}{(1-\beta^2)^4(\beta^2+1)^2}\left(16+\frac{4133}{8}\beta^2+\right.$$
$$+\frac{125819}{72}\beta^4+\frac{598249}{288}\beta^6+\frac{8028469}{5760}\beta^8+$$
$$+\frac{190263323}{360000}\beta^{10}+\frac{1366999573}{11760000}\beta^{12}+$$
$$+\frac{2497264733}{345744000}\beta^{14}+\frac{2619693301}{49787136000}\beta^{16}+$$
$$+\frac{247809799}{224042112000}\beta^{18}+\frac{6893993549}{90363651840000}\beta^{20}+ \quad (32)$$
$$\left.+\frac{25909767071}{2733500468160000}\beta^{22}+\mathcal{O}(\beta^{24})\right),$$
$$V_3=\frac{1}{(\beta^2+1)^2}\left(1-\frac{23}{8}\beta^2+\frac{137}{36}\beta^4+\frac{181}{288}\beta^6+\right.$$
$$+\frac{13}{400}\beta^8+\frac{1}{720}\beta^{10}+\frac{29}{176400}\beta^{12}+$$
$$\left.+\frac{1}{31360}\beta^{14}+\frac{53}{6350400}\beta^{16}+\mathcal{O}(\beta^{18})\right).$$

В (32) выражение для V_1 — точное, в то время как V_2 и V_3 содержат ряды по степеням β с количеством членов, которое обеспечивает не менее 6 верных знаков вплоть до $e=0.9$. Приведем также выражения V_1, V_2 и V_3 в виде разложений по степеням эксцентриситета e:

$$V_1=\frac{1}{2}\left(2+3e^2\right),$$

$$V_2=\frac{1}{(1-e^2)^2}\left(16+\frac{3365e^2}{32}-\frac{12601e^4}{1152}-\right.$$
$$-\frac{13327e^6}{2048}-\frac{226339e^8}{163840}-\frac{62588263e^{10}}{92160000}-$$
$$-\frac{2858553277e^{12}}{7225344000}-\frac{481288874237e^{14}}{1888223232000}-$$
$$-\frac{81926146135181e^{16}}{466121392128000}-\frac{26706320975807e^{18}}{209754626457600}- \quad (33)$$
$$-\frac{54008796826067863e^{20}}{564006884474880000}-$$
$$-\frac{10125247955321134 87e^{22}}{13648966604292096000}-$$
$$\left.-\frac{169277617999717931593e^{24}}{2875854989454999552000}-\mathcal{O}(e^{26})\right),$$

$$V_3=1-\frac{39e^2}{32}+\frac{101e^4}{576}+\frac{599e^6}{6144}+\frac{19889e^8}{307200}+$$
$$+\frac{86891e^{10}}{1843200}+\frac{145911e^{12}}{4014080}+\frac{14979701e^{14}}{513802240}+$$
$$+\frac{286187473e^{16}}{11890851840}+\frac{402547717e^{18}}{19818086400}+$$
$$+\frac{3098641663e^{20}}{177628774400}+\mathcal{O}(e^{22}).$$

В отличие от (32), выражения (33) дают приемлемую точность только при $e<0.7$.

Исследуем поведение функций V_1, V_2 и V_3 (32) на интервале $e\in[0,1]$:

$$\min(V_1)=1 \text{ при } e=0,\quad \max(V_1)=2.5 \text{ при } e=1,$$
$$V_1 \text{ монотонно возрастает;}$$

$$\min(V_2)=16 \text{ при } e=0,\quad V_2\to\infty \text{ при } e\to 1,$$
$$V_2 \text{ монотонно возрастает;}$$

$$\min(V_3)=0.253528 \text{ при } e\approx 0.91557,$$
$$\max(V_3)=1 \text{ при } e=0.$$

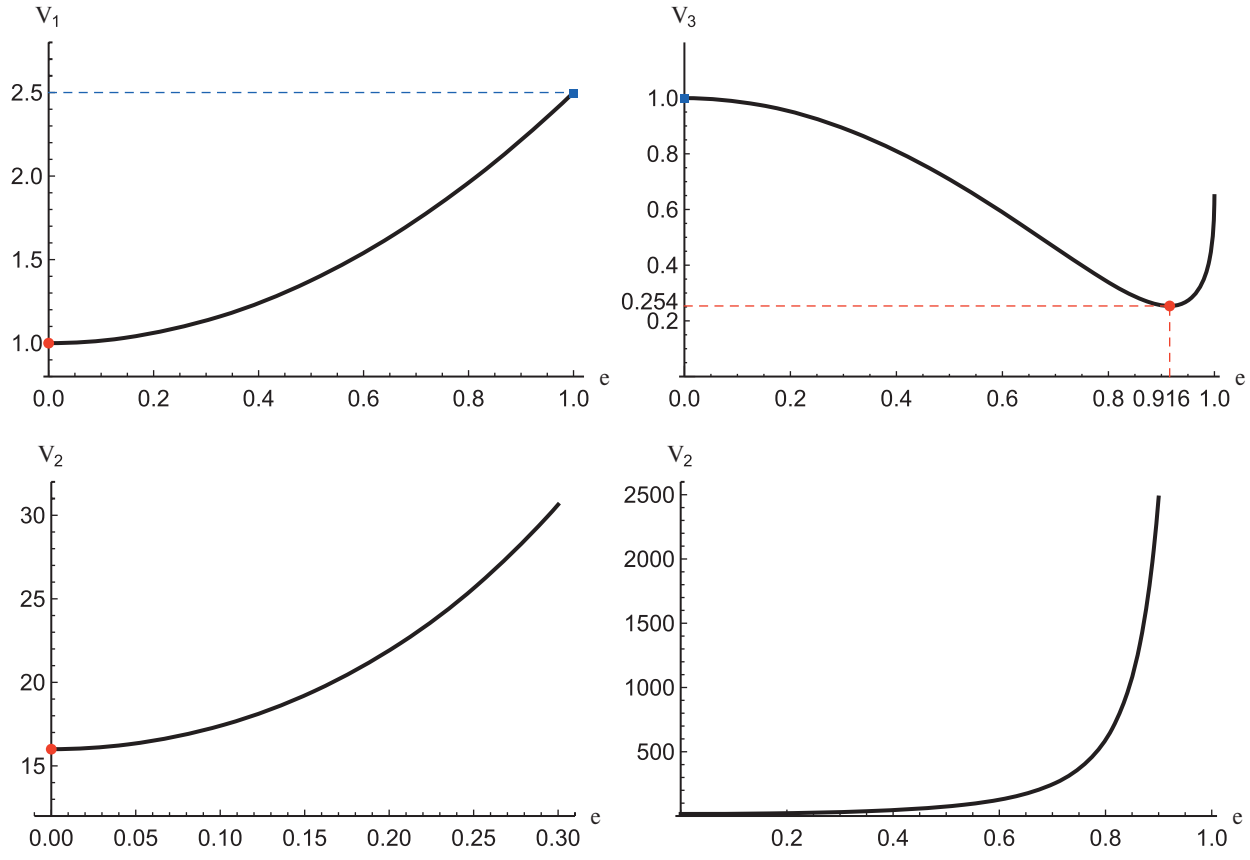

Рис. 1. Значения V_1, V_2, V_3 в зависимости от эксцентриситета e на интервале от 0 до 1. Нижние графики представляют V_2 в разных масштабах, справа показаны значения V_2 до $e=0.9$. На графиках отмечены точки максимумов (синие квадраты) и точки минимумов (красные кружки).

Таким образом, $V_k > 0$, следовательно норма ρ^2 в (31) всегда положительна, ρ — действительное число. Зависимость V_1, V_2 и V_3 от e показана на рис. 1.

Как и в задаче с постоянным возмущающим ускорением **P′**, представленной в [2], ρ^2 зависит только от компонентов вектора возмущающего ускорения (S, T, W) (положительно определенная квадратичная форма), большой полуоси (пропорционально второй степени) и эксцентриситета оскулирующего эллипса. От ориентации орбиты и положения точки $\mathcal{A}$ на ней ρ^2 не зависит.

Согласно [2], наибольшее значение ρ для данного оскулирующего эллипса при фиксированном модуле вектора **P**:

$$\max\rho^2 = \frac{a^2}{\varkappa^4} P^2 \max\{V_1, V_2, V_3\},$$

где $P = \sqrt{S^2 + T^2 + W^2} = \text{const}$. Поскольку для всех $e \in [0,1)$ $V_2 > V_1 \geq V_3$ (равенство достигается только при $e = 0$), то

$$\max\rho^2 = \frac{a^2}{\varkappa^4} P^2 V_2, \quad \max\rho = \frac{a}{\varkappa^2} P\sqrt{V_2}. \qquad (34)$$

6. ПРИМЕРЫ

6.1. Норма смещения положения некоторых объектов

Рассмотрим несколько объектов, для которых в базе данных малых тел Лаборатории реактивного движения (Small Body Database of Jet Propulsion Laboratory (JPL)) [4] приведены значения негравитационных параметров A_1, A_2, A_3, и указано, что при моделировании негравитационных возмущений использовалась модель обратной зависимости от квадрата гелиоцентрического расстояния. Радиальный A_1, трансверсальный A_2 и нормальный A_3 параметры связаны с компонентами (S, T, W) соотношениями: $A_1 = S/r_0^2$, $A_2 = T/r_0^2$ и $A_3 = W/r_0^2$, где $r_0 = 1$ а. е. Величины S, T, W имеют размерность м^3/с^2 или а.е.^{3}/сут^2, в то время как размерность параметров A_1, A_2, A_3 — а.е./сут^2.

В табл. 1 приведены исходные данные для выбранных малых тел. Вычислим для них смещение $\rho = \sqrt{\rho^2}$ (31) оскулирующей орбиты относительно средней и максимальное значение $\max\rho$ (34). При вычислениях использованы следующие константы: $\varkappa = 1.52 \cdot 10^{10}$ м$^{3/2}$/с, 1 а.е. $= 1.495978707 \cdot 10^{11}$ м, 1 сут = 86 400 с.

Таблица 1. Орбитальные элементы для различных объектов, а также норма смещения ρ и значение max ρ

Объект	a, а.е.	e	A_1	A_2	A_3	ρ, км	max ρ, км
2012LA	1.040348	0.0215929	$6.713\cdot10^{-11}$	$1.898\cdot10^{-12}$	–	35.544	141.562
2006RH120	1.033244	0.0245011	$1.382\cdot10^{-10}$	$-5.073\cdot10^{-11}$	$-1.299\cdot10^{-11}$	128.665	309.597
2011MD	1.056142	0.0370005	$7.444\cdot10^{-11}$	$-8.885\cdot10^{-13}$	–	39.833	159.929
2020GE	1.006201	0.0395558	$4.899\cdot10^{-11}$	$6.969\cdot10^{-13}$	–	24.991	100.363
2009BD	1.062043	0.0519601	$5.605\cdot10^{-11}$	$-1.146\cdot10^{-12}$	–	30.257	121.789
2015TC25	1.028443	0.1162244	$1.599\cdot10^{-10}$	$-5.274\cdot10^{-12}$	–	84.785	351.971
2010RF12	1.061114	0.1882240	$3.410\cdot10^{-11}$	$-2.122\cdot10^{-13}$	$-1.508\cdot10^{-11}$	20.381	92.072
1998KY26	1.232844	0.2018497	$1.601\cdot10^{-10}$	$-1.378\cdot10^{-13}$	$2.701\cdot10^{-11}$	104.091	474.902
2016NJ33	1.313399	0.2093322	$9.475\cdot10^{-10}$	$-5.486\cdot10^{-13}$	$8.485\cdot10^{-11}$	651.824	2997.424
2005VL1	0.891252	0.2246533	$-8.299\cdot10^{-10}$	$-8.321\cdot10^{-13}$	$-2.414\cdot10^{-11}$	387.958	1817.264
2008DB	1.053518	0.2329323	–	$-1.041\cdot10^{-12}$	–	2.728	2.728
2012TC4	1.620346	0.4039656	$2.388\cdot10^{-11}$	$-2.681\cdot10^{-13}$	–	21.878	133.979
2016GE1	2.065389	0.5197517	–	$-1.439\cdot10^{-12}$	–	13.572	13.572
2008BP16	0.828643	0.6495359	–	$-8.424\cdot10^{-14}$	–	0.464	0.464
2014QL433	2.090202	0.7176721	–	$9.315\cdot10^{-14}$	–	1.652	1.652
2014CP4	0.911642	0.8702356	–	$5.608\cdot10^{-14}$	–	0.986	0.986

Примечание. Приведены: большая полуось a и эксцентриситет e, а также негравитационные параметры A_1, A_2, A_3 а. е./сут^2 по данным [4]. Прочерк означает, что значение параметра не приведено в базе JPL [4], при вычислениях в этом случае принято нулевое значение соответствующего параметра. Эпоха элементов орбиты JD 246 0200.5 (2023–Sep–13.0) TDB (дата обращения к базе данных JPL 30.10.2023).

Анализ результатов вычислений (см. табл. 1) показал, что в большинстве случаев отклонение оскулирующей орбиты от средней вследствие периодических возмущений мало́, однако выявлены случаи со смещением порядка нескольких сотен километров, что говорит о необходимости учета периодических возмущений при краткосрочном прогнозировании движения объекта. Так, расстояние между ближайшими точками оскулирующих орбит астероида 2005 VL1 и Земли по сведениям JPL [4] $MOID = 3.98405\cdot10^{-5}$ а. е. На таком расстоянии для земного наблюдателя ($\varrho = 387.958$ км) будет соответствовать угловому расстоянию 3.72°, то есть положение объекта на небесной сфере, определенное с учетом периодических возмущений, может существенно отличаться от положения, определенного без их учета.

6.2. Норма смещения вследствие эффекта Ярковского

Найдем норму смещения оскулирующей орбиты относительно средней, возникающего вследствие действия эффекта Ярковского на астероиды 1685 Toro (1948 OA) и 101955 Bennu.

В статье [5] выведены формулы для вычисления негравитационных параметров A_1, A_2, A_3 как средних значений за орбитальный период в рамках линейной теплофизической модели силы Ярковского для сферических астероидов [6] и найдены численные значения параметров для астероида 1685 Toro (1948 OA), с использованием его теплофизических характеристик, опубликованных в [7]. В работе [8] приведены значения компонентов S, T и W ускорения Ярковского, вычисленные по методике [5] на основе теплофизических характеристик и параметров вращения астероида 101955 Bennu. Используя данные [5, 8] и элементы орбиты указанных астероидов, приведенные в базе JPL [4], найдем ϱ и max ϱ. Исходные данные и результаты приведены в табл. 2, из которой следует, что при малых возмущающих ускорениях, характерных для эффекта Ярковского, смещение оскулирующей орбиты относительно средней мало и им можно пренебречь, учитывая лишь вековые дрейфы элементов орбиты.

Таблица 2. Элементы орбиты для астероидов Bennu и Toro, а также смещение ρ и значение max ρ

Объект	101955 Bennu	1685 Toro
a, а.е.	1.126391	1.367586
e	0.2037451	0.4358371
S	$9.91079\cdot10^{-14}$	$7.96229\cdot10^{-15}$
T	$-5.10168\cdot10^{-14}$	$-3.24047\cdot10^{-15}$
W	0	0
ϱ, м	148.6	17.6
max ρ, м	298.7	43.8

Примечание. Приведены: большая полуось a и эксцентриситет e, а также компоненты S, T, W а. е.^{3}/сут^2. Эпоха элементов орбиты JD 246 0200.5 (2023–Sep–13.0) TDB (дата обращения к базе данных JPL 30.10.2023).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача движения точки нулевой массы под действием притяжения к центральному телу и малого возмущающего ускорения, обратно пропорционального квадрату расстояния до притягивающего центра в системе отсчета с осями, направленными по радиусу-вектору, трансверсали и вектору площадей. Получена евклидова (среднеквадратичная по средней аномалии) норма смещения $\|d\mathbf{r}\|^2$, где $d\mathbf{r}$ представляет разность векторов положения на оскулирующей и средней орбите, что позволяет оценить величину периодических возмущений. Оказалось, что $\|d\mathbf{r}\|^2$ зависит только от компонентов вектора $\mathbf{P}$ (положительно определенная квадратичная форма), большой полуоси (пропорционально второй степени) и эксцентриситета оскулирующего эллипса.

Результаты применены к задаче о движении астероидов под действием возмущающего ускорения, обратно пропорционального квадрату гелиоцентрического расстояния. Показано, что в некоторых случаях положение объекта на небесной сфере, определенное с учетом периодических возмущений, может существенно отличаться от положения, определенного без их учета. Однако при малых возмущающих ускорениях, характерных для эффекта Ярковского, смещение оскулирующей орбиты относительно средней мало́ и им можно пренебречь, учитывая лишь вековые дрейфы элементов орбиты.

В дальнейшем планируется оценить норму смещения для аналогичной задачи в системе отсчета, связанной с вектором скорости.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит анонимного рецензента за ценные предложения и комментарии, которые улучшили качество и ясность статьи.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Данная статья выполнена за средства государственного задания, тема Рег. № 22022400207-0.

Приложения

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Явные выражения функций u_n в формулах перехода от оскулирующих элементов к средним (1), найденные в [1]:

$$u_1 = \frac{3\omega}{\varkappa^2\eta^2}\left[e(\cos\theta + e)S - (e\sin\theta + \theta - M)T\right],$$

$$u_2 = -\frac{1}{\varkappa^2}(\cos\theta + e)S + \frac{1}{\varkappa^2 e}\left[(\theta - M) - \eta(E - M) + e\sin\theta\right]T,$$

$$u_3 = \frac{1}{\varkappa^2\eta e}\left\{\cos\sigma\left[\eta(\theta - M) - (E - M)\right] + \eta\sin\sigma\left[\ln(1 + e\cos\theta) + 1 - \eta - \ln\frac{2\eta^2}{1+\eta}\right]\right\}W,$$

$$u_4 = \frac{1}{\varkappa^2\eta e\sin i}\left\{\sin\sigma\left[\eta(\theta - M) - (E - M)\right] - \eta\cos\sigma\left[\ln(1 + e\cos\theta) + 1 - \eta - \ln\frac{2\eta^2}{1+\eta}\right]\right\}W,$$

$$u_5 = -\frac{1}{\varkappa^2 e}\sin\theta\, S - \frac{1}{\varkappa^2 e^2}\left[e\cos\theta + e^2 + \ln(1 + e\cos\theta) + 1 - \eta - \ln\frac{2\eta^2}{1+\eta}\right]T - u_4\cos i, \quad (35)$$

$$u_6 = \frac{1}{\varkappa^2}\left[(E - M) + \frac{\eta}{e}\sin\theta\right]S + \frac{1}{\varkappa^2\eta^2}\times \left\{3e(1+\eta)\left(\cos E + \frac{e}{2}\right) - \frac{3e^2}{4}\cos 2E + \frac{\eta^3}{e}\cos\theta + \frac{\eta^3}{e^2}\times \left[\ln(1 + e\cos\theta) - \ln\frac{2\eta^2}{1+\eta}\right] + \frac{(2+\eta)\eta^3}{1+\eta} - 3\mathcal{I}(\theta - E)\right\}T,$$

где

$$\mathcal{I}(\theta - E) = -\frac{\beta(2+\beta^2)}{1+\beta^2}\left(\frac{e}{2} + \cos E\right) + \frac{2}{1+\beta^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n + 1 - (n-1)\beta^2}{n^2(n^2-1)}\beta^n\cos nE.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Переход от истинной аномалии к эксцентрической осуществляется с помощью соотношений [9]:

$$\cos\theta = \frac{a}{r}(\cos E - e), \quad \sin\theta = \frac{a}{r}\eta\sin E,$$
$$r = a(1 - e\cos E), \quad E - M = e\sin E,$$
$$\theta - E = 2\operatorname{arctg}\frac{\beta\sin E}{1 - \beta\cos E}, \quad (36)$$
$$\theta - M = \theta - E + E - M = e\sin E + 2\operatorname{arctg}\frac{\beta\sin E}{1 - \beta\cos E},$$
$$\ln(1 + e\cos\theta) - \ln\frac{2\eta^2}{1+\eta} = -\ln\left(1 - 2\beta\cos E + \beta^2\right).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Функции Φ_i, входящие в выражения (7):

$$\Phi_1 = 2(2+3e^2) - 3e(4+e^2)\cos E + 6e^2\cos 2E - e^3\cos 3E,\quad \Phi_2 = \frac{e\sin E}{4\eta^3(1+\eta)^2}\times$$
$$\times\Big(44(1+\eta) - e^2(26+6\eta) - 3e^4(8+5\eta) + 6e^6\Big) -$$
$$-\frac{e^2\sin 2E}{8\eta^3(1+\eta)^2}\Big(24(1+\eta) + 6e^2\eta - e^4(30+17\eta) + 6e^6\Big) -$$
$$-\frac{e^3\sin 3E}{4\eta^3(1+\eta)^2}\Big(4(1+\eta) - e^2(4+\eta)\Big) - \frac{e^4\sin 4E}{16\eta^2} +$$
$$+\frac{A(\beta,E)}{e\eta^2}(e(7+3e^2) - (2+12e^2+e^4)\cos E +$$
$$+ e(1+5e^2)\cos 2E - e^4\cos 3E) -$$
$$-\left(\frac{\eta}{e}\sin E - \frac{\eta}{2}\sin 2E\right)L(\beta,E) - \frac{3e(1+\eta)}{2\eta^2}\times$$
$$\times(2\sin E - e\sin 2E)S(\beta,E), \qquad (37)$$
$$\Phi_3 = \frac{16(1+\eta) - 4e^2(5+8\eta) + 9e^4}{8\eta(1+\eta)} +$$
$$+\frac{e\cos E}{8\eta(1+\eta)^2}\Big(128(1+\eta) - e^2(98+38\eta) - e^4\Big) -$$
$$-\frac{e^2\cos 2E}{2\eta(1+\eta)^2}\Big(28(1+\eta) - e^2(18+5\eta)\Big) +$$
$$+\frac{e\cos 3E}{8\eta}\Big(4(1-\eta) + e^2(3+4\eta)\Big) -$$
$$-\frac{e^2\cos 4E}{8\eta}(1-\eta) + \frac{A(\beta,E)}{2e\eta}(\Big(8-3e^2\Big)\sin E -$$
$$-2e\Big(3-e^2\Big)\sin 2E + e^2\sin 3E) +$$
$$+\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{4e}\Big(8+7e^2\Big)\cos E + \frac{3}{2}\cos 2E - \frac{e}{4}\cos 3E\right)\times$$
$$\times L(\beta,E) - \frac{3(1+\eta)}{\eta}(1-e\cos E)S(\beta,E),$$
$$\Phi_4 = \frac{(1-\eta)}{2}(-3e + 2\cos E + e\cos 2E) +$$
$$+2\eta A(\beta,E)\sin E + (e-\cos E)L(\beta,E).$$

Функции ψ_{ij}, входящие в выражения (10):

$$\psi_{21} = \frac{1}{512\eta^5(\eta+1)^4}(16384(\eta+1) +$$
$$+512e^2(689\eta+673) - 256e^4(1527\eta+2224) +$$
$$+64e^6(711\eta+3058) + 8e^8(2026\eta+2296) -$$
$$-64e^{10}(18\eta+89) + 16e[11264(\eta+1) +$$
$$+16e^2(743\eta+391) - 8e^4(3538\eta+4457) +$$
$$+e^6(9210\eta+21128) - 3e^8(245\eta+1044) +$$
$$+4e^{10}(6\eta+35)]\cos E + 64e^2[3128(\eta+1) -$$
$$+4e^2(1281\eta+1672) + e^4(3069\eta+5240) -$$
$$-e^6(845\eta+1944) + 44e^8(\eta+6)]\cos 2E -$$
$$-8e^3\Big[992(\eta+1) - 16e^2(322\eta+353) +$$
$$+12e^4(418\eta+623) -$$
$$-e^6(1281\eta+3196) + 8e^8(8\eta+47)\Big]\cos 3E +$$
$$+16e^4\Big[208(\eta+1) - 8e^2(40\eta+53) +$$
$$+e^4(143\eta+276) - 4e^6(4\eta+15)\Big]\cos 4E +$$
$$+8e^7\Big[4(\eta+1) - e^2(3\eta+4)\Big]\cos 5E),$$
$$\psi_{22} = \frac{A(\beta,E)}{2e\eta^5(\eta+1)^2}(2[32(\eta+1) + 8e^2(15\eta+13) -$$
$$-e^4(126\eta+197) + e^6(20\eta+66) - 5e^8]\sin E +$$
$$+2e[66(\eta+1) - 3e^2(49\eta+61) + e^4(63\eta+124) +$$
$$+5e^6(\eta-1) - 2e^8]\sin 2E - 2e^2\Big[8(\eta+1) -$$
$$-e^2(6\eta+11) + 2e^4(2\eta+3) - 3e^6\Big]\sin 3E +$$
$$+e^3\Big[1+\eta - e^2(3\eta+4) + e^4(\eta+3)\Big]\sin 4E),$$
$$\psi_{23} = \frac{L(\beta,E)}{4e\eta(\eta+1)^2}\Big(-188e(\eta+1) + e^3(33\eta+125) -$$
$$-2\Big[32(\eta+1) + 4e^2(\eta-3) + e^4(2\eta+7)\Big]\cos E -$$
$$-4e\Big[33(\eta+1) - e^2(4\eta+19)\Big]\cos 2E + \qquad (38)$$
$$+2e^2\Big[8(\eta+1) - e^2(2\eta+5)\Big]\cos 3E -$$
$$-e^3[\eta+1]\cos 4E\Big),$$
$$\psi_{24} = -\frac{S(\beta,E)}{4\eta^5(\eta+1)^2}(12\Big[16(\eta+1) + 8e^2(7\eta+6) -$$
$$-e^4(61\eta+91) + 3e^6(2\eta+9)\Big] +$$
$$+3e\Big[384(\eta+1) - 8e^2(43\eta+67) +$$
$$+e^4(47\eta+169) - e^6(4\eta+17)\Big]\cos E +$$
$$+12e^2\Big[10(\eta+1) - 5e^2(\eta+2) - e^4\eta\Big]\cos 2E +$$
$$+3e^3\Big[4(\eta+1) - e^2(3\eta+5) + e^4\Big]\cos 3E),$$
$$\psi_{25} = \frac{A(\beta,E)^2}{e^2\eta^4}(2[5+11e^2+4e^4] - 3e[7+13e^2]\cos E -$$
$$-6[1-3e^2-2e^4]\cos 2E + e[1-e^2-4e^4]\cos 3E),$$

$$\psi_{26}=\frac{L(\beta,E)^2}{4e^2}(10-15e\cos E+6\cos 2E-e\cos 3E),$$

$$\psi_{27}=-\frac{9S(\beta,E)^2}{\eta^5}(1+e\cos E)\left(e^2(\eta+2)-2(\eta+1)\right),$$

$$\psi_{28}=-\frac{1}{e^2\eta}A(\beta,E)L(\beta,E)\times$$
$$\times\left(3e\sin E+6\eta^2\sin 2E-e\sin 3E\right),$$

$$\psi_{29}=-\frac{12(\eta+1)}{e\eta^4}A(\beta,E)S(\beta,E)\left(2\sin E-e^3\sin 2E\right),$$

$$\psi_{2,10}=\frac{12}{e}\left(1+\frac{1}{\eta}\right)L(\beta,E)S(\beta,E)\cos E,$$

$$\psi_{31}=\frac{1}{8}(1-\eta)^2\left(4+19e^2-20e\cos E+\right.$$
$$\left.+\,4[1-3e^2]\cos 2E+4e\cos 3E+e^2\cos 4E\right),$$

$$\psi_{32}=-A(\beta,E)\left(\eta-\eta^2\right)(7e\sin E-2\sin 2E-e\sin 3E),$$

$$\psi_{33}=-\frac{1-\eta}{2}L(\beta,E)\left(2[3e^2+1]-9e\cos E+\right.$$
$$\left.+\,2\eta^2\cos 2E+e\cos 3E\right),$$

$$\psi_{34}=2\eta^2A(\beta,E)^2(1-\cos 2E),$$

$$\psi_{35}=\frac{1}{2}L(\beta,E)^2\left(1+2e^2-4e\cos E-cos2E\right),$$

$$\psi_{36}=2\eta A(\beta,E)L(\beta,E)(2e\sin E-\sin 2E),$$

$$\psi_{41}=\frac{e}{8\eta^3(\eta+1)^2}(4[44(\eta+1)-e^2(6\eta+26)-$$
$$-3e^4(5\eta+8)+6e^6]\sin E-2e[24(\eta+1)+6e^2\eta-$$
$$-e^4(17\eta+30)+6e^6]\sin 2E-4e^2[4(\eta+1)-$$
$$-e^2(\eta+4)]\sin 3E-e^3\left[2(\eta+1)-e^2(\eta+2)\right]\sin 4E),$$

$$\psi_{42}=\frac{2}{e\eta^2}A(\beta,E)\left(e[7+3e^2]-[2+12e^2+\right.$$
$$\left.+\,e^4]\cos E+e[1+5e^2]\cos 2E-e^4\cos 3E\right),$$

$$\psi_{43}=-\frac{\eta}{e}L(\beta,E)\left(2\sin E-e\sin 2E\right),$$

$$\psi_{44}=-\frac{3e(\eta+1)}{\eta^2}S(\beta,E)\left(2\sin E-e\sin 2E\right).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

В данном разделе приведены базовые интегралы, к которым сводятся все интегралы раздела 4. Используя [9, п. **3.6.3**], запишем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dE=1,\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kE\,dE=0,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r}{a}\cos E\,dE=-\frac{e}{2},\qquad(39)$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{r}{a}\cos kE\,dE=0\text{ при }k\ge 2.$$

Согласно [3, пп. **4.575**.1, **4.224**.15, **4.397**.6]:

$$\int_0^{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\beta\sin E}{1-\beta\cos E}\right)\sin kE\,dE=\frac{\pi}{2k}\beta^k\text{ при }\beta^2<1,$$

$$\int_0^{\pi}\ln\left(1-2\beta\cos E+\beta^2\right)dE=0\text{ при }\beta^2\le 1,\qquad(40)$$

$$\int_0^{\pi}\ln\left(1-2\beta\cos E+\beta^2\right)\cos kE\,dE=-\frac{\pi}{k}\beta^k\text{ при }\beta^2<1.$$

Найдем значения этих интегралов на интервале $E\in[-\pi,\pi]$. С помощью замены $E\to -E$ легко показать, что в этих трех случаях

$$\int_{-\pi}^{0}f(\beta,E)dE=\int_0^{\pi}f(\beta,E)dE.\qquad(41)$$

Хотя подынтегральные функции в выражениях (40) являются разрывными функциями в точке $E=0$ при значениях β, близких к 1, согласно [3], на интервале $[0,\pi]$ при $\beta^2<1$ эти интегралы существуют. Поэтому представим их в виде суммы двух несобственных интегралов [10] и с учетом (41) получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(\beta,E)dE=$$
$$=\int_{-\pi}^{0}f(\beta,E)dE+\int_0^{\pi}f(\beta,E)dE=2\int_0^{\pi}f(\beta,E)dE.$$

Осреднение по средней аномалии подразумевает эллиптичность оскулирующей орбиты, то есть $0<e$, $\beta<1$, следовательно в рамках поставленной в разделе 2 задачи условие $\beta^2<1$ выполняется. Таким образом, искомые интегралы

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A(\beta,E)\sin kE\,dE=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\beta\sin E}{1-\beta\cos E}\right)\sin kE\,dE=\frac{\beta^k}{2k},\qquad(42)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}L(\beta,E)dE=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(1-2\beta\cos E+\beta^2\right)dE=0,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} L(\beta, E)\cos kE\,dE =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 - 2\beta\cos E + \beta^2\right)\cos kE\,dE = -\frac{\beta^k}{k}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

В разделе 4 используются преобразования произведений тригонометрических функций в суммы:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nE\cos kE =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n[\cos(n-k)E + \cos(n+k)E], \qquad (43)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin nE\cos kE =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n[\sin(n-k)E + \sin(n+k)E], \qquad (44)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nE\sin kE =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n[\sin(n+k)E - \sin(n-k)E]. \qquad (45)$$

Для тригонометрического ряда вида

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nE$$

справедливы соотношения:

$$s^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_n a_k \cos nE\cos kE =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_n a_k[\cos(n-k)E + \cos(n+k)E],$$

$$s^2(1 + e\cos E) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_n a_k[\cos(n-k)E + \cos(n+k)E] + \qquad (46)$$

$$+ \frac{e}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_n a_k[\cos(n-k-1)E + \cos(n-k+1)E +$$

$$+ \cos(n+k-1)E + \cos(n+k+1)E].$$

Интегрирование (46) равносильно сохранению в тригонометрическом ряде (46) только свободных членов:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s^2(1 + e\cos E)dE =$$

$$= a_0^2 + ea_0a_1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + ea_na_{n+1}). \qquad (47)$$

Для произведения рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nE \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mE$$

имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_n a_m \sin nE\cos mE =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_n a_m[\sin(n-m)E + \sin(n+m)E]. \qquad (48)$$

Далее умножение (48) на $\sin kE$ дает:

$$s_k = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_n a_m \sin nE\cos mE\sin kE =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_n a_m[\cos(n-m-k)E -$$

$$- \cos(n-m+k)E + \cos(n+m-k)E -$$

$$- \cos(n+m+k)E]. \qquad (49)$$

Интеграл от (49) не равен нулю только в случае обнуления аргументов косинусов, что возможно, если $n - m - k = 0$, $n - m + k = 0$ или $n + m - k = 0$. Поэтому

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_k\,dE = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{k-1}\left(a_n a_{k-n} - a_n a_{n+k}\right) - \right.$$

$$\left. - a_k a_{2k} + \sum_{n=k+1}^{\infty}\left(a_n a_{n-k} - a_n a_{n+k}\right)\right). \qquad (50)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Т.Н. Санникова, К.В. Холшевников*, Астрон. журн. **96**(5), 418 (2019).
2. *Н. Батмунх, Т.Н. Санникова, К.В. Холшевников, В.Ш. Шайдулин*, Астрон. журн. **93**(3), 331 (2016).
3. *И.С. Градштейн, И.М. Рыжик*, Таблицы интегралов, рядов и произведений (СПб.: БХВ-Петербург, 2011).
4. Small-Body Database Lookup, Jet Propulsion Laboratory NASA, California Institute of Technology, https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_lookup.html#/.
5. *Т.Н. Санникова*, Астрон. журн. **98**(4), 321 (2021).
6. *D. Vokrouhlický*, Astron. and Astrophys. **344**, 362 (1999).
7. *J. Ďurech, D. Vokrouhlický, P. Pravec, J. Hanuš, et al.*, Astron. and Astrophys. **609**, id. A86 (2018).
8. *Т.Н. Санникова*, Астрон. журн. **99**(6), 506 (2022).
9. *К.В. Холшевников, В. Б. Титов*, Задача двух тел. Учеб. пособие (СПб.: изд. СПбГУ, 2007).
10. *Г.М. Фихтенгольц*, Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2 (М.: Физматлит, 2001).

DISPLACEMENT NORM IN THE PRESENCE OF AN INVERSE-SQUARE PERTURBING ACCELERATION IN THE REFERENCE FRAME ASSOCIATED WITH THE RADIUS VECTOR

T. N. Sannikova[a]

[a]*Crimean Astrophysical Observatory of RAS, Nauchny, Crimea, Russia*

The problem of motion of a zero-mass point under the influence of attraction to the central body and a small perturbing acceleration $\mathbf{P}' = \mathbf{P}/r^2$ is considered, where r is the distance to the attracting center, components of the vector $\mathbf{P}$ are assumed to be constant in a reference system with axes directed along the radius vector, the transversal and the angular momentum vector. Previously, for this problem, we found equations of motion in the mean elements and formulas for the transition from the osculating elements to the mean elements in the first order of smallness; we neglected second-order quantities. In this work, the Euclidean (root–mean–square over the mean anomaly) displacement norm $\|d\mathbf{r}\|^2$ is obtained, where $d\mathbf{r}$ represents the difference between the position vectors on the osculating and mean orbit. It turned out that $\|d\mathbf{r}\|^2$ depends only on the components of the vector $\mathbf{P}$ (positive definite quadratic form), the semi–major axis (proportional to the second power) and the eccentricity of the osculating ellipse. The norm $\|d\mathbf{r}\|^2$ is obtained in the form of series in powers of the $\beta = e/(1 + \sqrt{1-e^2})$ and in powers of the eccentricity e. The results are applied to the problem of the motion of asteroids under the influence of a perturbing acceleration inversely proportional to the square of the heliocentric distance, in particular, under the influence of the Yarkovsky effect.

Keywords: sunlight pressure, Yarkovsky effect, non-gravitational parameters, root mean square norm, displacement of the osculating orbit from the mean orbit, near-Earth asteroids