

# НОРМА СМЕЩЕНИЯ ПРИ ВОЗМУЩАЮЩЕМ УСКОРЕНИИ, МЕНЯЮЩЕМСЯ ПО ЗАКОНУ ОБРАТНЫХ КВАДРАТОВ, В СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА, СВЯЗАННОЙ С РАДИУСОМ-ВЕКТОРОМ

© 2024 г. Т. Н. Санникова<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>ФГБУН Крымская астрофизическая обсерватория РАН, п. Научный, Крым, Россия

\*E-mail: tnsannikova@craocrimea.ru

Поступила в редакцию 10.11.2023 г.

После доработки 12.01.2024 г.

Принята в печать 29.01.2024 г.

Рассмотрена задача движения точки нулевой массы под действием притяжения к центральному телу и малого возмущающего ускорения  $\mathbf{P}' = \mathbf{P}/r^2$ , где  $r$  — расстояние до притягивающего центра, компоненты вектора  $\mathbf{P}$  полагаются постоянными в системе отсчета с осями, направленными по радиусу-вектору, трансверсали и вектору площадей. Ранее для данной задачи найдены уравнения движения в средних элементах и формулы перехода от оскулирующих элементов к средним в первом порядке малости; величинами второго порядка мы пренебрегаем. В данной работе получена евклидова (среднеквадратичная по средней аномалии) норма смещения  $\|d\mathbf{r}\|^2$ , где  $d\mathbf{r}$  представляет разность векторов положения на оскулирующей и средней орбите. Оказалось, что  $\|d\mathbf{r}\|^2$  зависит только от компонентов вектора  $\mathbf{P}$  (положительно определенная квадратичная форма), большой полуоси (пропорционально второй степени) и эксцентриситета оскулирующего эллипса. Норма  $\|d\mathbf{r}\|^2$  получена в виде рядов по степеням  $\beta = e/(1 + \sqrt{1 - e^2})$  и по степеням эксцентриситета  $e$ . Результаты применены к задаче о движении астероидов под действием возмущающего ускорения, обратно пропорционального квадрату гелиоцентрического расстояния, в частности, под влиянием эффекта Ярковского.

*Ключевые слова:* давление солнечного света, эффект Ярковского, негравитационные параметры, среднеквадратичная норма, смещение оскулирующей орбиты от средней, астероиды, сближающиеся с Землей

DOI: 10.31857/S0004629924030096 EDN: KIENHG

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В статье [1] сформулирована задача о движении точки нулевой массы  $A$  под действием притяжения к центральному телу  $S$  (например, к Солнцу) и возмущающего ускорения  $\mathbf{P}'$ , которое подчиняется закону обратных квадратов  $\mathbf{P}' = \mathbf{P}/r^2$ , где  $r = |\mathbf{r}|$  — модуль радиуса-вектора  $\mathbf{r} = SA$ . Компоненты  $S$ ,  $T$ ,  $W$  вектора  $\mathbf{P}$  постоянны в системе отсчета  $\mathcal{O}$ , орты которой направлены по радиусу-вектору, трансверсали (перпендикуляр к радиусу-вектору в плоскости оскулирующей орбиты в сторону движения) и бинормали (направленной по вектору площадей) соответственно.

Отношение модулей возмущающего ускорения  $|\mathbf{P}'|$  и вызванного притяжением к центральному телу основного ускорения  $\kappa^2/r^2$  считается малым порядком  $\mu$ :

$$\max \frac{|\mathbf{P}'|}{\kappa^2 r^2} = \max \frac{|\mathbf{P}|}{\kappa^2} = \mu \ll 1,$$

где  $\kappa^2$  — произведение постоянной тяготения на массу  $S$ . Величинами порядка  $\mu^2$  пренебрегаем.

В работе [1] к уравнениям движения описанной задачи применено осредняющее преобразование,

найлены уравнения движения в средних элементах и формулы перехода от оскулирующих элементов к средним.

Если возмущающие силы малы, то средняя орбита слабо отклоняется от оскулирующей. Разность  $d\mathbf{r}$  положений небесного тела на средней и оскулирующей орбитах является квазипериодической функцией времени. Данная статья посвящена определению евклидовой (среднеквадратичной по средней аномалии) нормы смещения  $\|d\mathbf{r}\|^2$  оскулирующей орбиты относительно средней, что позволит оценить величину периодических возмущений, возникающих вследствие сил, обратно пропорциональных квадрату расстояния от Солнца (например, эффект Ярковского, давление солнечного света), и принять решение о необходимости их учета либо возможности ограничиться только вековыми дрейфами.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть элементы орбиты  $\omega$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\sigma$ ,  $M$  — среднее движение, эксцентриситет, наклон, долгота восходящего узла, аргумент перицентра и средняя аномалия соответственно.

Переход от оскулирующих элементов к средним выполняется по формуле

$$\epsilon_n = \bar{\epsilon}_n + u_n. \quad (1)$$

Здесь  $\epsilon_n$  — шесть оскулирующих элементов, взятых в указанном выше порядке;  $\bar{\epsilon}_n$  — шесть средних элементов. Величины  $u_n$  считаются функциями средних элементов  $\bar{\epsilon}_k$ , но в первом приближении безразлично, считать ли аргументы  $u_n$  средними или оскулирующими.

Явные выражения  $u_n$  найдены в [1] и приведены в Приложении А (формулы (35)).

Далее в качестве основной системы элементов орбиты будем использовать  $a, e, i, \Omega, \sigma, M$ , где  $a$  — большая полуось. Используя связь среднего движения и большой полуоси  $\omega = \kappa a^{-3/2}$ ,  $d\omega = (-3/2)\kappa a^{-5/2} da$ , заменим  $u_1$  в системе уравнений (35) на выражение, относящееся к большой полуоси:

$$u_1 = -\frac{2a}{\kappa^2 \eta^2} [e(\cos \theta + e)S - (e \sin \theta + \theta - M)T]. \quad (2)$$

Здесь и ниже  $\eta = \sqrt{1 - e^2}$ ,  $\beta = e/(1 + \eta)$ ,  $\theta$  — истинная аномалия,  $E$  — эксцентрическая аномалия.

Запишем (2) и пять последних уравнений (35) как приращения элементов и выразим их через эксцентрическую аномалию, учитывая соотношения, приведенные в Приложении Б.

В результате

$$\begin{aligned} \delta a &= -\frac{2aeS}{\eta^2 \kappa^2} \left( \frac{a}{r} (\cos E - e) + e \right) + \\ &+ \frac{2aT}{\eta^2 \kappa^2} \left( e \sin E \left( 1 + \frac{a}{r} \eta \right) + 2A(\beta, E) \right), \\ \delta e &= -\frac{S}{\kappa^2} \left( \frac{a}{r} (\cos E - e) + e \right) + \\ &+ \frac{T}{e \kappa^2} \left( e \sin E \left( 1 - \eta + \frac{a}{r} \eta \right) + 2A(\beta, E) \right), \\ \delta i &= \frac{W}{e \eta \kappa^2} (\cos \sigma [e \sin E (\eta - 1) + 2\eta A(\beta, E)] + \\ &+ \eta \sin \sigma [1 - \eta - L(\beta, E)]), \\ \delta \Omega &= \frac{W}{e \eta \kappa^2 \sin i} (\sin \sigma [e \sin E (\eta - 1) + 2\eta A(\beta, E)] - \\ &- \eta \cos \sigma [1 - \eta - L(\beta, E)]), \\ \delta \sigma &= -\frac{\eta S}{e \kappa^2} \frac{a}{r} \sin E - \frac{T}{e^2 \kappa^2} \times \\ &\times \left( e \frac{a}{r} (\cos E - e) + e^2 + 1 - \eta - L(\beta, E) \right) - \delta \Omega \cos i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta M &= \frac{S}{\kappa^2} \left( e \sin E + \frac{\eta^2}{e} \frac{a}{r} \sin E \right) + \\ &+ \frac{T}{\eta^2 \kappa^2} \left[ \frac{(\eta + 2)\eta^3}{\eta + 1} + \frac{\eta^3}{e} \frac{a}{r} (\cos E - e) - \right. \\ &- \frac{3}{4} e^2 \cos 2E + 3e(\eta + 1) \left( \frac{e}{2} + \cos E \right) - \\ &- \frac{\eta^3}{e^2} L(\beta, E) + \frac{3\beta(2 + \beta^2)}{1 + \beta^2} \times \\ &\left. \times \left( \frac{e}{2} + \cos E \right) - \frac{6}{1 + \beta^2} S(\beta, E) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} A(\beta, E) &= \arctg \frac{\beta \sin E}{1 - \beta \cos E}, \\ L(\beta, E) &= \ln(1 - 2\beta \cos E + \beta^2), \\ S(\beta, E) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1 - (n-1)\beta^2}{n^2(n^2 - 1)} \beta^n \cos nE. \end{aligned} \quad (4)$$

Оценим вклад периодических возмущений (3).

### 3. РАЗНОСТЬ ОСКУЛИРУЮЩЕГО И СРЕДНЕГО РАДИУСА-ВЕКТОРА

Согласно [2], разность оскулирующего и среднего радиуса-вектора может быть выражена через разности элементов орбиты:

$$(d\mathbf{r})^2 = \delta r^2 + r^2(\delta u + \cos i \delta \Omega)^2 + r^2(\sin u \delta i - \sin i \cos u \delta \Omega)^2, \quad (5)$$

где  $u$  — аргумент широты,

$$\begin{aligned} \delta r &= \frac{r}{a} \delta a + \frac{a^2}{r} (e - \cos E) \delta e + \frac{a^2}{r} e \sin E \delta M, \\ r(\delta u + \cos i \delta \Omega) &= \frac{a^2}{\eta r} (2 - e^2 - e \cos E) \sin E \delta e + \\ &+ r \delta \sigma + r \cos i \delta \Omega + \frac{a^2 \eta}{r} \delta M, \\ r(\sin u \delta i - \sin i \cos u \delta \Omega) &= \\ &= a [(\cos E - e) \sin \sigma + \eta \sin E \cos \sigma] \delta i - \\ &- a \sin i [(\cos E - e) \cos \sigma - \eta \sin E \sin \sigma] \delta \Omega. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя (3) в (6), получим:

$$\begin{aligned} \delta r &= \frac{Sa^3}{4\kappa^2 r^2} \Phi_1 + \frac{Ta^3}{\kappa^2 r^2} \Phi_2, \\ r(\delta u + \cos i \delta \Omega) &= \frac{Ta^3}{\kappa^2 r^2} \Phi_3, \\ r(\sin u \delta i - \sin i \cos u \delta \Omega) &= \frac{Wa}{\kappa^2 e} \Phi_4. \end{aligned} \quad (7)$$

Функции  $\Phi_i$  приведены в Приложении В (формулы (37)).

С учетом (5) и (7)

$$(d\mathbf{r})^2 = \frac{S^2 a^6}{16\mathcal{L}^4 r^4} \Phi_1^2 + \frac{STa^6}{2\mathcal{L}^4 r^4} \Phi_1 \Phi_2 + \frac{T^2 a^6}{\mathcal{L}^4 r^4} (\Phi_2^2 + \Phi_3^2) + \frac{W^2 a^2}{\mathcal{L}^4 e^2} \Phi_4^2. \quad (8)$$

В знаменателях первых трех слагаемых (8) содержится  $r^4$ , но после возведения в квадрат и приведения подобных слагаемых результирующие выражения сократятся на  $r^3$ :

$$(d\mathbf{r})^2 = \frac{S^2 a^2}{16\mathcal{L}^4} \frac{a}{r} \Psi_1 + \frac{T^2 a^2}{\mathcal{L}^4} \frac{a}{r} \Psi_2 + \frac{W^2 a^2}{\mathcal{L}^4 e^2} \Psi_3 + \frac{STa^2}{\mathcal{L}^4} \frac{a}{r} \Psi_4, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= 8(2 + 3e^2) - 12e(4 + e^2) \cos E + \\ &\quad + 24e^2 \cos 2E - 4e^3 \cos 3E, \\ \Psi_2 &= \Psi_{21} + \Psi_{22} + \Psi_{23} + \Psi_{24} + \Psi_{25} + \Psi_{26} + \\ &\quad + \Psi_{27} + \Psi_{28} + \Psi_{29} + \Psi_{2,10}, \\ \Psi_3 &= \Psi_{31} + \Psi_{32} + \Psi_{33} + \Psi_{34} + \Psi_{35} + \Psi_{36}, \\ \Psi_4 &= \Psi_{41} + \Psi_{42} + \Psi_{43} + \Psi_{44}. \end{aligned} \quad (10)$$

Выражения  $\psi_{ij}$  приведены в Приложении В (формулы (38)).

Оставшиеся в знаменателях (9)  $r$  сократятся при вычислении среднеквадратичной нормы по средней аномалии

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dM = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 (1 - e \cos E) dE = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 \frac{r}{a} dE. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставив (9) в (11), получим:

$$\begin{aligned} \rho^2 = \|d\mathbf{r}\|^2 &= \frac{S^2 a^2}{16\mathcal{L}^4} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_1 dE + \\ &+ \frac{T^2 a^2}{\mathcal{L}^4} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_2 dE + \frac{W^2 a^2}{\mathcal{L}^4 e^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_3 \frac{r}{a} dE + \\ &+ \frac{STa^2}{\mathcal{L}^4} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_4 dE. \end{aligned} \quad (12)$$

#### 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Согласно (12), вычисление  $\rho^2$  сводится к нахождению интегралов функций, встречающихся в выражениях (10). Вычислим эти интегралы.

Функция  $\Psi_4$  является нечетной, так как  $\sin kE$  и  $A(\beta, E)$  — нечетные, а  $L(\beta, E)$  и  $S(\beta, E)$  — четные, поэтому

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_4 dE = 0. \quad (13)$$

Перейдем к интегралам четных функций. Некоторые вспомогательные формулы, используемые далее в разделе 4, приведены в Приложениях Г и Д.

##### 4.1. Функции, содержащие тригонометрический многочлен, $A(\beta, E)$ , $L(\beta, E)$ или $S(\beta, E)$

С помощью формул (39) и (42) найдем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_1 dE &= 8(3e^2 + 2), \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{21} dE &= \frac{8 + 769\beta^2 + 2818\beta^4 + 3348\beta^6}{2(1 - \beta^2)^4(1 + \beta^2)^2} + \\ &\quad + \frac{2077\beta^8 + 587\beta^{10} + 91\beta^{12} + 2\beta^{14}}{2(1 - \beta^2)^4(1 + \beta^2)^2}, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{22} dE &= \frac{96 + 2406\beta^2 + 4684\beta^4 + 3665\beta^6}{24(1 - \beta^2)^4(1 + \beta^2)} + \\ &\quad + \frac{2240\beta^8 + 900\beta^{10} + 348\beta^{12} + 13\beta^{14}}{24(1 - \beta^2)^4(1 + \beta^2)}, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{23} dE &= \frac{96 + 534\beta^2 + 886\beta^4 + 397\beta^6 + 13\beta^8}{24(1 - \beta^4)}, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{31} \frac{r}{a} dE &= \frac{1}{8}(4 + 29e^2)(1 - \eta)^2, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{32} \frac{r}{a} dE &= -\frac{\beta^4(1 - \beta^2)(30 + 16\beta^2 - \beta^4)}{2(1 + \beta^2)^4}, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{33} \frac{r}{a} dE &= -\frac{\beta^4(138 + 486\beta^2 + 89\beta^4 - 3\beta^6)}{6(1 + \beta^2)^4}. \end{aligned} \quad (14)$$

Перейдем к более сложной функции  $\psi_{24}$ , содержащей сумму  $S(\beta, E)$ . Учитывая, что с помощью (43) произведение косинусов кратных аргументов сводится к сумме косинусов кратных аргументов, а также вторую формулу в (39), получим, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\beta, E) \cos kE dE =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1-(n-1)\beta^2}{2n^2(n^2-1)} \beta^n \times \\
 &\times \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-k)E + \cos(n+k)E] dE = \\
 &= \frac{k+1-(k-1)\beta^2}{2k^2(k^2-1)} \beta^k, \quad (15)
 \end{aligned}$$

так как интеграл справа в (15) принимает ненулевое значение только при  $n=k$  и не зависит от количества учитываемых членов суммы по  $n$ . Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_{24} dE = -\frac{\beta^4(45+77\beta^2-22\beta^4-3\beta^6)}{6(1-\beta^2)^4}. \quad (16)$$

#### 4.2. Функции, содержащие $A(\beta, E)^2$

Интегралы более сложных функций вычислены с использованием разложений в ряд, поэтому результаты приведены с точностью до такой степени  $\beta$ , которая позволяет получить как минимум 6 верных знаков в численном значении вплоть до  $\beta=0.9$ , что было проверено путем сравнения со значением, полученным методом численного интегрирования средствами компьютерной алгебры.

Учитывая разложение в ряд [3, п. 1.448.1]:

$$A(\beta, E) = \text{arctg}\left(\frac{\beta \sin E}{1-\beta \cos E}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n} \sin nE, \quad (17)$$

а также формулу (44) получим

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A^2(\beta, E) \cos kE dE = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(\beta, E) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n} \sin nE \cos kE dE = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{2n} \int_{-\pi}^{\pi} A(\beta, E) [\sin(n-k)E + \sin(n+k)E] dE. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Интеграл (18) приведем к сумме интегралов вида (42). В результате

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_{25} dE = \frac{(\beta^2+1)}{(1-\beta^2)^4} \times \\
 &\times \left( \frac{13}{8} + \frac{191}{16}\beta^2 + \frac{4333}{288}\beta^4 + \right. \\
 &+ \frac{14701}{960}\beta^6 + \frac{1711}{2880}\beta^8 + \frac{3359}{3600}\beta^{10} - \frac{7573}{235200}\beta^{12} - \\
 &\left. - \frac{29473}{8467200}\beta^{14} - \frac{17491}{25401600}\beta^{16} + \mathcal{O}(\beta^{18}) \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_{34} dE = \frac{\beta^2(1-\beta^2)^2}{(1+\beta^2)^3} \times \\
 &\times \left( \frac{3}{2} + \frac{5\beta^2}{12} - \frac{\beta^4}{72} - \frac{\beta^6}{720} - \frac{\beta^8}{3600} - \frac{\beta^{10}}{12600} + \mathcal{O}(\beta^{12}) \right). \quad (19)
 \end{aligned}$$

#### 4.3. Функции, содержащие $L(\beta, E)^2$

Далее учтем следующее разложение в ряд [3, п. 1.448.2]:

$$L(\beta, E) = \ln(1-2\beta \cos E + \beta^2) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n} \cos nE, \quad (20)$$

а также формулу (43). Тогда

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L^2(\beta, E) \cos kE dE = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L(\beta, E) \left( -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n} \cos nE \right) \cos kE dE = \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n} \int_{-\pi}^{\pi} L(\beta, E) [\cos(n-k)E + \\
 &\quad + \cos(n+k)E] dE. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл (21) приходит к виду, приведенному в (42). В результате

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_{26} dE = \frac{13}{8} + \frac{29}{16}\beta^2 + \frac{85}{288}\beta^4 + \frac{377}{2880}\beta^6 + \\
 &+ \frac{1}{32}\beta^8 + \frac{11}{960}\beta^{10} + \frac{737}{141120}\beta^{12} + \\
 &+ \frac{4619}{1693440}\beta^{14} + \frac{3977}{2540160}\beta^{16} + \mathcal{O}(\beta^{18}), \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_{35} dE = \frac{\beta^2}{(\beta^2+1)^3} \times \\
 &\times \left( \frac{3}{2} + \frac{229}{12}\beta^2 + \frac{797}{72}\beta^4 - \right. \\
 &- \frac{229}{720}\beta^6 + \frac{59}{3600}\beta^8 + \frac{37}{25200}\beta^{10} + \\
 &\left. + \frac{11}{44100}\beta^{12} + \frac{127}{2116800}\beta^{14} + \mathcal{O}(\beta^{16}) \right).
 \end{aligned}$$

#### 4.4. Функции, содержащие $S(\beta, E)^2$

С помощью (47) найдем

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S^2(\beta, E)(1+e \cos E) dE = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (a_n^2 + e a_n a_{n+1}), \quad (23)
 \end{aligned}$$

где

$$a_n = \frac{n+1-(n-1)\beta^2}{2n^2(n^2-1)}\beta^n.$$

С учетом (23) получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_{27} dE = \frac{\beta^4(\beta^2+1)}{(1-\beta^2)^4} \times \\ & \times \left( \frac{9}{8} + \frac{67}{72}\beta^2 - \frac{127}{128}\beta^4 + \frac{30857}{240000}\beta^6 + \frac{8843}{720000}\beta^8 + \right. \\ & \left. + \frac{1210691}{576240000}\beta^{10} + \frac{1551849}{3073280000}\beta^{12} + \mathcal{O}(\beta^{14}) \right). \end{aligned} \quad (24)$$

#### 4.5. Функции, содержащие $A(\beta, E)L(\beta, E)$

В функциях  $\psi_{28}$  и  $\psi_{36}$  встречаются три варианта интегралов:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(\beta, E)L(\beta, E) \sin kE dE \quad \text{при } k=1, 2, 3.$$

С учетом (17) и (20) запишем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(\beta, E)L(\beta, E) \sin kE dE = \frac{1}{2\pi} \times \\ & \times \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n} \sin nE \left( -2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta^m}{m} \cos mE \right) \sin kE dE = \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n} \frac{\beta^m}{m} \sin nE \cos mE \sin kE dE. \end{aligned} \quad (25)$$

Для нахождения интеграла справа в (25) используем формулы (49) и (50) для  $s_k$  при  $a_n = \beta^n/n$ ,  $a_m = \beta^m/m$ . Подставляя (50) в (25) и приводя подобные слагаемые, найдем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(\beta, E)L(\beta, E) \sin E dE = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_1 dE = 0,$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(\beta, E)L(\beta, E) \sin 2E dE = \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_2 dE = -\frac{a_1^2}{2} = -\frac{\beta^2}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(\beta, E)L(\beta, E) \sin 3E dE = \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_3 dE = -a_1 a_2 = -\frac{\beta^3}{2}. \end{aligned}$$

В итоге

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_{28} dE = \frac{3-4\beta^2-5\beta^4+2\beta^6}{4(1-\beta^2)}, \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_{36} dE = \frac{\beta^2+4\beta^4-5\beta^6}{(\beta^2+1)^3}. \end{aligned} \quad (26)$$

Выражения (26) точные. Значения, полученные с их помощью, отличаются от найденных путем численного интегрирования исходных выражений для  $\psi_{28}$  и  $\psi_{36}$  (38) не более чем на  $7 \cdot 10^{-9}$  вплоть до  $e=0.99$ .

#### 4.6. Функции, содержащие $A(\beta, E)S(\beta, E)$

С учетом (4):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(\beta, E)S(\beta, E) \sin kE dE = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(\beta, E) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1-(n-1)\beta^2}{n^2(n^2-1)} \times \\ & \times \beta^n \cos nE \sin kE dE. \end{aligned} \quad (27)$$

Применение формулы (45) приводит интеграл (27) к виду, приведенному в (42):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(\beta, E)S(\beta, E) \sin kE dE = \\ & = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1-(n-1)\beta^2}{2n^2(n^2-1)} \beta^n \times \\ & \times \int_{-\pi}^{\pi} A(\beta, E) [\sin(n+k)E - \sin(n-k)E] dE. \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_{29} dE = \frac{\beta^2(\beta^2+1)}{(1-\beta^2)^4} \times \\ & \times \left( \frac{3}{2} + \frac{11}{3}\beta^2 + \frac{17}{24}\beta^4 + \frac{629}{600}\beta^6 - \frac{17}{20}\beta^8 + \frac{547}{14700}\beta^{10} + \right. \\ & \left. + \frac{207}{39200}\beta^{12} + \frac{1}{864}\beta^{14} + \frac{1}{3024}\beta^{16} + \mathcal{O}(\beta^{18}) \right). \end{aligned} \quad (28)$$

#### 4.7. Функции, содержащие $L(\beta, E)S(\beta, E)$

По аналогии с п. 4.6, учитывая (43):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L(\beta, E)S(\beta, E) \cos E dE = \\ & = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1-(n-1)\beta^2}{2n^2(n^2-1)} \beta^n \times \end{aligned}$$

$$\times \int_{-\pi}^{\pi} L(\beta, E) [\cos(n-k)E + \cos(n+k)E] dE. \quad (29)$$

Интеграл (29) перепишем как сумму интегралов, приведенных в (42). Вычисления дают

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{2,10} dE = -\frac{\beta^2(\beta^2+1)}{1-\beta^2} \times \\ & \times \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{6}\beta^2 - \frac{1}{8}\beta^4 - \frac{2}{75}\beta^6 - \frac{1}{120}\beta^8 - \frac{4}{1225}\beta^{10} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{672}\beta^{12} - \frac{1}{1323}\beta^{14} - \frac{1}{2400}\beta^{16} - \mathcal{O}(\beta^{18}) \right). \quad (30) \end{aligned}$$

### 5. НОРМА РАЗНОСТИ ОСКУЛИРУЮЩИХ И СРЕДНИХ ЭЛЕМЕНТОВ

С учетом результатов раздела 4, подставляя (13), (14), (16), (19), (22), (24), (26), (28) и (30) в (12) и суммируя, в итоге получим норму разности оскулирующих и средних элементов:

$$\varrho^2 = \frac{a^2}{2e^4} (V_1 S^2 + V_2 T^2 + V_3 W^2), \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1 + 8\beta^2 + \beta^4}{(\beta^2 + 1)^2}, \\ V_2 &= \frac{1}{(1 - \beta^2)^4 (\beta^2 + 1)^2} \left( 16 + \frac{4133}{8}\beta^2 + \right. \\ & + \frac{125819}{72}\beta^4 + \frac{598249}{288}\beta^6 + \frac{8028469}{5760}\beta^8 + \\ & + \frac{190263323}{360000}\beta^{10} + \frac{1366999573}{11760000}\beta^{12} + \\ & + \frac{2497264733}{345744000}\beta^{14} + \frac{2619693301}{49787136000}\beta^{16} + \\ & + \frac{247809799}{224042112000}\beta^{18} + \frac{6893993549}{90363651840000}\beta^{20} + \\ & \left. + \frac{25909767071}{2733500468160000}\beta^{22} + \mathcal{O}(\beta^{24}) \right), \\ V_3 &= \frac{1}{(\beta^2 + 1)^2} \left( 1 - \frac{23}{8}\beta^2 + \frac{137}{36}\beta^4 + \frac{181}{288}\beta^6 + \right. \\ & + \frac{13}{400}\beta^8 + \frac{1}{720}\beta^{10} + \frac{29}{176400}\beta^{12} + \\ & \left. + \frac{1}{31360}\beta^{14} + \frac{53}{6350400}\beta^{16} + \mathcal{O}(\beta^{18}) \right). \end{aligned} \quad (32)$$

В (32) выражение для  $V_1$  — точное, в то время как  $V_2$  и  $V_3$  содержат ряды по степеням  $\beta$  с количеством членов, которое обеспечивает не менее 6 верных знаков вплоть до  $e = 0.9$ . Приведем также выражения  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_3$  в виде разложений по степеням эксцентриситета  $e$ :

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} (2 + 3e^2), \\ V_2 &= \frac{1}{(1 - e^2)^2} \left( 16 + \frac{3365e^2}{32} - \frac{12601e^4}{1152} - \right. \\ & - \frac{13327e^6}{2048} - \frac{226339e^8}{163840} - \frac{62588263e^{10}}{92160000} - \\ & - \frac{2858553277e^{12}}{7225344000} - \frac{481288874237e^{14}}{1888223232000} - \\ & - \frac{81926146135181e^{16}}{466121392128000} - \frac{26706320975807e^{18}}{209754626457600} - \\ & - \frac{54008796826067863e^{20}}{564006884474880000} - \\ & - \frac{1012524795532113487e^{22}}{13648966604292096000} - \\ & \left. - \frac{169277617999717931593e^{24}}{2875854989454999552000} - \mathcal{O}(e^{26}) \right), \\ V_3 &= 1 - \frac{39e^2}{32} + \frac{101e^4}{576} + \frac{599e^6}{6144} + \frac{19889e^8}{307200} + \\ & + \frac{86891e^{10}}{1843200} + \frac{145911e^{12}}{4014080} + \frac{14979701e^{14}}{513802240} + \\ & + \frac{286187473e^{16}}{11890851840} + \frac{402547717e^{18}}{19818086400} + \\ & + \frac{3098641663e^{20}}{177628774400} + \mathcal{O}(e^{22}). \end{aligned} \quad (33)$$

В отличие от (32), выражения (33) дают приемлемую точность только при  $e < 0.7$ .

Исследуем поведение функций  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_3$  (32) на интервале  $e \in [0, 1]$ :

$$\min(V_1) = 1 \text{ при } e = 0, \quad \max(V_1) = 2.5 \text{ при } e = 1,$$

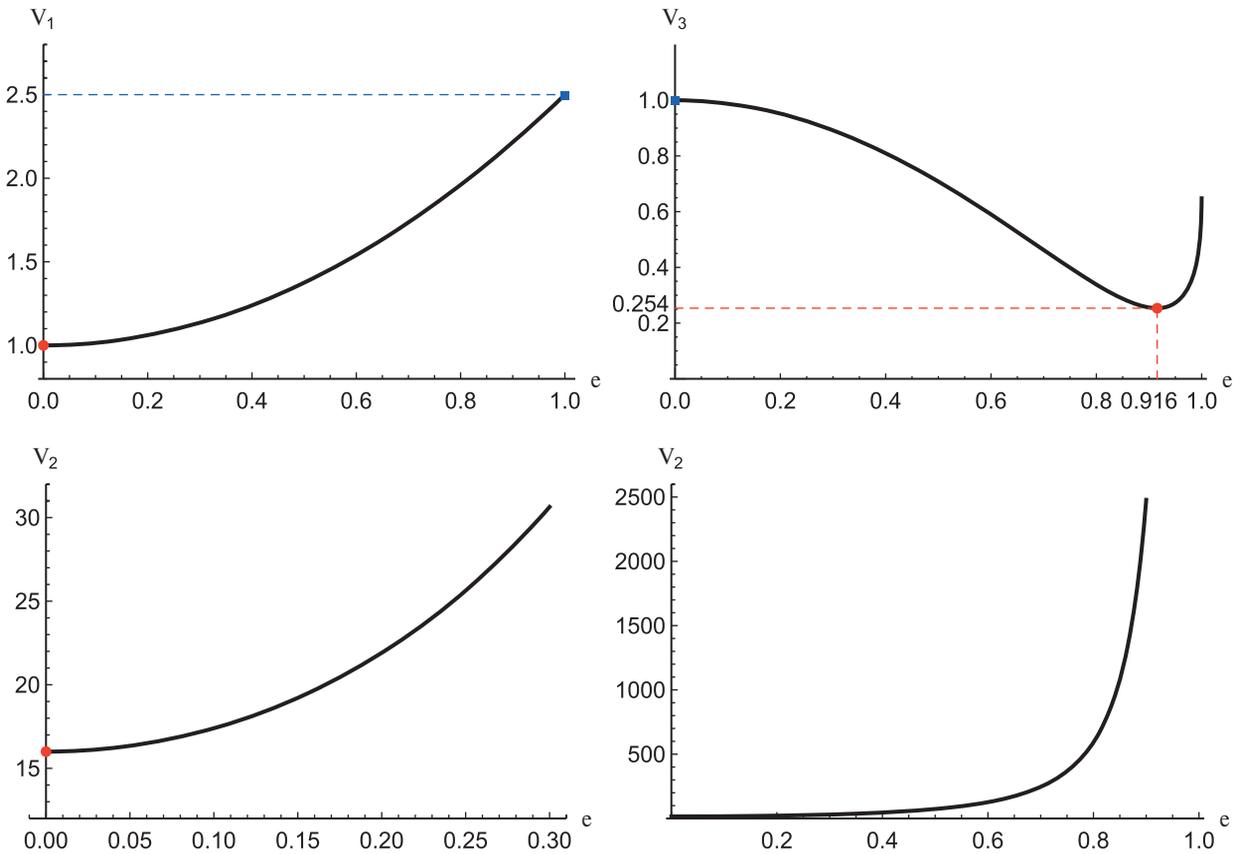
$V_1$  монотонно возрастает;

$$\min(V_2) = 16 \text{ при } e = 0, \quad V_2 \rightarrow \infty \text{ при } e \rightarrow 1,$$

$V_2$  монотонно возрастает;

$$\min(V_3) = 0.253528 \text{ при } e \approx 0.91557,$$

$$\max(V_3) = 1 \text{ при } e = 0.$$



**Рис. 1.** Значения  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  в зависимости от эксцентриситета  $e$  на интервале от 0 до 1. Нижние графики представляют  $V_2$  в разных масштабах, справа показаны значения  $V_2$  до  $e=0.9$ . На графиках отмечены точки максимумов (синие квадраты) и точки минимумов (красные кружки).

Таким образом,  $V_k > 0$ , следовательно норма  $\rho^2$  в (31) всегда положительна,  $\rho$  — действительное число. Зависимость  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_3$  от  $e$  показана на рис. 1.

Как и в задаче с постоянным возмущающим ускорением  $\mathbf{P}'$ , представленной в [2],  $\rho^2$  зависит только от компонентов вектора возмущающего ускорения  $(S, T, W)$  (положительно определенная квадратичная форма), большой полуоси (пропорционально второй степени) и эксцентриситета оскулирующего эллипса. От ориентации орбиты и положения точки  $\mathcal{A}$  на ней  $\rho^2$  не зависит.

Согласно [2], наибольшее значение  $\rho$  для данного оскулирующего эллипса при фиксированном модуле вектора  $\mathbf{P}$ :

$$\max \rho^2 = \frac{a^2}{\varkappa^4} P^2 \max\{V_1, V_2, V_3\},$$

где  $P = \sqrt{S^2 + T^2 + W^2} = \text{const}$ . Поскольку для всех  $e \in [0, 1]$   $V_2 > V_1 \geq V_3$  (равенство достигается только при  $e=0$ ), то

$$\max \rho^2 = \frac{a^2}{\varkappa^4} P^2 V_2, \quad \max \rho = \frac{a}{\varkappa^2} P \sqrt{V_2}. \quad (34)$$

## 6. ПРИМЕРЫ

### 6.1. Норма смещения положения некоторых объектов

Рассмотрим несколько объектов, для которых в базе данных малых тел Лаборатории реактивного движения (Small Body Database of Jet Propulsion Laboratory (JPL)) [4] приведены значения негравитационных параметров  $A_1, A_2, A_3$ , и указано, что при моделировании негравитационных возмущений использовалась модель обратной зависимости от квадрата гелиоцентрического расстояния. Радиальный  $A_1$ , трансверсальный  $A_2$  и нормальный  $A_3$  параметры связаны с компонентами  $(S, T, W)$  соотношениями:  $A_1 = S/r_0^2$ ,  $A_2 = T/r_0^2$  и  $A_3 = W/r_0^2$ , где  $r_0 = 1$  а. е. Величины  $S, T, W$  имеют размерность  $\text{м}^3/\text{с}^2$  или  $\text{а. е.}^3/\text{сут}^2$ , в то время как размерность параметров  $A_1, A_2, A_3$  —  $\text{а. е.}/\text{сут}^2$ .

В табл. 1 приведены исходные данные для выбранных малых тел. Вычислим для них смещение  $\rho = \sqrt{\rho^2}$  (31) оскулирующей орбиты относительно средней и максимальное значение  $\max \rho$  (34). При вычислениях использованы следующие константы:  $\varkappa = 1.52 \cdot 10^{10} \text{ м}^3/\text{с}^2$ ,  $1 \text{ а. е.} = 1.495978707 \cdot 10^{11} \text{ м}$ ,  $1 \text{ сут} = 86400 \text{ с}$ .

**Таблица 1.** Орбитальные элементы для различных объектов, а также норма смещения  $\rho$  и значение  $\max \rho$

Объект	$a$ , а.е.	$e$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$\rho$ , км	$\max \rho$ , км
2012LA	1.040348	0.0215929	$6.713 \cdot 10^{-11}$	$1.898 \cdot 10^{-12}$	—	35.544	141.562
2006RH120	1.033244	0.0245011	$1.382 \cdot 10^{-10}$	$-5.073 \cdot 10^{-11}$	$-1.299 \cdot 10^{-11}$	128.665	309.597
2011MD	1.056142	0.0370005	$7.444 \cdot 10^{-11}$	$-8.885 \cdot 10^{-13}$	—	39.833	159.929
2020GE	1.006201	0.0395558	$4.899 \cdot 10^{-11}$	$6.969 \cdot 10^{-13}$	—	24.991	100.363
2009BD	1.062043	0.0519601	$5.605 \cdot 10^{-11}$	$-1.146 \cdot 10^{-12}$	—	30.257	121.789
2015TC25	1.028443	0.1162244	$1.599 \cdot 10^{-10}$	$-5.274 \cdot 10^{-12}$	—	84.785	351.971
2010RF12	1.061114	0.1882240	$3.410 \cdot 10^{-11}$	$-2.122 \cdot 10^{-13}$	$-1.508 \cdot 10^{-11}$	20.381	92.072
1998KY26	1.232844	0.2018497	$1.601 \cdot 10^{-10}$	$-1.378 \cdot 10^{-13}$	$2.701 \cdot 10^{-11}$	104.091	474.902
2016NJ33	1.313399	0.2093322	$9.475 \cdot 10^{-10}$	$-5.486 \cdot 10^{-13}$	$8.485 \cdot 10^{-11}$	651.824	2997.424
2005VL1	0.891252	0.2246533	$-8.299 \cdot 10^{-10}$	$-8.321 \cdot 10^{-13}$	$-2.414 \cdot 10^{-11}$	387.958	1817.264
2008DB	1.053518	0.2329323	—	$-1.041 \cdot 10^{-12}$	—	2.728	2.728
2012TC4	1.620346	0.4039656	$2.388 \cdot 10^{-11}$	$-2.681 \cdot 10^{-13}$	—	21.878	133.979
2016GE1	2.065389	0.5197517	—	$-1.439 \cdot 10^{-12}$	—	13.572	13.572
2008BP16	0.828643	0.6495359	—	$-8.424 \cdot 10^{-14}$	—	0.464	0.464
2014QL433	2.090202	0.7176721	—	$9.315 \cdot 10^{-14}$	—	1.652	1.652
2014CP4	0.911642	0.8702356	—	$5.608 \cdot 10^{-14}$	—	0.986	0.986

**Примечание.** Приведены: большая полуось  $a$  и эксцентриситет  $e$ , а также негравитационные параметры  $A_1, A_2, A_3$  а. е./сут<sup>2</sup> по данным [4]. Прочерк означает, что значение параметра не приведено в базе JPL [4], при вычислениях в этом случае принято нулевое значение соответствующего параметра. Эпоха элементов орбиты JD 246 0200.5 (2023–Sep–13.0) TDB (дата обращения к базе данных JPL 30.10.2023).

Анализ результатов вычислений (см. табл. 1) показал, что в большинстве случаев отклонение оскулирующей орбиты от средней вследствие периодических возмущений мало, однако выявлены случаи со смещением порядка нескольких сотен километров, что говорит о необходимости учета периодических возмущений при краткосрочном прогнозировании движения объекта. Так, расстояние между ближайшими точками оскулирующих орбит астероида 2005 VL1 и Земли по сведениям JPL [4]  $MOID = 3.98405 \cdot 10^{-5}$  а. е. На таком расстоянии для земного наблюдателя ( $\varrho = 387.958$  км) будет соответствовать угловому расстоянию  $3.72^\circ$ , то есть положение объекта на небесной сфере, определенное с учетом периодических возмущений, может существенно отличаться от положения, определенного без их учета.

**6.2. Норма смещения вследствие эффекта Ярковского**

Найдем норму смещения оскулирующей орбиты относительно средней, возникающего вследствие действия эффекта Ярковского на астероиды 1685 Toro (1948 OA) и 101955 Bennu.

В статье [5] выведены формулы для вычисления негравитационных параметров  $A_1, A_2, A_3$  как средних значений за орбитальный период в рамках линейной теплофизической модели силы Ярковского для сферических астероидов [6] и найдены численные значения параметров для астероида 1685 Toro (1948 OA),

**Таблица 2.** Элементы орбиты для астероидов Bennu и Toro, а также смещение  $\rho$  и значение  $\max \rho$

Объект	101955 Bennu	1685 Toro
$a$ , а.е.	1.126391	1.367586
$e$	0.2037451	0.4358371
$S$	$9.91079 \cdot 10^{-14}$	$7.96229 \cdot 10^{-15}$
$T$	$-5.10168 \cdot 10^{-14}$	$-3.24047 \cdot 10^{-15}$
$W$	0	0
$\varrho$ , м	148.6	17.6
$\max \rho$ , м	298.7	43.8

**Примечание.** Приведены: большая полуось  $a$  и эксцентриситет  $e$ , а также компоненты  $S, T, W$  а. е.<sup>3</sup>/сут<sup>2</sup>. Эпоха элементов орбиты JD 246 0200.5 (2023–Sep–13.0) TDB (дата обращения к базе данных JPL 30.10.2023).

с использованием его теплофизических характеристик, опубликованных в [7]. В работе [8] приведены значения компонентов  $S, T$  и  $W$  ускорения Ярковского, вычисленные по методике [5] на основе теплофизических характеристик и параметров вращения астероида 101955 Bennu. Используя данные [5, 8] и элементы орбиты указанных астероидов, приведенные в базе JPL [4], найдем  $\varrho$  и  $\max \varrho$ . Исходные данные и результаты приведены в табл. 2, из которой следует, что при малых возмущающих ускорениях, характерных для эффекта Ярковского, смещение оскулирующей орбиты относительно средней мало и им можно пренебречь, учитывая лишь вековые дрейфы элементов орбиты.

### 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача движения точки нулевой массы под действием притяжения к центральному телу и малого возмущающего ускорения, обратно пропорционального квадрату расстояния до притягивающего центра в системе отсчета с осями, направленными по радиусу-вектору, трансверсали и вектору площадей. Получена евклидова (среднеквадратичная по средней аномалии) норма смещения  $\|d\mathbf{r}\|^2$ , где  $d\mathbf{r}$  представляет разность векторов положения на оскулирующей и средней орбите, что позволяет оценить величину периодических возмущений. Оказалось, что  $\|d\mathbf{r}\|^2$  зависит только от компонентов вектора  $\mathbf{P}$  (положительно определенная квадратичная форма), большой полуоси (пропорционально второй степени) и эксцентриситета оскулирующего эллипса.

Результаты применены к задаче о движении астероидов под действием возмущающего ускорения, обратно пропорционального квадрату гелиоцентрического расстояния. Показано, что в некоторых случаях положение объекта на небесной сфере, определенное с учетом периодических возмущений, может существенно отличаться от положения, определенного без их учета. Однако при малых возмущающих ускорениях, характерных для эффекта Ярковского, смещение оскулирующей орбиты относительно средней мало и им можно пренебречь, учитывая лишь вековые дрейфы элементов орбиты.

В дальнейшем планируется оценить норму смещения для аналогичной задачи в системе отсчета, связанной с вектором скорости.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит анонимного рецензента за ценные предложения и комментарии, которые улучшили качество и ясность статьи.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ

Данная статья выполнена за средства государственного задания, тема Рег. № 22022400207-0.

*Приложения*

### ПРИЛОЖЕНИЕ А

Явные выражения функций  $u_n$  в формулах перехода от оскулирующих элементов к средним (1), найденные в [1]:

$$u_1 = \frac{3\omega}{\kappa^2 \eta^2} [e(\cos \theta + e)S - (e \sin \theta + \theta - M)T],$$

$$\begin{aligned} u_2 &= -\frac{1}{\kappa^2}(\cos \theta + e)S + \\ &+ \frac{1}{\kappa^2 e} [(\theta - M) - \eta(E - M) + e \sin \theta]T, \\ u_3 &= \frac{1}{\kappa^2 \eta e} \left\{ \cos \sigma [\eta(\theta - M) - (E - M)] + \right. \\ &+ \left. \eta \sin \sigma \left[ \ln(1 + e \cos \theta) + 1 - \eta - \ln \frac{2\eta^2}{1 + \eta} \right] \right\} W, \\ u_4 &= \frac{1}{\kappa^2 \eta e \sin i} \left\{ \sin \sigma [\eta(\theta - M) - (E - M)] - \right. \\ &- \left. \eta \cos \sigma \left[ \ln(1 + e \cos \theta) + 1 - \eta - \ln \frac{2\eta^2}{1 + \eta} \right] \right\} W, \\ u_5 &= -\frac{1}{\kappa^2 e} \sin \theta S - \frac{1}{\kappa^2 e^2} \left[ e \cos \theta + e^2 + \right. \\ &+ \left. \ln(1 + e \cos \theta) + 1 - \eta - \ln \frac{2\eta^2}{1 + \eta} \right] T - u_4 \cos i, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} u_6 &= \frac{1}{\kappa^2} \left[ (E - M) + \frac{\eta}{e} \sin \theta \right] S + \frac{1}{\kappa^2 \eta^2} \times \\ &\times \left\{ 3e(1 + \eta) \left( \cos E + \frac{e}{2} \right) - \frac{3e^2}{4} \cos 2E + \frac{\eta^3}{e} \cos \theta + \frac{\eta^3}{e^2} \times \right. \\ &\times \left. \left[ \ln(1 + e \cos \theta) - \ln \frac{2\eta^2}{1 + \eta} \right] + \frac{(2 + \eta)\eta^3}{1 + \eta} - 3\mathcal{I}(\theta - E) \right\} T, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\theta - E) &= -\frac{\beta(2 + \beta^2)}{1 + \beta^2} \left( \frac{e}{2} + \cos E \right) + \\ &+ \frac{2}{1 + \beta^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n + 1 - (n - 1)\beta^2}{n^2(n^2 - 1)} \beta^n \cos nE. \end{aligned}$$

### ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Переход от истинной аномалии к эксцентрической осуществляется с помощью соотношений [9]:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{a}{r}(\cos E - e), \quad \sin \theta = \frac{a}{r} \eta \sin E, \\ r &= a(1 - e \cos E), \quad E - M = e \sin E, \\ \theta - E &= 2 \operatorname{arctg} \frac{\beta \sin E}{1 - \beta \cos E}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\theta - M = \theta - E + E - M = e \sin E + 2 \operatorname{arctg} \frac{\beta \sin E}{1 - \beta \cos E},$$

$$\ln(1 + e \cos \theta) - \ln \frac{2\eta^2}{1 + \eta} = -\ln(1 - 2\beta \cos E + \beta^2).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Функции  $\Phi_i$ , входящие в выражения (7):

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & 2(2 + 3e^2) - 3e(4 + e^2)\cos E + 6e^2\cos 2E - \\ & - e^3\cos 3E, \quad \Phi_2 = \frac{e \sin E}{4\eta^3(1 + \eta)^2} \times \\ & \times (44(1 + \eta) - e^2(26 + 6\eta) - 3e^4(8 + 5\eta) + 6e^6) - \\ & - \frac{e^2 \sin 2E}{8\eta^3(1 + \eta)^2} (24(1 + \eta) + 6e^2\eta - e^4(30 + 17\eta) + 6e^6) - \\ & - \frac{e^3 \sin 3E}{4\eta^3(1 + \eta)^2} (4(1 + \eta) - e^2(4 + \eta)) - \frac{e^4 \sin 4E}{16\eta^2} + \\ & + \frac{A(\beta, E)}{e\eta^2} (e(7 + 3e^2) - (2 + 12e^2 + e^4)\cos E + \\ & + e(1 + 5e^2)\cos 2E - e^4\cos 3E) - \\ & - \left( \frac{\eta}{e} \sin E - \frac{\eta}{2} \sin 2E \right) L(\beta, E) - \frac{3e(1 + \eta)}{2\eta^2} \times \\ & \times (2\sin E - e\sin 2E)S(\beta, E), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3 = & \frac{16(1 + \eta) - 4e^2(5 + 8\eta) + 9e^4}{8\eta(1 + \eta)} + \\ & + \frac{e \cos E}{8\eta(1 + \eta)^2} (128(1 + \eta) - e^2(98 + 38\eta) - e^4) - \\ & - \frac{e^2 \cos 2E}{2\eta(1 + \eta)^2} (28(1 + \eta) - e^2(18 + 5\eta)) + \\ & + \frac{e \cos 3E}{8\eta} (4(1 - \eta) + e^2(3 + 4\eta)) - \\ & - \frac{e^2 \cos 4E}{8\eta} (1 - \eta) + \frac{A(\beta, E)}{2e\eta} ((8 - 3e^2)\sin E - \\ & - 2e(3 - e^2)\sin 2E + e^2\sin 3E) + \\ & + \left( \frac{5}{2} - \frac{1}{4e}(8 + 7e^2)\cos E + \frac{3}{2}\cos 2E - \frac{e}{4}\cos 3E \right) \times \\ & \times L(\beta, E) - \frac{3(1 + \eta)}{\eta} (1 - e\cos E)S(\beta, E), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_4 = & \frac{(1 - \eta)}{2} (-3e + 2\cos E + e\cos 2E) + \\ & + 2\eta A(\beta, E)\sin E + (e - \cos E)L(\beta, E). \end{aligned}$$

Функции  $\Psi_{ij}$ , входящие в выражения (10):

$$\begin{aligned} \Psi_{21} = & \frac{1}{512\eta^5(\eta + 1)^4} (16384(\eta + 1) + \\ & + 512e^2(689\eta + 673) - 256e^4(1527\eta + 2224) + \\ & + 64e^6(711\eta + 3058) + 8e^8(2026\eta + 2296) - \\ & - 64e^{10}(18\eta + 89) + 16e[11264(\eta + 1) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + 16e^2(743\eta + 391) - 8e^4(3538\eta + 4457) + \\ & + e^6(9210\eta + 21128) - 3e^8(245\eta + 1044) + \\ & + 4e^{10}(6\eta + 35)]\cos E + 64e^2[3128(\eta + 1) - \\ & + 4e^2(1281\eta + 1672) + e^4(3069\eta + 5240) - \\ & - e^6(845\eta + 1944) + 44e^8(\eta + 6)]\cos 2E - \\ & - 8e^3[992(\eta + 1) - 16e^2(322\eta + 353) + \\ & + 12e^4(418\eta + 623) - \\ & - e^6(1281\eta + 3196) + 8e^8(8\eta + 47)]\cos 3E + \\ & + 16e^4[208(\eta + 1) - 8e^2(40\eta + 53) + \\ & + e^4(143\eta + 276) - 4e^6(4\eta + 15)]\cos 4E + \\ & + 8e^7[4(\eta + 1) - e^2(3\eta + 4)]\cos 5E, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{22} = & \frac{A(\beta, E)}{2e\eta^5(\eta + 1)^2} (2[32(\eta + 1) + 8e^2(15\eta + 13) - \\ & - e^4(126\eta + 197) + e^6(20\eta + 66) - 5e^8]\sin E + \\ & + 2e[66(\eta + 1) - 3e^2(49\eta + 61) + e^4(63\eta + 124) + \\ & + 5e^6(\eta - 1) - 2e^8]\sin 2E - 2e^2[8(\eta + 1) - \\ & - e^2(6\eta + 11) + 2e^4(2\eta + 3) - 3e^6]\sin 3E + \\ & + e^3[1 + \eta - e^2(3\eta + 4) + e^4(\eta + 3)]\sin 4E), \\ \Psi_{23} = & \frac{L(\beta, E)}{4e\eta(\eta + 1)^2} (-188e(\eta + 1) + e^3(33\eta + 125) - \\ & - 2[32(\eta + 1) + 4e^2(\eta - 3) + e^4(2\eta + 7)]\cos E - \\ & - 4e[33(\eta + 1) - e^2(4\eta + 19)]\cos 2E + \\ & + 2e^2[8(\eta + 1) - e^2(2\eta + 5)]\cos 3E - \\ & - e^3[\eta + 1]\cos 4E), \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{24} = & - \frac{S(\beta, E)}{4\eta^5(\eta + 1)^2} (12[16(\eta + 1) + 8e^2(7\eta + 6) - \\ & - e^4(61\eta + 91) + 3e^6(2\eta + 9)] + \\ & + 3e[384(\eta + 1) - 8e^2(43\eta + 67) + \\ & + e^4(47\eta + 169) - e^6(4\eta + 17)]\cos E + \\ & + 12e^2[10(\eta + 1) - 5e^2(\eta + 2) - e^4\eta]\cos 2E + \\ & + 3e^3[4(\eta + 1) - e^2(3\eta + 5) + e^4]\cos 3E), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{25} = & \frac{A(\beta, E)^2}{e^2\eta^4} (2[5 + 11e^2 + 4e^4] - 3e[7 + 13e^2]\cos E - \\ & - 6[1 - 3e^2 - 2e^4]\cos 2E + e[1 - e^2 - 4e^4]\cos 3E), \end{aligned}$$

$$\psi_{26} = \frac{L(\beta, E)^2}{4e^2} (10 - 15e \cos E + 6 \cos 2E - e \cos 3E),$$

$$\psi_{27} = -\frac{9S(\beta, E)^2}{\eta^5} (1 + e \cos E) (e^2(\eta + 2) - 2(\eta + 1)),$$

$$\psi_{28} = -\frac{1}{e^2 \eta} A(\beta, E) L(\beta, E) \times$$

$$\times (3e \sin E + 6\eta^2 \sin 2E - e \sin 3E),$$

$$\psi_{29} = -\frac{12(\eta + 1)}{e\eta^4} A(\beta, E) S(\beta, E) (2 \sin E - e^3 \sin 2E),$$

$$\psi_{2,10} = \frac{12}{e} \left(1 + \frac{1}{\eta}\right) L(\beta, E) S(\beta, E) \cos E,$$

$$\psi_{31} = \frac{1}{8} (1 - \eta)^2 (4 + 19e^2 - 20e \cos E + 4[1 - 3e^2] \cos 2E + 4e \cos 3E + e^2 \cos 4E),$$

$$\psi_{32} = -A(\beta, E) (\eta - \eta^2) (7e \sin E - 2 \sin 2E - e \sin 3E),$$

$$\psi_{33} = -\frac{1 - \eta}{2} L(\beta, E) (2[3e^2 + 1] - 9e \cos E + 2\eta^2 \cos 2E + e \cos 3E),$$

$$\psi_{34} = 2\eta^2 A(\beta, E)^2 (1 - \cos 2E),$$

$$\psi_{35} = \frac{1}{2} L(\beta, E)^2 (1 + 2e^2 - 4e \cos E - \cos 2E),$$

$$\psi_{36} = 2\eta A(\beta, E) L(\beta, E) (2e \sin E - \sin 2E),$$

$$\psi_{41} = \frac{e}{8\eta^3 (\eta + 1)^2} (4[44(\eta + 1) - e^2(6\eta + 26) - 3e^4(5\eta + 8) + 6e^6] \sin E - 2e[24(\eta + 1) + 6e^2\eta - e^4(17\eta + 30) + 6e^6] \sin 2E - 4e^2[4(\eta + 1) - e^2(\eta + 4)] \sin 3E - e^3[2(\eta + 1) - e^2(\eta + 2)] \sin 4E),$$

$$\psi_{42} = \frac{2}{e\eta^2} A(\beta, E) (e[7 + 3e^2] - [2 + 12e^2 + e^4] \cos E + e[1 + 5e^2] \cos 2E - e^4 \cos 3E),$$

$$\psi_{43} = -\frac{\eta}{e} L(\beta, E) (2 \sin E - e \sin 2E),$$

$$\psi_{44} = -\frac{3e(\eta + 1)}{\eta^2} S(\beta, E) (2 \sin E - e \sin 2E).$$

#### ПРИЛОЖЕНИЕ Г

В данном разделе приведены базовые интегралы, к которым сводятся все интегралы раздела 4. Используя [9, п. 3.6.3], запишем:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dE = 1, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kE dE = 0, \quad (39)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{a} \cos E dE = -\frac{e}{2},$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{a} \cos kE dE = 0 \text{ при } k \geq 2.$$

Согласно [3, пп. 4.575.1, 4.224.15, 4.397.6]:

$$\int_0^{\pi} \arctg\left(\frac{\beta \sin E}{1 - \beta \cos E}\right) \sin kE dE = \frac{\pi}{2k} \beta^k \text{ при } \beta^2 < 1,$$

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2\beta \cos E + \beta^2) dE = 0 \text{ при } \beta^2 \leq 1, \quad (40)$$

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2\beta \cos E + \beta^2) \cos kE dE = -\frac{\pi}{k} \beta^k \text{ при } \beta^2 < 1.$$

Найдем значения этих интегралов на интервале  $E \in [-\pi, \pi]$ . С помощью замены  $E \rightarrow -E$  легко показать, что в этих трех случаях

$$\int_{-\pi}^0 f(\beta, E) dE = \int_0^{\pi} f(\beta, E) dE. \quad (41)$$

Хотя подынтегральные функции в выражениях (40) являются разрывными функциями в точке  $E = 0$  при значениях  $\beta$ , близких к 1, согласно [3], на интервале  $[0, \pi]$  при  $\beta^2 < 1$  эти интегралы существуют. Поэтому представим их в виде суммы двух несобственных интегралов [10] и с учетом (41) получим:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(\beta, E) dE &= \\ &= \int_{-\pi}^0 f(\beta, E) dE + \int_0^{\pi} f(\beta, E) dE = 2 \int_0^{\pi} f(\beta, E) dE. \end{aligned}$$

Осреднение по средней аномалии подразумевает эллиптичность оскулирующей орбиты, то есть  $0 < e, \beta < 1$ , следовательно в рамках поставленной в разделе 2 задачи условие  $\beta^2 < 1$  выполняется. Таким образом, искомые интегралы

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(\beta, E) \sin kE dE &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \arctg\left(\frac{\beta \sin E}{1 - \beta \cos E}\right) \sin kE dE = \frac{\beta^k}{2k}, \quad (42) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L(\beta, E) dE = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2\beta \cos E + \beta^2) dE = 0,$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} L(\beta, E) \cos kE dE = & = a_0^2 + ea_0a_1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + ea_n a_{n+1}). \quad (47) \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2\beta \cos E + \beta^2) \cos kE dE = -\frac{\beta^k}{k}. \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

В разделе 4 используются преобразования произведений тригонометрических функций в суммы:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nE \cos kE = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n [\cos(n - k)E + \cos(n + k)E], \quad (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin nE \cos kE = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n [\sin(n - k)E + \sin(n + k)E], \quad (44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nE \sin kE = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n [\sin(n + k)E - \sin(n - k)E]. \quad (45) \end{aligned}$$

Для тригонометрического ряда вида

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nE$$

справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} & s^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n a_k \cos nE \cos kE = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n a_k [\cos(n - k)E + \cos(n + k)E], \\ & \quad s^2(1 + e \cos E) = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n a_k [\cos(n - k)E + \cos(n + k)E] + \\ & + \frac{e}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n a_k [\cos(n - k - 1)E + \cos(n - k + 1)E + \\ & \quad + \cos(n + k - 1)E + \cos(n + k + 1)E]. \quad (46) \end{aligned}$$

Интегрирование (46) равносильно сохранению в тригонометрическом ряде (46) только свободных членов:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s^2(1 + e \cos E) dE =$$

Для произведения рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nE \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mE$$

имеем:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n a_m \sin nE \cos mE = \\ & = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n a_m [\sin(n - m)E + \sin(n + m)E]. \quad (48) \end{aligned}$$

Далее умножение (48) на  $\sin kE$  дает:

$$\begin{aligned} & s_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n a_m \sin nE \cos mE \sin kE = \\ & = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n a_m [\cos(n - m - k)E - \\ & \quad - \cos(n - m + k)E + \cos(n + m - k)E - \\ & \quad - \cos(n + m + k)E]. \quad (49) \end{aligned}$$

Интеграл от (49) не равен нулю только в случае обнуления аргументов косинусов, что возможно, если  $n - m - k = 0$ ,  $n - m + k = 0$  или  $n + m - k = 0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_k dE = \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{k-1} (a_n a_{k-n} - a_n a_{n+k}) - \right. \\ & \quad \left. - a_k a_{2k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} (a_n a_{n-k} - a_n a_{n+k}) \right). \quad (50) \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Т.Н. Санникова, К.В. Холшевников, *Астрон. журн.* **96**(5), 418 (2019).
2. Н. Батмунх, Т.Н. Санникова, К.В. Холшевников, В.Ш. Шайдулин, *Астрон. журн.* **93**(3), 331 (2016).
3. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик, *Таблицы интегралов, рядов и произведений* (СПб.: БХВ-Петербург, 2011).
4. Small-Body Database Lookup, Jet Propulsion Laboratory NASA, California Institute of Technology, [https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb\\_lookup.html#/](https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_lookup.html#/).
5. Т.Н. Санникова, *Астрон. журн.* **98**(4), 321 (2021).
6. D. Vokrouhlický, *Astron. and Astrophys.* **344**, 362 (1999).
7. J. Āurech, D. Vokrouhlický, P. Pravec, J. Hanuš, et al., *Astron. and Astrophys.* **609**, id. A86 (2018).
8. Т.Н. Санникова, *Астрон. журн.* **99**(6), 506 (2022).
9. К.В. Холшевников, В. Б. Титов, *Задача двух тел. Учеб. пособие* (СПб.: изд. СПбГУ, 2007).
10. Г.М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2* (М.: Физматлит, 2001).

# DISPLACEMENT NORM IN THE PRESENCE OF AN INVERSE-SQUARE PERTURBING ACCELERATION IN THE REFERENCE FRAME ASSOCIATED WITH THE RADIUS VECTOR

T. N. Sannikova<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Crimean Astrophysical Observatory of RAS, Nauchny, Crimea, Russia*

The problem of motion of a zero-mass point under the influence of attraction to the central body and a small perturbing acceleration  $\mathbf{P}' = \mathbf{P}/r^2$  is considered, where  $r$  is the distance to the attracting center, components of the vector  $\mathbf{P}$  are assumed to be constant in a reference system with axes directed along the radius vector, the transversal and the angular momentum vector. Previously, for this problem, we found equations of motion in the mean elements and formulas for the transition from the osculating elements to the mean elements in the first order of smallness; we neglected second-order quantities. In this work, the Euclidean (root–mean–square over the mean anomaly) displacement norm  $\|\mathbf{d}\mathbf{r}\|^2$  is obtained, where  $\mathbf{d}\mathbf{r}$  represents the difference between the position vectors on the osculating and mean orbit. It turned out that  $\|\mathbf{d}\mathbf{r}\|^2$  depends only on the components of the vector  $\mathbf{P}$  (positive definite quadratic form), the semi–major axis (proportional to the second power) and the eccentricity of the osculating ellipse. The norm  $\|\mathbf{d}\mathbf{r}\|^2$  is obtained in the form of series in powers of the  $\beta = e/(1 + \sqrt{1 - e^2})$  and in powers of the eccentricity  $e$ . The results are applied to the problem of the motion of asteroids under the influence of a perturbing acceleration inversely proportional to the square of the heliocentric distance, in particular, under the influence of the Yarkovsky effect.

*Keywords:* sunlight pressure, Yarkovsky effect, non-gravitational parameters, root mean square norm, displacement of the osculating orbit from the mean orbit, near-Earth asteroids