

НЕЙТРОННЫЕ ЗВЕЗДЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ ОДНОРОДНОГО ШАРА

© 2023 г. Г. С. Бисноватый-Коган^{1,2,3,*}, Е. А. Патраман^{1,3}

¹Институт космических исследований РАН, Москва, Россия

²Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, Россия

³Московский физико-технический институт МФТИ, г. Долгопрудный, Россия

*E-mail: gkogon@mx.iki.rssi.ru

Поступила в редакцию 23.05.2023 г.

После доработки 29.06.2023 г.

Принята к публикации 17.07.2023 г.

Рассмотрены модели нейтронных звезд в случае однородного распределения плотности. Получено алгебраическое уравнение равновесия, справедливое для любого уравнения состояния. Данное уравнение позволяет приближенно оценить массу звезды заданной плотности, не прибегая к интегрированию дифференциальных уравнений. Модели однородных нейтронных звезд для разных уравнений состояния, представленные в работе, отличаются в области максимума массы от точных решений, получаемых при численном интегрировании дифференциальных уравнений, не более, чем на ~20%.

Ключевые слова: нейтронные звезды, однородная модель, Общая теория относительности (ОТО)

DOI: 10.31857/S0004629923080017, **EDN:** HIQYGP

1. ВВЕДЕНИЕ

При исследовании строения белых карликов было обнаружено, что их равновесие возможно только для масс, не превышающих некоторый предел, который известен под именем Чандрасекаровского. Для углеродно-кислородного химического состава, где на один электрон приходится два бариона, $\mu_e = 2$, этот предел равен $\approx 1.46 M_\odot$. Впервые вывод о существовании верхнего предела массы для холодных звезд, равновесие которых поддерживается давлением вырожденных электронов, был сделан в работе Стонера [1], который рассматривал модель белого карлика однородной плотности. Он обобщил рассмотрение давления вырожденных электронов, сделанное в работах [2, 3], на случай большой плотности в условиях ультрарелятивистского вырождения, в котором уравнение состояния для холодного вещества принимает вид [4]:

$$P(\rho) = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{4} \frac{\hbar c}{(\mu_e m_u)^{4/3}} \rho^{4/3} = K \rho^{4/3}. \quad (1)$$

Здесь μ_e — количество барионов на один электрон, m_u — атомная единица массы, равная $1/12$ массы изотопа ^{12}C . Масса политропной звезды, соответствующая $\gamma = 1 + 1/n = 4/3$, $n = 3$, соглас-

но теории Эмдена, не зависит от плотности, и однозначно определяется параметром K в виде [4]:

$$M_p = 4\pi \left(\frac{K}{\pi G} \right)^{3/2} M_3, \quad M_3 = 2.01824. \quad (2)$$

Используя (2), Чандрасекар [5] и Ландау [6], независимо и почти одновременно, получили для уравнения состояния (1) предельную массу белого карлика в виде

$$M_{wd} = \frac{\sqrt{3\pi} (\hbar c)^{3/2}}{2 G} \frac{M_3}{(\mu_e m_u)^2} = \frac{5.83}{\mu_e^2} M_\odot. \quad (3)$$

Для определения предельной массы наблюдаемых белых карликов Чандрасекар [5], следуя Стонеру [1], использовал $\mu_e = 2.5$, получив значение $M_{wd} = 0.933 M_\odot$. Это уточняло полученное Стонером $M_{wd} = 1.1 M_\odot$, вычисленное при том же значении $\mu_e = 2.5$ в модели с однородной плотностью. Из теории эволюции звезд, а также из наблюдений следует, что почти все белые карлики состоят из смеси углерода ^{12}C и кислорода ^{16}O , для которой $\mu_e = 2$ [7], а $M_{wd} = 1.46 M_\odot$. В работе [6] впервые было получено реалистическое значение предела массы белого карлика, который заслуживает более справедливое название, такое как предел Стонера–Чандрасекара–Ландау (Stoner–Chandrasekhar–Landau limit). Здесь использованы уточненные современные значения вели-

чин для всех констант [8], что привело к отличию на несколько процентов от величин, приведенных в оригинальных работах.

В данной работе однородное распределение плотности принимается для построения приближенных моделей холодных нейтронных звезд произвольной массы, используя алгебраические уравнения, полученные при использовании Общей теории относительности (ОТО). В рамках этой модели все результаты, включая значения для предельных масс нейтронных звезд, получаются аналитически, из полученных алгебраических уравнений, для любых уравнений состояния.

2. ОДНОРОДНЫЕ НЕЙТРОННЫЕ ЗВЕЗДЫ

Для построения реалистических моделей нейтронных звезд (НЗ) необходимо использовать ОТО, ввиду того, что значение гравитационного потенциала достигает десятых долей от c^2 , а радиус НЗ R_{ns} составляет всего несколько гравитационных радиусов $r_g = 2GM/c^2$. При построении моделей невращающихся НЗ используется метрика типа метрики Шварцшильда, в виде [9–11]:

$$ds^2 = e^{v(r)} c^2 dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2Gm}{rc^2},$$

$$e^v = \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right) \exp \left[\int_0^r \frac{2dP}{P + \rho(P)} \right],$$

где

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho r'^2 dr', \quad M = m(R_{ns}),$$

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{E_T}{c^2}\right).$$

В ОТО рассматривается полная плотность вещества ρ , включающая в себя полную плотность энергии покоя ρ_0 и внутреннюю энергию E_T . Масса M является полной тяготеющей массой, включающей в себя энергию тяготения, так что полная энергия НЗ есть $E = Mc^2$, а полная энергия e внутри радиуса r равна $e(r) = m(r)c^2$. Из уравнений ОТО следует связь концентрации барионов n с числом барионов $f(r)$ внутри радиуса r , в виде [4]

$$f(r) = 4\pi \int_0^r n r'^2 \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r'}\right)^{-1/2} dr,$$

$$N = f(R_{ns}), \quad \rho_0 = nm_u, \quad M_0 = Nm_u,$$

где M_0 — барионная масса покоя НЗ. Для однородной НЗ, в которой n, ρ_0, E_T, ρ не зависят от радиуса, интеграл в выражении (6) вычисляется аналитически, приводя к выражению [12]:

$$f(r) = \frac{2\pi n}{D^{3/2}} \left[\arcsin(r\sqrt{D}) - r\sqrt{D(1-r^2D)} \right],$$

$$D = \frac{8\pi\rho G}{3c^2}.$$

Для нахождения связи радиуса НЗ R с плотностью ρ нужно найти экстремум функции $M(\rho_0)$ при фиксированном значении числа барионов в звезде N , которые записываются в виде:

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3 = \frac{4\pi}{3c^2} \rho_0 (c^2 + E_T) R^3,$$

$$N = \frac{2\pi\rho_0}{m_u D^{3/2}} \left[\arcsin(R\sqrt{D}) - R\sqrt{D(1-R^2D)} \right].$$

Если не задаваться определенной функцией распределения плотности, то применяя вариационный принцип, с использованием выражений (6), (8) для получения дифференциального уравнения и нахождения функции распределения плотности [4], находим уравнение равновесия звезды в ОТО, полученное Оппенгеймером и Волковым [11]. Как показано в [4], с. 407, для этого необходимо найти вариацию полной энергии (массы), как функционала от вариации радиуса $\delta r(v)$, где $v \equiv f(r)$, полученного в выражении (7).

2.1. Вычисление дифференциалов

Беря дифференциалы от обеих функций в (8), получаем

$$dM = \frac{4\pi}{3c^2} \left[3R^2 \rho_0 (c^2 + E_T) dR + (c^2 + E_T) R^3 d\rho_0 + \rho_0 R^3 dE_T \right],$$

$$dN = \frac{2\pi}{m_u} \left[\arcsin(R\sqrt{D}) - R\sqrt{D(1-R^2D)} \right] \times$$

$$\times \left(\frac{d\rho_0}{D^{3/2}} - \frac{3\rho_0}{2D^{5/2}} dD \right) + \frac{2\pi\rho_0}{m_u D^{3/2}} \left[\frac{RdD + 2DdR}{2\sqrt{D(1-R^2D)}} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{1-R^2D} \left(\sqrt{D} dR + \frac{R}{2\sqrt{D}} dD \right) + \right.$$

$$\left. + R\sqrt{D} \frac{R^2 dD + 2DRdR}{2\sqrt{1-R^2D}} \right].$$

Из термодинамических соотношений, получаем [13]:

$$\begin{aligned} dE_T &= \left(\frac{P}{\rho_0} \right) d\rho_0, \\ dD &= \frac{8\pi G}{3c^2} d\rho = \frac{8\pi G}{3c^2} \left(1 + \frac{E_T}{c^2} \right) d\rho_0 + \\ &+ \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{P}{c^2 \rho_0} d\rho_0 = \frac{8\pi G}{3c^2} \left(1 + \frac{E_T}{c^2} + \frac{P}{c^2 \rho_0} \right) d\rho_0. \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом (11), получаем из (9), (10) выражения для дифференциалов $dM(d\rho_0, dR)$, $dN(d\rho_0, dR)$. Рассматривая вариации при сохраняющемся числе барионов с $dN = 0$, получаем из последнего соотношения связь между дифференциалами dR и $d\rho_0$. Равновесие однородной звезды соответствует экстремуму функции $M(\rho_0)$, в котором

$$\frac{dM}{d\rho_0} = 0. \quad (12)$$

Тогда из выражений для дифференциалов получаем соотношение для связи радиуса R однородной звезды в ОТО с полной плотностью $\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{E_T}{c^2} \right)$ в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{1-R^2D}}{2R^3\sqrt{D^3}} \left[R\sqrt{D(1-R^2D)} - \arcsin(R\sqrt{D}) \right] + \\ &+ \frac{2\pi G\sqrt{1-R^2D}\rho c^2 + P}{c^2 2R^2D^2 3c^2} \times \\ &\times \left[\frac{\arcsin(R\sqrt{D})}{R\sqrt{D}} - \frac{1 - \frac{1}{3}R^2D}{\sqrt{1-R^2D}} \right] + \frac{\rho c^2 + P}{3\rho c^2} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Соотношение (13) остается справедливым для любых уравнений состояния, позволяя находить приближенно массу звезды заданной плотности из алгебраического уравнения, не прибегая к интегрированию дифференциальных уравнений.

Вывод выражений для дифференциалов dM и dN можно получить, используя интегральные формулы для этих величин, следующие из (5), (6), в виде:

$$\begin{aligned} M &= 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr, \\ N &= 4\pi \int_0^R n r^2 \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} \right)^{-1/2} dr, \\ m &= \frac{4\pi}{3} \rho r^3, \quad \rho_0 = m_u n. \end{aligned} \quad (14)$$

Вычисление dM с использованием интегрального выражения в (5) не приводит к упрощениям, но вычисление dN с помощью интегрального выражения значительно упрощается. Интегралы, возникающие после использования (14), вычисляются аналитически, что в результате приводит к соотношению

$$\begin{aligned} dN &= \frac{4\pi\rho_0}{m_u} \frac{R^2 dR}{\sqrt{1-R^2D}} + \frac{2\pi\rho_0}{m_u} \frac{R^3}{\sqrt{1-R^2D}} \frac{dD}{D} + \\ &+ \frac{2\pi\rho_0}{m_u D^{3/2}} \left(\frac{d\rho_0}{\rho_0} - \frac{3}{2} \frac{dD}{D} \right) \times \\ &\times \left[\arcsin(R\sqrt{D}) - R\sqrt{D(1-R^2D)} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

определяющему связь dR и $d\rho_0$, и позволяющую записать дифференциал dM в виде

$$\begin{aligned} dM &= 4\pi\rho R^3 \left[-\frac{1}{6} \frac{dD}{D} - \frac{\sqrt{1-R^2D}}{2D^{3/2}R^3} \times \right. \\ &\times \left. \left[\arcsin(R\sqrt{D}) - R\sqrt{D(1-R^2D)} \right] \left(\frac{d\rho_0}{\rho_0} - \frac{3}{2} \frac{dD}{D} \right) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

В результате из (16), с учетом (12) получаем алгебраическое уравнение, определяющее равновесие однородной звезды, совпадающее с (13).

$$\begin{aligned} &\frac{1}{6} \frac{d\rho}{d\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^3} \left[\arcsin(x) - x\sqrt{1-x^2} \right] \times \\ &\times \left(1 - \frac{3}{2} \frac{d\rho}{d\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho} \right) = 0, \\ &\frac{d\rho}{d\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{1 + \frac{E_T}{c^2} + \frac{P}{c^2 \rho_0}}{1 + \frac{E_T}{c^2}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для удобства записи здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} x &= R\sqrt{D} = \sqrt{\frac{R_g}{R}}, \quad R_g = \frac{2GM}{c^2}, \\ \frac{dD}{D} &= \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1 + \frac{E_T}{c^2} + \frac{P}{c^2 \rho_0}}{1 + \frac{E_T}{c^2}} \cdot \frac{d\rho_0}{\rho_0}. \end{aligned} \quad (18)$$

Алгебраическое уравнение (17) запишется в виде

$$\begin{aligned} &\frac{d\rho}{d\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho} \left[\frac{1}{6} - \frac{3}{2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^3} \left(\arcsin(x) - x\sqrt{1-x^2} \right) \right] + \\ &+ \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^3} \left(\arcsin(x) - x\sqrt{1-x^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

С учетом определения $\frac{d\rho}{d\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho}$ в (17), получаем из (19) соотношение для давления в виде:

$$\frac{P}{\rho c^2} = \frac{\Phi_0(x)}{\Phi_1(x)}, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0(x) &= 2x^3 - 3\sqrt{1-x^2} \left(\arcsin(x) - x\sqrt{1-x^2} \right) = \\ &= x(3-x^2) - 3\sqrt{1-x^2} \arcsin(x), \\ \Phi_1(x) &= -2x^3 + 9\sqrt{1-x^2} \left(\arcsin(x) - x\sqrt{1-x^2} \right) = \\ &= x(7x^2 - 9) + 9\sqrt{1-x^2} \arcsin(x). \end{aligned} \quad (21)$$

3. ПОСТНЬЮТОНОВСКАЯ АСИМПТОТИКА, $x^2 \ll 1$

В пределе слабой гравитации при $x \ll 1$ в (18), получаем из (20) в постньютоновском приближении следующее уравнение:

$$\frac{P}{\rho c^2} = \frac{x^2}{10} \left(1 + \frac{61}{70} x^2 \right), \quad (22)$$

где

$$x^2 = \frac{R_g}{R} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho R^2 = \frac{2G}{c^2} \left(\frac{4\pi\rho}{3} \right)^{1/3} M^{2/3}.$$

Используя разложения [12], получаем следующие соотношения

$$\begin{aligned} N &= \frac{2\pi\rho_0}{m_u D^{3/2}} \left[\arcsin(R\sqrt{D}) - R\sqrt{D(1-R^2 D)} \right] \approx \\ &\approx \frac{4\pi\rho_0 x^3}{3m_u D^{3/2}} \left(1 + \frac{3}{10} x^2 \right), \quad N_0 = \frac{4\pi\rho_0 R_0^3}{3m_u}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$x^2 = DR^2 = \frac{2GM}{c^2 R}, \quad R_g = \frac{2GM}{c^2}, \quad R_{g0} = \frac{2GM_0}{c^2}.$$

Индекс “0” обозначает ньютоновские величины. Из условия сохранения числа барионов при изменении радиуса звезды находим связь радиуса в ОТО R с ньютоновским радиусом R_0 в постньютоновском пределе $x^2 \ll 1$ в виде:

$$N = N_0, \quad R^3 \left(1 + \frac{3}{10} x^2 \right) \approx R_0^3. \quad (24)$$

С использованием (23), (24) получаем постньютоновское соотношение между значениями массы в ОТО и в ньютоновской метрике в виде

$$M = M_0 \left(1 + \frac{E_T}{c^2} - \frac{3}{10} \frac{R_{g0}}{R_0} \right). \quad (25)$$

Первое постньютоновское соотношение в (22) запишем в виде

$$\frac{P}{\rho_0^{4/3}} = \frac{1}{5} \frac{GM}{\rho_0^{1/3} R} \left(1 + \frac{61}{70} \frac{R_{g0}}{R_0} \right). \quad (26)$$

Отсюда, с учетом постньютоновской связи ньютоновских и релятивистских величин в (24), (25), получаем постньютоновское алгебраическое уравнение равновесия однородной звезды в виде:

$$\begin{aligned} \frac{P}{\rho_0^{4/3}} &= \frac{1}{5} \frac{GM_0}{\rho_0^{1/3} R_0} \left(1 + \frac{2E_T}{c^2} + \frac{47}{70} \frac{R_{g0}}{R_0} \right), \\ \frac{R_{g0}}{R_0} &= \frac{2}{c^2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} GM_0^{2/3} \rho_0^{1/3}. \end{aligned} \quad (27)$$

В малом втором члене в (27) воспользуемся равенством гравитационной и тепловой энергиями в ньютоновской политропной звезде с показателем 4/3 в виде [8]:

$$\begin{aligned} P &= K \rho_0^{4/3}, \quad \gamma = \frac{d \ln P}{d \ln \rho_0} = \frac{4}{3}, \\ E_T &= \frac{3}{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} GM_0^{2/3} \rho_0^{1/3}. \end{aligned} \quad (28)$$

С учетом (28) уравнение равновесия (27) примет вид

$$\frac{P}{\rho_0^{4/3}} = \frac{1}{5} \frac{GM_0}{\rho_0^{1/3} R_0} \left[1 + \frac{89}{35c^2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} GM_0^{2/3} \rho_0^{1/3} \right]. \quad (29)$$

Для уравнения состояния (28) уравнение равновесия однородной звезды запишется в виде:

$$K = \frac{1}{5} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} GM_0^{2/3} \left[1 + \frac{89}{35c^2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} GM_0^{2/3} \rho_0^{1/3} \right]. \quad (30)$$

Это уравнение точно совпадает с соответствующим уравнением из работы [8], полученным исходя из постньютоновских разложений, приведенных в [10].

4. ОДНОРОДНЫЕ МОДЕЛИ ПРИ ОЧЕНЬ БОЛЬШИХ ПЛОТНОСТЯХ

При уменьшении до нуля знаменателя в правой части (20) отношение $\frac{P}{\rho c^2}$, а также сама плотность ρ стремятся к бесконечности. Абсцисса

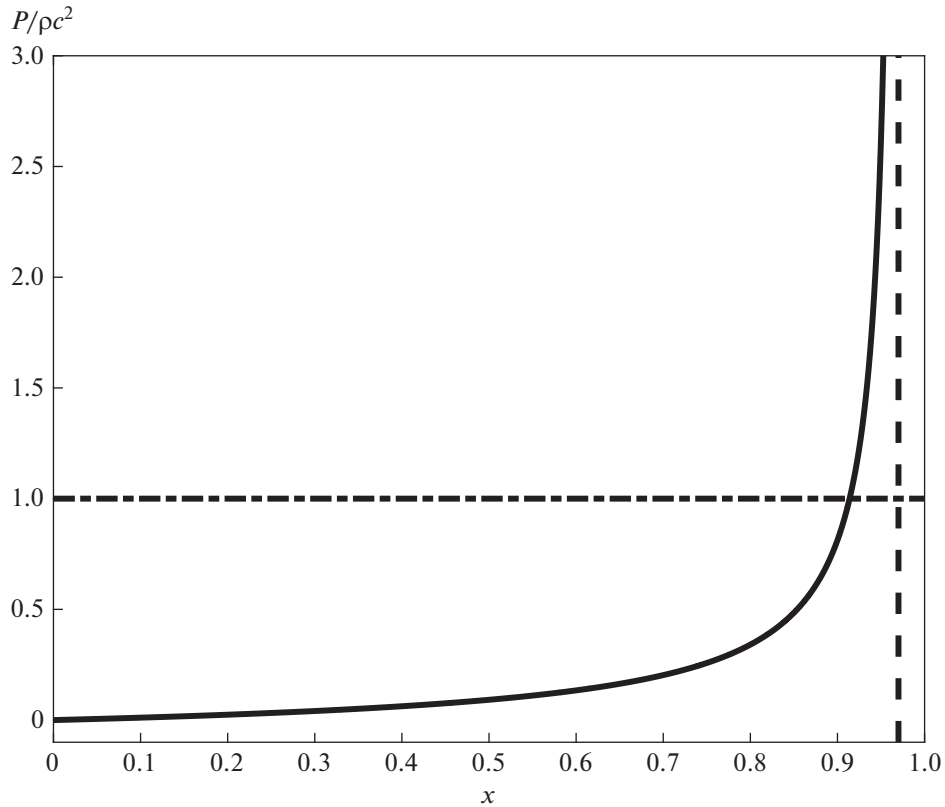


Рис. 1. Зависимость $\frac{P}{\rho c^2}$ от параметра x , согласно (20) (сплошная линия). Абсцисса вертикальной штриховой линии $x = x_l$ соответствует нулевому корню знаменателя уравнения (20), $x_l = 0.9849$. Горизонтальная штрихпунктирная линия $\frac{P}{\rho c^2} = 1$ отделяет физически допустимую область от верхней области, где нарушается принцип причинности.

вертикальной штриховой линии $x = x_l$ на рис. 1 соответствует нулевому корню знаменателя уравнения (20), $x_l = 0.9849$. Горизонтальная штрихпунктирная линия $\frac{P}{\rho c^2} = 1$ отделяет физически допустимую область от верхней области, где нарушается принцип причинности, согласно которому скорость звука в веществе не может превышать скорость света. Как следует из строгих расчетов, основанных на численном решении дифференциального уравнения равновесия Оппенгеймера-Волкова [4, 10], нейтронные звезды при различных уравнениях состояния становятся неустойчивыми при существенно меньших значениях параметра $x = \frac{R_g}{R} \sim \frac{1}{3}$, который может быть немного больше, или немного меньше $\frac{1}{3}$, для различных уравнений состояния. Соответствующие параметры нейтронных звезд в рамках однородной модели рассчитаны в последующих разделах.

Асимптотическое решение уравнения (20) при $x \rightarrow x_l$ получается аналитически при использовании разложений

$$x = x_l - \delta, \quad \Phi_1(x) = \Phi_1(x_l) - \Phi_1'(x_l)\delta. \quad (31)$$

С учетом того, что $\Phi_1(x_l) = 0$, асимптотическое решение уравнения (20) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{P}{\rho c^2} &\simeq \frac{\Phi_0(x_l)}{-\Phi_1'(x_l)\delta} \simeq \frac{0.02493}{\delta}, \\ \Phi_0(x_l) &= x_l(3 - x_l^2) - 3\sqrt{1 - x_l^2} \arcsin(x_l) \simeq 1.275, \\ \Phi_1'(x_l) &= 21x_l^2 - \frac{9x_l}{\sqrt{1 - x_l^2}} \arcsin(x_l) \simeq -51.15. \end{aligned} \quad (32)$$

Эта асимптотика приведена на рис. 1.

Интересно, что в однородной звезде зависимость $M(\rho)$ для неустойчивых моделей вблизи порога $x = x_l$ имеет универсальный характер и не зависит от уравнения состояния. Действительно,

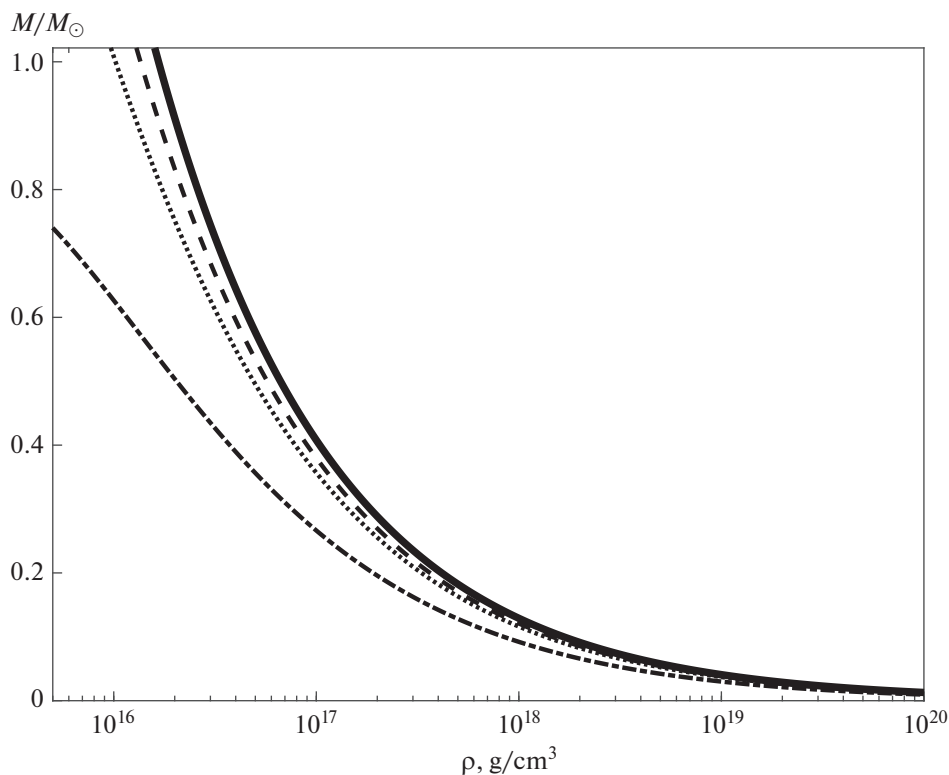


Рис. 2. Зависимость $M(\rho)$ для различных уравнений состояния. Сплошной линией дана асимптотика (34). Штриховая линия демонстрирует, как спадает $M(\rho)$ в модели I H, пунктирная относится к вырожденному нейтронному газу с квадратичной поправкой, штрихпунктирная линия соответствует вырожденному нейтронному газу.

вблизи границы $x = x_l$ соотношения из (18) для M и x^2 записываются в виде:

$$\begin{aligned} M &= \frac{4\pi}{3} \rho R^3, \\ x^2 = x_l^2 &= 0.9845^2 = 0.97 = \frac{2GM}{c^2 R}, \\ M &= 0.97 \frac{c^2 R}{2G}. \end{aligned} \quad (33)$$

Отсюда, из двух выражений для M , получаем асимптотические зависимости для $R(\rho)$ и $M(\rho)$ в виде:

$$R = \left(\frac{0.97c^2}{2G\rho} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{3}{4\pi}}, \quad M = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(\frac{0.97c^2}{2G} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\rho}}. \quad (34)$$

Асимптотическая зависимость $M(\rho)$, одинаковая для всех уравнений состояния, приведена на рис. 2.

Решения вблизи предельной величины не имеют особого физического смысла, т.к. получены из приближенной однородной модели, которая в целом неприменима для неустойчивых моделей звезд при плотностях, существенно превышающих плотность максимальной массы, когда кривая $M(\rho)$ качественно отличается от точных

решений с произвольным числом степеней свободы [14, 15]. Отметим возможность применения метода Галеркина для получения равновесных решений [16], когда плотность представляется в виде суммы по заданным функциям с коэффициентами, которые минимизируют функционал энергии. Это приведет к увеличению числа степеней свободы, и получению более точного, по сравнению с однородным распределением, решения, которое определяется системой алгебраических уравнений. Увеличение числа функций приведет к качественному улучшению решения при очень больших плотностях. С ростом числа используемых функций растет плотность, при которой имеет место качественная достоверность решения. Полученная зависимость $M(\rho)$ соответствует выводу работы [17] о метастабильности любой массы относительно релятивистского коллапса, и о том, что для любой гравитирующей массы имеются, как минимум, два равновесных состояния, из которых устойчиво только состояние с наименьшей плотностью. Эти состояния разделены большим потенциальным барьером с ничтожно малой, но конечной вероятностью проникновения через него, и последующего релятивистского коллапса.

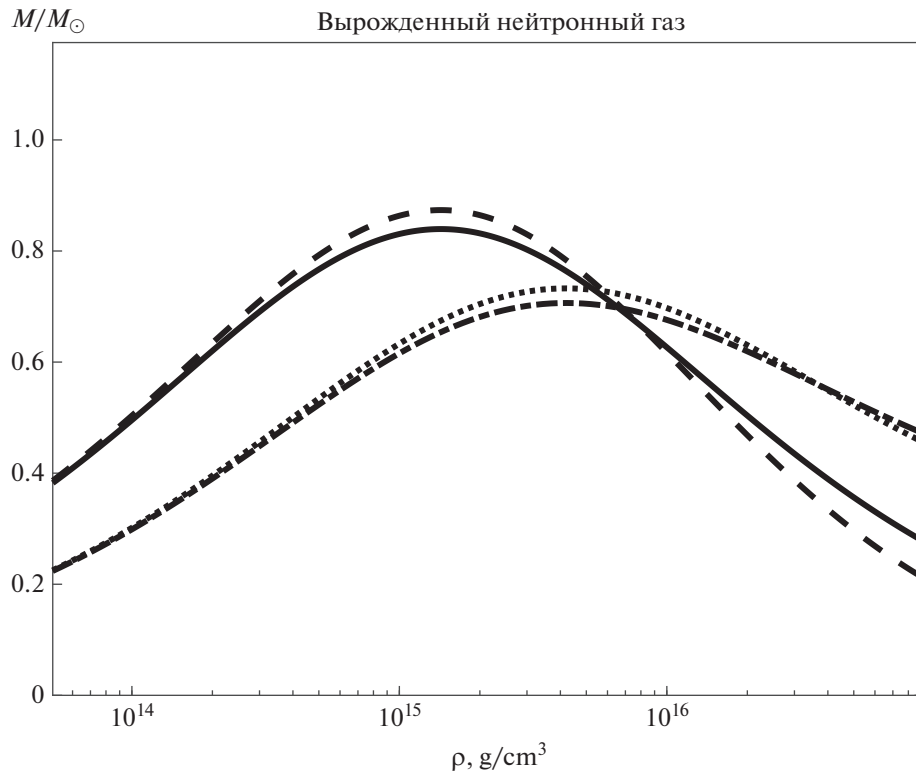


Рис. 3. Вырожденный нейтронный газ. Сплошной линией обозначена зависимость $M(r)$ в случае однородного распределения плотности, штрихпунктирная — в точной модели. Штриховая линия показывает зависимость $M_0(r)$ в однородном случае, пунктирная — в точной модели.

Считается, что для реалистических моделей звезд выполняется принцип причинности, согласно которому скорость звука не может превышать скорость света. Для выполнения этого условия должно [18] выполняться неравенство $P \leq \rho c^2$, что определяется горизонтальной линией при ординате $y = 1$ на рис. 1, а также вертикальными линиями на рис. 2 (и последующих рисунках), соответствующими плотностям, где $P = \rho c^2$. Давление в асимптотических моделях определяется уравнением состояния с использованием (32).

5. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ РАВНОВЕСНОЙ КРИВОЙ $M(\rho)$ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ МОДЕЛИ ЗВЕЗДЫ С ЗАДАННЫМ УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА

Построение зависимостей $M(\rho)$ или $M(\rho_0)$, $M(R)$ можно сделать, используя следующую процедуру.

1. Выбираем уравнение состояния $P(\rho)$, $P(\rho_0)$, задаваемое формулами или таблицами.

2. Задаем отношение гравитационного радиуса звезды к физическому радиусу $x^2 = \frac{R_g}{R}$.

3. Из уравнения (20) находим отношение давления к плотности.

4. Используя формулы или таблицы, задающие уравнение состояния, определяем значение плотности, при которой удовлетворяется соотношение (20).

5. Радиус модели находим из определения x в виде $R^2 = \frac{3c^2 x^2}{8\pi G \rho}$.

6. В заключение находим массу однородной модели $M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3$. Результаты расчетов для нескольких уравнений состояния представлены на рис. 2–9.

6. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ МАССЫ ОДНОРОДНОЙ НЕЙТРОННОЙ ЗВЕЗДЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ

Как показал Я.Б. Зельдович [19] (см. также [4, 10, 15, 20, 21]), потеря гидродинамической устой-

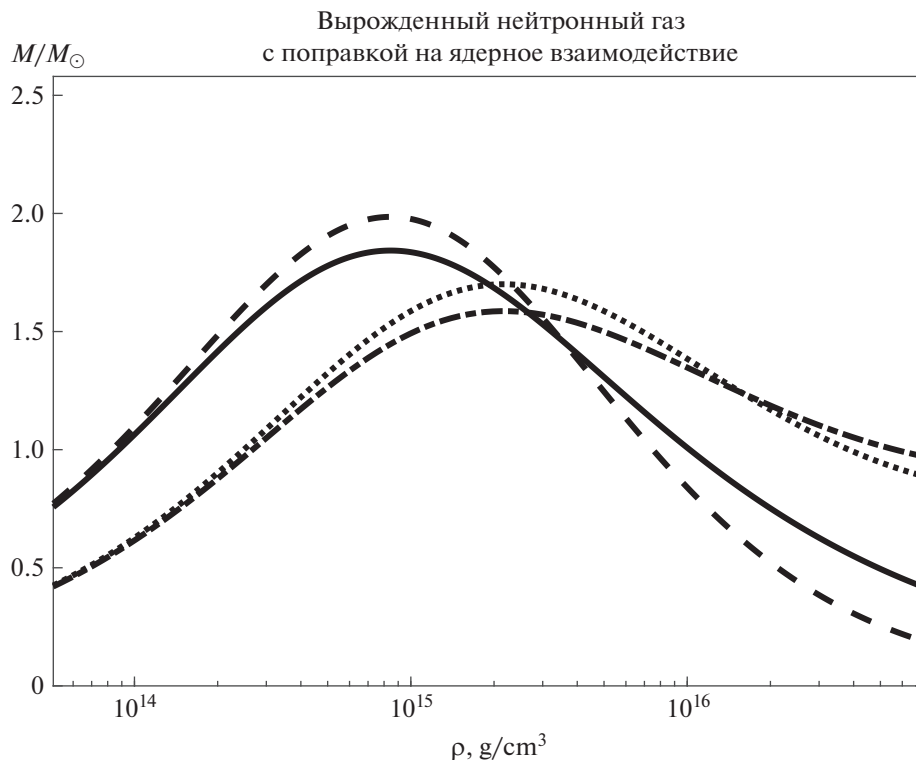


Рис. 4. Вырожденный нейтронный газ с поправкой на ядерное взаимодействие. Сплошной линией обозначена зависимость $M(\rho)$ в случае однородного распределения плотности, штрихпунктирная — в точной модели. Штриховая линия показывает зависимость $M_0(\rho)$ в однородном случае, пунктирная — в точной модели.

чивости звезды происходит в точке кривой зависимости массы от плотности, где масса имеет максимальное значение. В ОТО максимумы кривых $M(\rho)$ и $M(\rho_0)$ совпадают [10], поэтому можно использовать любую из этих кривых. Рассмотрим зависимость $M(\rho)$. Уравнение (20), с учетом (21) запишем в следующем виде:

$$g(\rho) = \Phi(\rho, M), \quad (35)$$

где

$$g(\rho) = \frac{P}{\rho c^2}, \quad \Phi(\rho, M) = \frac{\Phi_0(x)}{\Phi_1(x)},$$

$$x = R\sqrt{D} = \sqrt{\frac{R_g}{R}} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} M^{2/3} \rho^{1/3}}, \quad R = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{M}{\rho} \right)^{1/3}.$$

Дифференцируя выражение (35), получим

$$\frac{dg(\rho)}{d\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial M} \frac{dM}{d\rho} + \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}. \quad (36)$$

Учитывая, что в максимуме массы $\frac{dM}{d\rho} = 0$, получаем для определения параметров критического

состояния нейтронной звезды $M_{\max}$ и ρ_{cr} следующую систему уравнений:

$$g(\rho) = \Phi(\rho, M), \quad \frac{dg(\rho)}{d\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}. \quad (37)$$

Здесь правые части уравнений (37) имеют одинаковый вид для всех уравнений состояния, и вычисляются из формулы (35). Левые части уравнений (37) определяются уравнением состояния, задаваемого аналитической формулой, или таблично.

7. ВЫЧИСЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Для построения решений алгебраического уравнения для различных уравнений была использована система, состоящая из уравнений (18), (20). Решение проводилось методом Ньютона [22] с принятой относительной точностью 10^{-7} . Построены модели холодных НЗ с использованием уравнения состояния вырожденного нейтронного газа и с более реалистичными уравнениями состояниями из работ [23, 24]. Аналитические

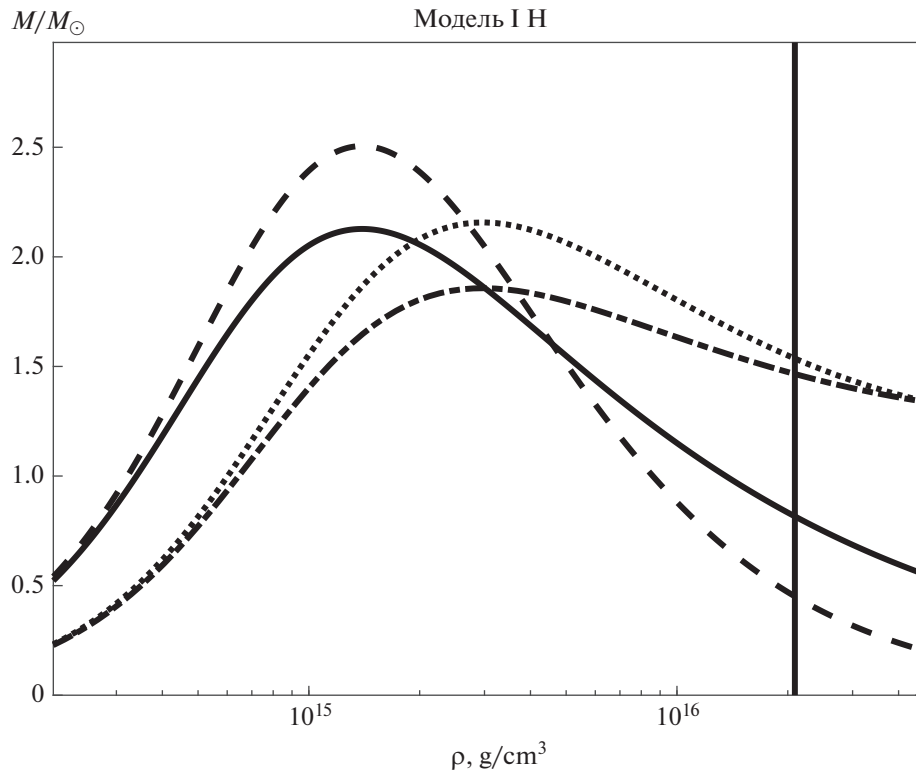


Рис. 5. Модель I H. Сплошной линией обозначена зависимость $M(\rho)$ в случае однородного распределения плотности, штрихпунктирная — в точной модели. Штриховая линия показывает зависимость $M_0(\rho)$ в однородном случае, пунктирная — в точной модели. Вертикальная сплошная линия показывает, на какой плотности $v_s = c$, $\rho = 2.2 \times 10^{16}$ г/см³.

выражения для P и $\mathcal{E}$ (полная плотность энергии) в моделях 3–6 (см. ниже) получены в результате аппроксимации табличных данных в работе [24].

1. *Модель вырожденного нейтронного газа.* Наиболее простой случай, не учитывающий взаимодействия [11] (см. рис. 3).

$$\left\{ \begin{aligned} P &= \frac{m^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3} \left(y(2y^2 - 3)\sqrt{1 + y^2} + 3 \sinh^{-1} y \right) = \\ &= 6.859 \times 10^{35} \times \\ &\times \left(y(2y^2 - 3)\sqrt{1 + y^2} + 3 \sinh^{-1} y \right) \text{ дин/см}^2, \\ \mathcal{E} &= \frac{m^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3} \left(3y(2y^2 + 1)\sqrt{1 + y^2} - 3 \sinh^{-1} y \right) = \\ &= 6.859 \times 10^{35} \times \\ &\times \left(3y(2y^2 + 1)\sqrt{1 + y^2} - 3 \sinh^{-1} y \right) \text{ эрг/см}^3, \\ y &= \left(\frac{3\pi^2 \rho_0}{m} \right)^{1/3} \frac{\hbar}{mc} = \left(\frac{\rho_0}{6.1 \times 10^{15} \text{ г/см}^3} \right)^{1/3}. \end{aligned} \right.$$

2. *Модель вырожденного нейтронного газа с квадратичной поправкой по плотности.* Данное уравнение состояния приближенно учитывает ядерное взаимодействие [25] (см. рис. 4).

$$\left\{ \begin{aligned} P &= \frac{m^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3} \left(y(2y^2 - 3)\sqrt{1 + y^2} + 3 \sinh^{-1} y \right) + \\ &+ \frac{6\pi \hbar^3}{m_p^4 c} \rho_0^2 = 6.859 \times 10^{35} \times \\ &\times \left(y(2y^2 - 3)\sqrt{1 + y^2} + 3 \sinh^{-1} y \right) + \\ &+ 0.9421086 \times 10^5 \rho_0^2 \text{ дин/см}^2, \\ \mathcal{E} &= \frac{m^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3} \left(3y(2y^2 + 1)\sqrt{1 + y^2} - 3 \sinh^{-1} y \right) + \\ &+ \frac{6\pi \hbar^3}{m_p^4 c} \rho_0^2 = 6.859 \times 10^{35} \times \\ &\times \left(3y(2y^2 + 1)\sqrt{1 + y^2} - 3 \sinh^{-1} y \right) + \\ &+ 0.9421086 \times 10^5 \rho_0^2 \text{ эрг/см}^3. \end{aligned} \right.$$

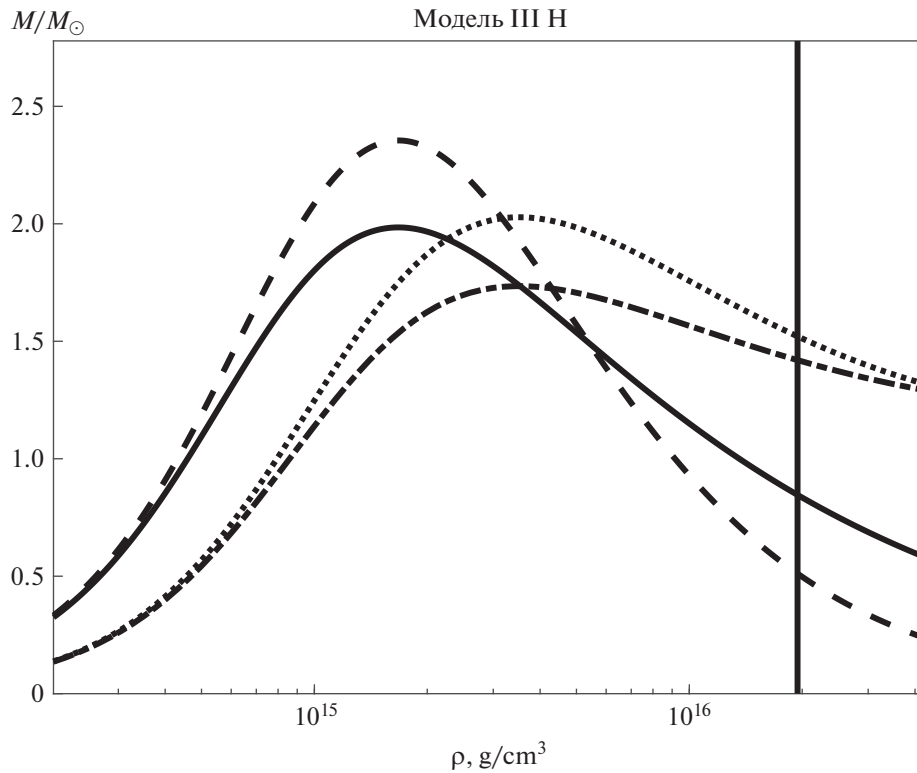


Рис. 6. Модель III Н. Сплошной линией обозначена зависимость $M(\rho)$ в случае однородного распределения плотности, штрихпунктирная — в точной модели. Штриховая линия показывает зависимость $M_0(\rho)$ в однородном случае, пунктирная — в точной модели. Вертикальная сплошная линия показывает, на какой плотности $v_s = c$, $\rho = 1.91 \times 10^{16}$ г/см³.

3. Модель I Н. Основана на потенциале Рейда, одинаковом для всех барионов (см. рис. 5).

$$\begin{cases} P = 586 \left(\frac{\rho}{m_n \times 10^{39}} \right)^{2.48} \times 10^{33} \text{ дин/см}^2, \\ \mathcal{E} = n(15.05 + 3.96n^{1.48}) \times 10^{35} \text{ эрг/см}^3, \\ n = \frac{\rho_0}{m_n}. \end{cases}$$

4. Модель III Н. Основана на более реалистичном потенциале для пр-взаимодействия (см. рис. 6).

$$\begin{cases} P = 474 \left(\frac{\rho}{m_n \times 10^{39}} \right)^{2.55} \times 10^{33} \text{ дин/см}^2, \\ \mathcal{E} = n(15.05 + 3.06n^{1.55}) \times 10^{35} \text{ эрг/см}^3. \end{cases}$$

5. Модель V Н. Аналогична модели V N (см. ниже), но с учетом рождения гиперонов (см. рис. 7).

$$\begin{cases} P = 403 \left(\frac{\rho}{m_n \times 10^{39}} \right)^{2.33} \times 10^{33} \text{ дин/см}^2, \\ \mathcal{E} = n(15.05 + 3.03n^{1.33}) \times 10^{35} \text{ эрг/см}^3. \end{cases}$$

6. Модель V N. Модель взаимодействия нуклонов с учетом экспериментальных данных по образованию ω -мезона при высоких энергиях (см. рис. 8).

$$\begin{cases} P = 490 \left(\frac{\rho}{m_n \times 10^{39}} \right)^{2.508} \times 10^{33} \text{ дин/см}^2, \\ \mathcal{E} = n(14.89 + 3.25n^{1.508}) \times 10^{35} \text{ эрг/см}^3. \end{cases}$$

7. Предельно жесткое уравнение состояния (см. рис. 9).

$$P = P^* + (\mathcal{E} - \mathcal{E}^*).$$

Для подтверждения правильности расчетов и сравнения однородных и неоднородных моделей НЗ были построены модели холодных НЗ в случае неоднородного распределения плотности. Для нахождения моделей с различными уравнениями состояния необходимо проинтегрировать уравнения Оппенгеймера-Волкова с термодинамическими функциями 1–7, указанными выше.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dr} = -\frac{G}{r^2 c^2} \frac{(\mathcal{E} + P) \left(m + \frac{4\pi r^3 P}{c^2} \right)}{1 - \frac{2Gm}{rc^2}}, \\ \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \frac{\mathcal{E}}{c^2}. \end{cases}$$

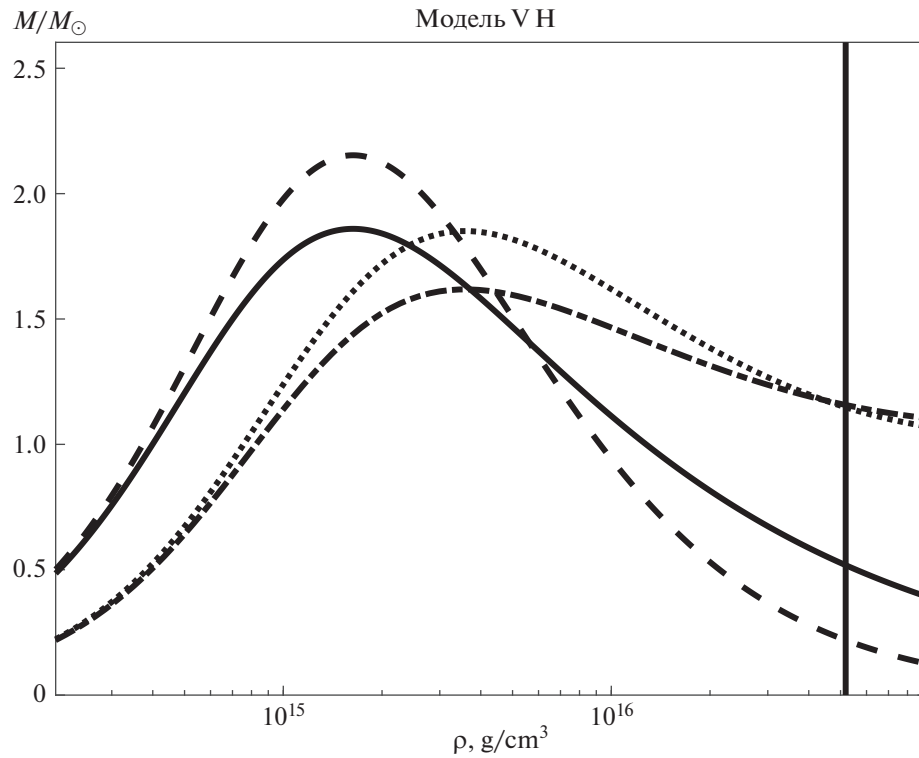


Рис. 7. Модель V H. Сплошной линией обозначена зависимость $M(\rho)$ в случае однородного распределения плотности, штрихпунктирная — в точной модели. Штриховая линия показывает зависимость $M_0(\rho)$ в однородном случае, пунктирная — в точной модели. Вертикальная сплошная линия показывает, на какой плотности $v_s = c$, $\rho = 2.15 \times 10^{16}$ г/см³.

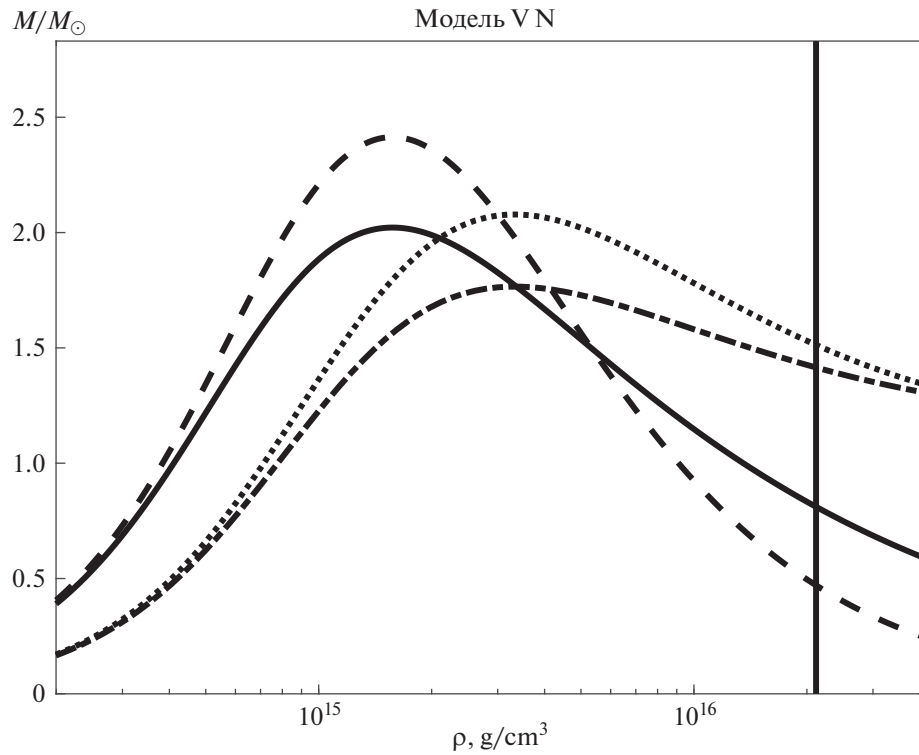


Рис. 8. Модель V N. Сплошной линией обозначена зависимость $M(\rho)$ в случае однородного распределения плотности, штрихпунктирная — в точной модели. Штриховая линия показывает зависимость $M_0(\rho)$ в однородном случае, пунктирная — в точной модели. Вертикальная сплошная линия показывает, на какой плотности $v_s = c$, $\rho = 6.64 \times 10^{16}$ г/см³.

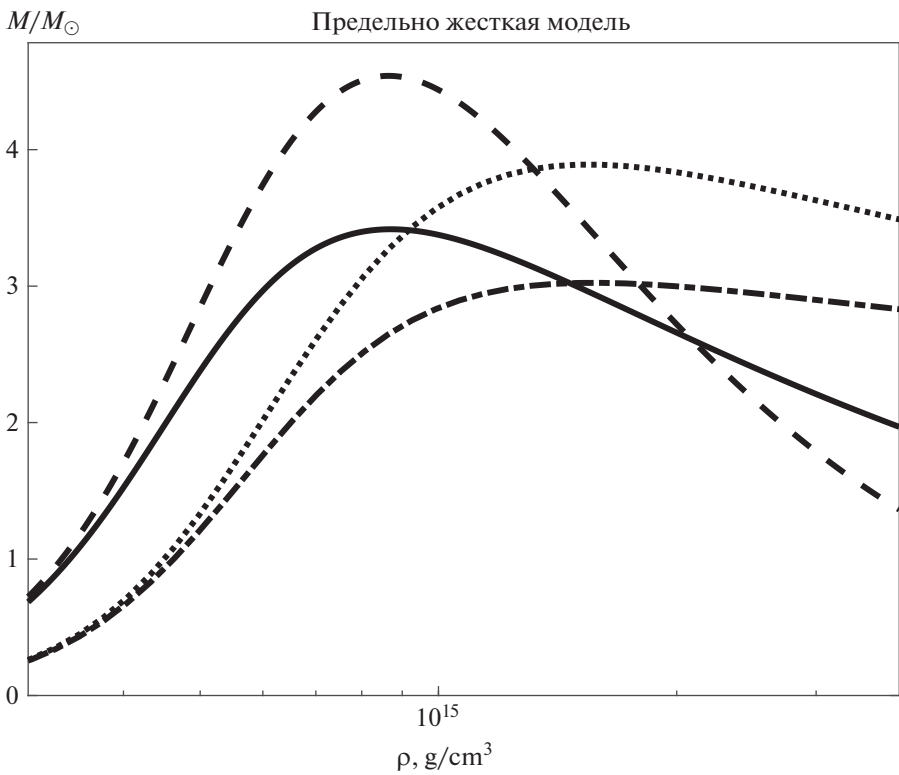


Рис. 9. Предельно жесткая модель. Сплошной линией обозначена зависимость $M(\rho)$ в случае однородного распределения плотности, штрихпунктирная – в точной модели. Штриховая линия показывает зависимость $M_0(\rho)$ в однородном случае, пунктирная – в точной модели.

Таблица 1. Критические параметры нейтронных звезд для различных уравнений состояния

Однородное распределение плотности							
Параметр	Модель						
	1	2	3	4	5	6	7
$\rho_0, 10^{15} \text{ г/см}^3$	1.3	0.74	1.2	1.44	1.4	1.37	0.76
$\rho, 10^{15} \text{ г/см}^3$	1.43	0.84	1.39	1.68	1.63	1.57	0.87
$M/M_\odot$	0.84	1.84	2.13	1.98	1.86	2.02	3.42
$M_0/M_\odot$	0.87	1.99	2.5	2.36	2.15	2.41	4.54
$R, \text{ км}$	6.54	10.1	8.99	8.27	8.16	8.49	12.3
Точная модель							
$\rho_{c0}, 10^{15} \text{ г/см}^3$	3.54	1.68	2.15	2.54	2.62	2.43	1.07
$\rho_c, 10^{15} \text{ г/см}^3$	4.2	2.17	2.97	3.52	3.59	3.33	1.57
$M/M_\odot$	0.706	1.59	1.86	1.73	1.62	1.77	3.02
$M_0/M_\odot$	0.733	1.7	2.16	2.03	1.85	2.08	3.9
$R, \text{ км}$	9.14	12.8	9.9	9.06	9.17	9.35	12.7

Примечание. Номер модели соответствует нумерации в разделе 7: 1 – модель вырожденного нейтронного газа; 2 – модель вырожденного нейтронного газа с квадратичной поправкой по плотности ρ^2 ; 3 – модель I Н; 4 – модель III Н; 5 – модель V Н; 6 – модель V Н; 7 – модель с предельно жестким уравнением состояния.

Интегрирование было проведено методом Рунге–Кутты 4 порядка точности с автоматическим выбором шага [22]. Помимо построения зависимостей $M(\rho)$, представленных на рис. 3–9, были построены зависимости массы покоя от плотности $M_0(\rho)$ в случаях однородного и неоднородного распределения плотности. Для однородных НЗ данная зависимость строится относительно просто, используя уравнения (5), см. рис. 3–9. В случае неоднородной модели необходимо интегрировать следующее уравнение:

$$m_0 = 4\pi \int_0^r \frac{\rho r'^2}{\sqrt{1 - \frac{2Gm'}{r'c^2}}} dr'; \quad M_0 = m_0(R).$$

Интегрирование также было проведено с использованием метода Рунге–Кутты 4 порядка. Параметры критического состояния НЗ приведены в табл. 1. Значения плотностей в случае неоднородной модели, в пределах ошибок, совпадают со значениями, приведенными в [24].

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках точной ОТО мы получили алгебраическое уравнение (20), позволяющее приближенно определить параметры сверхплотной звезды (нейтронной или кварковой) в модели с однородной плотностью. Уравнение имеет вид, универсальный для любого уравнения состояния $P(\rho)$, где ρ учитывает вклад всех видов энергии. Оно позволяет найти приближенные зависимости $M(\rho)$, $R(\rho)$ для равновесных звезд, и найти критическую массу звезды, которая является максимально допустимой в равновесии для заданного уравнения состояния. По достижении плотности, соответствующей этой максимальной массе на кривой $M(\rho)$, звезда становится неустойчивой, и должна коллапсировать с образованием черной дыры. Сравнение наших результатов для однородных моделей с точными решениями дифференциальных уравнений равновесия при различных уравнениях состояния из работы [24] показывает, что приближенное значение критической массы звезды может превышать точное не более, чем на $\sim 20\%$. Критические плотности в однородных моделях оказываются существенно меньше значений центральных плотностей в точных моделях (см. табл. 1), и сопоставимы со средними плотностями этих моделей.

Заметим, что существование предельной массы холодного белого карлика было впервые открыто Стонером [1] в рамках приближенной ньютоновской однородной модели. Полученное им значение массы на $\sim 20\%$ превышало точное значение этой массы, полученное позже [5, 6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. C. Stoner, London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science: Ser. 7 **9** (60), 944 (1930).
2. R. H. Fowler, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **87**, 114 (1926).
3. J. Frenkel, Zeitschrift für Physik **50** (3–4), 234 (1928).
4. Г. С. Бисноватый–Коган, *Физические вопросы теории звездной эволюции* (М.: Наука, 1989).
5. S. Chandrasekhar, Astrophys. J. **74**, 81 (1931).
6. L. D. Landau, Phys. Zs. Sowjet. **1**, 285 (1932).
7. E. L. Schatzman, *White dwarfs* (Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1958).
8. Г. С. Бисноватый–Коган, Е. А. Патраман, *Астрофизика* **64** (4), 551 (2021).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля* (М.: Физматгиз, 2001).
10. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, *Теория тяготения и эволюция звезд* (М.: Наука, 1971).
11. J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff, Phys. Rev. **55**, 374 (1939).
12. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series and products*, edited by Yu. V. Geronimus and M. Yu. Tseytlin, (4th ed.) (New York: Academic Press, 1965).
13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика* (М.: Наука, 1976).
14. Н. А. Дмитриев, С. А. Холин, в кн. *Вопросы космогонии*, т. 9, 254 (М.: Изд-во АН СССР, 1963).
15. S. H. Harrison, K. S. Thorne, M. Wakano, and J. A. Wheeler, *Gravitational theory and gravitational collapse* (Univ. Chicago Press, 1965).
16. G. S. Bisnovaty–Kogan and A. V. Dorodnitsyn, *Gravitation and Cosmology* **4**(3), 174 (1998).
17. Я. Б. Зельдович, *ЖЭТФ* **42** (2), 641 (1962).
18. Я. Б. Зельдович, *ЖЭТФ* **41** (5), 1609 (1962).
19. Я. Б. Зельдович, *Гидродинамическая устойчивость звезды*, в кн. *Вопросы космогонии*, т. 9, 157 (М.: Изд-во АН СССР, 1963).
20. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, *Успехи физ. наук* **86** (7), 447 (1965).
21. С. Шапиро, С. Тюкольский, *Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды*, Т. 1, 2 (М.: Мир, 1985).
22. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical recipes* (Cambridge University Press, 2007).
23. H. A. Bethe and M. B. Johnson, Nuclear Phys. A **230**, 1 (1974).
24. R. C. Malone, M. B. Johnson, and H. A. Bethe, Astrophys. J. **199**, 741 (1975).
25. G. S. Bisnovaty–Kogan, *Astrophysics*, **4** (2), 79 (1968).

NEUTRON STARS IN A UNIFORM DENSITY APPROXIMATION

G. S. Bisnovaty-Kogan^{a,b,c} and E. A. Patraman^{a,c}^a*Space Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*^b*National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, Russia*^c*Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia*

Models of neutron stars are considered in the case of a uniform density distribution. A universal algebraic equation is obtained that is valid for any equation of state. This equation allows us to find the approximate mass of a star of a given density without resorting to the integration of differential equations. Solutions for various equations of state, including more realistic ones, are presented in the paper and differ from the exact solutions obtained by numerical integration of differential equations by no more than 20%.

Keywords: neutron stars, uniform model, general theory of relativity