

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УДК 519.85

ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫЕ ОЦЕНКИ
МНОГОПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОЙ СЕТИ
ПРИ ПОВРЕЖДЕНИИ УЗЛОВ

© 2024 г. Ю. Е. Малашенко^a, *, И. А. Назарова^a, **

^aФИЦ ИУ РАН, Москва, Россия

*e-mail: mala-yur@yandex.ru

**e-mail: irina-nazar@yandex.ru

Поступила в редакцию 08.08.2024 г.

После доработки 15.08.2024 г.

Принята к публикации 16.10.2024 г.

В рамках вычислительного эксперимента исследуется модель управления многопользовательской системой связи. Схема управления состоит в одновременной передаче равных межузловых потоков по всем кратчайшим маршрутам. В ходе эксперимента последовательно рассматривается выход из строя каждого узла при сохранении правил диспетчеризации. Создаются массивы данных, отражающие работоспособность поврежденной сети. Полученные показатели анализируются и сравниваются с аналогичными в исходной сети. Построены гарантированные и усредненные оценки основных функциональных характеристик сети при разрушении отдельных узлов с учетом действующих правил управления. Приводятся итоговые диаграммы для сетей с различными структурными особенностями.

Ключевые слова: потоковая модель сети связи; оценка повреждений узлов; загрузка ребер

DOI: 10.31857/S0002338824060072, EDN: SUFLJM

DIFFERENTIATED ESTIMATES OF A MULTIUSER
NETWORK IN CASE OF NODE DAMAGE

Yu. E. Malashenko^a, *, I. A. Nazarova^a, **

^aFederal Research Center "Computer Science and Control"
of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119333 Russia

*e-mail: mala-yur@yandex.ru

**e-mail: irina-nazar@yandex.ru

In the framework of computational experiments a management model of the multiuser communication system is being investigated. The control scheme consists of simultaneous transmission of equal internodal flows along all shortest routes. During the experiment, the failure of each node is consistently considered while maintaining the rules of dispatching. Arrays of data are being created that reflect the system state of the damaged network. The obtained indicators are analyzed and compared with those in the original network. Guaranteed and averaged estimates of the main functional characteristics of the network during the destruction of individual nodes are constructed, taking into account the current management rules. Summary diagrams for networks with various structural features are provided.

Keywords: multicommodity flow model of network, peak load of the damaged network, structural damage response vector

Введение. В рамках вычислительных экспериментов исследуется стационарный режим управления многопользовательской пространственно-распределенной сетью связи [1] при разрушении узлов. При моделировании предполагается, что как в исходной, так и в поврежденной сетях используется нормативно-закрепленная схема управления. Согласно установленным диспетчерским правилам, равные входные межузловые информационные потоки

передаются одновременно между всеми парами узлов-корреспондентов по всем возможным существующим кратчайшим маршрутам их передачи.

В ходе эксперимента для каждой поврежденной сети формируются массивы данных о маршрутах, реберных нагрузках и удельных затратах. Сравнительный анализ полученных характеристик позволяет проследить зависимость показателей функционирования от уменьшения пропускной способности поврежденной сети. На основе эталонных данных для исходной сети строятся дифференцированные оценки, характеризующие поврежденную сеть: увеличение транзитных потоков и перегрузку на ребрах, дефицит ресурсов в сетевых узлах.

По результатам экспериментов вычисляются максимальные оценки изменения загрузки ребер и узлов при повреждениях. Определяются усредненные значения загрузки ребер и удельных затрат при передаче межузловых потоков. На основе агрегированных расчетных показателей строятся итоговые диаграммы для сетей с различными структурными особенностями.

При построении моделей реальных систем, в которых ресурсы ограничены, возникают сложности при описании их функционирования и получении численных результатов. В работе [2] приводится обзор работ и моделей беспроводных систем связи, основанных на оценке вероятностно-временных характеристик и алгоритмах, пригодных для получения численных результатов. В работе [3] предложен метод, позволяющий оценить минимальную плотность развертывания базовых станций для обеспечения заданной производительности при поддержке ресурсоемких приложений, требующих чрезвычайно высоких скоростей на уровне радиоинтерфейса. В работах [4, 5] рассматриваются задачи синтеза изменения нагрузки на узлы сетевой вычислительной инфраструктуры. Рост нагрузки в реальных системах ведет к необходимости перераспределения ресурсов и перенаправления потоков данных. Предложенные подходы [4, 5] могут быть использованы для оценки потребности в ресурсах при изучении различных телекоммуникационных систем.

Данная статья продолжает изучение многопользовательской сети [6–8] и опирается на методологию исследования операций [9–11]. Предложенную в настоящей работе процедуру можно рассматривать как один из возможных подходов к принятию решений в условиях реально существующей неопределенности о месте и цели повреждения коммутационных узлов систем связи и управления специального назначения [1].

1. Математическая модель. Для описания многопользовательской сетевой системы связи воспользуемся следующей математической записью модели передачи многопродуктового потока. Сеть G задается множествами $\{V, R, U, P\}$: узлов (вершин) сети $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots, v_N\}$; неориентированных ребер $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_E\}$; ориентированных дуг $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_{2E}\}$; пар узлов-корреспондентов $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$. Предполагается, что в сети отсутствуют петли и сдвоенные ребра.

Ребро $r_k \in R$ соединяет смежные вершины v_{n_k}, v_{j_k} . Каждому ребру r_k ставится в соответствие две ориентированные дуги u_k, u_{k+E} из множества U . Дуги $\{u_k, u_{k+E}\}$ определяют прямое и обратное направление передачи потока по ребру r_k между концевыми вершинами v_{n_k}, v_{j_k} . Для каждой вершины v_n , формируется список $K(n)$ номеров инцидентных ей ребер: $K(n) = \{k_1^n, k_2^n, \dots, k_{a(n)}^n\}$, где $a(n)$ – число инцидентных ребер для v_n .

В многопользовательской сети G рассматривается $M = N(N - 1)$ независимых, невзаимозаменяемых и равноправных межузловых потоков различных видов. Каждой паре узлов-корреспондентов p_m из множества P соответствуют: вершина-источник с номером s_m , из s_m входной поток m -го вида поступает в сеть; вершина-приемник с номером t_m , из t_m поток m -го вида покидает сеть. Для каждой вершины $v_n \in V, n = 1, N$, выделяется подмножество $P(v_n)$ всех пар-корреспондентов, для которых вершина v_n служит узлом-источником:

$$P(v_n) = \{p_m | s_m = n, t_m \neq n, t_m = \overline{1, N}\},$$

а для каждого $P(v_n)$ – список номеров $M(n)$ пар p_m , входящих в подмножество $P(v_n)$:

$$M(n) = \{m_1(n), m_2(n), \dots, m_{N-1}(n)\}.$$

Обозначим через z_m величину межузлового потока m -го вида, поступающего в сеть через узел с номером s_m и покидающего сеть из узла с номером t_m ; $x_{mk}, x_{m(k+E)}$ – поток m -го вида, который передается по дугам u_k и u_{k+E} , согласно направлению передачи, $x_{mk} \geq 0, x_{m(k+E)} \geq 0$, $m = \overline{1, M}, k = \overline{1, E}; S(v_n)$ – множество номеров исходящих дуг, по ним поток покидает узел v_n ; $T(v_n)$ – множество номеров входящих дуг, по ним поток поступает в узел v_n . Состав множеств $S(v_n), T(v_n)$ однозначно определяется в ходе выполнения следующей процедуры. Пусть неко-

торое ребро $r_k \in R$ соединяет вершины с номерами n и j , такими, что $n < j$. Тогда ориентированная дуга $u_k = (v_n, v_j)$, направленная из вершины v_n в v_j , считается *исходящей* из вершины v_n , и ее номер k заносится в множество $S(v_n)$, а дуга u_{k+E} , направленная из v_j в v_n – *входящей* для v_n , и ее номер $k+E$ помещается в список $T(v_n)$. Дуга u_k является *входящей* для v_j , и ее номер k попадает в $T(v_j)$, а дуга u_{k+E} – *исходящей*, и номер $k+E$ вносится в список исходящих дуг $S(v_j)$.

Во всех узлах сети $v_n \in V$, $n = \overline{1, N}$, для каждого вида потока должны выполняться условия сохранения потоков:

$$\sum_{i \in S(v_n)} x_{mi} - \sum_{i \in T(v_n)} x_{mi} = \begin{cases} z_m, & \text{если } v_n = v_{s_m}, \\ -z_m, & \text{если } v_n = v_{t_m}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$n = \overline{1, N}, m = \overline{1, M}, x_{mi} \geq 0, z_m \geq 0,$$

Величина z_m равна входному межузловому потоку m -го вида, проходящему от источника s_m к приемнику t_m пары p_m при распределении потоков $\{x_{mi}\} = \mathbf{x}$ по дугам сети.

Каждому ребру $r_k \in R$ приписывается неотрицательное число d_k – суммарный предельно допустимый поток, который можно передать по ребру r_k в обоих направлениях. В исходной сети компоненты вектора пропускных способностей $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_k, \dots, d_E)$ – положительные числа $d_k > 0$.

Вектор \mathbf{d} определяет следующие ограничения на сумму потоков всех видов, передаваемых по ребру r_k одновременно:

$$\sum_{m=1}^M (x_{mk} + x_{m(k+E)}) \leq d_k, \quad x_{mk} \geq 0, x_{m(k+E)} \geq 0, k = \overline{1, E}. \quad (1.2)$$

Ограничения (1.1), (1.2) задают множество допустимых значений вектора межузловых потоков $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m, \dots, z_M)$:

$$Z(\mathbf{d}) = \{\mathbf{z} \geq 0 | \exists \mathbf{x} \geq 0: (\mathbf{z}, \mathbf{x}) \text{ удовлетворяют (1.1), (1.2)}\}$$

2. Схема вычислительного эксперимента. Вычислительный эксперимент проводился на моделях сетевых систем, представленных на рис. 1, 2. В каждой сети имеется 69 узлов. Пропускные способности ребер $d_k(0)$ равномерно распределены на отрезке [900, 999]. В ходе исследования была сделана нормировка, и суммарная пропускная способность в обеих сетях одинакова:

$$\sum_{k=1}^E d_k(0) = D(0) = 68256.$$

При моделировании вначале подсчитываются межузловые потоки в неповрежденной сети $G(0)$ с пропускными способностями $d_k(0)$. Предполагается, что поток одного вида передается одновременно по всем маршрутам, содержащим минимальное число ребер (далее – MER-маршруты от англ. minimum edge route). Для оценки величины “расщепленного” потока

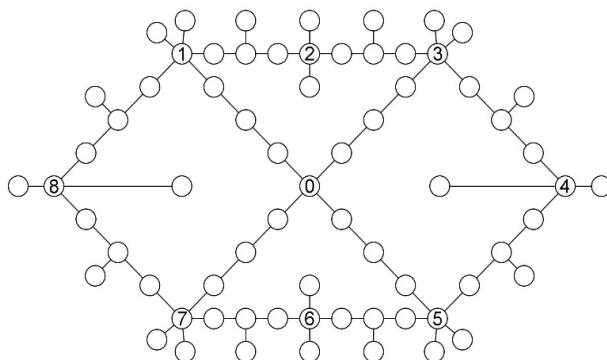


Рис. 1. Базовая сеть.

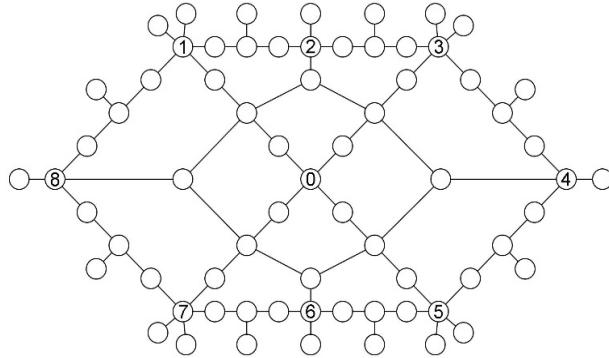


Рис. 2. Кольцевая сеть.

для каждой пары узлов $p_m = (s_m, t_m)$ в сети $G(0)$ формируется набор $H_m(1)$ путей, которые далее рассматриваются как MER-маршруты передачи m -го вида потока:

$$H_m(1) = \left\{ h_m^1(1), h_m^2(1), \dots, h_m^j(1), \dots, h_m^{J_m(1)}(1) \right\},$$

где $h_m^j(1)$ – список номеров дуг в j -м пути в сети $G(0)$ между узлами; s_m – число ребер в MER-маршруте t_m ; $J_m(1)$ – число MER-маршрутов для m -й пары.

Для каждой пары $p_m \in P$ по всем MER-маршрутам из $H_m(1)$ передается единичный межузловый поток z_m и вычисляются значения индикаторной функции:

$$\eta_k^j(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \in h_m^j(1), \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Определяются дуговые потоки для пары p_m :

$$x_{mk}^0(1) = \sum_{j=1}^{J_m(1)} \eta_k^j(m), m = \overline{1, M}, k = \overline{1, 2E}. \quad (2.1)$$

Межузловой поток по MER-маршрутам (далее – MER-поток) $z_m^0(1)$ между узлами s_m и t_m вычисляется по формулам (1.1), (2.1). Рассчитывается нормирующий коэффициент:

$$\omega_m^0(1) = \frac{1}{z_m^0(1)}, z_m^0(1) \neq 0, m = \overline{1, M},$$

и дуговые потоки

$$x_{mk}^0 = \omega_m^0(1) x_{mk}^0(1), m = \overline{1, M}, k = \overline{1, 2E}. \quad (2.2)$$

При передаче всех потоков x_{mk}^0 по ребрам сети межузловой поток из узла s_m в узел t_m равен единице для всех $p_m \in P$.

В сети $G(0)$ для каждого ребра r_k подсчитывается загрузка:

$$\Delta_k(0) = \sum_{m=1}^M \left[x_{mk}^0 + x_{m(k+E)}^0 \right],$$

т. е. величина $\Delta_k(0)$ находится на основании значений x_{mk}^0 при одновременной передаче всех межузловых потоков, таких, что

$$z_m^0 = 1, \text{ для всех } p_m \in P.$$

3. Оценки изменения показателей функционирования. Для оценки последствий повреждения узла v_j на основе исходной сети $G(0)$ формируется сеть $G(v_j)$, в которой пропускная способность ребер, инцидентных вершине v_j , полагается равной нулю:

$$d_k(v_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \in K(v_j), \\ d_k(0) & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$D(v_j) = D(0) - \sum_{k \in K(v_j)} d_k(0),$$

здесь и далее $K(v_j)$ – множество номеров ребер, инцидентных вершине v_j .

Формально для сети $G(v_j)$ применяется схема построения MER-маршрутов и, согласно (2.2), строятся дуговые потоки $\{x_{mk}^0\}$, $k = 1, 2E$, для межузловых потоков z_m^j . Вводятся обозначения: $P^-(v_j) = \{m_1, m_2, \dots\}$ – список пар, для которых в сети $G(v_j)$ не существует пути соединения; $M^-(v_j)$ – число таких пар. Для всех пар $p_m \in P^-(v_j)$ соответствующие потоки z_m^j равны нулю. Обозначим через $P^+(v_j)$ список пар узлов, таких, что поток между ними в сети $G(v_j)$ не равен нулю, т.е. для всех пар-корреспондентов выполняется

$$z_m^j = 0, m \in P^-(v_j), z_m^j = 1, m \in P^+(v_j).$$

Пусть $M^+(v_j)$ – число пар в $P^+(v_j)$, а $M^-(v_j)$ – соответственно в $P^-(v_j)$. При этом

$$P = P^+(v_j) \cup P^-(v_j), M = M^+(v_j) + M^-(v_j)$$

В каждой сети $G(v_j)$, $j = \overline{1, N}$, относительное изменение (превышение/уменьшение) загрузки ребра r_k рассчитывается относительно начальных показателей:

$$\xi_k^j = \left[\frac{\Delta_k(v_j)}{\Delta_k(0)} - 1 \right], k = \overline{1, E}.$$

Для оценки относительного изменения пропускной способности сети при удалении узла v_j вычисляется

$$\delta^j = \frac{\sum_{k \in K(v_j)} d_k(0)}{D(0)}, j = \overline{1, N},$$

где $K(v_j)$ – множество номеров ребер, инцидентных узлу v_j . Для них пропускная способность в сети $G(v_j)$ становится равной нулю. Для получения количественных оценок изменения функциональных показателей системы при удалении узла v_j подсчитываются величины:

$$\theta_k^j = \frac{\xi_k^j}{\delta^j}, k = \overline{1, E}.$$

Фактически, если значения ξ_k^j и δ^j записать в процентах, то величина θ_k^j показывает, на сколько процентов увеличится загрузка k -го ребра при уменьшении пропускной способности сети на 1% при удалении j -го узла. Значения θ_k^j упорядочиваются по величине от большего к меньшему (по невозрастанию) и перенумеровываются согласно порядку:

$$\{\theta_i^j\}: \theta_i^j \geq \theta_{i+1}^j, i = \overline{1, E-1}.$$

Полученные лексикографически упорядоченные величины $\{\theta_i^j\}$ являются i -ми компонентами вектор-отклика $\Theta(j)$.

Для каждой фиксированной i -й компоненты вектор-отклика $\Theta(j)$ среди всех повреждений во всех сетях $G(v_j)$ определяются

$$\Theta_i^* = \max_j \theta_i^j, \Theta_i^{**} = \min_j \theta_i^j, i = \overline{1, E}.$$

Последовательность $\{\Theta_i^*\}$, $i = \overline{1, E}$, представляет собой гарантированные оценки компонент векторов-отклика системы на повреждение узла.

На диаграммах рис. 3, 4 для базовой и кольцевой сетей представлены оценки Θ_i^* , которые упорядочены по величине от большего к меньшему, а номера указаны по горизонтальной оси. Кривые, описывающие Θ_i^* , служат верхними огибающими для всех распределений вектор-откликов $\Theta(j)$ при повреждениях узлов v_j . По построению Θ_i^* можно рассматривать как гарантированные верхние оценки откликов при разрушении любой вершины графа сети. При повреждении любого узла v_j точки, описывающие лексикографически упорядоченное распределение вектор-откликов θ_i^j , лежат ниже Θ_i^* .

Анализ диаграмм рис. 3, 4 показывает, что при уменьшении пропускной способности сети на 1% рост загрузки ребер в базовой сети не превышает 30%, однако в кольцевой сети при некоторых повреждениях может достигать 60%. В ходе экспериментов с выходом из строя узла пропускная способность сети $G(v_j)$ в среднем уменьшается на 3–4%. Таким образом в базовой сети

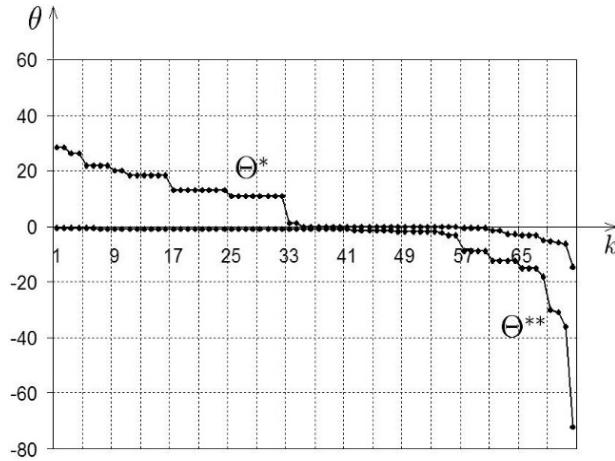


Рис. 3. Оценки компонент векторов отклика в базовой сети.

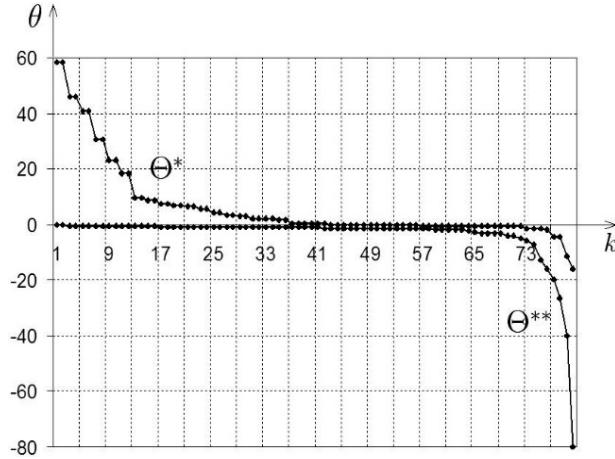


Рис. 4. Оценки компонент векторов отклика в кольцевой сети.

реберная нагрузка может удваиваться, а в кольцевой – возрасти в 3 раза. Разрушение отдельного узла требует изменения маршрутов передачи потока для значительного числа пар-корреспондентов, вызывает перегрузки на определенных участках сети и ухудшает ее работоспособность. Диаграммы на рис. 3, 4 иллюстрируют количественные оценки последствий разрушений.

4. Оценка загрузки узлов при повреждениях. На основании (2.2) для получения оценки максимального значения равных межузловых потоков решается следующая задача.

Задача. Найти $\tilde{\alpha} = \max_{\alpha} \alpha$

$$\text{при условиях: } \alpha \sum_{m=1}^M [x_{mk}^0 + x_{m(k+E)}^0] \leq d_k(0), \alpha \geq 0, k = \overline{1, E}.$$

С помощью решения задачи для всех $p_m \in P$ определяется вектор $\tilde{z}(\tilde{\alpha})$, все компоненты которого равны $\tilde{\alpha}$, т.е.

$$\tilde{z}_m = \tilde{\alpha}, m = \overline{1, M}, \tilde{x}_{mk} = \tilde{\alpha} x_{mk}^0, m = \overline{1, M}, k = \overline{1, 2E}.$$

При одновременной передаче всех потоков в сети $G(0)$ для каждого ребра r_k загрузка $\tilde{\Delta}_k$ подсчитывается исходя из дуговых потоков \tilde{x}_{mk} :

$$\tilde{\Delta}_k = \sum_{m=1}^M [\tilde{x}_{mk} + \tilde{x}_{m(k+E)}].$$

Для каждой пары узлов-корреспондентов $p_m \in P$, для полученного допустимого межузлового потока \tilde{z}_m и соответствующих значений дуговых потоков \tilde{x}_{mk} , $k = \overline{1, 2E}$, величина

$$\tilde{\gamma}_m = \sum_{k=1}^{2E} \tilde{x}_{mk}, \quad m = \overline{1, M},$$

характеризует результирующую межузловую *нагрузку* на ребра сети $G(0)$ при передаче межузлового потока \tilde{z}_m из узла-источника s_m в узел-приемник t_m . Величина $\tilde{\gamma}_m$ показывает, какая суммарная пропускная способность сети потребуется для передачи дуговых потоков \tilde{x}_{mk} .

В рамках модели отношение результирующей межузловой нагрузки и межузлового потока

$$w_m = \frac{\tilde{\gamma}_m}{\tilde{z}_m}, \quad m = \overline{1, M},$$

можно трактовать как *удельные затраты* ресурсов сети при передаче единичного потока m -го вида между узлами s_m и t_m при дуговых потоках \tilde{x}_{mk} .

В каждой поврежденной сети $G(v_j), j = \overline{1, N}$, определяется набор кратчайших путей, согласно (2.2), потоки

$$z_m^j = 1, \quad m \in P^+(v_j), \quad x_{mk}^0, \quad m = \overline{1, M},$$

и далее формируется набор:

$$\tilde{z}_m(v_j) = \tilde{\alpha}, \quad m \in P^+(v_j), \quad \tilde{x}_{mk}(v_j) = \tilde{\alpha}x_{mk}^0, \quad m = \overline{1, M}, \quad k = \overline{1, 2E}.$$

В сети $G(v_j)$ для каждого ребра r_k подсчитывается загрузка:

$$\tilde{\Delta}_k(v_j) = \sum_{m=1}^M [\tilde{x}_{mk}(v_j) + \tilde{x}_{m(k+E)}(v_j)].$$

При одновременной передаче всех межузловых потоков из множества $P^+(v_j)$ их значения

$$\tilde{z}_m(v_j) = \tilde{\alpha} \text{ для всех } m \in P^+(v_j).$$

Для каждой неповрежденной вершины v_n в сети $G(v)$ загрузка всех инцидентных ей ребер равна

$$\gamma_n(v_j) = \sum_{k \in K(v_n)} \tilde{\Delta}_k(v_j),$$

пропускная способность всех инцидентных ребер составляет

$$D_n(v_j) = \sum_{k \in K(v_n)} d_k(v_j).$$

Относительная величина

$$\rho_n(v_j) = \frac{\gamma_n(v_j)}{D_n(v_j)}, \quad n = \overline{1, N}, \quad n \neq j, \quad (4.1)$$

показывает, как меняется загрузка узла с номером n при сохранении передачи межузловых потоков \tilde{z}_n , равных $\tilde{\alpha}$, в поврежденной сети $G(v_j)$.

Для получения гарантированных оценок функционирования сети все $\rho_n(v_j)$ при фиксированном v_j переупорядочиваются от большего к меньшему (по неубыванию):

$$\{\rho_k(v_j)\}: \rho_i(v_j) \geq \rho_{i+1}(v_j), \quad i = \overline{1, N-1},$$

и определяются верхняя и нижняя оценки:

$$\rho_i^* = \max_j \rho_i(v_j), \quad \rho_i^{**} = \min_j \rho_i(v_j).$$

На рис. 5, 6 представлены диаграммы значений ρ_i и ρ_i^* для базовой и кольцевой сетей. Из диаграмм следует, что в базовой сети величины перегрузок больше и возникают они чаще, чем в кольцевой. В базовой сети удаление узла, расположенного, например, на “кольцевой” линии, приводит к удлинению маршрутов передачи (соединений) для большого числа корреспондентов и, как следствие, увеличению транзитной нагрузки на оставшиеся узлы. В кольцевой сети на 10% больше ребер и короче маршруты соединения, что уменьшает суммарную

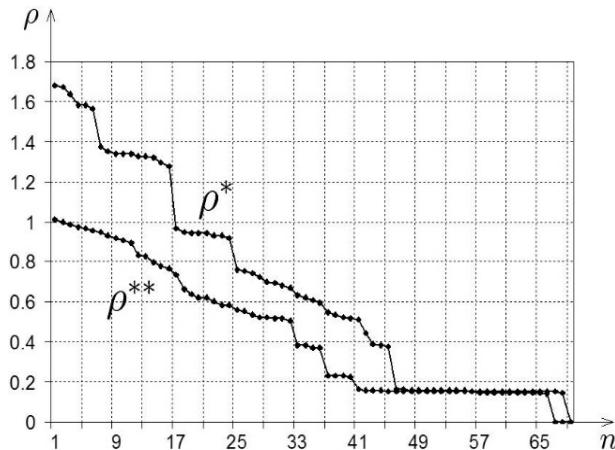


Рис. 5. Показатели перегрузки узлов в базовой сети.

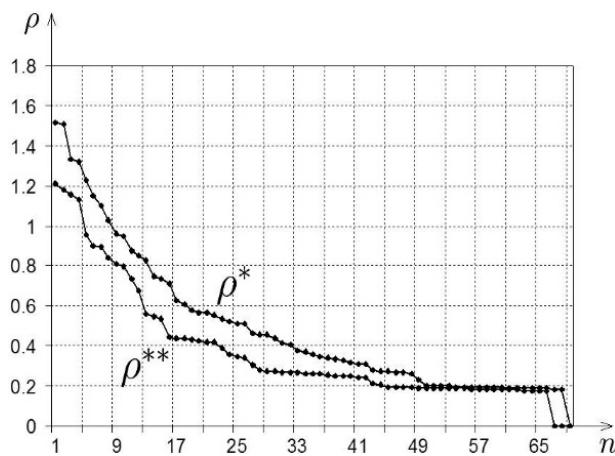


Рис. 6. Показатели перегрузки узлов в кольцевой сети.

загрузку сети. Однако высокая загрузка ребер на внутреннем кольце приводит к перегрузкам в узлах, смежных с разрушенным. Указанные узлы в этом случае становятся транзитными для тех потоков, которые передавались в неповрежденной сети по другим маршрутам.

5. Оценка показателей работоспособности при повреждении узла. Повреждение отдельного узла вынуждает систему управления использовать другие маршруты передачи и перенаправлять потоки, что в свою очередь ведет к перегрузкам в узлах. Будем считать, что показатели *работоспособности* узла находятся в норме, если загрузка узла не превышает его суммарной пропускной способности. Далее исследуем случай, когда узел функционирует не в штатном режиме.

Для оценки показателей *работоспособности* при повреждении некоторого узла v_j используется массив расчетных данных (4.1). Для каждого узла $v_j, j = \overline{1, N}$, в поврежденной сети $G(v_j)$ среди всех неповрежденных узлов вычисляется максимально возможное превышение реберными потоками (загрузкой) суммарной пропускной способности:

$$\Psi_1(v_j) = \max_n \left\{ \left[\rho_n(v_j) - 1 \right] | n = \overline{1, N}, n \neq j \right\}.$$

Обозначим через $\varkappa_n(v_j)$ индикаторную функцию, показывающую изменение загрузки n -й вершины в сети:

$$\varkappa_n(v_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho_n(v_j) > 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$\varkappa^+(v_j)$ – число узлов, для которых изменение загрузки больше единицы:

$$\varkappa^+(v_j) = \sum_{n=1}^N \varkappa_n(v_j).$$

В каждой сети $G(v_j), j = \overline{1, N}$ подсчитываются $\varkappa^+(v_j)$ и доля узлов с изменением загрузки больше единицы:

$$\Psi_2(v_j) = \frac{\varkappa^+(v_j)}{N}.$$

На рис. 7, 8 представлены диаграммы значений $\{\Psi_1(v_j), \Psi_2(v_j)\}$ для всех $j = \overline{1, N}$.

Анализ диаграмм на рис. 7, 8 показывает, что выход из строя узлов базовой сети приводит к более значительным изменениям показателей функционирования по сравнению с кольцевой. Равенство $\Psi_2(v_j) = 0.25$ означает, что при некотором повреждении перегрузка будет наблюдаться в каждом четвертом узле базовой сети, а в кольцевой – только в каждом десятом. В кольцевой сети максимальная перегрузка $\Psi_2(v_j) \leq 0.5$ – не более 50%. В базовой сети максимальные значения $0.6 \leq \Psi_2(v_j) \leq 0.7$ лежат в диапазоне 60–70%. В кольцевой сети на 10% больше ребер, есть два кольца, большая связность сети, поэтому целый ряд показателей *работоспособности* при разрушении отдельного узла меняется меньше, чем в базовой.

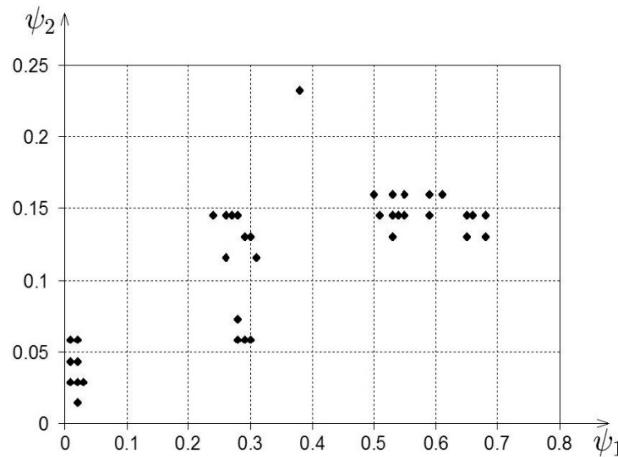


Рис. 7. Сравнительные показатели работоспособности в базовой сети.

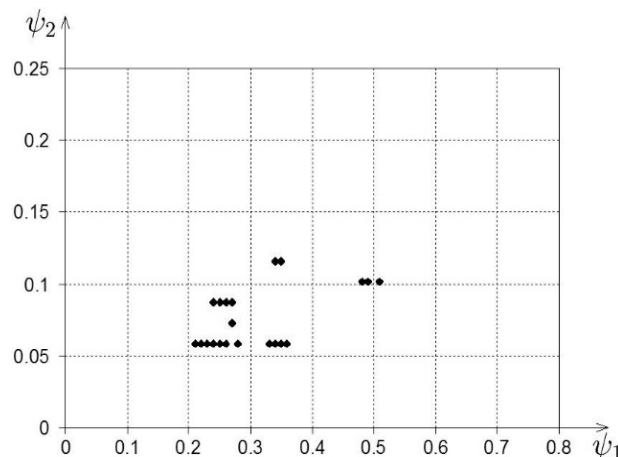


Рис. 8. Сравнительные показатели работоспособности в кольцевой сети.

6. Усредненные показатели. Для оценки средних значений загрузки ребер относительно пропускной способности для каждой сети $G(v_j), j = 1, N$, вычисляется

$$v_k^j = \frac{\Delta_k(v_j)}{d_k(v_j)} \text{ для всех } k = \overline{1, E} \text{ таких, что } d_k(v_j) = d_k(0) > 0,$$

и средняя (относительная) загрузка ребра при различных повреждениях:

$$v_k^+ = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N v_k^j, k = \overline{1, E}.$$

Для оценки отклонений v_k^j в поврежденной сети $G(v_j)$, исходя из начальных $v_k(0)$, определяется среднее значение:

$$\delta_k^+ = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\sum_{j=1}^N (v_k^j - v_k(0))^2 \right]^{1/2}, \text{ где } v_k(0) = \frac{\Delta_k}{d_k(0)}, k = \overline{1, E}.$$

На рис. 9, 10 для базовой и кольцевой сетей представлены диаграммы значений v_k^+ , δ_k^+ , упорядоченных от большего к меньшему, номера указаны по горизонтальной оси. Значения v_k^+ служат оценками средней загрузки ребра при различных повреждениях, а δ_k^+ используются как оценки отклонения загрузок в поврежденной сети от исходных.

Правые части графиков на рис. 9, 10 практически параллельны оси абсцисс и соответствуют ребрам, инцидентным висячим вершинам. Как уже отмечалось выше, загрузка ребер

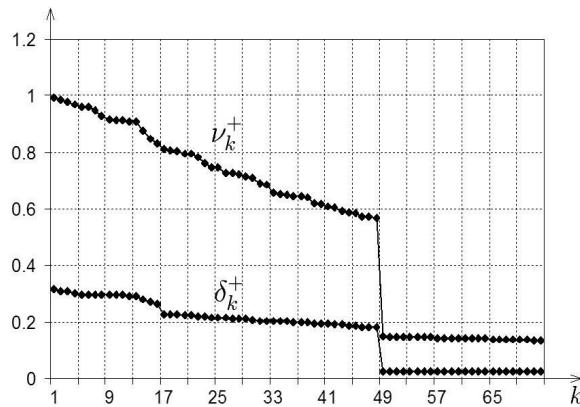


Рис. 9. Средняя оценка загрузки ребер при повреждениях в базовой сети.

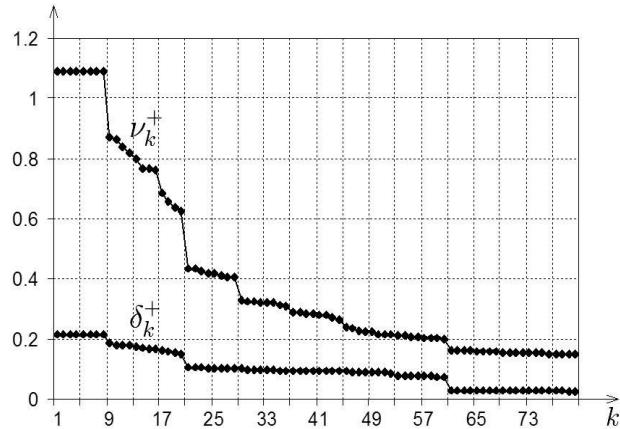


Рис. 10. Средняя оценка загрузки ребер при повреждениях в кольцевой сети.

к висячим вершинам совпадает с исходной при повреждении большинства узлов и становится равной нулю при разрушении инцидентных висячих вершин. В базовой сети средняя загрузка ребер при повреждениях меньше исходной, но отклонения невелики. Для кольцевой сети даже усредненные показатели для некоторых ребер превышают загрузки в исходной сети и разброс значений больше, чем в базовой. В кольцевой сети через центральные узлы проходит много кратчайших маршрутов, и удаление этих вершин приводит к резкому увеличению транзитных потоков за счет возрастания длины путей соединения.

7. Оценка удельных затрат. Формально для сети $G(v_j)$, примен器ается схема построения MER-маршрутов и, согласно (2.2), строятся дуговые потоки $\{x_{mk}^0\}$, $k = 1, 2E$, для межузловых потоков z_m^j .

В разд. 3 через $P^+(v_j)$ был обозначен список пар, поток между которыми в сети $G(v_j)$ не равен нулю, т.е.

$$z_m^j = 1, w_m^j \geq w_m(0), m \in P^+(v_j),$$

где $w_m(0)$

— удельные затраты в исходной сети $G(0)$ при условии (2.2). Для всех $m \in P^+(v_j)$ вычисляются

$$\varphi_m^j = \frac{w_m^j}{w_m(0)}, w_m(0) \neq 0,$$

и подсчитывается среднее значение относительного увеличения удельных затрат на передачу межузлового потока z_m при повреждении узла v_j :

$$\varphi_+^j = \frac{1}{M^+(v_j)} \sum_{p_m \in P^+(v_j)} \varphi_m^j.$$

Определяется доля пар p_m , для которых путь соединения в сети $G(v_j)$ отсутствует:

$$\Psi_-^j = \frac{M^-(v_j)}{M}.$$

Показатели φ_+^j , Ψ_-^j используются далее в качестве оценки ущерба при повреждении узла v_j . Значения φ_+^j , Ψ_-^j находятся последовательно для всех узлов v_j , $j = 1, N$.

На рис. 11, 12 представлены диаграммы изменения удельных затрат φ_+^j и доли пар Ψ_-^j при повреждении узла v_j . Величины φ_+^j и Ψ_-^j переупорядочены от большего к меньшему и откладываются по вертикальной оси. По горизонтальной оси указаны порядковые номера поврежденных узлов. Верхние кривые на рис. 11, 12 относятся к φ_+^j и соответствуют средним значениям удельных затрат на передачу межузловых потоков при повреждении узла v_j . Нижние указывают на Ψ_-^j — долю общего числа корреспондентов, для которых не существует пути передачи. При повреждении одного узла пропускная способность от одного до пяти ребер становится равной нулю. В среднем повреждение 3% ребер “разделяет” 3–4% пар-корреспондентов.

Из рис. 12 для кольцевой сети следует, что число повреждений около 20% приводит к росту удельных затрат на 10%. Число “разъединенных” пар-корреспондентов не превышает 3% при 75% повреждений. Для базовой сети (рис. 11) наличие более 75% повреждений увеличивает удельные затраты более чем на 10%, а более 25% “разъединяют” более 5% пар. В обоих

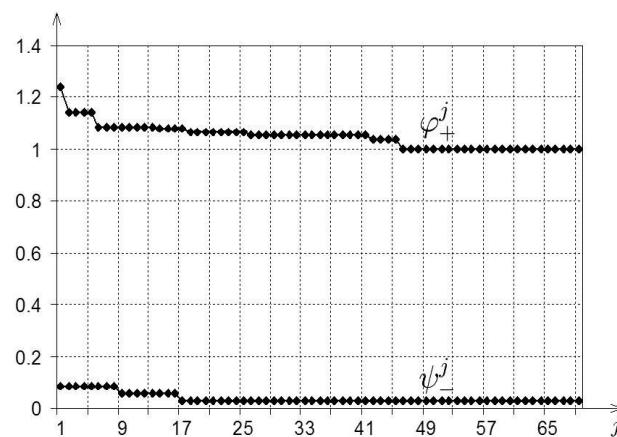


Рис. 11. Средние удельные затраты при повреждении узла в базовой сети.

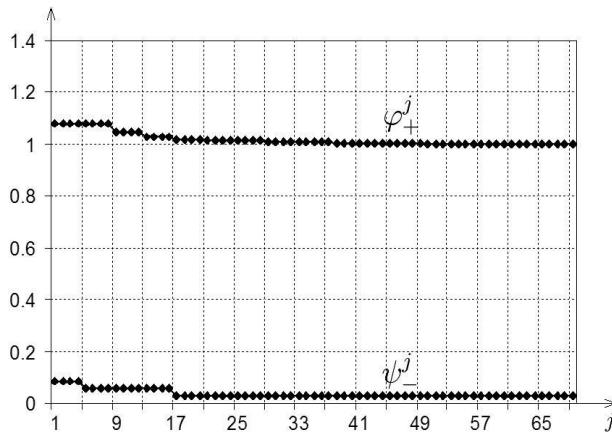


Рис. 12. Средние удельные затраты при повреждении узла в кольцевой сети.

сетях при повреждении висячих узлов кратчайшие пути для всех корреспондентов остаются неизменными. В результате правые части диаграмм на рис. 11, 12 практически совпадают для номеров узлов более 45 как для кольцевой, так и для базовой сетей.

Заключение. Вычислительные эксперименты и последующий анализ проводились в рамках формализма многопродуктовой потоковой модели. Использование указанной математической модели позволяет получить агрегированный срез данных о взаимосвязи между жесткой комбинаторно-графовой природой сети и множеством векторов-откликов. Полученные количественные оценки фактически характеризуют изменения потоковой нагрузки на сеть в случае выхода из строя узлов и ребер.

Представленную выше модель можно расценивать как один из вариантов постановки традиционных задач о поиске и определении критических элементов сети, тогда предложенная агрегированная гарантированная оценка ущерба будет служить вариантом постановки [12]. Для поиска критически опасных повреждений [13], который сводится к NP-трудной задаче, в качестве эффективных эвристик для метода ветвей-и-границ подойдут изложенные в данной статье варианты вычисления векторных оценок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пехтерев С.В., Макаренко С.И., Ковалский А.А. Описательная модель системы спутниковой связи Starlink // Системы управления, связи и безопасности. 2022. № 4. С. 190–255.
2. Горбунова А.В., Наумов В.А., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е. Ресурсные системы массового обслуживания как модели беспроводных систем связи // Информатика и ее применения. 2018. Т. 12. Вып. 3. С. 48–55.
3. Бесчастный В.А., Острикова Д.Ю., Шоргин С.Я., Молчанов Д.А., Гайдамака Ю.В. Анализ плотности базовых станций 5G NR для предоставления услуг виртуальной и дополненной реальности // Информатика и ее применения. 2022. Т. 16. Вып. 2. С. 102–108.
4. Горшенин А.К., Горбунов С.А., Волканов Д.Ю. О кластеризации объектов сетевой вычислительной инфраструктуры на основе анализа статистических аномалий в трафике // Информатика и ее применения. 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 76–87.
5. Горшенин А.К. О некоторых математических и программных методах построения структурных моделей информационных потоков // Информатика и ее применения. 2017. Т. 11. Вып. 1. С. 58–68.
6. Малашенко Ю.Е., Назарова И.А. Сравнительный анализ узловых мультипотоков в многопользовательской сетевой системе // Информатика и ее применения. 2024. Т. 18. Вып. 1. С. 40–45.
7. Малашенко Ю.Е., Назарова И.А. Анализ загрузки многопользовательской сети при расщеплении потоков по кратчайшим маршрутам // Информатика и ее применения. 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 19–24.
8. Малашенко Ю.Е., Назарова И.А. Анализ критически опасных повреждений сети связи. IV. Многокритериальные оценки уязвимости кластеров // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 1. С. 56–66.
9. Фрэнк Г., Фриши М. Сети, связь и потоки. М.: Связь, 1978. 448 с.
10. Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971. 384 с.
11. Данскин Дж.М. Теория максимина и ее приложение к задачам распределения вооружения. М.: Сов. радио, 1970. 200 с.
12. Ponton J., Wei P., Sun D. Weighted Clustering Coefficient Maximization for Air Transportation Networks // Control Conference (ECC). Zurich, 2013. Р. 866–871.
13. Kuhnle A., Nguyen N.P., Dinh T.N., Thai M.T. Vulnerability of Clustering under Nodes Failure in Complex Networks // Social Network Analysis and Mining. 2017. V. 7. Iss. 1. P. 8–24.