ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2024, № 6, с. 41–45

УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

УДК 517.958

ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ ЭМУЛЬСИИ СЛАБОВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ[1]

© 2024 г. А. А. Егорова[a, *], А. С. Шамаев[b, **]

[a]*Российский технологический университет (МИРЭА), Москва, Россия*

[b]*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

**e-mail: alena.andreevna.egorova@yandex.ru*

***e-mail: sham@rambler.ru*

Поступила в редакцию 05.08.2024 г.

После доработки 13.08.2024 г.

Принята к публикации 16.10.2024 г.

Рассматривается задача распределенного управления колебаниями эффективной (усредненной) среды, соответствующей двухфазной среде из слабовязких жидкостей. Усредненная модель описывается краевой задачей для интегродифференциального уравнения. Показано, что для этой модели силовым воздействием на всю область невозможно привести за конечное время колебания в состояние покоя.

Ключевые слова: управление колебаниями, асимптотические методы, усреднение

DOI: 10.31857/S0002338824060048, **EDN:** SVRBOO

THE PROBLEM OF DISTRIBUTED CONTROL OF EMULSION VIBRATIONS OF WEAKLY VISCOUS COMPRESSIBLE LIQUIDS

A. A. Egorova[a, *], A. S. Shamaev[b, **]

[a]*MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia*

[b]*IPMech RAS, Moscow, Russia*

**e-mail: alena.andreevna.egorova@yandex.ru*

***e-mail: sham@rambler.ru*

The problem of distributed control of oscillations of an effective (averaged) medium corresponding to a two-phase medium of slightly viscous liquids is considered. The averaged model is described by a boundary value problem for an integro-differential equation. It is shown that for this model, it is impossible to bring vibrations to a state of rest in a finite time by force action on the entire region.

Keywords: control of oscillations, asymptotic methods, averaging

Введение. В современном мире потребности в новых материалах, исследование акустики морского дна, проблемы геологической разведки вызывают интерес к разработке моделей, описывающих физические процессы в неоднородных средах. Например, задачи распространения акустических волн в комбинированных средах, состоящих из упругого каркаса и вязкой жидкости либо из упругих и вязкоупругих материалов и т.п., изучались многими исследователями в течение последних 70 лет [1, 2]. Для анализа в подобных средах часто полагают включение фаз (двух или нескольких) с быстро чередующейся периодической структурой, при этом характерный размер чередования ε принимают за малый параметр. Тогда можно постро-

[1] Работа выполнена в рамках госзадания №124012500443–0.

ить усредненную (эффективную) модель – краевые задачи для уравнений с медленно меняющимися коэффициентами, к решениям которых сходятся решения исходных задач при $\varepsilon \to 0$. При этом тип уравнений в усредненной модели определяется характеристиками (вязкость, упругость, сжимаемость) каждой из фаз, геометрическими особенностями включений одной фазы в другую, а также поведением параметров задачи относительно ε [1, 3].

Задача управления состоит в том, чтобы понять, возможно ли привести колебания среды в покой за конечное время посредством ограниченного по абсолютной величине силового воздействия на всю область, занимаемой образцом комбинированной среды. В данной работе рассматривается проблема приведения в состояние покоя за конечное время малых колебаний в эффективной модели, соответствующей колебаниям в двухфазной среде, которая состоит из двух слабосжимаемых жидкостей. Показано, что для этой модели силовым воздействием на всю область невозможно привести за конечное время колебания в состояние покоя. В то же время для дифференциальных уравнений теплопроводности для струны, мембраны, пластины в работе [4] установлена возможность приведения в состояние полного покоя за конечное время.

1. Математическая модель эмульсии двух жидкостей. Рассматривается движение эмульсии в ограниченной области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$ при внешних звуковых возмущениях $\boldsymbol{f}(t, x)$ малой амплитуды. Периодически расположенные одинаковые включения имеют достаточно гладкую форму (рисунок).

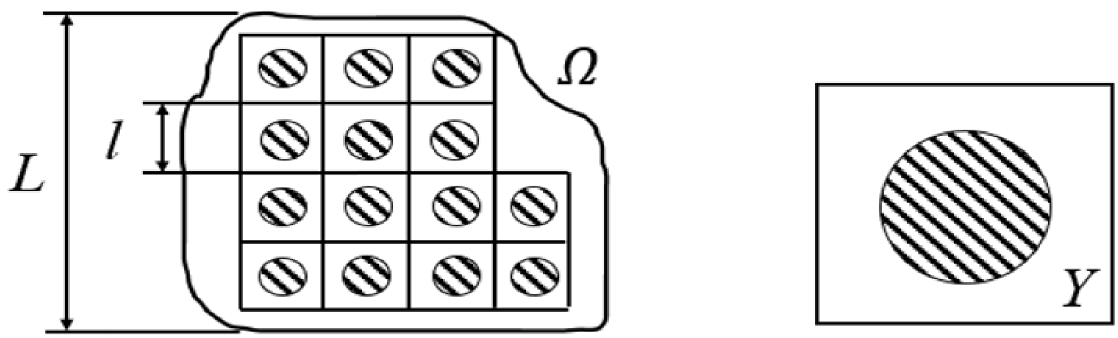

Рис. 1. Область Ω и ячейка периода Y.

Характеристики жидкостей в состоянии покоя (вязкости μ и плотности ρ, скорости звука c) считаются сравнимыми, отношение стороны l ячейки периодичности Y и размера L области Ω мало и равно $\varepsilon \ll 1$. Закон движения в эмульсии задается уравнением Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\nabla p + \varepsilon^2 \mu \Delta \boldsymbol{v} + \nabla\left(\frac{\varepsilon^2 \mu}{3}\right) div\, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}, \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{v}(x, t, \varepsilon)$ – скорость дисперсионной среды, $p(x, t, \varepsilon)$ – давление, $\boldsymbol{f}(x, t)$ – функция воздействия звукового поля на эмульсию, удовлетворяющая неравенству:

$$|\boldsymbol{f}(x, t)| \leqslant M,$$

$M > 0$ – заданная константа. На границах фаз предполагается непрерывность скорости и тензора напряжений. Перемещение $\boldsymbol{u}(x,t,\varepsilon) \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3$ связано со скоростью $\boldsymbol{v}$ и давлением p следующими соотношениями:

$$\boldsymbol{u}(x,t,\varepsilon) = \int_0^t \boldsymbol{v}(x,s,\varepsilon)\, ds,\ \ p(x,t,\varepsilon) = -\gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) div\, \boldsymbol{u}, \tag{1.2}$$

где $\gamma(\xi) = c^2(\xi)\rho(\xi) > 0$ – модуль объемной упругости. Начальное перемещение и скорость задаются вектор-функциями:

$$\boldsymbol{u}\,|_{t=0} = \boldsymbol{\varphi}_0(x),\ \ \boldsymbol{v}|_{t=0} = \boldsymbol{\varphi}_1(x). \tag{1.3}$$

2. Эффективная модель. Из работы [5] следует, что краевая задача для усредненной модели микстуры из двух слабовязких жидкостей удовлетворяет динамическому закону Дарси, который описывается следующей системой:

$$\begin{cases} \hat{\gamma}\dot{p}^0 + div_x\left(\boldsymbol{K}(t) * \left(\boldsymbol{f}(t,x) - \nabla p^0\right)\right) = 0,\ x \in \\ \left(\boldsymbol{K}(t) * \nabla p^0,\ \boldsymbol{n}\right) = \left(\boldsymbol{K}(t) * \boldsymbol{f},\ \boldsymbol{n}\right),\ x \in \partial\Omega, \\ f(t,x)\,|_{t<0} \equiv 0,\ p(t,x)\,|_{t<0} \equiv 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $p^0(t, x)$ – усредненное акустическое давление; $\boldsymbol{K}(t)$ – некоторая матрица, элементы которой выражаются через решения краевых задач, заданных на ячейке периодичности Y, для системы типа Стокса с периодическими условиями, знаком * обозначена свертка матричной функции $G_1(t)$ и вектор-функции $g_2(t)$ по переменной t:

$$G_1(t) * g_2(t) = \int_0^t G_1(t-\tau) g_2(\tau) d\tau.$$

В работе изучается случай, когда эту матрицу можно представить в виде произведения единичной матрицы E и ряда из убывающих экспонент:

$$\boldsymbol{K}(t) = \boldsymbol{E}\sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{-\lambda_i t}, \tag{2.2}$$

где c_i, λ_i – некоторые положительные постоянные, такие, что

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots,\ u\ \sum_{i=1}^{\infty} c_i < +\infty.$$

При этом для предельных функций перемещения $\boldsymbol{u}^0\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$ и скорости $\boldsymbol{v}^0\left(t, x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$, имеющих значения в $\left(H^1\left(\Omega, (H^1_{per}(Y)\right)^3\right)^3$, справедливы равенства:

$$\boldsymbol{v}^0(t, x, \xi) = \frac{\partial \boldsymbol{u}^0(t, x, \xi)}{\partial t}, \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{v}^0(t, x, \xi)_Y = \int_0^t \boldsymbol{K}(t-s)\left(\boldsymbol{f}(s,x) - \nabla p^0(s,x)\right) ds, \tag{2.4}$$

где

$$g(\xi)_Y = \frac{1}{|Y|}\int_Y g(\xi) d\xi$$

– среднее по ячейке периодичности Y.

В [6] было показано L_2-сходимость решений исходной задачи (1.1)–(1.3) к решениям усредненной задачи (2.1)–(2.4).

Т е о р е м а 1. Для решений задач (1.1)–(1.3) и (2.1)–(2.4) справедливы равенства:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|\boldsymbol{v}(x;t;\varepsilon) - \boldsymbol{v}^0\left(x; \frac{x}{\varepsilon}; t\right)\right\|_{L_2(\Omega)} = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|\varepsilon\nabla_x \boldsymbol{v}(x;t;\varepsilon) - \nabla_{\frac{x}{\varepsilon}} \boldsymbol{v}^0\left(x; \frac{x}{\varepsilon}; t\right)\right\|_{L_2(\Omega)} = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|p(x;t;\varepsilon) - p^0(x;t)\right\|_{L_2(\Omega)} = 0.$$

3. Невозможность приведения системы в покой за конечное время.

О п р е д е л е н и е 1. Система (2.1)–(2.4) приводима в покой, если для любого начального условия $\boldsymbol{u}^0\,|_{t=0} = \boldsymbol{\varphi}_0(x)$ можно найти функцию управления $\boldsymbol{f}(t, x)$ и время $T > 0$ такое, что $\boldsymbol{f}(t,x) \equiv 0\ \forall t > T$ и соответствующее решение $\boldsymbol{u}^0(t,x)$ задачи (2.1)–(2.4) также тождественно равно нулю для любого $t > T$.

Т е о р е м а 2. Существуют начальные условия $\boldsymbol{\varphi}_0 \in \left(H_0^1(\Omega)\right)^3$, для которых систему (2.1)–(2.4) невозможно привести в покой за конечное время $T > 0$ через управление всей областью Ω.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В доказательстве используются теорема Винера–Пели об образе преобразования Лапласа и оценка типа Ли–Яу для спектра оператора Стокса [7].

Допустим, что для начального условия $\boldsymbol{u}^0 |_{t=0} = \boldsymbol{\varphi}_0(x)$ можно найти функцию управления $\boldsymbol{f}(t,x)$ и время $T > 0$, такое, что $\boldsymbol{f}(t,x) \equiv 0 \forall t > T$ и соответствующее решение $\boldsymbol{u}^0(t,x)$ задачи (2.1)–(2.4) также тождественно равно нулю для любого $t > T$. Применив к уравнениям (2.1)–(2.4) преобразование Лапласа по переменной времени t, получим:

$$\lambda\langle \hat{\boldsymbol{u}}^0 \rangle_Y - \boldsymbol{\varphi}_0(x) = \widehat{\boldsymbol{K}}(\lambda)\left(\widehat{\boldsymbol{f}} - \nabla \hat{p}^0\right),$$

где вектор-функции $\hat{\boldsymbol{u}}^0(\lambda,x,\xi)$, $\widehat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{x})$ – преобразования Лапласа вектор-функций $\boldsymbol{u}^0(t,x,\xi), \boldsymbol{f}(t,x)$ соответственно, $\hat{p}^0(\lambda,x)$–преобразование Лапласа для функции $p^0(t,x)$. Из (2.2) следует, что преобразование Лапласа для матрицы $\boldsymbol{K}(t)$ имеет следующий вид:

$$\widehat{\boldsymbol{K}}(\lambda) = \boldsymbol{E}\sum\nolimits_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{\lambda + \lambda_i}. \tag{3.1}$$

Здесь положительные числа λ_i совпадают с собственными значениями оператора Стокса. Аналогично утверждениям из работы [7] можно доказать справедливость следующей леммы.

Л е м м а. Каждое собственное значение оператора Стокса в трехмерной периодической области Ω удовлетворяет неравенству:

$$\alpha_1 k^{\frac{2}{3}} \le \lambda_k \le \alpha_2 k^{\frac{2}{3}}. \tag{3.2}$$

Если система управляема в покой, то по теореме Винера–Пэли все компоненты вектор-функций $\hat{\boldsymbol{u}}^0(\lambda,x,\xi)$, $\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{x})$, $\nabla\hat{p}^0$ должны быть целыми функциями экспоненциального типа, как преобразования Лапласа финитных по t функций. Из равенства (3.1) получим, что

$$\lambda\langle \hat{\boldsymbol{u}}^0 \rangle_Y = \varphi_0(x) + \sum\nolimits_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{\lambda + \lambda_i}\left(\hat{\boldsymbol{f}} - \nabla\hat{p}^0\right).$$

Пусть $\boldsymbol{\varphi}_0(x) = a_1\boldsymbol{e}_1$, где a_1 – ненулевая постоянная, $\boldsymbol{e}_1$-базисный вектор. Тогда для первой компоненты получаем равенство:

$$\lambda\langle \hat{\boldsymbol{u}}^0 \rangle Y = a_1 + \sum\nolimits_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{\lambda + \lambda_i}\left(\hat{f}_1 - \frac{\partial \hat{p}^0}{\partial x_1}\right).$$

Так как $\hat{u}_1{}^0(\lambda)$, $\hat{f}_1(\lambda) - \frac{\partial \hat{p}^0}{\partial x_1}(\lambda)$ – целые функции, то нули функции $\hat{f}_1 - \frac{\partial \hat{p}^0}{\partial x_1}$ должны совпадать с $-\lambda_i, i = 1,2,\ldots$

О п р е д е л е н и е 2. Показателем сходимости последовательности комплексных чисел $\{z_k\}$ называется число [8]

$$\tau(\{z_k\}) = \inf\left\{\alpha > 0 : \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_k|^{\alpha}} < +\infty\right\}.$$

Из (3.2) следует, что $\tau(\{\lambda_k\}) > 1$. По определению из работы [8] порядком роста целой функции $\varphi(\lambda)$ называется число

$$\rho = \inf\left\{\mu > 0 \colon \max_{|\lambda|=r} |\varphi(\lambda)| < e^{r^{\mu}}\right\}.$$

Очевидно, что для целой функции экспоненциального типа порядок роста $\rho = 1$. В работе [8] доказано, что показатель сходимости последовательности всех нулей целой функции не превосходит ее порядка роста $(\tau \le \rho)$. Тогда для целой функции $\hat{f}_1 - \frac{\partial \hat{p}^0}{\partial x_1}$ получаем противоречие, так как последовательность его корней $\{-\lambda_i\}$ имеет показатель сходимости больше единицы. Теорема 2 доказана.

Заключение. Полученный результат показывает, что ряд механических моделей, которые описываются уравнениями и системами интегродифференциальных уравнений, обладают принципиально иными свойствами для задач управления. Так, рассмотренная в работе задача остановки колебаний распределенной ограниченной силой, приложенной к системе, оказывается неразрешимой, в отличие от задач управления классическими системами, задаваемыми дифференциальными уравнениями [4]. Интегродифференциальные системы требуют иных подходов для задач управления, чем дифференциальные системы, — это большое новое поле для исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
2. *Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А., Шамаев А.С.* Усреднение. Методы и некоторые приложения. Новосибирск: Изд-во “Тамара Рожковская”, 2007.
3. *Nguetseng G.* Asymptotic Analysis for a Staff Variational Problem Arising in Mathematics // SIAMJ. Math. Anal. 1990. V. 21. № 6. P. 1396–1414.
4. *Черноусько Ф.Л.* Ограниченные управления в системах с распределенными параметрами // ПММ. 1992 Т. 56. Вып. 2. С. 179–191.
5. *Vlasov V.V., Gavrikov A.A., Ivanov S.A., Knyazkov D.Yu., Samarin V.A., Shamaev A.S.* Spectral Properties of Combined Media // Mathematical Sciences. 2010. V. 164. № 6. P. 948–963.
6. *Гавриков А.А., Шамаев А.С.* Некоторые вопросы акустики эмульсий // ДАН. 2010. Т. 434. № 1. С. 42–46.
7. *Ильин А.А.* О спектре оператора Стокса // Функц. анализ и его приложения.2009. Т. 43. Вып. 4. С. 14–25.
8. *Седлецкий А.М.* Целые функции в анализе. https://math.msu.ru/sites/default/files/entire_functions.pdf